GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

YVES ANDRE

Équations différentielles p-adiques et dégénérescence de groupes de Hodge

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. nº 7, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A4_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA
11e année, 1983/84, n° 7, 15 p.

5 décembre 1983

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES ET DÉGÉNÉRESCENCE DE GROUPES DE HODGE

par Yves ANDRE (*)

Résumé. - Ce texte reprend, en la complétant sur certains points, une partie de ma thèse [1]. Soit $(X_s)_{s\in S}$ une famille algébrique de variétés abéliennes paramétrée par une courbe affine lisse S, le tout étant défini sur le corps $\bar{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. Le groupe de Hodge G_s de X_s est le groupe algébrique qui fixe les cycles de Hodge dans la cohomologie rationnelle de $X_{s|\mathbb{C}}$, un plongement de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$ étant donné. On sait ([5], 2.11) que, pour tout s hors d'une partie maigre de $S(\mathbb{C})$, les G_s sont isomorphes ; on appelle G ce groupe de Hodge "générique" ; alors pour tout $s \in S(\bar{\mathbb{Q}})$, G_s se plonge dans G.

Sous certaines hypothèses simplificatrices, je donne une condition de nature arithmétique sur les points $s \in S(\bar{\mathbb{Q}})$ tels que le groupe de Hodge de la fibre X_s dégénère, c'est-à-dire que l'image de G_s dans G soit distincte de G. La preuve est fondée en partie sur les propriétés p-adiques du système différentiel de Picard-Fuchs associé à la famille $(X_s)_{s\in S}$.

1. Rappels sur la structure de Hodge des variétés abéliennes.

Soit A une variété abélienne complexe ; cela correspond à la donnée d'une structure complexe polarisable sur le réélifié d'un réseau L (c'est-à-dire un endomorphisme J de $\mathbb{R}L$ de carré-Id, ou, ce qui revient au même, un morphisme $\varphi : \mathbb{U}^1 \dashrightarrow GL(\mathbb{R}L)$ tel qu'il existe une structure symplectique $\alpha : L \wedge L \dashrightarrow \mathbb{Z}$ pour laquelle $\alpha_{\mathbb{R}}(x, \varphi(i)y)$) est définie positive sur $\mathbb{R}L \times \mathbb{R}L$.

L'enveloppe algébrique sur $\mathbb{Q}$ de l'image de φ est appelée groupe de Hodge de A, et sera notée $G(A)$; c'est un $\mathbb{Q}$-groupe réductif connexe de centre compact [8]. Soit V le dual sur $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}L$; on l'identifie canoniquement au premier groupe de cohomologie rationnelle $H^1(A, \mathbb{Q})$ de A. Alors la cohomologie rationnelle $H^\bullet(A, \mathbb{Q})$ de A s'identifie à l'algèbre extérieure sur V, et par le théorème de Künneth, celle de A^n s'identifie à $\otimes^n \wedge V$.

Via les représentations contragrédientes et tensorielles, on obtient une action de $G(A)$ sur $\otimes^n \wedge V$.

D'autre part, la théorie de Hodge fournit une décomposition de $H^n(A, \mathbb{C}) = H^n(A, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$:

$$H^n(A, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=n} H^{p,q}(A) .$$

(*) Yves ANDRÉ, Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 PARIS CEDEX 05.

Puisque A est une variété abélienne, cette décomposition correspond, au cran H^1, à la décomposition en sous-espace propre de ${}^tJ$ sur $V \otimes \mathbb{C}$ (dual de $\mathbb{C}L$), et est compatible aux crans supérieurs avec les identifications décrites précédemment.

On appellera <u>cycle de Hodge</u> sur A tout élément d'un espace $H^n(A^n, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(A^n)$. Les constructions précédentes montrent qu'il revient au même de considérer un cycle de Hodge, sur A comme un élément d'une puissance tensorielle de V fixé par $G(A)$.

On peut montrer d'ailleurs que $G(A)$ est le plus grand $\mathbb{Q}$-groupe algébrique qui fixe ces éléments ([5], 3.4).

Dans la suite, on fera le plus souvent sur les variétés abéliennes A l'hypothèse simplificatrice suivante :

(*) A <u>est isogène géométriquement à un produit de variétés abéliennes simples de dimension égale à un nombre premier</u> (non précisé) <u>ou à</u> 1.

<u>Remarque</u>. - Cette hypothèse entraîne [9] que les cycles de Hodge sur A sont engendrés sous le cup-produit par les classes de cohomologie de diviseurs. En particulier, $G(A)$ ne dépend que de A et non du morphisme $A \dashrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{C}$.

2. Dégénérescence du groupe de Hodge dans une famille à un paramètre de variétés abéliennes.

On normalise les valeurs absolues $| \ |_v$ d'un corps de nombres K de degré d sur $\mathbb{Q}$ de la manière suivante :

(i) si $v|p$, on pose $|p|_v = p^{-d_v/d}$ où d_v est le degré local en v, i. e. le degré du complété K_v de K en v sur $\mathbb{Q}_p$,

(ii) si $v|\infty$ et si v est réelle, on pose $|x|_v = |x|^{1/d}$,

(iii) si $v|\infty$ et si v est complexe, on pose $|x|_v = |x|^{2/d}$, où $| \ |$ est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La formule du produit s'écrit $\prod_v |x|_v = 1$ pour $x \in K^\times$. On note V_0^K l'ensemble des places finies de K.

On écrit $\log^+$ pour $\sup(\log, 0)$, et on note $h(x)$ la hauteur logarithmique absolue $(\sum_v \log^+ |x|_v)$ de x.

Etant donné un schéma abélien $X \xrightarrow{f} S$ sur une courbe affine lisse S, munie d'un point fermé s, f et S étant définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$, on construit les objects suivants :

1° un morphisme étale fini π de S sur $\mathbb{A}^1$ qui envoit s sur 0,

2° un entier N et un corps de nombres K d'anneau d'entiers R tels que f, S, s et π soient définis sur $R[\frac{1}{N}]$.

3° une "fonction de Weil" $\lambda_v(t)$, donnée par $\log^+ |\pi(t)|_v^{-1}$, 4° la hauteur associée $h(t) = \sum_v \lambda_v(t)$, qui ne dépend pas de K ,

5° la partie "ordinaire" (ord) de la hauteur

$$h_{ord}(t) = \sum_v \lambda_v(t) ,$$

la somme étant étendue à l'ensemble de places v de K ne divisant pas N et ordinaires pour X_t ; cette expression ne change pas si on remplace K par une extension finie,

6° le groupe de Hodge "générique" de f , défini comme le groupe de Hodge $G(f)$ de la fibre en un "point générique de Weil" de $S(\underline{C})$. Sous l'hypothèse (*), l'indépendance vis-à-vis du choix de ce point générique est claire (voir la remarque qui suit (*)). Dans le cas général, c'est impliqué par ([5], 2.11]. On remarquera que si $\dim X/S = g$ est < 4 , toute fibre de f vérifie (*).

