YVES ANDRÉ

Spécialisation dans les disques singuliers réguliers

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 13 (1985-1986), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1985-1986__13__1_0>

SPECIALISATION DANS LES DISQUES SINGULIERS REGULIERS

Yves André

1. INTRODUCTION.

On se propose de généraliser dans deux directions un résultat de G. Christol [C1] sur le principe de transfert dans les disques singuliers réguliers des systèmes différentiels p-adiques ; ce théorème affirme que si le système est entièrement soluble dans le disque générique $D(t,1)$, si le disque $D(0,1)$ ne contient qu'une seule singularité a du système qui est régulière, et si les différences des exposants en a ne sont pas des nombres de Liouville p-adiques au sens faible (voir ci-dessous), alors la partie uniforme de la solution complète en a est analytique dans $D(a,1)$. On va généraliser d'une part en remplaçant $D(t,1)$ par $D(t,R)$, d'autre part en n'excluant que les nombres de Liouville au sens fort. On utilise comme dans [C1] les structures de Frobenius faibles mais d'une manière différente ; voici les énoncés précis.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, complet pour une valeur absolue $|\ |$ de caractéristique résiduelle $p > 0$, et soit t un "point générique". On rappelle que $x \in k$ est un nombre de Liouville au sens faible (resp. fort) s'il existe un réel $r < 1$ tel que (resp. si pour tout réel $r > 0$) l'inéquation $|x-n| < r^{\max(-n,n)}$ admet une infinité de solutions $n \in \mathbb{Z}$.

On pose $\partial = x\, d/dx$. Soit G une matrice μ-μ dont les composantes sont des éléments analytiques sans pôle dans

$D(0,1) = \{x \in k\ /\ |x| < 1\}$.

On sait qu'il existe une matrice

$Y \in GL_\mu(k((x)))$

et une matrice constante C telles que

$\partial\, (Yx^C) = G(Yx^C)$.

Résultat 1. - Si les différences des valeurs propres de $G(0)$ ne sont pas des nombres de Liouville au sens fort, associons-leur un réel $r > 0$ comme ci-dessus. Supposons qu'il existe une matrice U inversible dont les composantes sont des fonctions analytiques dans $D(t,1)$, et telle que $\partial U = G\,U$. Alors les composantes de Y sont des fonctions analytiques dans $D(0,r\mu^2)\setminus 0$, et les valeurs propres de $G(0)$ appartiennent à $\mathbb{Z}_p$.

On trouve une réciproque partielle au théorème 8.5 de [D-R].

Résultat 2. - On suppose que les valeurs propres de $G(0)$ appartiennent à $\mathbb{Z}_p$, et que leurs différences ne sont pas des nombres de Liouville au sens faible. On suppose aussi qu'il existe un entier naturel n et une matrice inversible U dont les composantes sont des fonctions analytiques dans $D(t,R)$, avec

$|p|^{1/p^n} < R \leq 1$.

Alors les composantes de Y sont des fonctions analytiques dans $D(0,r)$ avec

$r = R\ |p|^{\mu^2/p^n(p-1)}$.

Ces résultats ont une démonstration simultanée, voir le § 5.

Enfin au dernier paragraphe, on donne une application du résultat 2 à la théorie des opérateurs différentiels fuchsiens de type arithmétique introduits par E. Bombieri dans le contexte des G-fonctions [B].

Je remercie particulièrement G. Christol de l'intérêt qu'il a manifesté pour cette étude et de l'aide qu'il ma apportée à composer la preuve cruciale de la proposition 1 ci-dessous, notamment en me signalant les lemmes 1 et 2.

2. RAPPEL SUR LA THEORIE FORMELLE DES SINGULARITES REGULIERES.

2.1. Dans ce paragraphe, k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit $G \in M_\mu(k[[x]])$. Il existe (cf. [G] ch. 14) des matrices $Y \in GL_\mu(k((x)))$ et $C \in M(k)$ telles que $Y(0) = I$ et

(1) $\partial Y = GY - YC$. Cette équation signifie que $X = Yx^C$ est la solution formelle en 0 du système différentiel :

(2) $\partial X = GX$.

En général on ne peut choisir $C = G(0)$, comme le montre l'exemple de Gantmacher (loc. cit.) $G = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mais la condition :

(3) Les différences des valeurs propres de $G(0)$ ne sont pas des entiers non nuls, entraîne que $C = G(0)$ convient, et une matrice $Y_G \in GL_\mu(k[[x]])$ vérifiant (1) et $Y_G(0) = I$ est alors unique.

