YVETTE AMICE

Prolongement analytique des sommes de Gauss, III

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 10, n° 1 (1982-1983), exp. n° 6, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1982-1983__10_1_A4_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
10e année, 1982/83, n° 6, 13 p.
15 décembre 1982

PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES SOMMES DE GAUSS, III

par Yvette AMICE (*)

1. Introduction.

On utilise les notations de [3]. On y a montré que si $f \in C_u^1(\underset{\sim}{Z}_p(m))$, la fonction $G(f , T) = (f\theta_T * 1)'(-1)$ est analytique sur $D_m = \{T \in \underset{\sim}{C}_p ; |T^m - 1| < 1\}$, où θ_T désigne le caractère p-adique continu du groupe additif de $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ défini par $\theta_T(n) = T^n$ pour $n \in \underset{\sim}{Z}$.

Si $f = \chi$ est un caractère de Dirichlet de conducteur $d = mp^e$, on a, pour $\zeta \in \mu_d$,

$$G(\chi , \zeta) = \frac{1}{d} \sum_{a=0}^{d-1} \chi(a) \zeta^a :$$

c'est donc une somme de Gauss classique.

Comme $f \dashrightarrow G(f , .)$ est une application injective de $C_u^1(\underset{\sim}{Z}_p(m))$ dans l'espace des fonctions analytiques sur D_m , il est naturel de chercher à inverser cette application, c'est-à-dire à reconstituer f à partir de $G(f , .)$: c'est l'objet du § 2.

Au § 3, on donne une interprétation des transformations $f \dashrightarrow G(f , .)$ et $G(f , .) \dashrightarrow f$ en termes d'analyse fonctionnelle, et de distributions dont la restriction aux fonctions localement constantes est invariante par translation.

D'autre part, si $F_f(T) = \sum_{n\geq0} f(n) T^n$ admet un prolongement analytique au point 1 , on a $G(f , 1) = - F_{f'}(1)$. En particulier, si χ est un caractère de Dirichlet de conducteur mp^e dont le facteur modulo m est non trivial, on sait que, pour $s \in \underset{\sim}{C}_p$ et $|s| < p^{1-(1/(p-1))}$ on a

$$(1) \qquad s L_p(1 - s , \chi) = - G(\chi_0 , 1) = s F_{(\chi\omega^{1})_{s-1}}(1) ,$$

où $\varphi_s(x) = \varphi(x)\langle x\rangle^s$. On démontre au § 4 des relations exprimant $F_f(1)$ comme limite de combinaisons de valeurs de f sur $\underset{\sim}{N}$: l'intérêt de telles formules réside, par exemple, dans (1).

2. Formule d'inversion.

Rappelons [3] que si $f \in C_u^1(\underset{\sim}{Z}_p(m))$, on a

(*) Yvette AMICE, Mathématiques, Aile 45-55, Université Paris-7, 2 place Jussieu 75251 PARIS CEDEX 05.

(2) $$- \mathrm{Log}\, T\, F_f(T) = F_{f'}(T) + G(f\ ,\ T)\ ,$$

où cette relation est, en général, formelle. Chacune des fonctions qui y figurent admet un unique développement en "série de Laurent"

$$\sum_{k\in \underset{\sim}{Z}} A_k(T)(1 - T^m)^k\ ,$$

où A_k est un polynôme de degré strictement inférieur à m . Pour F_f et $F_{f'}$, on a $A_k = 0$ pour $k \geq 0$, et la série converge pour $|T^m - 1| \geq 1$; pour Log et $G(f\ ,\ .)$, on a au contraire $A_k = 0$ pour $k < 0$, et la série converge pour $|T^m - 1| < 1$. On montre que les séries correspondant à Log et F_f sont formellement multipliables, et la relation (2) signifie que $F_{f'}$ (resp. $G(f\ ,\ T)$) sont les parties à indices négatifs (resp. positifs ou nuls) de la série produit.