Le théorème annoncé s'énonce comme suit.

THÉORÈME. - <u>Soit</u> $f : X \dashrightarrow S$ <u>un schéma abélien sur une courbe affine lisse</u> S , f <u>et</u> S <u>étant définis sur</u> $\overline{\mathbb{Q}}$. <u>On suppose qu'une fibre</u> $X_s = f_s$ <u>est une variété abélienne de type "multiplications complexes". Il existe trois constantes</u> α , β , γ <u>positives, effectivement calculables en fonction de</u> (X , S , s) , <u>avec</u> $\beta < 1$, <u>telles que l'énoncé suivant soit vérifié</u> ;

<u>Soit</u> X_t <u>une fibre de</u> f <u>vérifiant</u> (*) ; <u>alors</u>

(i) <u>si</u> $\dim G(X_t) < \dim G(f) - \dim X_t$, <u>on a</u>

$$h_{ord}(t) < \alpha\, h(t)^{\beta}\, [K(t) : \mathbb{Q}]^{\gamma}$$

(ii) <u>si pour tout</u> $v|\infty$, $\lambda_v(t) = 0$ <u>et si</u> $\dim G(X_t) < \dim G(f)$, <u>on a</u>

$$h_{ord}(t) < \alpha\, h(t)^{\beta} .$$

La preuve de ce théorème utilise la théorie des G-fonctions de Siegel sous la forme que lui a donnée BOMBIERI [4].

Dans un prochain article, je donnerai une application de ce type de technique au problème de l'infinitude des places supersingulières des courbes elliptiques d'invariant algébrique.

3. Equations de Picard-Fuchs associées aux schémas abéliens et G-fonctions.

3.1. Les G-fonctions et leurs valeurs.

Soit K un corps de nombres. Par opérateur différentiel défini sur K , on entendra un opérateur différentiel à coefficients dans $K(z)$ en une seule variable z .

Si $\mathfrak{L}$ est un opérateur différentiel défini sur K , on note $r_v(\mathfrak{L})$ le rayon de v-analyticité de $\mathfrak{L}_v := \mathfrak{L} \otimes_K K_v$ sur un disque générique ([4], 6), et $s(\mathfrak{L})$ l'ensemble des singularités non apparentes de $\mathfrak{L}$. Soit $Y(z)$ un vecteur dont la j-ième composante est une série de Taylor $Y_j(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{jm} z^m$ $(j = 1 , 2 , \dots , n)$, avec $a_{jm} \in K$, de rayon de convergence $r_v(Y_j)$ en 0 .

On dira, avec E. BOMBIERI ([4], 7), que $Y(z)$ est une G-fonction si la quantité positive

$$\tilde{\sigma}(Y) = \overline{\lim}_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_v \max_{j\leqslant n, h<m} \left(- h \log^+ \frac{1}{\min_i r_v(Y_i)} + \log |a_{jh}|_v\right) + \sum_v \log^+ \frac{1}{\min_i r_v(Y_i)}$$

est finie.

Cette condition un peu technique, mais d'usage commode, entraîne que

$$\sigma(Y) = \overline{\lim}_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_v \max_{j\leqslant n, h<m} \log |a_{jh}|_v$$

est fini, et signifie heuristiquement que les tailles et dénominateurs des coefficients croissent au plus géométriquement.

La propriété arithmétique des valeurs de G-fonctions qui sera utilisée est la suivante ;

Rappel (E. BOMBIERI ([4], 10, 12)).

1° Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel d'ordre n défini sur un corps de nombres K , tel que $\sum_{v \in V_0^K} \log^+ \frac{1}{r_v(\mathcal{L})} < \infty$.

Soit $Y(z)$ une G-fonction solution de $\mathcal{L}\, Y = 0$ au voisinage de $z = 0$. Soit $\xi \in K^\times$, distinct des singularités de $\mathcal{L}$; et soit M un ensemble fini de places de K tel que

$$|\xi|_v < \min(1 , r_v(Y_i))$$

si $v \in M$ (de sorte que pour chaque $v \in M$, $Y_i(\xi)$ est un élément bien défini dans K_v), et tel qu'il existe r relations de dépendance linéaire indépendantes sur K : $\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} Y_j(\xi) = 0$, avec $\lambda_{ij} \in K$, valides dans toute complétion K_v , $v \in M$ (avec le sens qu'y prend $Y_j(\xi)$) .

On suppose que les composantes $Y_j(z)$ de Y sont linéairement indépendantes sur $K(z)$.

Alors, pour tout τ , $0 < \tau \leqslant 1/2$, on a :

$$(n - 2\tau) \sum_{v\in M} \log|\xi|_v + (n - r + 2\tau\, |s(\mathcal{L})|)\, h(\xi) \geqslant - c(\mathcal{L} , Y , \tau)$$

où $c(\mathcal{L} , Y , \tau)$ est une constante positive qui ne dépend que de $\mathcal{L}$, Y et τ (pas de K), donnée explicitement par

$$c(\mathcal{L} , Y , \tau) = 2(n - r) \log 2 + (n - r)\, n^2 \frac{\tilde{\sigma}(Y)}{2\tau} + (n - r)\, \tau \Big[\sum_{V_0^K} \log^+ \frac{1}{r_v(\mathcal{L})}$$

$$+ \sum_{\zeta\in s(\mathcal{L}), \zeta\neq\infty} h(\zeta) + \log 2 + |s(\mathcal{L})| \log 2 + n - 1\Big]$$

2° Lorsqu'on note $\Sigma^{(k)}$ la puissance symétrique k-ième de $\mathcal{L}$, et $Y^{(k)}$ le vecteur de composantes $Y_1^{k_1} \ldots Y_n^{k_n}$ pour $k_j \geqslant 0$ et $\sum k_j = k$, on a

$$s(\mathcal{E}^{(k)}) \subset s(\mathcal{E}) \ , \ \sum_{v\in V_0^K} \log^+ \frac{1}{r_v(\mathcal{E}^{(k)})} \leqslant \sum_{v\in V_0^K} \log^+ \frac{1}{r_v(\mathcal{E})} \ ,$$

et

$$\tilde{\sigma}(Y^{(k)}) \leqslant (1 + \log k)\, \tilde{\sigma}(Y) \ .$$

La partie 2° permet de substituer dans 1° des polynômes homogènes de degré k aux formes linéaires, en changeant convenablement les "constantes" n et $\tilde{\sigma}(Y)$.

L'intérêt de considérer plusieurs places éventuellement dans M est mis en évidence par la remarque suivante, due à E. BOMBIERI ;

pour plus de précision, on note $Y_i^{(v)}(\xi^{(v)})$ l'élément de K_v défini, lorsque $|\xi|_v < r_v(Y_i)$, par $\sum a_{ij}^{(v)}\, \xi^{(v)}$ où $a_{ij}^{(v)}$ et $\xi^{(v)}$ sont les images de a_{ij} et de ξ , par l'homomorphisme (d'inclusion) $K \hookrightarrow K_v$.