2.2. Soient $Y \in GL_\mu(k((x)))$ et $C \in M_\mu(k(x))$ d'autres matrices vérifiant (1). Alors en posant

$$V = Y^{-1}Y ,$$

on obtient le système différentiel.

$$(4)\quad \partial V = G(0)\, V - VC ,$$

d'où il suit que $V \in M_\mu(k[x,1/x])$ et les systèmes de valeurs propres de $G(0)$ et C sont congrus mod. $\mathbb{Z}$.

2.3. On définit par récurrence une suite de matrices $G^{(n)}$:

$$(5)\quad G^{(0)} = I \ ,\ G^{(n+1)} = \partial G^{(n)} + G^{(n)}\,(G-nI) \ .$$

On obtient

$$(6)\quad x^n\, d^n/dx^n\, X = G^{(n)}\, X \ .$$

De plus

$$(7)\quad \frac{1}{n!}\, G^{(n)}(0) = \binom{G(0)}{n}.$$

Sous l'hypothèse (3) on pose

$$Y_G = \sum Y_m\, x^m$$

et

$$G = \sum G_m\, x^m \ .$$

Si de plus $G(0)$ est triangulaire, on a la formule (cf.[C2] p. 194) :

$$(8)\quad (Y_n)_{ij} = (G(0)_{ij}+n-G(0)_{ij})^{-1}\Big[\Big(\sum_{0}^{n-1} G_{n-m}Y_m\Big)_{ij} + \sum_{\ell<j} (Y_n)_{i\ell}G(0)_{\ell j} - \sum_{k>i} G(0)_{ik}(Y_n)_{kj}\Big] \ ,$$

qui permet de déterminer Y_G par récurrence.

2.4. Changement de base.

L'opérateur différentiel $\partial - G$ agissant sur le $k((x))$-espace $k((x))^\mu$ avec la base canonique définit un $k((x))$-module à connexion intégrable, que nous notons M. Tout changement de base dans M peut être décrit comme suit : soit $H \in GL_\mu(k((x)))$;

si X est annulé par $\partial - G$ alors HX est annulé par $\partial - H[G]$, où

$$H[G] = \partial H . H^{-1} + HGH^{-1} .$$

Si de plus $H[G] \in GL_\mu(k[[x]])$, alors les composantes de

$$S_i = Y^{-1}_{H[G]} H Y_G$$

sont dans $k[x,1/x]$ et pour tout entier n le coefficient de S n'est pas nul si et seulement si n est valeur propre de l'application linéaire

$U \to H[G](0)\, U - U\, G(0)$ (cf [C1] 4.1.).

Voici maintenant quelques changements de base utiles.

i) <u>"cisaillements"</u>, cf. [G] ch. 14 ou [C] lemme 4.3.

Soit $(e_1, \ldots, e_\mu)$ le système des valeurs propres de $G(0)$. Pour tout μ-uplet d'entiers $(n_1, \ldots, n_\mu)$, on peut trouver des matrices $C_i \in GL_\mu(k)$ et des matrices Δ_i dont les seules composantes non nulles sont diagonales et appartiennent à $(-1,0,1)$, telles que $H[G](0)$ est triangulaire (supérieure) et ses éléments diagonaux sont $(e_1+n_1, \ldots, e_\mu + n_\mu)$, en posant $H = \prod x^{\Delta_i} C_i$.

ii) <u>réduction à une équation différentielle</u>.

D'après le lemme du vecteur cyclique, il existe une ligne de polynômes $q \in k[x]^\mu$, telle que

$$H = \left(\sum_{h=o}^{m} \frac{1}{h!} \frac{d^h q}{dx^h} \circ G^{(m-h)} \right)_m$$

$$H \in GL_\mu(k[[x]])$$

et $H[G]$ soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & x & \cdots & 0 \\ & & \ddots & x \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

associée à une équation différentielle.

iii) élimination des singularités apparentes, cf. [C1] 4.2 ou [C2] 5.4.3.

