

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

FRANCESCO BALDASSARRI

Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologie p -adique rigide à coefficients dans un nodule différentiel

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 12, n° 2 (1984-1985), exp. n° 19, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1984-1985__12_2_A2_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPARAISON ENTRE LA COHOMOLOGIE ALGÈBRIQUE
 ET LA COHOMOLOGIE p-ADIQUE RIGIDE
 À COEFFICIENTS DANS UN MODULE DIFFÉRENTIEL

par Francesco BALDASSARRI (*)

0. Introduction. - Je résumerai ici les résultats et les idées des démonstrations contenus dans deux papiers, de parution prochaine, qui portent le même titre que cette conférence.

On se donne une variété algébrique X_0 , irréductible et non singulière, définie sur le corps $K_0 = \bar{\mathbb{Q}}^{\text{alg}}$ des nombres algébriques. On a encore un \mathcal{O}_{X_0} -module localement libre de type fini \mathcal{Y}_0 , muni d'une connexion intégrable :

$$(0.1) \quad \nabla_0 : \mathcal{Y}_0 \longrightarrow \Omega_{X_0/K_0}^1 \otimes \mathcal{Y}_0 .$$

Classiquement on fait correspondre à $(X_0, \mathcal{Y}_0, \nabla_0)$ un triplet d'objets complexes analytiques $(X_{\text{cl}}, \mathcal{Y}_{\text{cl}}, \nabla_{\text{cl}})$ ("cl" signifie "classique") (cf. [11], [4]).

En analyse p-adique, ou mieux en géométrie rigide p-adique, il existe encore un correspondant naturel de $(X_0, \mathcal{Y}_0, \nabla_0)$; on le dénotera $(X_{\text{rig}}, \mathcal{Y}_{\text{rig}}, \nabla_{\text{rig}})$. Ici, par exemple, X_{rig} est une variété rigide analytique, irréductible et lisse sur $K =$ un corps p-adique complet et algébriquement clos, choisi à l'avance ([9], [2]).

On peut donc considérer les complexes de De Rham correspondant à ces modules à connexion :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\mathcal{R}(X_0/K_0 ; (\mathcal{Y}_0, \nabla_0)) &= \mathcal{D}\mathcal{R}(\mathcal{Y}_0) \\ &= 0 \longrightarrow \mathcal{Y}_0 \xrightarrow{\nabla_0} \Omega_{X_0/K_0}^1 \otimes \mathcal{Y}_0 \longrightarrow \Omega_{X_0/K_0}^2 \otimes \mathcal{Y}_0 \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

$$(0.2) \quad \mathcal{D}\mathcal{R}(X_{\text{cl}}/\mathbb{C} ; (\mathcal{Y}_{\text{cl}}, \nabla_{\text{cl}})) = \mathcal{D}\mathcal{R}(\mathcal{Y}_{\text{cl}})$$

$$= 0 \longrightarrow \mathcal{Y}_{\text{cl}} \xrightarrow{\nabla_{\text{cl}}} \Omega_{X_{\text{cl}}/\mathbb{C}}^1 \otimes \mathcal{Y}_{\text{cl}} \longrightarrow \Omega_{X_{\text{cl}}/\mathbb{C}}^2 \otimes \mathcal{Y}_{\text{cl}} \longrightarrow \dots$$

$$\mathcal{D}\mathcal{R}(X_{\text{rig}}/K ; (\mathcal{Y}_{\text{rig}}, \nabla_{\text{rig}})) = \mathcal{D}\mathcal{R}(\mathcal{Y}_{\text{rig}})$$

$$= 0 \longrightarrow \mathcal{Y}_{\text{rig}} \xrightarrow{\nabla_{\text{rig}}} \Omega_{X_{\text{rig}}/K}^1 \otimes \mathcal{Y}_{\text{rig}} \longrightarrow \Omega_{X_{\text{rig}}/K}^2 \otimes \mathcal{Y}_{\text{rig}} \longrightarrow \dots$$

et leurs groupes d'hypercohomologie ("cohomologie de De Rham") :

(*) Francesco BALDASSARRI, Seminario Matematico, Università di Padova, 7 Via Belzoni, I-35131 PADOVA (Italie).