Soit $Q \in K[y_1 , \ldots , y_n]$. On dit que la relation $Q(y_1(\xi) , \ldots , y_n(\xi)) = 0$ est globale, si on a $Q^{(v)}(y_1^{(v)}(\xi^{(v)}) , \ldots , y_n^{(v)}(\xi^{(v)})) = 0$

pour toute place v de K telle que $|\xi|_v < \min (1 , r_v(Y_i))$ (on note $Q^{(v)}$ l'image de Q par l'injection canonique $K[y_1 , \ldots , y_n] \to K_v[y_1 , \ldots , y_n]$) . On pose $M = \{v \text{ place de } K \mid ; |\xi|_v < \min_i (1 , r_v(Y_i))\}$. Alors

$$\sum_{\substack{v\notin M \\ |\xi|_v<1}} \log(\xi)_v = - \sum_{v\notin M} \log^+ |\xi|_v \geqslant - \sum_v \log^+ \frac{1}{\min_i r_v(Y_i)}$$

d'où

$$\sum_{v\in M} \log |\xi|_v \leqslant - \sum_v \log^+ \frac{1}{|\xi|_v} + \sum_v \log^+ \frac{1}{\min_i r_v(Y_i)} = - h(\xi) + \sum_v \log^+ \frac{1}{\min_i r_v(Y_i)} \ .$$

On en tire que si $\mathcal{E}$, Y sont comme ci-dessus, et si $Y_1(z) , \ldots , Y_n(z)$ ne vérifient aucune relation algébrique homogène de degré k à coefficients dans $\tilde{\underline{Q}}(z)$, les points $\xi \in \overline{Q}$, en lesquels il existe une relation globale de degré $k > 1$, ont une hauteur bornée

$$h(\xi) < c'(\mathcal{E} , Y).k^{3n-3} \, . \log k \quad ([4], 11) \ ,$$

$c'(\mathcal{E} , Y)$ étant une constante > 0 effectivement calculable en fonction de $\mathcal{E}$ et Y .

D'une manière générale, le théorème de Bombieri donne un résultat d'autant plus fort que le nombre de places v dans M augmente, le maximum étant obtenu dans le cas des relations globales.

3.2. Opérateur différentiel associé à un schéma abélien.

On considère de nouveau un schéma abélien $X \xrightarrow{f} S$ sur une courbe affine lisse S munie d'un point fermé s , f et S étant définis sur $\overline{Q}$, et on reprend les constructions 1° et 2° du paragraphe 2 : plus précisément, on suppose que S est étale de degré δ au-dessus de $\mathbb{A}^1_K$, via une section z de $\mathcal{O}_S$ qui s'annule en un point s de $S(K)$, et, par abus de langage, on note aussi z la section de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^1)$ d'image z sous $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \to \mathcal{O}_S$.

Au module à connexion $H^1_{dif}(X/S)$ (cohomologie de <u>De Rham algébrique</u> relative de X/S), identifié à son dual via une polarisation de la fibre générique de f, correspond un système différentiel $\mathcal{L}_f = d/dz - A_f$ sur S, et, en notant π le morphisme $S \to \mathbb{A}^1$, un système différentiel $\pi * \mathcal{L}_f$ sur $\mathbb{A}^1_K$ (à coefficients dans $K(z)$) ; si f est de dimension relative g, et π de degré δ, $\mathcal{L}_f$ est de rang $2g$ et $\pi * \mathcal{L}_f$ de rang $2g\delta$.

On peut "descendre" f en un schéma abélien $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{S}$ sur un schéma $\tilde{S}$ lisse sur un sous-anneau B de K de type fini sur $\mathbb{Z}$ (on peut prendre $\mathcal{O}_K[\frac{1}{N}]$ pour ce sous-anneau, pour N assez grand) ; alors les modules de De Rham $H^n_{dif}(\tilde{X}/\tilde{S})$ sont localement libres et la formation de H_{dif} commute aux changements de base ([7], [3] p. 99).

Quitte à agrandir B, on peut supposer que s définit un point B-rationnel de $\tilde{S}$, qu'on note encore s, et que π se prolonge en un morphisme étale de $\tilde{S}$ sur $\mathbb{A}^1_B$ (théorème de lissité générique de Chevalley).

On considère l'opérateur différentiel $\mathcal{L}_f$ associé à $H^1_{dif}(X/S)$, et $2g$ "vecteurs solutions" $y^s_{(i)}(z)$ de $\mathcal{L}_f$ au voisinage de s, pour $i \in \{1, \ldots, 2g\}$, tels que la matrice carrée formée des vecteurs colonnes $y^s_{(i)}(s)$ soit la matrice identité : on entend par "vecteur solution" de $\mathcal{L}_f$ au voisinage de s un élément horizontal dans $H^1_{dif}(X/S) \otimes_{\mathcal{O}_S} \hat{\mathcal{O}}_{S,s}$, où $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}$ désigne le complété de l'anneau local en le point K-rationnel s. Les composantes $y^s_{(i)j}(z)$ sont appelées <u>périodes globales</u> de f au voisinage de s. A un tel vecteur solution $y^s_{(i)}(z)$ de $\mathcal{L}_f$ correspond un vecteur solution $Y(z)$ de $\pi * \mathcal{L}_f$ de la manière suivante :

Comme π est étale et comme les δ points $s_1 = s, \ldots, s_\delta$ de $\pi^{-1}(0)$ sont K-rationnels, on a des isomorphismes $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^1_K,0} \to \hat{\mathcal{O}}_{S,s_k}$, d'où pour chaque $y^{s_k}_{ij}(z)$ (construit comme $y^s_{ij}(z)$) un élément correspondant $y^{s_k}_{ij}(z)$ dans $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^1_K,0}$, i. e. une série de Taylor en z à coefficients dans K ; en notant $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_\delta)$ et $\mathbf{y}^{s_k}_{(i)}(z)$ le vecteur de composantes $\mathbf{y}^{s_k}_{ij}(z)$,

$$Y_{\mathbf{i}}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^{s_1}_{(i_1)}(z) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{s_\delta}_{(i_\delta)}(z) \end{pmatrix}$$

est un vecteur solution de $\pi * \mathcal{L}_f$, et la matrice $(2g\delta) \times (2g\delta)$ formée de tous les $Y_{\mathbf{i}}(0)$ dans un ordre convenable est la matrice identité. On pose $n = 2g\delta$.