On suppose que k est complet pour une valeur absolue $|\ |$. Soient $a \in k$ une singularité apparente, et $\mathscr{A}$ la classe des fonctions analytiques dans un voisinage fixé de a . On suppose que G appartient à $M_\mu(\mathbb{Q}([1/x-a])$. Alors il existe

$(\lambda_{1j},\ldots,\lambda_{\mu j})$ appartenant à k^{μ} avec $|\lambda_{ij}| \leq 1$, $\operatorname{Max}_{ij} |\lambda_{ij}| = |\lambda_{i.j}| = 1$, et la propriété suivante : en posant

$$H = \prod_j \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \frac{\lambda_{1j}}{(x-a)} & \cdots & 1\ \frac{\lambda_{i.j}}{(x-a)} & \cdots & \frac{\lambda_{\mu j}}{(x-a)} \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } i_{gi}$$

alors $H[G] \in M_{\mu}(\mathscr{A})$.

De plus, quitte à multiplier H par une matrice constante inversible C , on peut mettre $H[G](0)$ sous forme triangulaire et, si la valeur absolue est non archimédienne, on peut choisir C telle que

$\operatorname{Max}|C_{ij}| \leq 1$, $\operatorname{Max}|(C^{-1})_{ij}| \leq 1$ (cf. [C2]6.3.8.).

3. FROBENIUS.

3.1. Dorénavant nous supposons que k est complet pour une valeur absolue non archimédienne de caractéristique résiduelle $p > 0$. Le corps E sera le complété du corps $k(x)$ pour la norme de Gauss notée $|\ |$. On note E_a le sous-anneau complet de E formé des éléments analytiques sans pôle dans le disque $D(a,1)$ et on note $\mathring{E}_a$ son corps de fractions ; pour $Y \in M_{\mu}(E)$, on pose $\|Y\| = \operatorname{Max} |Y_{ij}|$. On note t un point "générique" à la distance 1 de k dans une extension complète algébriquement close Ω de k linéairement disjointe de $k(x)$; les disques $D(t,r)$ sont ceux de Ω . On note $\mathscr{A}(t,r)$ l'anneau des fonctions analytiques dans le disque $D(t,r)$.

On note enfin σ un automorphisme de Frobenius de Ω tel que t soit un point de Teichmüller ($t^{\sigma} = t^{p}$, cf [C2] 1.10.).

3.2. Le sous-anneau E_a de $k[[x-a]]$ est stable sous l'endomorphisme de Frobenius

$\Phi_a : f(x-a) \to f^{\sigma}((x-a)^p)$,

qui s'étend en un endomorphisme de E . L'extension $E / \Phi_a(E)$ admet pour base 1, $x-a ,\ldots,(x-a)^p$. On note $F \to F^{\Phi_a}$ l'action naturelle de Φ_a sur $M_{\mu}(E)$.

Soit $\mathscr{N}$ le E-module à connexion représenté par

$(x-a^{\sigma})\, d/dx - F$;

alors on note $\Phi_a(\mathscr{N})$ le E-module à connexion représenté par

$(x-a)\, d/dx - pF^{\Phi_a}$ dans la même base.

LEMME 1 ([C2] 4.7.3).

Si $\mathcal{N}$ est complètement soluble dans $\mathscr{A}(t,R)$ et si $|a| < R/|p|$, alors $\phi_a(\mathcal{N})$ est isomorphe à $\phi_0(\mathcal{N})$.

3.3. Ici, $a = 0$. On écrit

$$F = \sum_{n \geq 0} F_n x^n \in M_\mu(k)[[x]].$$

Pour $0 \leq i < p$, on pose

$$U_i \circ F = \sum_{n \geq 0} F_{i+np}^{\sigma-1} x^n ,$$

et on note $U(\mathcal{N})$ le E-module à connexion représenté par

$$\partial - \begin{pmatrix} U_0 \circ F & xU_{p-1} \circ F \dots & x\, U_1 \circ F \\ U_1 \circ F & U_0 \circ F \dots & x\, U_2 \circ F \\ \vdots & & \\ U_{p-1} \circ F & \dots & U_0 \circ F \end{pmatrix}$$

et puis, pour $\alpha \in \mathbb{Q}$, on note $[\alpha]$ le E-module à connexion représenté par $\partial - \alpha$.

Lemme 2 ([C0] § 3).

Si $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ alors $U(\mathcal{M}) \simeq U(\mathcal{N})$; d'autre part il y a un isomorphisme canonique

$$U(\Phi_0(\mathcal{N})) \simeq \bigoplus_{i=0}^{p-1} ([i/p] \otimes \mathcal{N}) .$$

3.4. Inversion.

On reprend les notations du § 2 tout en gardant les hypothèses du § 3. On suppose de plus :

(9) $G \in M_\mu(E_0)$

(10) $\lim_{n \to \infty} \| G^{(n)} \| = 0$.