Il est clair que $f \overset{\mathcal{G}}{\dashrightarrow} G(f\ ,\ .)$ est une application injective de $\mathcal{C}^1_u(\underset{\sim}{Z}_p(m))$ dans l'espace des fonctions analytiques sur D_m : le théorème ci-dessous fournit une forme explicite de l'application inverse (qui n'est définie que sur l'image $\mathcal{G}(\mathcal{C}^1_u(\underset{\sim}{Z}_p(m)))$).

THÉORÈME 2.1. - <u>Soit</u> $f \in \mathcal{C}^1_u(\underset{\sim}{Z}_p(m))$, $a \in \underset{\sim}{Z}_p(m)$ <u>et</u> $T \in D_m$, <u>on a</u>

(3) $$f(a) = \lim_{h\to\infty}\Big(\sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} (\lambda T)^{-a}\, G(f\ ,\ \gamma T)\Big)\ ,$$

<u>où cette limite, indépendante de</u> T , <u>est uniforme en</u> a .

Remarquons que lorsque $f = \chi$ est un caractère de Dirichlet de conducteur mp^e , on a $G(\chi\ ,\ \gamma) = 0$ si $\gamma \in \mu_{mp^h}$, mais n'est pas une racine primitive mp^e-ième de 1 . En choisissant $T = 1$ dans (3), on retrouve la formule classique

$$\chi(a) = \sum_{\gamma\in\mu_{mp^e}} \gamma^{-a}\, G(\chi\ ,\ \gamma)$$

qui est une formule d'inversion de la transformée de Fourier $\chi \dashrightarrow G(\chi\ ,\ \gamma)$ sur $\underset{\sim}{Z}/mp^e\,\underset{\sim}{Z}$.

LEMME 2.2. - <u>Cas où</u> $a = 0$. <u>Pour</u> $f \in \mathcal{C}^1_u(\underset{\sim}{Z}_p(m))$ <u>et</u> $T \in D_m$

(4) $$f(0) = \lim_{h\to\infty}\Big(\sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} G(f\ ,\ \gamma T)\Big)\ .$$

En même temps que ce lemme nous démontrons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.3. - <u>Sous les mêmes hypothèses pour</u> f

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{mp^h}\Big(\sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} G(f\ ,\ \gamma T) - f(0)\Big) = -\frac{1}{2}\,(f(0).\log T + f'(0))\ .$$

On utilise la relation (2) :

$$\sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} G(f\ ,\ \gamma T) = - \sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} F_{f'}(\gamma T) - \mathrm{Log}\ T.\ \sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} F_f(\gamma T)\ .$$

Or on a

$$\sum F_{f'}(\gamma T) = mp^h.\ \sum_{k\geq 0} f'(kmp^h)\ T^{kmp^h}$$

et

$$\sum F_f(\gamma T) = mp^h.\ \sum_{k\geq 0} f(kmp^h)\ T^{kmp^h}$$

où les sommations non précisées portent sur les γ parcourant μ_{mp^h} .

Supposons d'abord que f soit localement affine, c'est-à-dire que pour h assez grand et $k \in \underset{\sim}{Z}$,

$$f(kmp^h) = f(0) + kmp^h\ f'(0) \quad \text{et} \quad f'(kmp^h) = f'(0)\ .$$

On a dans ce cas

$$\frac{1}{mp^h}\ (\sum G(f\ ,\ \gamma T) - f(0)) = \frac{-\ f(0)}{mp^h}\ [1 + \frac{mp^h\ \ \mathrm{Log}\ T}{1 - T^{mp^h}}]$$

$$\frac{-\ f'(0)}{1 - T^{mp^h}}\ [1 + \frac{mp^h\ T^{mp^h}\ \mathrm{Log}\ T}{1 - T^{mp^h}}]\ .$$

On déduit du développement usuel du logarithme que

$$\lim_{h\to\infty} (-\ \frac{1}{mp^h}\ (1 + \frac{mp^h\ \ \mathrm{Log}\ T}{1 - T^{mp^h}})) = -\ \frac{1}{2}\ \mathrm{Log}\ T\ ,$$

et

$$\lim_{h\to\infty} (-\ \frac{1}{1 - T^{mp^h}}\ (1 + \mathrm{Log}\ T\ \frac{T^{mp^h}\ mp^h}{1 - T^{mp^h}})) = -\ \frac{1}{2}$$

ce qui prouve le lemme et le corollaire dans le cas particulier où f est localement affine.