On note R_v ou $\mathcal{O}_{K_v}$ l'anneau des entiers du complété K_v de K en une place finie v. Soient $v|p$ une place finie de K, $v \nmid N$, et $\tilde{S}_v$ le schéma formel complété p-adique de $\tilde{S}/_{K_v}$. A $\tilde{S}_v$ est associé un espace analytique rigide $\tilde{S}^{an}_v$

dont les points sont les sous-schémas formels fermés de $\tilde{S}_v$ intègres finis et plats sur $\mathcal{O}_{K_v}$ ([2], 1) ; on note $\tilde{X}_v$, $\tilde{f}_v$, resp. $\tilde{X}_v^{an}$, $\tilde{f}_v^{an}$ les objets déduits de $\tilde{X}$, $\tilde{f}$ par les foncteurs G. A. G. F. (resp. G. F. G. rig-an) .

La théorie de cohomologie cristalline munit le $\mathcal{O}_{\tilde{S}_v}$-module à connexion

$$\underset{\sim}{R}^i \tilde{f}_v * (\Omega^{\bullet}_{X^j_{v/\tilde{S}_v}}) \approx H^i_{dif}(\tilde{X}^j/\tilde{S}) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \mathcal{O}_{\tilde{S}_v}$$

d'une structure de F-cristal ([2], [6]), qui induit un F-cristal convergeant sur $\tilde{S}_v^{an}$ ([2], [6]).

Le système différentiel p-adique associé est défini sur le sous-corps K de K_v ; en reprenant les notations précédentes, lorsque i = j = 1 , ce système est $\mathcal{L}_{f|K_v}$.

3.3. Les périodes globales comme G-fonctions.

On pourra utiliser le théorème de Bombieri grâce à l'énoncé suivant.

PROPOSITION. - Avec les notations précédentes, soit $\mathcal{L}$ l'opérateur différentiel $\pi * \mathcal{L}_f$, et pour un δ-uplet fixé i , soit $\gamma(z) = Y_i(z)$. Alors

$$\sum_{v \in V_0^K} \log^+ \frac{1}{r_v(\mathcal{L})} < \infty$$

et $\gamma(z)$ est une G-fonction solution de $\mathcal{L}$ au voisinage de 0 .

Preuve. - Il suffit de prouver d'une part que pour l'ensemble fini des places v de K telles que $v|\infty$ ou $v|N$, $r_v(\gamma_i) > 0$ et $r_v(\mathcal{L}) > 0$, et d'autre part que $\sum' \log^+ 1/(r_v(\mathcal{L})) < \infty$, le symbole indiquant que les sommations sont effectuées sur l'ensemble complémentaire de l'ensemble de places précédent.

En fait, on $r_v(\gamma_i) > 0$ et $r_v(\mathcal{L}) > 0$ pour toute place de K , puisque 0 est un point ordinaire de $\mathcal{L}$. On va prouver que $\sum' \log^+ 1/(r_v(\mathcal{L})) = 0$ i. e. $r_v(\mathcal{L}) \geqslant 1$ pour $v \nmid N$, $v \nmid \infty$. On a le morphisme de spécialisation (morphisme d'espaces annelés, qui est fonctoriel) de $\tilde{S}_v^{an}$ dans $\tilde{S}_v$ qui associe à un sous-schéma formel fermé intègre fini et plat (sur R_v) , de $\tilde{S}_v$ son support, qui est un point de $\tilde{S}_v$; d'autre part, grâce au choix de N , π s'étend en un morphisme $\tilde{\pi}_v$ de schémas formels $\tilde{S}_v \to \hat{A}^1_{k_v}$, où k_v désigne le corps résiduel de K_v , et il existe un morphisme $\tilde{\pi}_v^{an}$ d'espaces analytiques rigides tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccl}\tilde{S}_v^{an} & \xrightarrow{\tilde{\pi}_v^{an}} & (\hat{A}^1_{k_v})^{an} = \text{boule unité fermée } B_v(0\ ,\ 1^+) \text{ de la droite analytique rigide} \\ \downarrow{\scriptstyle Sp} & & \downarrow{\scriptstyle Sp} \\ \tilde{S}_v & \xrightarrow{\pi_v} & \hat{A}_{k_v} = \operatorname{Spec} \varprojlim R_v[T]/p^n R_v[T]\end{array}$$

Comme $H^1_{dif}(\tilde{X}/\tilde{S}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\tilde{S}_v^{an}}$ est muni d'une structure de F cristal convergeant pour $v \nmid N$, $v \nmid \infty$, le système différentiel associé $\mathcal{L}_{f|K_v}$ admet une base de solutions convergentes dans $sp^{-1}(t)$ pour tout point t de $\tilde{S}_v$ [2] ; on en déduit que $\mathcal{L}|K_v$ admet une base de solutions convergentes dans $sp^{-1}(\pi_v(t))$ pour tout point $\tilde{\pi}_v(t)$, la spécialisation se référant a l'espace analytique rigide $B_v(0\ ,\ 1^{+})$.

En particulier, $r_v(y_i) \geqslant 1$; pour avoir $r_v(\mathcal{L}) \geqslant 1$, on étend les scalaires de K_v à un corps complet Ω_v contenant une unité t_v dont l'image dans le corps résiduel soit transcendante sur k_v ; comme précédemment, on trouve que $\mathcal{L}|\Omega_v$ admet une base de solutions convergentes dans $sp^{-1}(t_v) = B(t_v\ ,\ 1^-)$.

En fait, la condition sur $\mathcal{L}$ suffit à assurer que les solutions en séries de Taylor à coefficients dans un corps de nombres sont des G-fonctions, mais comme ce résultat n'est pas explicité en [4], on va montrer que $\sigma'(Y) < \infty$, i. e.

$$\overline{\lim}\ \frac{1}{n} \sum_{v \nmid \infty, v \nmid N} \max_{i \leqslant n, h < n} \log |a_{jh}|_v < \infty .$$

Soit A_n la matrice dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et telle que $(d/dz)^n\, Y = n\,!\, A_n\, Y$; on a

$$\max_{j \leqslant n} \log |a_{jh}|_v \leqslant \log^+ |A_n(0)|_v .$$

Pour estimer $|A_n(0)|_v$ on dispose, puisque 0 est un point ordinaire pour $\mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ admet une base de solutions analytiques sur $B(0\ ,\ 1^-)$, de l'inégalité de Dwork [4]

$$|A_n(0)|_v \leqslant \{n\ ,\ n-1\}_v \max_{h \leqslant n-1} \|A_h\|_0^v$$

$\|A_h\|_0^v$ désignant le maximum des normes de Gauss des coefficients de A_h , et $(n\ ,\ n-1)_v$ désignant $\sup\,(1/|\ell_1 \times \ldots \times \ell_{n-1}|_v)$ sur tous les $(n-1)$-uplets d'entiers distincts bornés par n .