Alors la matrice

$$H_i = 1/p \sum_{n \to 0} G^{(n)} \sum_{\zeta^p = 1} \zeta^{-i} (\zeta - 1)^n / n!) \in M_\mu(E_0)$$

puisque

$$1/p \sum_{\zeta^p = 1} \zeta^{-i} (\zeta - 1)^n / n! \in \mathbb{Z}_p$$ pour tout i. On suppose de plus que :

(11) Les valeurs propres de $G(0)$ appartiennent à $p\mathbb{Z}_p$ et vérifient la condition (3) .

Une légère modification du calcul fait dans [C2] 6.4.4. (pour $i = 0$) donne l'équation suivante à lire dans $M_\mu(k[[x]])$:

(12) $x^{-i} H_i Y_G = (U_i \circ Y_G)^{\Phi_o}$.

On en déduit que $H_o(0) = I$, donc $H_o \in GL_\mu(E_o)$.

Remarquons que l'on a

$Y_G = \sum_i H_i Y_G$,

qui correspond à la décomposition de $E/\Phi_o(E)$ dans la base $1 , x ,\dots, x^{p-1}$.

En posant

$\hat{H}_i = H_o + x^{p-i} H_i$

et

$\hat{U}_i.F = U_o . F + x U_i . F$,

on a

(13) $\hat{H}_i Y_G = (\hat{U}_i . Y_G)^{\Phi_o}$.

Ainsi $\hat{H}_i(0) = I$ et $\hat{H}_i \in GL_\mu(\mathring{E}_o)$.

On pose ensuite

$F = (\partial(U_o . Y_G) + 1/\rho(U_o . Y_G) G(0)) (U_o . Y_G)^{-1}$

et $\hat{F}_i = (\partial(\hat{U}_i . Y_G) + 1/\rho(\hat{U}_i . Y_G) G(0))(\hat{U}_i . Y_G)^{-1}$

si bien que l'on a

(14) $pF^{\Phi_o} = H_o[G]$, $p\hat{F}_i^{\Phi_o} = \hat{H}_i[G]$

(15) $Y_F = U_o . Y_G$, $Y_{\hat{F}_i} = \hat{U}_i . Y_G$ et $F(0) = \hat{F}_i(0) = (1/p) G(0)$.

En décomposant sur la base $1,x,\dots, x^{p-1}$ de $\mathring{E}_{o/\Phi_o(\mathring{E}_o)}$ on montre à partir de (14) que F , $\hat{F}_i \in M_\mu(\mathring{E}_o)$.

3.5. Remarque. - Tout ceci pourrait s'écrire , mutatis mutandis, en substituant a , $|a| \leq 1$, au point 0 , Φ_a à Φ_o , etc..

3.6. On note $\mathscr{M}$ (resp. $\mathscr{N}, \hat{\mathscr{N}}_i$) le E-module à connexion représenté dans une base fixée par ∂-G (resp. ∂-F , ∂-$\hat{F}_i$) ; on a donc $\Phi_o(\mathscr{N}) \simeq \Phi_o(\hat{\mathscr{N}}_i) \simeq \mathscr{M}$.

Proposition 1. On se place sous les hypothèses (9) (10) (11). Soit $R > 0$ tel que soit entièrement soluble dans $\mathscr{A}(t,R)$. Si les composantes de la solution formelle en 0 de (2) ne sont pas toutes méromorphes au voisinage de 0, on suppose en outre que $R > |p|^{1/p}$. Alors les modules à connexion $\mathcal{N}$ et $\hat{\mathcal{N}}_i$ sont entièrement solubles dans (t,R^p).

Preuve :

(i) pour alléger la rédaction on traite le cas de $\mathcal{N}$; celui de $\hat{\mathcal{N}}_i$ se traite de la même manière.