Dans le cas général, posons

$$\eta_h(k) = \frac{1}{mp^h}\ (f(kmp^h) - f(0) - kmp^h\ f'(0))\ ,$$

alors $\eta_h \in C_u^1(\underset{\sim}{Z}_p(m))$, $\eta_h'(k) = f'(kmp^h) - f'(0)$ et

$$\frac{\eta_h(k) - \eta_h(k')}{k - k'} = \frac{f(kmp^h) - f(k'\ mp^h)}{(k - k')\ mp^h} - f'(0)\ ,$$

et l'on vérifie que $\eta_h \longrightarrow 0$ dans C_u^1 quand $h \longrightarrow \infty$.

On peut se ramener au cas où $f(0) = f'(0) = 0$, compte tenu de la première partie de la démonstration. On a dans ce cas

$$\frac{1}{mp^h}(\sum G(f , \gamma T) - f(0))$$

$$= - \sum_{k\geq 0} \eta_h'(k)\, T^{kmp^h} - mp^h(\sum_{k\geq 0} \eta_h(k)\, T^{kmp^h})\, \mathrm{Log}\, T = G(\eta_h , T^{mp^h}) .$$

Or on sait que $f \longrightarrow G(f , T)$ est une application continue de C_u^1 dans $A(D_m)$, donc quand $h \longrightarrow \infty$, $G(\eta_h , .) \longrightarrow 0$ dans $A(D_m)$, ce qui achève la démonstration.

LEMME 2.4. - Soit $f \in C_u^1(\underset{\sim}{Z}_p(m))$, $a \in \underset{\sim}{Z}_p(m)$, et f_a définie par $f_a(t)=f(t+a)$, alors

(5) $G(f_a , T) = T^{-a}\{(f'\,\theta_T * 1)(a - 1) + \mathrm{Log}\, T(f\theta_T * 1)(a - 1) + G(f , T)\}$.

La démonstration se fait par un calcul direct :

$$(f_a\,\theta_T * 1)(mp^h - 1) = \sum_{j=0}^{mp^h-1} f(a + j)\, T^j$$

$$= T^{-a}((f\theta_T * 1)(a + mp^h - 1) - (f\theta_T * 1)(a - 1)) .$$

Donc

$$G(f_a , T) = (f_a\,\theta_T * 1)'\,(- 1) = T^{-a}(f\theta_T * 1)'\,(a - 1) .$$

Mais, pour toute $g \in C_u^1(\underset{\sim}{Z}_p(m))$ et tout $x \in \underset{\sim}{Z}_p(m)$,

$$(g * 1)'(x) = (g' * 1)(x) + (g * 1)'\,(- 1) .$$

Pour $g = f\,\theta_T$, donc $g' = f'\,\theta_T + \mathrm{Log}\, T\, f\,\theta_T$, on trouve aussi

$$G(f_a , T) = T^{-a}((f'\,\theta_T * 1)(a - 1) + \mathrm{Log}\, T\,(f\theta_T * a)(a - 1) + (f\theta_T * 1)'\,(- 1))$$

ce qui est exactement la formule annoncée.