Or $\sum_{v \nmid \infty, v \nmid N} \max_{h < n} \log\{h\ ,\ n-1\}_v \leqslant (n-1)\ \psi(n)$ où ψ est la fonction arithmétique usuelle (voir [4], 6). D'où

$$\sum_{v \nmid \infty, v \nmid N} \max_{h < n} \log^+ |A_n(0)|_v \leqslant (n-1)\ \psi(n) + \sum_{v \nmid \infty, v \nmid N} \log^+ \max_{h \leqslant n-1} \|A_h\|_0^v < \infty$$

(voir [4], lemme 7) et $\sigma'(Y) \leqslant n-1$.

C. Q. F. D.

4. Périodes.

4.1. Périodes complexes.

Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K ; dans la suite, ce sera une fibre du schéma abélien $\tilde{f}$.

Soit v une place complexe de K (éventuellement, prolongement d'une place réelle) qu'on peut voir comme un plongement de K dans $\mathbb{C}$. On note A_v la variété abélienne complexe $A \times_K \mathbb{C}$ associée à ce plongement et issue de A .

On a un accouplement $H_1(A_v, \mathbb{Z}) \times H^1_{dif}(A/K) \longrightarrow \mathbb{C}$, donné par $(\gamma, \omega) \longrightarrow \int_\gamma \omega$ qui induit un isomorphisme de vectoriels complexes

$$H^1_{dif}(A/K) \otimes_K \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^1(A_v, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} ;$$

les nombres $\int_\gamma \omega$ sont appelés classiquement <u>périodes</u> (et pseudo-périodes) associées à A/K ; on les appelera <u>périodes v-adiques</u> (complexes), et on les notera $p^v_{\alpha,\beta}$, α et β décrivant $\{1, \ldots, 2\dim A\}$; on les regardera comme les coefficients d'une matrice de l'isomorphisme ci-dessus sur des bases de $H^1_{dif}(A/K) \otimes_K \mathbb{C}$, resp. $H^1(A_v, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, adaptés aux structures "rationnelles" sous-jacentes $H^1_{dif}(A/K)$ resp. $H^1(A_v, \mathbb{Q})$.

On sait que le degré de transcendance sur $K(2i\pi)$ des $p_{\alpha,\beta}$ est majoré par $G(A_v)$, ([5], 6.4). L'égalité découlerait d'une conjecture de Grothendieck (voir [1], 1).

Lorsque A varie dans une famille algébrique $(X_s)_{s\in S}$, on peut définir localement pour la topologie complexe sur $S(\mathbb{C})$, des fonctions analytiques $p^v_{\alpha,\beta}$ telles que les $p^v_{\alpha,\beta}(s)$ représentent un système de périodes v-adiques de X_s pour tout s dans $S(K)$, ce au moins localement en s (voir [1], 3). Ces fonctions donnent une base de solutions localement pour $\mathcal{L}_f \otimes_{K,v} \mathbb{C}$, formée de vecteurs du type $(p_{\alpha,\beta})_{\beta=1,\cdots,2\dim A}$.

4.2. <u>Périodes p-adiques</u>.

On commence par rappeler, dans une variante analytique rigide, la construction de périodes v-adiques, avec v ultramétrique (d'après OGUS [5], p. 397), pour une fibre X_s, définie sur $R[\frac{1}{N}] \subset K$, du schéma abélien $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{S}$ considéré en 3.2. On suppose que $v \nmid N$ et que R est l'anneau des entiers du corps de nombres K. $\tilde{X}_s$ est donc un schéma abélien sur $B = R[1/N]$; on note K_v le complété de K en v, R_v son anneau d'entiers, et k_v son corps résiduel.

Soient C_v un corps, complet pour la topologie p-adique, contenant K_v et l'anneau de Witt de la clôture algébrique de k_v. Pour $v \nmid N$, la réduction de $\tilde{X}_s$ modulo l'idéal maximal m_v de R_v est une variété abélienne $\tilde{X}_{s,\sigma} = \tilde{X}_\sigma$ (image de $\tilde{X}_s$ par le changement de base $\sigma : \operatorname{Spec} k_v \longrightarrow \operatorname{Spec} R[1/N]$) ; on note $H^n_v(\tilde{X}_\sigma)$ son m-ième groupe de cohomologie analytique rigide [2].

On a un isomorphisme canonique [2]

$$\sigma_v : H^n_{dif}(\tilde{X}^n_s/R[1/N]) \otimes_{R[1/N]} K_v \longrightarrow H^n_v(\tilde{X}^n_\sigma) ,$$

et une décomposition dite "décomposition en pentes", du cristal convergent $H^n_v(\tilde{X}^n_\sigma)$ en $\oplus\{H_\lambda ; \lambda \in \mathbb{Q}\}$, telle que $H_\lambda \otimes_{K_v} C_v$ soit isomorphe à une somme directe de copies du F-cristal convergeant standard de pente λ sur C_v.

Ecrivons $\lambda = a/b$ en fraction irréductible, et notons K_b le corps des fractions de $W(\mathbb{F}_{p^b})$, et φ_v l'endomorphisme F-linéaire canonique sur

$$H^n_v(\tilde{X}_\sigma \times_{K_v} \cdots \times_{K_v} \tilde{X}_\sigma)$$

induit par l'endomorphisme de Frobenius "absolu" sur $\tilde{X}_\sigma$. Alors

$$V_\lambda = \{x \in H_\lambda \otimes_{K_v} C_v / \Phi_v^b(x) = p^a x\}$$

est une K_b-structure sur $H_\lambda \otimes_{K_v} C_v$.

Pour chaque V_λ non nul, on choisit une base $(\gamma_\alpha^{(\lambda)} = \gamma_\alpha)$ de $\mathrm{Hom}(V_\lambda , K_b)$ et on note $(\gamma_\alpha^{(\lambda)*})$ la K_b-base duale ; lorsque $m = n = 1$, et lorsque λ décrit $\underset{\sim}{Q}$ en croissant, on obtient ainsi une C_v-base de $H^1_v(\tilde{X}_\sigma) \otimes_{K_v} C_v$. Quitte à priver S de quelques points, on peut supposer que $H^1_{dif}(\tilde{X}/\tilde{S})$ est libre, et on en choisit une base ω_β. Les coefficients de la matrice de l'isomorphisme

$$H^1_{dif}(\tilde{X}_s) \otimes_{R[1/N]} C_v \xrightarrow{\sim} H^1_v(\tilde{X}_\sigma) \otimes_{K_v} C_v$$

dans ces bases s'appellent <u>périodes v-adiques</u> de $\tilde{X}_s$, et sont notées $\int_{\gamma_\alpha} \omega_\beta$ ou $p^v_{\alpha,\beta}$ (α et β décrivent $1, 2, \ldots, 2g$).

On a d'autre part un isomorphisme de F-isocristaux

$$H^{\cdot}_v(\underbrace{\tilde{X}_\sigma \times \cdots \times \tilde{X}_\sigma}_{n \text{ facteurs}}) \simeq \otimes^n \wedge H^1_v(\tilde{X}_\sigma)$$

qui permet d'exprimer l'isomorphisme σ_v (après tensorisation par C_v) à l'aide d'une matrice dont les coefficients sont des polynômes "universels" en les $p^v_{\alpha,\beta}$ (à coefficients entiers).