(ii) On commence par le cas où la solution formelle X_0 de (2) est méromorphe au voisinage de 0. Par conséquent $G(0)$ est diagonale à coefficients entiers, et par des cisaillements (cf. 2.4. (i).) on se ramène au cas où $G(0) = 0$. Par construction de F, on a alors $X_F = U_0 \cdot X_G$, $F(0) = 0$, ce qui montre que 0 est alors un point ordinaire aussi pour $\partial - F$. On peut donc poser

$$t^{-n}/_{n!}\; F^{(n)} = \sum_{m\geq 0} F_m^{(n)} t^m \;,\quad t^{-n}/_{n!}\; G^{(n)} = \sum_{m\geq 0} G_m^{(n)}\, t^m \quad \text{avec}\quad F_m^{(n)}, G_m^{(n)} \in M_\mu(k)\;.$$

Développons ensuite $(x^p - t^p)^n = \sum_{j=0}^{np} \alpha_{np,j} (x-t)^{np-\ell}\, t^\ell$,

avec $\alpha_{np,j} \in \mathbb{Z}$, $\alpha_{np,0} = 1$ et $\alpha_{ij} = 1$ si $i \notin p\mathbb{Z}$.

Soit V (resp. W) une matrice à composantes analytiques dans un voisinage du point générique t vérifiant $\partial V = pF^{\Phi_0} V$, $V(t) = I$ (resp. $\partial W = FW$, $W(t) = I$). D'après (14), on a $W^{\Phi_0} = V$, ce qui se traduit par l'égalité :

$$(*) \qquad \sum_{n\geq 0} 1/n!\; t^{-pn} (F^{(n)})^{\Phi_0} (x^p - t^p)^n = \sum_{n\geq 0} 1/n!\; t^{-n}\, G^{(n)} (x-t)^n\;.$$

On pose alors $H_m^{(n)} = (F_{m/p}^{(n/p)})^\sigma$ si m et n sont divisibles par p , alors (*) donne

$$\sum_{n\geq 0} \sum_{m\geq 0} \sum_{0\leq \ell\leq n} H_m^{(n)}\, \alpha_{n,\ell}\, t^{m+\ell} (x-t)^{n-\ell} = \sum_{j\geq 0} \sum_{i\geq 0} G_i^{(j)}\, t^i (x-t)^j\;.$$

En notant que Ω est linéairement disjoint de $k(x)$ sur k , on parvient au système triangulaire supérieur strict :

$$G^{(j)}_{M_{p-j}} = \sum_{j\leq n\leq Mp} \alpha_{n,n-j}\, H^{(n)}_{M_{p-n}} \qquad j = 0,\ldots, M_p\;.$$

Ce système s'inverse en donnant

$$(F_m^{(n)})^\sigma = \sum_{0\leq j\leq np} \beta_{m,n,j}\, G^{(j)}_{(m+n)p-j} \;,\quad \beta_{m,n,j} \in \mathbb{Z}\;,$$

d'où l'on tire

$$\|F^{(n)}/n!\| \leqq \sup_{j \leqq np} \|G^{(j)}/j!\| .$$

Il est bien connu que cette inégalité implique que le rayon de convergence de W est au moins la puissance p-ième de celui de V.

(iii) Dans le cas général, on choisit un point de Teichmüller a de valeur absolue 1 tel que le disque $D(a,1)$ soit ordinaire pour $\mathscr{M}$ (prolongement analytique de G "à la Krasner"). Le point (ii) reste valable en plaçant l'origine en a, c'est-à-dire en travaillant avec Φ_a au lieu de Φ_o cf. 3.5. . La technique décrite en 3.4. fournit un E-module à connexion $\mathscr{N}_a$ tel que $\Phi_a(\mathscr{N}_a) \simeq \mathscr{M}$. D'après (ii), $\mathscr{N}_a$ est entièrement soluble dans $\alpha(t,R^p)$ et par hypothèse $R^p > |p|$. Le lemme 1 permet de conclure que :

$$\Phi_a(\mathscr{N}_a) \simeq \Phi_o(\mathscr{N}_a) \simeq \Phi_o(\mathscr{N}) \simeq \mathscr{M} .$$

Grâce au lemme 2, on obtient :

$$(**) \qquad \bigoplus_{i=o}^{p-1} [i/p] \otimes \mathscr{N} \simeq \bigoplus_{i=o}^{p-1} [i/p] \otimes \mathscr{N}_a .$$

Rappelons que $\mathscr{N}_a$ est, entièrement soluble dans $\mathscr{A}(t,|p|)$ d'une part. D'autre part, les exposants (mod. $\mathbb{Z}$) de $\bigoplus_{i \neq o} [i/p] \otimes \mathscr{N}$ sont de valeur absolue $1/p$; en effet les exposants de $\mathscr{N}$ en 0 sont dans $\mathbb{Z}_p$. Il n'est pas difficile alors de conclure de (**) que $\mathscr{N}_a \simeq \mathscr{N}$, ce qui établit la proposition.