$$H_{DR}^q(X_0/K_0; (\mathcal{Y}_0, \mathcal{V}_0)) =_{\text{d\u00e9f}} \underline{H}^q(X_0, \mathcal{O}\mathcal{R}(\mathcal{Y}_0))$$

$$(0.3) \quad H_{DR}^q(X_{cl}/\underline{\mathbb{C}}; (\mathcal{Y}_{cl}, \mathcal{V}_{cl})) =_{\text{d\u00e9f}} \underline{H}^q(X_{cl}, \mathcal{O}\mathcal{R}(\mathcal{Y}_{cl}))$$

$$H_{DR}^q(X_{rig}/K; (\mathcal{Y}_{rig}, \mathcal{V}_{rig})) =_{\text{d\u00e9f}} \underline{H}^q(X_{rig}, \mathcal{O}\mathcal{R}(\mathcal{Y}_{rig})) .$$

Le th\u00e9or\u00e8me de comparaison de Grothendieck-Deligne affirme que, si $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{V}_0)$ est r\u00e9gulier \u00e0 l'infini, les homomorphismes naturels

$$(0.4) \quad \underline{\mathbb{C}} \otimes_{K_0} H_{DR}^q(X_0/K_0; (\mathcal{Y}_0, \mathcal{V}_0)) \longrightarrow H_{DR}^q(X_{cl}/\underline{\mathbb{C}}; (\mathcal{Y}_{cl}, \mathcal{V}_{cl}))$$

sont des isomorphismes pour tout $q \geq 0$ ([6], et [4], Chap. II, \u00a7 6).

Le th\u00e9or\u00e8me de comparaison de Kiehl [8], affirme d'autre part que, si

$$(\mathcal{Y}_0, \mathcal{V}_0) = (\mathcal{O}_{X_0}, d_{X_0/K_0}),$$

on a des isomorphismes canoniques

$$(0.5) \quad K \otimes_{K_0} H_{DR}^q(X_0/K_0; (\mathcal{Y}_0, \mathcal{V}_0)) \xrightarrow{\sim} H_{DR}^q(X_{rig}/K; (\mathcal{Y}_{rig}, \mathcal{V}_{rig})),$$

c'est-\u00e0-dire que

$$(0.6) \quad K \otimes_{K_0} H_{DR}^q(X_0/K_0) \xrightarrow{\sim} H_{DR}^q(X_{rig}/K) .$$

Dans le cas classique, l'\u00e9galit\u00e9 entre cohomologie alg\u00e8brique et analytique fait d\u00e9faut d\u00e8s qu'il se pr\u00e9sente une singularit\u00e9 irr\u00e9guli\u00e8re \u00e0 l'infini. Dans le cas p-adique rigide, je conjecture que les homomorphismes naturels.

$$(0.7) \quad K \otimes_{K_0} H_{DR}^q(X_0/K_0; (\mathcal{Y}_0, \mathcal{V}_0)) \longrightarrow H_{DR}^q(X_{rig}/K; (\mathcal{Y}_{rig}, \mathcal{V}_{rig}))$$

sont des isomorphismes pour tout $q \geq 0$, sans hypoth\u00e8ses sur $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{V}_0)$, et en particulier si $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{V}_0)$ a des singularit\u00e9s irr\u00e9guli\u00e8res \u00e0 l'infini.

Nous pouvons prouver la conjecture pr\u00e9c\u00e9dente dans les deux cas suivants :

- (a) X_0 est une courbe ;
- (b) $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{V}_0)$ est r\u00e9guliere \u00e0 l'infini.

Nous allons maintenant esquisser la d\u00e9monstration de notre conjecture dans les deux cas (a), (b).

1. R\u00e9duction au cas local. - La suite spectrale de Leray pour un recouvrement de Zariski de X_0 (qui donne aussi un recouvrement admissible de X_{rig}) nous permet de supposer X_0 affine. La r\u00e9solution des singularit\u00e9s nous permet aussi de supposer que X_0 est le compl\u00e9mentaire dans une vari\u00e9t\u00e9 propre et lisse \bar{X}_0 d'un diviseur \u00e0 croisements normaux Y_0 .

