PIERRE JARRAUD

À propos de G. A. G. R.

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. nº 25, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A16_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, R. ROBBA)
11e année, 1983/84, n° 25, 4 p.
4 juin 1984

A PROPOS DE G. A. G. R.

par Pierre JARRAUD (*)

Les théorèmes de compariason entre géométrie algébrique et géométrie analytique établis par SERRE [6] dans le cas d'une variété projective complexe et généralisés par GROTHENDIECK [5] au cas d'un schéma propre sur $\underset{\sim}{C}$ et au cas relatif, restent valables, mutatis mutandis, dans le cas analytique rigide (KÖPF [4]) les techniques du cas complexe se transposant au cas ultramétrique. Cet exposé est un bref résumé, sans démonstration, des principaux résultats de [4] où l'on pourra trouver tous les détails.

1. Hypothèses.

Soit k un corps valué complet ultramétrique (non nécessairement algébrique clos et de caractéristique quelconque).

Soit A une k-algèbre affinoïde.

2. Définitions.

(a) Un espace annelé (en anneaux locaux) est un triplet $(X , \mathcal{T}_X , \mathcal{O}_X)$ où
- X est un espace topologique,
- $\mathcal{T}_X$ est une topologie de Grothendieck sur X,
- $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'anneaux dont les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$ sont des anneaux locaux.

(b) Un morphisme $F : (X , \mathcal{T}_X , \mathcal{O}_X) \dashrightarrow (Y , \mathcal{T}_Y , \mathcal{O}_Y)$ d'espaces annelés est la donnée d'un couple $(f , f^\#)$ où $f : X \dashrightarrow Y$ est une application continue telle que l'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un recouvrement ouvert) admissible en est un et où $f^\# : \mathcal{O}_Y \dashrightarrow f_* \mathcal{O}_X$ est un morphisme de faisceaux (avec $f^\#_{f(x)} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \dashrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$).

(c) Un espace annelé $(X , \mathcal{T}_X , \mathcal{O}_X)$ est un

schéma (algébrique) sur A	espace analytique (rigide) sur A

s'il existe un recouvrement admissible $\{X_i\}_{i\in I}$ tel que pour tout $i \in I$ le triplet $(X_i , \mathcal{T}_{X|X_i} , \mathcal{O}_{X|X_i})$ est

le schéma affine associé à une A-algèbre A_i (i. e. : $X_i = \operatorname{Spec} A_i$, avec la	l'espace analytique affinoïde associé à une A-algèbre affinoïde A_i (i. e.

(*) Pierre JARRAUD, 5 avenue Porte de Villiers, 75017 PARIS.

topologie de Zariski et $\mathcal{O}_{X|X_i}$ le faisceau structural)

X est <u>localement de type fini</u> (en abrégé : loc. t. f.) si pour tout i, A_i est une A-algèbre de type fini.

$X_i = \mathrm{Sp}\, A_i$, $\mathcal{T}_{X|X_i}$ sous ensembles admissibles : les rationnels, recouvrements admissibles : les finis et $\mathcal{O}_{X|X_i}$: le faisceau structural).

(d) Un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-modules sur un espace annelé X est dit <u>cohérent</u> si $\mathcal{F}$ est de type fini et si pour tout ouvert $\mathcal{U}$ admissible, tout entier $n > 0$ et tout homomorphisme u $\mathcal{O}_X^n \to \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ le noyau de u est de type fini (pour des traductions concrètes voir [2] p. 111 et [1] p. 108).

3. <u>Existence de X^{an} et premières propriétés.</u>

PROPOSITION. ([4] § 1 et § 2). - <u>Pour tout schéma X loc. t. f. sur A il existe un espace analytique sur A, X^{an} et un morphisme $a : X^{an} \to X$ solutions du problème universel</u> : "<u>pour tout Z espace analytique (rigide) sur A et tout morphisme $f : Z \to X$ il existe un unique morphisme $g : Z \to X^{an}$ tel que</u> $f = a \circ g$ ". <u>De plus la construction est fonctorielle : si on a un morphisme</u> $f : X \to Y$, <u>il existe</u> $f^{an} : X^{an} \to Y^{an}$ <u>tel que</u> $a \circ f = f^{an} \circ a$.

<u>Remarques.</u>

La construction se faisant localement, on étudie d'abord $X = \mathrm{Spec}\, A_i$, on passe à $\mathrm{Max\,Spec}\, A_i$ qu'on recouvre par une union croissante d'affinoïdes (cf. [1] p. 102).

Le cas où X est une variété projective est très simple (surtout si on suppose $A = k$ algébriquement clos).