3.7. <u>Remarques</u>. 1) L'égalité formelle (*) n'implique pas automatiquement que $r(W) \geqq r(V)^p$, comme le montre le contre exemple suivant :

$$V = x/t \ , \ W = (1 + (xP - t^p)/t^p)^{1/p} .$$

2) Il est plausible que l'hypothèse $R > |p|^{1/p}$ (au lieu de $R > |p|^{1/p-1}$) soit superflue.

4. <u>NOMBRES DE LIOUVILLE</u> (cf. [C2] 6.3.4.).

4.1. <u>Lemme 3</u> ([C2] 6.3.6. ou [C1] 3.1.). Soit $x \in k \setminus \mathbb{Z}$. Pour tout réel $r < 1$ tel que l'inéquation

$$|x-n| < r^{\max(-n,n)}$$

n'ait qu'un nombre fini de solutions, il existe un réel $c > 0$ pour lequel on a

$\prod_{m=o}^{n} \mathrm{Min}(1,|x-m|) \geq c\, r^n\, |p|^{n/p-1}$ pour tout n positif.

4.2. Par définition un tel nombre réel r n'existe que si x n'est pas un nombre de Liouville au sens fort. Dans ce cas, r est remplacé par r^p si x est remplacé par tout élément du sous-ensemble $x/p + \mathbb{Q}$ de k .

4.3. On rappelle qu'un nombre de Liouville (au sens faible) n'est pas algébrique sur $\mathbb{Q}$, et appartient à $\mathbb{Z}_p$.

4.4. Le lemme qui suit est un léger raffinement de [C2] 6.3.7.

Lemme 4. - Supposons que $G(0)$ soit une matrice triangulaire supérieure. Si les différences de ses valeurs propres ne sont ni des entiers non nuls ni des nombres de Liouville au sens fort, alors il existe un réel $r > 0$ tel que le minimum $r(Y_o)$ des rayons de convergence des composantes de Y_o vérifie

$$r(Y_G) \geq \mathrm{Min}(1,\|G|\|^{-1}).\,\mathrm{Min}(1,\|G(0)\|^{-2\mu}).|p|^{\mu^2/p-1}\ .\ r^{\mu^2}\ .$$

De plus si les différences des valeurs propres de $G(0)$ ne sont pas des nombres de Liouville au sens faible, on peut prendre $r = 1$.

Preuve : On contemple la formule (8), qui établit une relation de récurrence entre $(Y_n)_{ij}$, et les Y_m et les $(Y_n)_{k\ell}$ où $m \leq n$ et où $(k,1)$ décrit les points entiers d'un rectangle dont (i,j) est le sommet supérieur droit. La longueur d'un "chemin de récurrence" r liant (i,j) au sommet opposé est au plus 2μ . On obtient:

$$\|(Y_n)_{ij}\| \leq (\mathop{\mathrm{Max}}_{\Upsilon} \prod_{(k,\ell)\ GY} |G(0)_{hk} + n - G(0)_{\ell\ell}|^{-1})\|\sum_{n=o}^{n-1} G_{n-m}\, Y_m\|\, \mathrm{Max}(1,\|G(0)^{2\mu})$$

d'où

$$\|Y_n\| \leq \prod_{k=1}^{\mu} \prod_{\ell=1}^{\mu} \mathrm{Max}(1,|G(0)_{kh} + n - G(0)_{\ell\ell}|^{-1})\ \mathrm{Max}(1,\|G\|)\ \mathop{\mathrm{Max}}_{m\leq n}\|Y_m\| \mathrm{Max}(1,\|G(0)\|^{2\mu}),$$

et on conclut par le lemme 3 et la remarque 4.2 ; r ne dépend que de $G(0)$.

5. La spécialisation.

5.1. Soit $G \in M_\mu(E_o)$; on note $e_1,\ldots,e_\mu$ les valeurs propres de $G(0)$, qu'on suppose appartenir à $\mathbb{Z}_p$. On considère un réel R , $0 < R \leq 1$ tel que le système $\partial X = GX$ soit entièrement soluble dans $\mathscr{A}(t,R)$.

Les énoncés de l'introduction sont des corollaires du résultat suivant.

Théorème. - Pour tout réel $r < 1$ tel que chacune des inéquations

$|e_i - n| < r^{\max(-n,n)}$, $i = 1,\ldots,\mu$,

n'ait qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{Z}$, et pour toute matrice Y vérifiant un système différentiel du type (1) , on a

$r(Y) > R.|p|^{\mu^2/p-1} . r^{\mu^2}$.