On a donc

$$(1.1) \quad j_0 : X_0 \hookrightarrow \bar{X}_0$$

et donc

$$(1.2) \quad j_{\text{rig}} : X_{\text{rig}} \hookrightarrow \bar{X}_{\text{rig}}.$$

On a alors un diagramme commutatif, où on a noté par $(X, \bar{X}, \mathcal{Y}, \nabla, j, \dots)$ les extensions algébriques de (X_0, \bar{X}_0, \dots) à $K \supset K_0$:

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccc} \underline{H}^*(\bar{X}, j_* \mathcal{O}R(\mathcal{Y})) & \xrightarrow{(5)} & \underline{H}^*(X, \mathcal{O}R(\mathcal{Y})) \\ \downarrow (4) & & \downarrow (1) \\ \underline{H}^*(\bar{X}_{\text{rig}}, (j_* \mathcal{O}R(\mathcal{Y}))_{\text{rig}}) & & \\ \downarrow (3) & & \\ \underline{H}^*(\bar{X}_{\text{rig}}, j_{\text{rig}*} \mathcal{O}R(\mathcal{Y}_{\text{rig}})) & \xrightarrow{(2)} & \underline{H}^*(X_{\text{rig}}, \mathcal{O}R(\mathcal{Y}_{\text{rig}})) \end{array}.$$

La flèche (1) est simplement (0.7) : on veut prouver qu'elle est un isomorphisme. La flèche (2) (resp. (5)) est un isomorphisme parce que le morphisme j_{rig} (resp. j) est acyclique. La flèche (4) est un isomorphisme à cause des théorèmes GAGA p-adiques [9], qu'on peut appliquer puisque \bar{X} est propre. Finalement pour prouver que (0.7) sont des isomorphismes, il suffit de prouver que la flèche naturelle (3)

$$(1.4) \quad \underline{H}^*(\bar{X}_{\text{rig}}, (j_* \mathcal{O}R(\mathcal{Y}))_{\text{rig}}) \rightarrow \underline{H}^*(\bar{X}_{\text{rig}}, j_{\text{rig}*} \mathcal{O}R(\mathcal{Y}_{\text{rig}}))$$

est un isomorphisme. Les complexes

$$(j_* \mathcal{O}R(\mathcal{Y}))_{\text{rig}} =_{\text{déf}} \mathcal{O}R(\mathcal{Y}^*) \quad \text{et} \quad j_{\text{rig}*} \mathcal{O}R(\mathcal{Y}_{\text{rig}}) =_{\text{déf}} \mathcal{O}R(\mathcal{Y}(-))$$

ne diffèrent que le long de $Y_{\text{rig}} \subset \bar{X}_{\text{rig}}$.

Grâce à l'existence de voisinages tubulaires de Y_{rig} dans \bar{X}_{rig} [8], on peut se limiter à considérer un tel voisinage U (décrit plus loin), et à démontrer que les complexes

$$(1.5) \quad \mathcal{O}R(\mathcal{Y}^*)(U) \rightarrow \mathcal{O}R(\mathcal{Y}(-))(U)$$

sont quasi isomorphes. Or la situation sur U est la suivante (cf. [8]) :

A = K-algèbre de Tate régulière et intègre,

$B = A \langle\langle x_1, \dots, x_s \rangle\rangle$,

$U = \text{Sp } B \hookrightarrow \bar{X}_{\text{rig}}$, ouvert admissible,

$Z = Y_{\text{rig}} \cap U$ d'équation $x_1 \dots x_s = 0$ dans U ,

\mathfrak{J} = faisceau de \mathcal{O}_U -modules associé à Z ,

$$U' = U - Z = X_{\text{rig}} \cap U ,$$

$i : U' \hookrightarrow U$, restriction de j_{rig} à U' ,

$V = B$ -Module libre fini,

$\tilde{V} = \mathbb{Q}_U$ -Module associé à V ,

$$\tilde{V}(\ast) = \varinjlim_{\mathbb{N}} \mathcal{O}^{-N} \otimes \tilde{V} = (j_{\ast} \mathcal{Y})_{\text{rig}|U} ,$$

$$\tilde{V}(-) = i_{\ast} i^{-1} \tilde{V} = j_{\text{rig}\ast}(\mathcal{Y}_{\text{rig}})|U ,$$

$$V(\ast) = \tilde{V}(\ast)(U) = (j_{\ast} \mathcal{Y})_{\text{rig}}(U) = V \otimes_B B(\ast) ,$$

$$V(-) = \tilde{V}(-)(U) = j_{\text{rig}\ast}(\mathcal{Y}_{\text{rig}})(U) = V \otimes_B B(-) .$$

La connexion sur \mathcal{Y} induit un morphisme K -linéaire satisfaisant la règle de Leibnitz, et intégrable (dans le sens usuel)

$$(1.6) \quad \nabla(\ast) : V(\ast) \longrightarrow \Omega_{B/K}^1 \otimes_B V(\ast) ,$$

d'où les complexes de De Rham

$$(1.7) \quad \text{DR}_K(V(\ast)) = 0 \longrightarrow V(\ast) \longrightarrow \Omega_{B/K}^1 \otimes_B V(\ast) \longrightarrow \dots$$

et

$$(1.8) \quad \text{DR}_K(V(-)) = 0 \longrightarrow V(-) \longrightarrow \Omega_{B/K}^1 \otimes_B V(-) \longrightarrow \dots .$$