Démonstration du théorème. - Compte tenu du lemme 2.2 appliqué à f_a , on a

$$f(a) = \lim_{h\to\infty} \sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} G(f_a , \gamma T) .$$

Posons $\|f\| = \sup_{t\in \underset{\sim}{Z}_p(m)} |f(t)|$; d'après le corollaire 2.3 on a, pour T fixé et $h \geq h(f)$ (indépendant de a),

$$|\sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} G(f_a , \gamma T) - f(a)| \leq |mp^h|\, \max(\|f\|\, |\mathrm{Log}\, T| , \|f'\|) .$$

le théorème sera donc démontré si l'on prouve que, uniformément par rapport à a,

(6) $\lim_{h\to\infty} (\sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} (\gamma T)^{-a}\, (f'\,\theta_{\gamma T} * 1)(a - 1) + \mathrm{Log}\, T\,(f\theta_{\gamma T} * 1)(a - 1)) = 0$

ce qui va résulter du lemme suivant.

LEMME 2.5. - <u>Soit</u> g <u>continue sur</u> $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ <u>et</u> $\|g\| = \sup_{t\in\underset{\sim}{Z}_p(m)}|g(t)|$, <u>alors</u>

$$\|\sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} (\gamma T)^{-a}\, g\, \theta_{\gamma T} * 1\| \leq |mp^h|\ \|g\| .$$

En effet,

$$\sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} (\gamma T)^{-a}\, \theta_{\gamma T} = mp^h\ 1_{a+mp^h\underset{\sim}{Z}_p(m)}$$

où 1_A désigne la fonction caractéristique de A , et comme $\|f * g\| \leq \|f\|\ \|g\|$, le lemme en résulte.

On en déduit que le membre de gauche de (6) est majoré par

$$|mp^h|\ \max(\|f'\| , |\log T|\ \|f\|) ,$$

d'où le théorème.

COROLLAIRE 2.6. - <u>Sous les hypothèses de 2.1, on a</u>

$$|\sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} (\gamma T)^{-a}\, G(f , \gamma T) - f(a)| \leq |mp^h|\ \max(\|f'\| , |\log T|\ \|f\|) .$$

3. Interprétation du théorème d'inversion.

On peut donner de ce théorème une interprétation en termes d'analyse fonctionnelle. Rappelons [2] qu'une <u>distribution</u> sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions localement analytiques sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$. A une telle dsitribution μ est associée une fonction $\tilde{G}_\mu$ définie sur le dual (groupe des caractères continus) de $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ par

$$\tilde{G}_\mu(\theta) = (\mu|\theta) .$$

Le dual est identifié à $D_m = \{T \in \underset{\sim}{C}_p ;\ |T^m - 1| < 1\}$ par $\theta \dashrightarrow \theta(1) \in D_m$, et $T \dashrightarrow \theta_T$ est le paramétrage canonique du dual dans D_m . On associe donc à la distribution μ une fonction G_μ définie sur D_m par

$$G_\mu(T) = \tilde{G}_\mu(\theta_T) = (\mu\,|\,\theta_T) .$$

On sait [2] qu'ainsi l'espace des distributions correspond à l'espace des fonctions analytiques sur D_m .

Parmi les distributions, celles qui se prolongent en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^1_u(\underset{\sim}{Z}_p(m))$ sont appelés <u>distributions tempérées</u>. On démontre qu'une distribution est tempérée si, et seulement si, la fonction analytique sur D_m qu'elle définit est $\mathcal{O}(\mathrm{Log})$.

On sait depuis longtemps [6] qu'il n'existe pas de mesure (i. e. forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p(m))$ qui soit invariante par translation.

LEMME 3.1. - *Soit* μ *une distribution tempérée sur* $\underset{\sim}{Z}_p(m)$, *la restriction de* μ *aux fonctions localement constantes est invariante par translation si, et seulement si, la fonction* G_μ *analytique sur* D_m *correspondant à* μ *est de la forme*

$$(7) \qquad G_\mu(T) = - C \frac{\operatorname{Log} T}{1 - T} + A(T) \operatorname{Log} T$$

où A *est une fonction analytique bornée sur* D_m , et $C = (\mu|1)$.