On remarque qu'il est loisible de multiplier une période par un facteur dans $\underset{\sim}{Q}^*_p$ on obtient une période associée à la même pente.

On examine maintenant ce qui se passe lorsque $\tilde{X}_s$ varie dans la famille algébrique $(\tilde{X}_z)_{z \in \tilde{S}}$.

Pour cela, on considère le F-cristal convergeant

$$[H_v = \underset{\sim}{R}^n f_v * (\mathcal{O}^{\dagger} \tilde{X}_v \times_{\tilde{S}_v} \cdots \times_{\tilde{S}_v} \tilde{X}_v/\tilde{S}_v) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}_v}} \mathcal{O}_{Sp^{-1}(\sigma)} , \Phi_v] ,$$

où σ est un point fermé de $\tilde{S}_v$. Soient s et t deux points de $\tilde{S}$ à valeurs dans R_v au-dessus de σ. On sait qu'il existe un relèvement de Frobenius F_s (resp. F_t) pour lequel s (resp. t) est un point de Teichmüller au-dessus de σ. Evaluons en s et t le F-cristal précédent : Φ_{vF_s} se spécialise en le Frobenius semi-linéaire de la cohomologie rigide de $\tilde{X}^n_\sigma$. Mais les applications

$$\Phi_{vF_v} : F^*_s H_v \longrightarrow H_v \quad \text{et} \quad \Phi_{vF_t} : F^*_t H_v \longrightarrow H_v$$

sont horizontales, par définition. Il en découle que si ξ est le prolongement horizontal d'un élément ξ_s de $H_v \otimes_{\mathcal{O}_{Sp^{-1}(\sigma)}} \mathcal{O}_{(s)}$ vérifiant $s^*[\Phi_v F^a_s]\, \xi_s = p^b\, \xi_s$, alors $\Phi^a_{vF_s}\, \xi = p^b\, \xi$ identiquement.

Comme les deux membres sont horizontaux, cette identité est encore vraie si on change F_s en F_t ; ainsi $t^*[\varphi_v\ F_t^a]\ \xi_t = p^b\ \xi_t$.

Cela montre qu'on peut définir une section horizontale unique $p^v_{\alpha,\beta}(z)$ de

$$R^1\ \tilde{f}_{v*}(\Omega^{\bullet}_{\tilde{X}_v/\tilde{S}_v}) \otimes_{\mathcal{O}_{S_v}} \mathcal{O}_{sp^{-1}(\sigma)} \mid C_v$$

qui se spécialise en $p^v_{\alpha,\beta}$ pour $A = \tilde{X}_s$.

Ainsi, le vecteur formé des fonctions $p^v_{\alpha,\beta}(z)$, lorsque α est fixé, est solution de $\mathfrak{L}_{f|C_v} = 0$, et en tout point z de $sp^{-1}(\sigma)$ à valeur dans $K \subset C_v$, les $p^v_{\alpha,\beta}(z)$ sont des périodes v-adiques pour la fibre $\tilde{X}_z$, au sens ci-dessus.

On notera l'analogie avec le cas où v est une place complexe : les F-cristaux convergents jouent le rôle de systèmes locaux, C_v remplaçant $\underset{\sim}{C}$. C'est pourquoi dans la suite on notera $H^n_v(X^n_s)$ les espaces notés précédemment $H^n(X^n_s \times_{K,v} \underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{Q})$.

4.3. Lien avec les périodes globales.

Comme en 3.2 les $p^v_{\alpha,\beta}(z))_\beta$, qui sont des solutions locales de $\mathfrak{L}_f \otimes C_v$, définissent des solutions locales $P^v_{i,j}(z)$ de $\mathfrak{L} \otimes C_v$, et on a la relation

$$P^v_{i,j}(z) = \sum_{k=1}^{2g\delta} P^v_{i,k}(0)\ Y^v_{kj}(z) .$$

5. Comment les cycles de Hodge forcent des relations entre périodes.

5.1. Relations entre périodes complexes.

L'origine de cette construction remonte à la conjecture de A GROTHENDIECK mentionnée plus haut. Pour simplifier (et éviter ainsi la théorie des cycles de Hodge absolus), on fera l'hypothèse (*).

Alors un cycle de Hodge est une combinaison linéaire à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}(2i\pi)$ de classes de cohomologie de certaines sous-variétés, intersections multiples de diviseurs de puissances de A .

On écrit la classe de cohomologie de De Rham de ces sous-variétés V dans $H^{2i}_{dif}(A^n_{\underset{\sim}{Q}/\overline{\underset{\sim}{Q}}})$, puis leur classe de cohomologie singulière dans

$$H^{2i}(A^n_v, \underset{\sim}{Q}) \otimes (2\sqrt{-1}\ \pi)^i\ \underset{\sim}{Q} \quad (\text{avec } i = \text{codim } V) ,$$

et on compare au moyen des puissances tensorielles ou alternées de l'isomorphisme d'intégration décrit en 4.1.

On obtient ainsi des relations de degré $2i$ à coefficients dans $\overline{\underset{\sim}{Q}}(\pi)$ entre les $p^v_{\alpha,\beta}$. De plus, la variété décrite par ces relations est un $\overline{\underset{\sim}{Q}}(\pi)$-espace principal homogène sous $G(A_v)$ (cf. [1], 1 et 2). Ces relations n'interviennent pas dans le cas (ii) du théorème.

5.2. Relations entre périodes p-adiques.

Ce paragraphe est le noyau de la démonstration du théorème. On reprend les hypothèses du § 2 et de 4.2, avec (*), relativement à la variété abélienne $A = X_s$. Quitte à agrandir K on peut supposer que les diviseurs mentionnés en 5.1 sont définis sur R (on peut prendre en effet un nombre fini de tels diviseurs d'après NÉRON-SEVERI). Soit ξ la classe de cohomologie de De Rham d'un tel diviseur, ou d'une de leurs intersections multiples ; ξ est dans un espace $H^{2i}_{dif}(A^n/B)$.

Il est connu (cf. [5]) que l'image $\sigma_v(\xi)$ de ξ sous l'isomorphisme

$$H^{2i}_{dif}(A^n/B) \otimes_B K_v \xrightarrow{\sim} H^{2i}_v(A^n_v)$$

est "vecteur propre" de Φ_v avec la valeur propre p^i : $\Phi_v(\sigma_v(\xi)) = p^i \sigma_v(\xi)$.

D'après 4.2, ceci équivaut à dire que $\langle \gamma_\alpha^{(\lambda)}, \sigma_v(\xi)\rangle = 0$ si $\lambda \neq i$ et $\langle \gamma_\alpha^{(i)}, \sigma_v(\xi)\rangle \in \mathbb{Q}_p$, λ étant la pente associée à $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^{(\lambda)}$.