Comme

$$\text{DR}_K(V(\ast)) = (j_{\ast} \mathcal{Y})_{\text{rig}}(U)$$

et

$$\text{DR}_K(V(-)) = (j_{\text{rig}\ast} \mathcal{Y}_{\text{rig}})(U) ,$$

on conclut facilement que notre conjecture équivaut au fait que le plongement de complexes K -linéaires

$$(1.9) \quad \text{DR}_K(V(\ast)) \hookrightarrow \text{DR}_K(V(-))$$

est un quasi-isonorphisme. L'hypothèse de l'origine algébrique de notre connexion (0.1) jouera un rôle fondamental dans la démonstration, puisqu'elle permettra d'exclure l'apparition des nombres p -adiquement Liouville.

2. Le cas des courbes ($\dim X_0 = 1$) . - Ici

$$A = K ,$$

$$B = K\langle\langle X \rangle\rangle = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i X^i ; a_i \in K \text{ qui convergent dans } D(0, 1^+) \right\} ,$$

$$B(\ast) = K\langle\langle X^{-1} \rangle\rangle ,$$

$$B(-) = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i ; a_i \in K \text{ qui convergent dans } D(0, 1^+) \setminus \{0\} \right\} ,$$

$V = B^n$, et la connexion ∇ équivaut à un opérateur différentiel.

$$(2.1) \quad L = (d/dx) - G : B(*)^n \longrightarrow B(*)^n$$

avec $G \in M_{n \times n}(B(*))$, G "rationnelle sur K_0 ".

On a un carré commutatif

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccc} B(*)^n & \xrightarrow{L} & B(*)^n \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ B(-)^n & \xrightarrow{L} & B(-)^n \end{array}$$

et on doit prouver que les morphismes naturels

$$(2.3) \quad \text{Ker}_{B(*)^n}(L) \hookrightarrow \text{Ker}_{B(-)^n}(L)$$

et

$$(2.4) \quad \text{Coker}_{B(*)^n} L \longrightarrow \text{Coker}_{B(-)^n} L$$

sont des isomorphismes. La nature locale de notre problème nous permet de supposer que L est dans la forme canonique de Turrittin [1], donc que G est triangulaire. On peut alors filtrer le complexe

$$\text{DR}(V(*)) = 0 \longrightarrow B(*)^n \xrightarrow{L} B(*)^n \longrightarrow 0$$

et se ramener, par la suite spectrale des objets filtrés, au cas $n = 1$.

Ce cas se traite toujours localement à la main si L est régulier, et à l'aide de [10], si L est irrégulier.

3. Le cas de $(\mathcal{V}_0, \nabla_0)$ régulier à l'infini ($\dim X_0 \geq 1$). - Ici la filtration de $\text{DR}_K(V(*))$, induite par le morphisme lisse

$$U \longrightarrow \text{Sp } A \quad (A \hookrightarrow A \langle\langle x_1, \dots, x_s \rangle\rangle = B)$$

(filtration de Hodge) permet de remplacer $\text{DR}_K(V(*))$ par les complexes de De Rham relatifs à A

$$(3.1) \quad \text{DR}_A(V(*)) = 0 \longrightarrow V(*) \xrightarrow{\nabla_A(*)} \Omega_{B/A}^1 \otimes V(*) \longrightarrow \Omega_{B/A}^2 \otimes V(*) \longrightarrow \dots$$

où $\nabla_A(*): V(*) \longrightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes V(*)$ est induite par $\nabla(*): V(*) \longrightarrow \Omega_{B/K}^1 \otimes V(*)$.

On suppose que $\nabla_A(*)$ a des singularités logarithmiques le long de Y . Cela signifie que dans une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de V sur B , $\nabla_A(*)$ équivaut au système différentiel intégrable

$$(3.2) \quad X_i \frac{\partial Y}{\partial X_i} = H_i Y$$

$H_i \in M_{n \times n}(B)$, $i = 1, \dots, s$. Le fait que $\nabla_A(*)$ provient d'une connexion absolue (et "rationnelle sur K_0 ") permet de prouver que les matrices

$$(3.3) \quad \Gamma_j = H_j(0) \in M_{n \times n}(A)$$

ont leurs valeurs propres dans K_0 (donc non-Liouville). Par localisation, on peut aussi supposer que les matrices Γ_j sont triangulaires supérieures.