Notons comme plus haut $f_a(t) = f(t + a)$ la translatée de f par a , et soit $M = \bigcup_h \mu_{mp^h}$ l'ensemble des racines de l'unité appartenant à D_m . Comme l'espace des fonctions localement constantes est engendré par les $(\theta_\gamma)_{\gamma\in M}$, la propriété "la restriction de μ aux fonctions localement constantes est invariante par translation" équivaut à

$$" \forall\, \gamma \in M \ , \quad \forall\, a \in \underset{\sim}{Z}_p(m) \ , \quad (\mu|(\theta_\gamma)_a) = (\mu|\theta_\gamma) " .$$

Comme on a $(\theta_\gamma)_a = \gamma^a\,\theta_\gamma$, ceci équivaut donc à

$$"\text{pour} \quad \gamma \in M \ , \quad \gamma \neq 1 \ , \quad (\mu|\theta_\gamma) = G_\mu(\gamma) = 0 " .$$

D'autre part, puisque G_μ est analytique, ceci équivaut à

$$" G_\mu(T) + C \frac{\operatorname{Log} T}{1 - T} \text{ est divisible par } \operatorname{Log} T " .$$

Comme de plus, $G_\mu(T) = \mathcal{O}(\operatorname{Log})$, le lemme en résulte.

Nous noterons ν *la distribution tempérée de masse totale* $C = 1$ *qui correspond à* $A = 0$: c'est en un sens la plus simple des distributions satisfaisant aux hypothèses du lemme 3.1.

On sait que, pour toute distribution μ , on a

$$(\mu|f) = \operatorname{Res}_\infty(F_f\, G_\mu) \ ,$$

sous réserve que $(\mu|f)$ ait un sens, c'est-à-dire que μ soit dans un sous-espace de l'espace des distributions qui sont le dual d'un sous-espace de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p)$ auquel f appartient [2]).

Notons μ_A la mesure sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ associée à la fonction analytique bornée A , alors la formule (7) admet une autre lecture :

LEMME 3.2. - *Soit* μ *une distribution tempérée telle que*

$$G_\mu(T) = - \frac{\operatorname{Log} T}{1 - T} + A(T) \operatorname{Log} T$$

où A *est analytique bornée sur* D_m , *alors pour* $f \in \mathcal{C}^1_u(\underset{\sim}{Z}_p(m))$, *on a*

(8) $$(\mu|f) = (f * 1)'\ (-1) - (\mu_A|f') \ ,$$

<u>où</u> μ_A <u>est la mesure associée à</u> A .

En effet,

$$G_\mu\, F_f = -\operatorname{Log} T\, F_{f*1} + A(T) \operatorname{Log} T\, F_f \ .$$
$$= -\operatorname{Log} T\, F_{f*1} - A(T)\, F_{f'} - A(T)\, G(f\ ,\ T)\ .$$

Or on sait que

$$\operatorname{Res}_\infty(-\operatorname{Log} T\, F_g) = g'(-1)$$

puisque

$$-\operatorname{Log} T\, F_g = F_{g'} + G(g\ ,\ T)$$

lorsque $g \in C_u^1(\underset{\sim}{Z}_p(n))$, on en déduit que

$$\operatorname{Res}_\infty(G_\mu\, F_f) = (\mu|f) = (f * 1)'\ (-1) - \operatorname{Res}_\infty(A . F_{f'}) = (f * 1)'\ (-1) - (\mu_A|f')\ .$$

Il est raisonnable d'appeler "<u>dérivée de mesure</u>" une distribution tempérée μ de la forme $(\mu|f) = (\mu_1|f')$, où μ_1 est une mesure. On peut donc reformuler le lemme 3.1 en disant que :
"<u>toute distribution tempérée de masse totale</u> 1 , <u>dont la restriction aux fonctions localement constantes est invariante par translation</u>, <u>est la somme de la distribution</u> ν , <u>définie par</u> $(\nu|f) = (f * 1)'\ (-1)$, <u>et d'une dérivée de mesure</u>".