Si de plus $R > |p|^{1/p^n}$ pour un entier naturel n , alors

$r(Y) \geqq R.|p|^{\mu^2/(p-1)p^n} . r^{\mu^2}$.

5.2. Remarque. - La partie i) $\Rightarrow$ ii) du "résultat 1" de l'introduction s'en déduit immédiatement, puisque sous ses hypothèses, n peut être choisi arbitrairement grand.

5.3. Preuve du théorème : elle se fait en plusieurs étapes.

(i) On effectue des cisaillements de manière à se ramener au cas d'une matrice $G_1(0)$ dont les valeurs propres $f_1 = e_1 + n_1,\ldots, f_\mu = e_\mu + n_\mu$ dans $p\mathbb{Z}_p$. Par un changement de base constant, on n'a alors aucun mal à se ramener au cas où $\|G_1(0)\| \leqq |p|$.

Ces transformations n'affectent ni $r(Y)$ (le minimum des rayons de convergence des composantes de Y), ni R (cf. [C1] 4.1), et on a $G_1(0) \in M_\mu(E_0)$.

(ii) Si $R \leqq |p|^{1/p}$, on transforme le système en une équation différentielle selon 2.4.ii). La matrice de transformation H_2 est dans $GL_\mu(\hat{E}_0) \cap M_\mu(E_0)$ et la matrice transformée $G_2 = H_2[G_1]$ vérifie $\|G_2\| \leqq 1/R$ en vertu du théorème de Dwork-Frobenius [C2] 4.8.1. On élimine les singularités apparentes éventuelles et on réduit $G_1(0)$ à la forme triangulaire selon la procédure décrite en 2.4. iii), et on est ainsi ramené à une matrice $G_3 = H_3[G_2] \in M_\mu(E_0)$, $\|G_3\| \leqq 1/R$, et $r(Y) \geqq r(Y_{G_3})$. On est dans les conditions d'application du lemme 4, qui donne $r(Y) \geqq R|p|^{\mu^2/p-s} r^{\mu^2}$.

(iii) Si $R > |p|^{1/p}$, on applique l'inversion de Frobenius, cf. 3.4.6. On choisit l'indice i de sorte que

$r(\hat{H}_i\ Y_{G_1}) = \mathrm{Min}\ r(\hat{H}_j\ Y_{G_1})$;

comme on a

$Y_{G_1} = \sum H_i\ Y_{G_1}$,

on trouve

$r(Y) \geqq \mathrm{Min}\ (r(x^{p-j}\ H_j\ Y_{G_1})) = \mathrm{Min}\ (r(\hat{H}_j\ Y_{G_1})) = r(\hat{H}_i\ Y_{G_1}) = r(Y_{\hat{F}_i})^{1/p}$

puisque

$$p\hat{F}_i^{\Phi o} = \hat{H}_i[G_1] \in M_\mu(\mathring{E}_o) \quad \text{et} \quad Y_{\hat{F}_i} = \hat{U}_i.G_1 \ .$$

La proposition 1 montre que le système $\partial X = FX$ est entièrement soluble dans $D(t,R^p)$.

D'autre part, puisque $\hat{H}_i \in M_\mu(E_o)$, le système $\partial V = p\hat{F}_i^{\Phi o} V$ n'a de singularités qu'apparentes dans $D(0,1)$. On note V_{a^r} une solution complète de ce système analytique au voisinage de $a^r \in D(0,1)$, et φ_a la fonction $u \to a(1+u.a^{-p})^{1/p}$ qui est analytique dans $D(a,|p|^{p/p-1})$. Alors

$$W_{a^p} = (V_{a^r})^{p-1} \circ \varphi_a(x-a^p)$$

est une solution complète du système $\partial W = \hat{F}_i W$, analytique au voisinage de a^p ; cet argument montre que ce système n'a de singularités qu'apparentes. En éliminant ces singularités éventuelles selon 2.4. iii), on aboutit à une matrice $G_4 = H_4[\hat{F}_i]$ vérifiant les hypothèses initiales (avec R^p au lieu de R) et on peut alors effectuer les opérations (i) et (ii) précédentes sur cette nouvelle matrice, ce qui donne une matrice G_5, avec

$$r(Y_{G_5}) \geqq R^p \ |p|^{\mu^2/p-1} \ r^{\mu^2 p} \ .$$

Le fait que ce soit le même réel r qui intervienne ici découle de la remarque 4.2.