D'après 4.2 encore, on peut choisir pour $(\gamma_\alpha^{(\lambda)})$ une base adaptée à celle de $H^1_v(A_\sigma) \otimes_{K_v} C_v$; les relations $\langle \gamma_\alpha^{(\lambda)}, \sigma_v(\xi)\rangle = 0$ pour $\lambda \neq 0$ fournissent, de manière tout à fait analogue à (5.1), des relations de la forme

$$Q^v_\xi(p^v_{\alpha,\beta}) = 0 \quad \text{où, si} \quad \xi \in H^{2i}_{dif}(A^n/B) ,$$

Q^v_ξ est un polynôme en $4g^2$ indéterminées, à coefficients dans $B \subset K$, homogène de degré $2i$.

De manière plus précise, le système de relations $(Q^v_\xi = 0)$ a les propriétés suivantes ;

chaque monôme M de Q^v_ξ s'écrit $M = b_M \prod_{j=1}^{2i} p^v_{\alpha_j,\beta_j}$ avec $b_M \in K$ et $\sum_{j=s}^{2i} \lambda_j \neq i$, en notant $\lambda_j = \lambda(\alpha_j)$ la pente associée à la période v-adique p_{α_j,β_j} ; le seul cas où ce système de relations est vide si $i \neq ng$ (i. e. si ξ n'est pas la classe de cohomologie d'une variété de dimension nulle) est celui d'une place v supersingulière (cas où on a $\sum_{j=1}^{2i} \lambda_j = i$ pour tout $2i$-uplet de pentes).

La remarque fondamentale pour la suite est que, pour ξ fixé, <u>le système de relations $(Q^v_\xi = 0)$ ne dépend que du polygône de Newton du cristal $H^1_v(A_\sigma)$ lorsque $v \nmid N$, $v \nmid \infty$</u>.

A fortiori, en convenant de choisir un système vide pour $v | N$, il n'y a qu'un <u>nombre fini</u> de systèmes de relations $(Q^v_\xi = 0)$ lorsque v décrit V_0^K. En les multipliant, on peut obtenir un système de relations $(R^v_\xi = 0)$ satisfaites par toute place finie non supersingulière et ne divisant pas N, les différents R^v_ξ correspondant à différents choix de $(2i)$-uplets $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2i})$, α_j parcourant $1, \dots, 2g$, tels que $\sum_{j=1}^{2g} \lambda(\alpha_j) \neq i$. Il est clair qu'hormis le cas supersingulier, c'est le polygône ordinaire qui fournira en général le moins de relations Q_ξ.

A l'aide de ces constructions, on montre les lemmes suivants.

LEMME 1. - <u>On suppose que $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ est une variété abélienne de type "multiplications complexes"</u> (ne vérifiant pas nécessairement (*)). <u>Alors on peut choisir un système de</u>

<u>périodes p-adiques</u> $p^v_{\alpha,\beta}$ <u>dans</u> $\bar{\mathbb{Q}}$, <u>pour tout</u> $v \in V_0^K$, $v \not| N$, v <u>ordinaire</u>. (Voir [1], 6.3.2, pour le cas des puissances d'une courbe elliptique.)

LEMME 2. - <u>Soient</u> $X \xrightarrow{f} S$ <u>un schéma abélien comme en 3.2</u>, $G(f)$ <u>son groupe de Hodge générique, et</u> v <u>une place finie</u> $\not| N$ <u>et ordinaire. Soit</u> X_s <u>une fibre vérifiant</u> (*) <u>telle que</u> $\dim G(X_s) < \dim G(f)$. <u>Alors</u>

$$\deg \operatorname{tr}_K p^v_{\alpha,\beta}(X_s) < \deg \operatorname{tr}_{K(S)}(p^v_{\alpha,\beta}(z)) .$$

<u>Esquisse de la preuve</u>. - Comme cet énoncé ne dépend, d'après ce qui précède, que du polygône de Newton de $H^1_v(\tilde{X}_\sigma)$, on se ramène à supposer que le degré résiduel de v est 1, et v non ramifié.

Il s'agit de montrer, par l'absurde, que si $\deg \operatorname{tr}_K p^v_{\alpha,\beta}(X_s) = \deg \operatorname{tr}_{K(S)}(p^v_{\alpha\beta}(z))$, alors toute classe de cohomologie de De Rhan ξ_s d'un diviseur sur une puissance de X_s, se prolonge horizontalement en une classe de cohomologie ξ d'une combinaison de diviseurs sur une puissance de X, toute entière (en vertu du théorème de Lefschetz). Or l'égalité des degrés de transcendance montrerait qu'on peut supposer, quitte à remplacer S par un revêtement étale fini surjectif, que les relations $Q^v_{\xi_s}(p^v_{\alpha,\beta}(s)) = 0$ s'étendent en des relations "fonctionnelles" $Q^v(p^v_{\alpha,\beta}(z)) \equiv 0$ à coefficients dans $K(S)$. On pourrait ainsi construire une section globale ξ de $H^2_{dif}(X^n/\tilde{S})$ prolongeant ξ_s telle que les périodes de ξ satisfassent aux relations $Q^v(p^v_{\alpha,\beta}(z)) \equiv 0$, ce qu'on écrit formellement $Q^v_\xi(p^v_{\alpha,\beta}) = 0$, avec $\lambda(\alpha_1) + \lambda(\alpha_2) \neq 1$. En tout point t de $\tilde{S}_v(R_v)$ relevant σ on aurait le système de relations $Q^v_{\xi_t}(p^v_{\alpha,\beta}(t)) = 0$ où $Q^v_{\xi_t}$ désigne le polynôme $Q^v_\xi = Q^v$ spécialisé en t ; on va montrer que ceci entraîne l'horizontalité de

$$\xi \otimes 1 \quad H_{v,s} := H^2_{dif}(\tilde{X}^n/B) \otimes_B \mathbb{Z}_p[[t]]$$

$\mathbb{Z}[[t]]$ étant identifié (non canoniquement) à l'algèbre du spectre formel complété de $\tilde{S}_v$ le long du point σ (cette identification est loisible, puisque $\tilde{S}_v$ est lisse et v est non ramifié de degré 1).

Il existe un relèvement unique φ de l'endomorphisme de Frobenius absolu de $\sigma = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$ tel que $\varphi^*(t) = t^p$; à ce relèvement correspond un morphisme horizontal $\Phi_{v,\varphi} : \varphi^* H_{v,s} \to H_{v,s}$.