On utilise maintenant deux résultats intéressants.

1er résultat : Théorie formelle relative des singularités régulières (à la Gérard-Levelt). - On pose

$$\hat{B} = A[[x_1, \dots, x_s]],$$

$$\hat{V} = \hat{B} \otimes_B V,$$

$$\hat{V}(\ast) = \hat{B} \otimes_B V(\ast),$$

$$\hat{V}_A(\ast) = \text{extension naturelle de } V_A(\ast).$$

On veut prouver qu'il existe une base $f = (f_1, \dots, f_n)$ de $\hat{V}(\ast)$ sur $\hat{B}(\ast)$, à éléments dans \hat{V} telle que

$$(3.4) \quad \hat{V}_A(\ast) f = \sum_{j=1}^s \frac{dx_j}{x_j} \otimes f \tilde{\Gamma}_j,$$

où les matrices $\tilde{\Gamma}_j$ sont triangulaires supérieures à éléments dans K , et sont telles que les termes diagonaux de $\tilde{\Gamma}_j - \Gamma_j$ sont dans \underline{N} .

On arrive à un tel résultat en étendant la théorie de Gérard-Levelt [5] du cas d'un corps de base algébriquement clos de caractéristique 0 au cas d'un anneau de base intègre A , grâce au fait que les matrices Γ_j sont triangulaires et que leurs valeurs propres sont dans un sous-corps (K) de A .

2e résultat : Théorème de Clark relatif à plusieurs variables. - Il faut maintenant prouver que les éléments de la base f de (3.4), a priori dans

$$\hat{V} = V \otimes A[[x_1, \dots, x_s]],$$

se trouvent en effet déjà dans $A\langle\langle x_1/\epsilon, \dots, x_s/\epsilon \rangle\rangle$, pour quelque $\epsilon > 0$. On rappelle que la K -algèbre de Tate A est intègre, et donc ([2], (6.2.4), Th. 1) sa structure de K -algèbre de Banach est définie par sa norme spectrale $\| \cdot \|_{\text{sup}} = \| \cdot \|$. Les éléments de $A\langle\langle x_1/\epsilon, \dots, x_s/\epsilon \rangle\rangle$ sont les séries à coefficients dans A qui convergent dans A^s pour $\|x_1\|, \dots, \|x_s\| \leq \epsilon$.

Si on écrit $f = eF$, on voit que F satisfait au système différentiel

$$(3.5) \quad X_j \frac{\partial F}{\partial X_j} = F \tilde{\Gamma}_j - H_j F, \quad j = 1, \dots, s.$$

Or (3.5) est un système régulier (d'ordre n^2) à exposants non-Liouville dans K , et à coefficients dans $A\langle\langle x_1, \dots, x_s \rangle\rangle$. Il admet une solution "formelle" $F \in M_{n \times n}(\hat{B})$.

Pour examiner la convergence de F , il vaut mieux changer les notations.

THÉOREME 3.6. - Soit

$$(3.6.1) \quad X_j \frac{\partial Y}{\partial X_j} = G_j Y, \quad j = 1, \dots, s$$

avec $G_j \in M_{n \times n}(B)$ un système différentiel intégrable. On suppose que la matrice $\sum_{j=0}^s G_j(0) \in M_{n \times n}(A)$ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux non-Liouville dans K . Alors une solution formelle Y de (3.6.1) est dans $(A \ll x_{1/\epsilon}, \dots, x_{s/\epsilon} \gg)^n$ pour quelque $\epsilon > 0$.

Démonstration. - Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ indéterminées, et soit $A_\gamma = A \ll \gamma_1, \dots, \gamma_s \gg$ équipée de sa norme spectrale $\| \cdot \|$. On a le lemme suivant.