Or

$$r(Y) \geqq r(Y_{\hat{F}_i})^{1/p} = r(Y_{G_5})^{1/p} \ .$$

On obtient ainsi la conclusion du théorème lorsque $n = 0,1$.

(iV) Si $n = 2,3,\ldots$ on itère n fois le pas (iii), ce qui donne la conclusion du théorème dans le cas général.

6. APPLICATION A LA THEORIE DES G-FONCTIONS DE SIEGEL-BOMBIERI.

6.1. On suppose maintenant que les μ^2 composantes d'une matrice A sont des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et on considère l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre $\mathcal{L} = d/dx - A$. Pour chaque nombre premier p on note R_p la borne supérieure des réels r tels que le système différentiel p-adique associé à $\mathcal{L}$ soit entièrement soluble dans $D(t_p,r)$. Dans sa théorie diophantienne des valeurs de G-fonctions [B] , E. Bombieri considère les opérateurs "fuchsiens de type arithmétique", c'est-à-dire tels que

$$\beta(\mathcal{L}) := \sum_p \log^+ 1/R_p < \infty \ , \ (\log^+ = \mathrm{Max}(0,\log)) \ .$$

Cette condition entraîne que $R_p > 1/p^{1/p}$ pour un ensemble de premiers p de densité 1 ce qui entraîne à son tour, en vertu d'un théorème de Katz [B-S], que les singularités de $\mathcal{L}$ sont régulières et leurs exposants sont rationnels. Pour presque tout p on est donc dans la situation où le "résultat 2" s'applique, pour $n=1$. Pour cela, on considère la "partie uniforme" $Y \in GL_\mu(\mathbb{Q}[[x]])$ de la solution au voisinage de 0 comme dans l'introduction. Dans [B] intervient aussi de manière cruciale la quantité

$$\rho(Y) := \sum_p \log^+ 1/r_p(Y) + \mathrm{Log}\ 1/r_\infty(Y) \ .$$

<u>Proposition 2</u>. Si $\mathcal{L}$ est fuchsien de type arithmétique (i-e. $\beta(\mathcal{L}) < \infty$) alors $\rho(Y) < \infty$. Si on suppose pour simplifier que les exposants en 0 sont des entiers, on a plus précisément :

$$\rho(Y) \leq \beta(\mathcal{L}) + (1 + \mathrm{card}(\Delta))h(\Delta) + \mu^2\Big(\sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} + \sum_{p \leq R_p^{-p}} \log p/p-1\Big) \ ,$$

où h est la hauteur logarithmique sur $\mathbb{Q}$ et Δ l'ensemble des singularités non-apparentes à distance finie de $\mathcal{L}$.

Un énoncé analogue est valable sur les corps de nombres, avec de bonnes normalisations des valeurs absolues. On peut montrer d'autre part que dans cette situation, la finitude de $\rho(Y)$ entraîne que les composantes de Y sont des G-fonctions [A].

Ajouté sur épreuves : un développement de ces idées apparaîtra dans "G-functions and Geometry" ed. Vietseg, qui absorbe aussi [A].

Références.

[A] ANDRE Y. - G-functions and differential equations, en préparation.

[B] BOMBIERI E. - On G-functions, Recent progress in analytic number theory, Symp. Durham 1979. 2 (1981) p. 1-67 (Academic Press, London).

[B-S] BOMBIERI E., SPERBER S. - On the p-adic analyticity of solutions of linear differential equations, III. J. of Math. 26 (1981) p. 10-18.

[C0] CHRISTOL G. - Structure de Frobenius faible des équations différentielles p-adiques, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique 1975/76, Secrétariat mathématique, Institut Poincaré.

[C1] CHRISTOL G. - Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers, S.M.F. Astérisque n° 119-120 (1984) p. 151-168.

[C2] CHRISTOL G. - Modules différentiels p-adiques et équations différentielles p-adiques,
Queen's papers in pure and applied Mathematics n° 66 (1983) Kingston Ontario.

[D-R] DWORK B., ROBBA P. - Effective p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations,
Trans. A.M.S. 259 (1980) p. 559-577.

[G] GANTMACHER F. - Théorie des matrices 2. Dunod (1966).

ANDRE Yves
ERA 979 du CNRS
Institut H. Poincaré
11, rue P. et M. Curie
75231 PARIS CEDEX 05.