Par hypothèse, on a un système de relations $(Q^v_\xi(p^v_{\alpha,\beta}) = 0 ;\ \lambda(\alpha_1) + \lambda(\alpha_2) \neq 1)$, ce qui revient à dire que $\Phi^*_{v,\varphi}[\varphi^*(\xi \otimes 1)] = p(\xi \otimes 1)$. On utilise alors une astuce de A. OGUS [5] : comme $\varphi^*(dt) = pt^{p-1}\, dt$, φ^* envoie $\Omega^2_{\operatorname{Spf}\mathbb{Z}_p[[t]]}$ dans $(t)\, \Omega^1_{\operatorname{Spf}\mathbb{Z}_p[[t]]}$ et un calcul simple montre que si

$$\nabla(\xi \otimes 1) \in (t^j)\, \Omega^1_{\operatorname{Spf}\mathbb{Z}_p[[t]]} \otimes H_{v,s} ,$$

alors

$$p\, \nabla[\xi \otimes 1] = (\varphi^* \otimes \Phi_{v,\varphi}\, \varphi^*)[\nabla(\xi \otimes 1)] \in (t^{(j+1)}\, \Omega^1_{\operatorname{Spf}\mathbb{Z}_p[[t]]} \otimes H_{v,s} .$$

Ainsi $\nabla(\xi \otimes 1)$ est nul, donc ξ est localement horizontal ; comme c'est une section globale, ξ est horizontal.

Pour conclure à l'algébricité, on utilise alors ([5], 2.12).

Ainsi, on en fait prouvé le résultat plus précis suivant : tout cycle de Hodge exceptionnel sur une fibre X_t (i. e. ne provenant pas d'un cycle de Hodge absolu sur une fibre "générique" de f) fournit, pour chaque place v comme dans le lemme, au moins une relation $Q_\xi^v = 0$ en les $p^v_{\alpha,\beta}(X_t)$ à coefficients dans K, indépendante des relations obtenues par spécialisation en t des relations algébriques à coefficients dans $K(S)$ entre périodes "fonctionnelles" $p^v_{\alpha,\beta}(z)$; de plus, il existe un nombre fini de polynômes Q_ξ tels que la relation $Q_\xi^v = 0$ soit l'une des relations $Q_\xi = 0$ d'après la remarque fondamentale ci-dessus).

5.3. Relations entre périodes globales.

Dans le cas des périodes complexes, c'est la minoration, déduite de 5.1.

$$\deg \operatorname{tr}_{\underline{Q}}\, p^v_{\alpha,\beta}(X_t) \leqslant \dim G(X_{t,v}) + 1 \ ,$$

qui remplace le lemme précédent.

Les relations Q_ξ entre $p^v_{\alpha,\beta}$ pour des places complexes distinctes n'ont aucune raison d'être égales, comme on peut déjà le voir en dimension 1.

Pour obtenir une relation satisfaite par $p^v_{\alpha,\beta}$ pour tout v complexe, on les multiplie entre elles, ce qui donne des relations S_ξ de degré à priori $2[K(t) : \underline{Q}]$ (dépendant donc du "degré" de t).

Que v soit complexe ou finie, le principe pour obtenir des relations entre les $Y_{ij}(z)$ consiste à éliminer $P_{ij}(z)$ et $P_{ij}(0)$ entre les relations $R_\xi(P_{ij}(z))$ ou $R_\xi\, S_\xi(P_{ij}(z))$ (dans le cas (i) du théorème), les relations semblables pour $z = 0$ et les relations $P_{ij}(z) = \sum_k P_{ik}(0)\, Y_{kj}(z)$.

Dans les cas (i) et (ii) c'est possible sous les hypothèses indiquées, compte tenu de ce que X_s est une variété abélienne à multiplications complexes, donc $\dim G(X_s) \leqslant \dim X_s$, et en vertu du lemme 1.

Pour les détails du cas (i), voir [1], 5.3.4.

6. Conclusion de la preuve du théorème.

On applique l'énoncé de Bombieri, rappelé en 3.1, à l'opérateur puissance symétrique k-ième de $\pi_* \mathcal{E}_f \oplus \dots \oplus \pi_* \mathcal{E}_f \oplus d/dz$ ($2g\delta$ copies de $\pi_* \mathcal{E}_f$) dont les monômes de degré $\leqslant k$ en les $Y_{ij}(z)$ sont des solutions au voisinage de 0.

Dans le cas (i), on prend pour M l'ensemble des places de $K' = K(t)$ (que l'on prend comme nouveau corps de base K, ce qui est loisible, puisque les constantes de l'énoncé de Bombieri sont indépendantes de ce corps), qui satisfont :

$$\lambda_v(t) > \log^+ \frac{1}{r_v(Y_{ij})} \ ;$$

dans le cas (ii), on prend l'intersection de cet ensemble avec V_K^0 .

D'après 5.3., on a en chaque point t , pour lequel X_t vérifie l'une des hypothèses du théorème, une relation algébrique entre les $Y_{ij}(\pi(t))$ de degré $\mathcal{O}[K(t) : \mathbb{Q}])$ [resp. $\mathcal{O}(1)$] dans le cas (i) (resp. (ii)). De plus, ces quantités sont effectivement calculables.

On conclut en faisant tendre k vers l'infini avec $h(t)$ de manière à ce que le nombre de monômes de degré $\leqslant k$ en les Y_{ij} linéairement indépendants sur $\bar{\mathbb{Q}}(z)$ soit de l'ordre de $(h(t)/\log h(t))^{1/2}$ (selon la méthode exposée dans [4], théorème 7).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDRÉ (Yves). - Structure de Hodge, équations différentielles p-adiques et indépendance algébrique de période d'intégrales abéliennes, thèse de 3e cycle, Université Paris-VI, juin 1984.

[2] BERTHELOT (Pierre). - Géométrie rigide et cohomologie de variétés algébriques de caractèristique p , Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 9e année, 1981/82, n° J2, 18 p.

[3] BERTHELOT (Pierre), BREEN (L), MESSING (W.). - Théorie de Dieudonné cristalline II. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1982 (Lecture Notes in Mathematics, 930).

[4] BOMBIERI (E.). - On G-functions, "Recent progress in analytic number theory", vol. 2, p. 1-67. - London, New York, Toronto [etc.], Academic Press, 1981.

[5] DELIGNE (P.), OGUS (A. et al).-Hodge cycles on abelian varieties, "Hodge cycles, motives and Shimura varieties", p. 9-100, 357-414. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1982 (Lecture Notes in Mathematics, 900).

[6] KATZ (Nicholas). - Travaux de Dwork, "Séminaire Bourbaki", vol. 1971/72, exp. 409, p. 167-200. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 317).

[7] KATZ (Nicholas). - Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turritin. - Paris, Presses universitaires de France, 1970 (Institut des hautes Etudes scientifiques ; Publications mathématiques, 39, p. 175-232).

[8] MUMFORD (David). - Families of Abelian varieties, "Algebraic groups and discontinuous subgroups", p. 347-351. - Providence, American mathematical Society, 1966 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 9).

[9] RIBET (K). - Hodge classes on certain types of Abelian varieties, Amer. J. of Math., t. 105, 1983, p. 523-538.