LEMME 3.6.2. - Soit

$$z(x_1, \dots, x_s) \in A \ll x_1, \dots, x_s \gg \quad \text{et} \quad z_\gamma(t) = z(\gamma_1 t, \dots, \gamma_s t) \in A_\gamma \ll t \gg.$$

Alors

$$z \in A \ll x_{1/\epsilon}, \dots, x_{s/\epsilon} \gg \iff z_\gamma \in A_\gamma \ll t/\epsilon \gg.$$

Démonstration. - En fait, pour $z = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} a_\alpha x^\alpha$,

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \|a_\alpha\| \epsilon^{|\alpha|} = 0 \iff \lim_{i \rightarrow \infty} (\max_{|\alpha|=i} \|a_\alpha\|) \epsilon^{|\alpha|} = 0.$$

C. Q. F. D.

Considérons le système induit par (3.6.1) sur la "droite générique" $X_i = \gamma_i t$, $i = 1, \dots, s$, de A^s : $(t\gamma = (t\gamma_1, \dots, t\gamma_s))$

$$(3.6.3) \quad t \frac{dY}{dt} = \sum_{j=1}^s X_j \frac{\partial Y}{\partial X_j} = \sum_{j=1}^s G_j(t\gamma) Y = G(t) Y.$$

On a $G(t) \in A_\gamma \ll t \gg$ et $G(0) = \sum_{j=1}^s G_j(0)$.

Grâce au lemme, on peut donc supposer $s = 1$ dans l'énoncé du théorème, et (3.6.1) prend la forme

$$(3.6.4) \quad x \frac{dY}{dx} = G(x) Y$$

avec $G(x) = \Gamma + \sum_{i \geq 1} G_i X^i$, $G_i \in M_{n \times n}(A)$, $\Gamma \in M_{n \times n}(A)$, triangulaire supérieure à éléments diagonaux non-Liouville dans K . Ecrivons $Y = \sum_{i \geq 0} Y_i X^i$, $Y_i \in A^n$ pour la solution formelle, qui existe par hypothèse; Y satisfait donc aux formules de récurrence :

$$(3.6.5) \quad (i - \Gamma) Y_i = \sum_{j=0}^{i-1} G_j Y_{i-j-1}, \quad i \geq 0.$$

On déduit du théorème 2 de [3] que Y a un rayon de convergence positif.

C. Q. F. D.

Les résultats précédents nous ramènent grâce à la suite spectrale de Leray, au cas d'une connexion de la forme

$$(3.7) \quad \nabla_A^{(*)} f = \sum_{j=1}^s \frac{dX_j}{X_j} \otimes f \tilde{\Gamma}_j$$

avec $\tilde{\Gamma}_j \in M_{n \times n}(K)$ sous forme canonique de Jordan et à éléments non-Liouville. On peut donc filtrer les complexes $DR_A(V^{(*)})$ par des sous-complexes, et se réduire au cas de l'ordre 1 à coefficients dans K

$$(3.8) \quad \nabla_A^{(*)} f = \sum_{j=1}^s \frac{dX_j}{X_j} \otimes \gamma_j f$$

$Bf = V$, $\gamma_j \in K$, non-Liouville. Ce cas se traite comme dans [4] (Chap. II, lemme 6.9).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BALDASSARRI (F.). - Differential modules and singular points of p -adic differential equations, Adv. in Math., t. 44, 1982, p. 155-179.
- [2] BOSCH (S.), GÜNTZER (U.) and REMMERT (R.). - Non-archimedean analysis. - Berlin, New York, Tokyo, Springer-Verlag, 1984 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 261).
- [3] CLARK (D.). - A note on the p -adic convergence of solutions of linear differential equations, Proc. Amer. math. Soc., t. 17, 1966, p. 262-269.
- [4] DELIGNE (P.). - Equations différentielles à points singuliers réguliers. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 163).
- [5] GÉRARD (R.) et LEVELT (A. H. M.). - Sur les connexions à singularités régulières dans le cas de plusieurs variables, Funkcial. Ekvacioj., Tokyo, t. 19, 1976, p. 149-173.
- [6] GRÖTHENDIECK (A.). - On the De Rham cohomology of algebraic varieties. - Paris, Presses universitaires de France, 1966 (Institut des hautes Études scientifiques. Publications mathématiques, 29, p. 95-103).
- [7] KATZ (N.). - Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin. - Paris, Presses universitaires de France, 1970 (Institut des hautes Études scientifiques. Publications mathématiques, 39, p. 175-232).
- [8] KIEHL (R.). - Die De Rham Kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem bewerteten Körper. - Paris, Presses universitaires de France, 1967 (Institut des hautes Études scientifiques. Publications mathématiques, 33, p. 5-20).
- [9] KOPF (U.). - Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räumen, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, Reihe 2, Heft 7, 1974.
- [10] ROBBA (P.). - Index of p -adic differential operators, III : Application to twisted exponential sums, "Cohomologie p -adique", Astérisque, n° 119-120, 1984, p. 191-266.
- [11] SERRE (J.-P.). - Géométrie algébrique et géométrie analytique [GAGA], Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1956, p. 1-42.