Soit $X \hookrightarrow \underset{\sim}{P}^n$ une variété projective définie par s polynômes homogènes $f_1, \dots, f_s$ de $k[Z_0, \dots, Z_n]$

$$X = \bigcup_{i=0}^n X_i$$

où $X_i = \mathrm{Spec}\, \dfrac{k[Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i]}{((f_j(Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i))_{j=1,\dots,s})}$

alors $X_i \cap X_j =$

$$\mathrm{Max\,Spec}\, \frac{k[Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i, (Z_j/Z_i)^{-1}]}{(f_\ell(Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i)_{\ell=1,\dots,s})}$$

$X^{an} = \{x \in \underset{\sim}{P}^n \ ; \ f_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, s\}$

$X^{an} = \bigcup_{i=0}^n X_i'$

$$X_i' = \mathrm{Sp}\, \frac{k\langle Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i\rangle}{((f_j(Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i)_{j=1,\dots,s})}$$

$$X_i' \cap X_j' = \mathrm{Sp}\, \frac{k\langle Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i, (Z_j/Z_i)^{-1}\rangle}{(f_\ell(Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i)_{\ell=1,\dots,s})}$$

Dans les deux cas l'isomorphisme de recollement ρ_{ij} $X_i \cap X_j \to X_j \cap X_i$ est donné par

$$\rho_{ij}\left(\frac{Z_k}{Z_i}\right) = \frac{Z_k}{Z_j} \times \left(\frac{Z_i}{Z_j}\right)^{-1} .$$

Remarque fondamentale. - Si $x \in X$ est un point fermé de X, par passage aux fibres a induit un morphisme d'anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X^{an},x}$ qui induit un isomorphisme des complétés (le long des idéaux maximaux).

PROPOSITION. - Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X on peut lui associer un faisceau $\mathcal{F}^{an}$ sur X^{an} qui est cohérent.

(Ou bien on suit [4] § 3 ou bien on pose $\mathcal{F}^{an} = a^* \mathcal{F}$ au sens de EGA 0 (4.3.1) ou de [2] p. 110 et EGA 0 (5.3.11) montre que $\mathcal{F}^{an}$ est cohérent si $\mathcal{F}$ l'est.)

4. Propreté.

Un morphisme $f\ X \to Y$ de schémas est propre s'il est séparé, de type fini et universellement fermé.

Un morphisme d'espaces analytiques rigides est propre s'il l'est au sens de Kiehl [3] § 2.

Remarque. - Un morphisme propre au sens analytique n'est pas forcément propre au sens topologique (contrairement au cas complexe).

PROPOSITION. - Si $f\ X \to Y$ est propre, alors $f^{an}\ X^{an} \to Y^{an}$ est propre.

5. Les théorèmes de comparaison.

Soit X un schéma propre sur A (algèbre affinoïde sur k).

(a) Pour tout faisceau (algébrique) cohérent $\mathcal{F}$ sur X, l'application induite par $a : H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(X^{an}, \mathcal{F}^{an})$ est un isomorphisme pour tout entier $q \geq 0$.

(b) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux faisceaux cohérents sur X alors la flèche $f \mapsto f^{an} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{X^{an}}(\mathcal{F}^{an}, \mathcal{G}^{an})$ est un isomorphisme.

(c) Si $\mathcal{F}'$ est un faisceau cohérent sur X^{an}, il existe un (unique à isomorphisme près) faisceau $\mathcal{F}$ cohérent sur X tel que $\mathcal{F}^{an} \sim \mathcal{F}'$.

Variante relative. - Soient X et Y deux schémas loc. t. f. sur A et $f : X \to Y$ un morphisme propre, alors pour tout entier $q \geq 0$ et tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$ la flèche naturelle

$$(R^q f_* \mathcal{F})^{an} \to R^q f_*^{an} \mathcal{F}^{an} \text{ est un isomorphisme.}$$

6. Les conséquences.

Elles sont les mêmes que dans le cas complexe.

(a) (Théorème de Chow) : tout sous ensemble analytique (rigide) de l'espace projectif est algébrique.

(b) Si X est un schéma propre sur A on a des équivalences de catégories :

$$\{\text{fibrés vectoriels (algébriques) sur } X\} \longrightarrow \{\text{fibrés vectoriels analytiques sur } X^{an}\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{faisceaux localement libres} \\ \qquad\text{(algébriques) sur } X\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{faisceaux localement libres} \\ \qquad\text{(analytiques) sur } X^{an}\end{array}\right\}$$

$$\{\text{modules à connexion sur } X\} \longrightarrow \{\text{modules à connexion sur } X^{an}\} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] FRESNEL (Jean) et VAN DER PUT (Marius). - Géométrie analytique rigide et applications. - Boston, Basel, Stuttgart, Birkhäuser, 1981 (Progress in Mathematics, 18).

[2] HARTSHORNE (Robin). - Algebraic geometry. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Graduate Texts in Mathematics, 52).

[3] KIEHL (Reinhardt). - Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Invent. Math., t. 2, 1967, p. 191-214.

[4] KÖPF (Ulrich). - Über eigentliche Familien algebraischen Varietäten über affinoïden Räumen, Schriftenreihe des mathematischen Institut der Univ. Münster, 2.Serie, Heft 7, 1974, IV + 72 p.

[5] RAYNAUD (Michèle). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, SGA 1 ; "Revêtements étales et Groupe fondamental". - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 224).

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955/56, p. 1-42.

[EGA] GROTHENDIECK (Alexandre). - Eléments de géométrie algébrique. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications Mathématiques, 4).

N.-B. - Ajouté en novembre 1984 : une référence en français est maintenant disponible :

FRESNEL (J.). - Géométrie analytique rigide, cours à l'Université de Bordeaux, 1984 (Notes multigraphiées).