Remarquons plus généralement que si l'on appelle dérivée d'une distribution μ la distribution μ' définie par $(\mu'|f) = (\mu|f')$, les distributions qui sont des dérivées sont associées aux fonctions analytiques $G_{\mu'}(T) = \operatorname{Log} T\, G_\mu(T)$ divisibles par le logarithme.

La même démonstration que ci-dessus montre donc que "<u>toute distribution</u> μ <u>de masse totale</u> 1 , <u>dont la restriction aux fonctions localement constantes est invariante par translation</u>, <u>est de la forme</u>

$$(\mu|f) = (f * 1)'\ (-1) + (\mu_1'|f)$$

<u>où</u> μ_1 <u>est une distribution</u>".

A toute telle distribution μ , on peut associer une transformation de Fourier pour les fonctions localement analytiques définie par

(9) $$\hat{f}_\mu(T) = (\mu|\theta_T\, f) = \int_{\underset{\sim}{Z}_p(n)} \theta_T\, f\, d\mu$$

dont on montre aisément qu'elle est analytique sur D_m . On a alors

$$\hat{f}_\mu(T) = G(f\ ,\ T) + (\mu_1'|\theta_T\ f)\ ,$$

et la fonction "somme de Gauss", $G(f\ ,\ T)$, correspond au cas où $\mu_1 = 0$ et $(\mu|f) = (f * 1)'\ (-\ 1)$.

Si on se limite de nouveau aux distributions tempérées μ , la relation (9) définit une transformée de Fourier $\hat{f}_\mu$ pour $f \in \mathcal{C}_u^1(\underset{\sim}{Z}_p(m))$.

Réciproquement, soit E l'espace des fonctions analytiques sur D_m qui y sont $\mathcal{O}(\mathrm{Log})$, muni de sa norme naturelle

$$\|G\| = \overline{\lim}_{r\to 1-} \frac{M(G\ ,\ r)}{M(\mathrm{Log}\ ,\ r)}\ ,\ \text{où}\ \ M(G\ ;\ r) = \sup_{|T^m-1|\leq r}|G(T)|\ .$$

Pour $h \geqslant 0$, la relation

(10) $$m_h(G) = \sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} G(\gamma T)$$

définit une application linéaire m_h de E dans lui-même.

En utilisant la représentation [5]

(11) $$G(T) = \sum_{n\geqslant 0} B_{n,h}(T)(1 - T^{mp^h})^n\ ,$$

où

$$B_{n,h} \in \underset{\sim}{C}_p[T]\ ,\quad \deg B_{n,h} < mp^h\ ,\quad B_{n,h}(T) = \sum_{j=0}^{mp^h-1} b_{n,h,j}\ T^j\ ,$$

on voit que

(12) $$m_h(G) = mp^h \sum_{n\geqslant 0} b_{n,h,0}(1 - T^{mp^h})^n\ .$$

En utilisant les propriétés classiques de continuité de la division euclidienne, on montre que

$$M(B_{n,h}\ ,\ r) \leqslant r^{-np^h}\ M(G\ ,\ r)\quad \text{pour}\quad r \geqslant p^{-1/p^{h-1}(p-1)}$$

et que, pour tout $r < 1$,

$$r^{np^h}\ M(B_{n,h}\ ,\ r) \longrightarrow 0\quad \text{quand}\quad n \longrightarrow \infty\ .$$

En posant $\rho_h = p^{-1/p^{h-1}(p-1)}$, on en déduit que

$$M(m_h(G)\ ,\ \rho_h) \leqslant |mp^h|\ M(G\ ,\ \rho_h)$$

or, pour $h \longrightarrow \infty$, $|mp^h|\ M(G\ ,\ \rho_h) \simeq \|G\|\ p^{-p/(p-1)}$.

Donc dans tout "disque" $|T^m - 1| \leqslant r < 1$, on a

$$\overline{\lim}_{h\to\infty} M(m_h(G)\ ,\ r) \leqslant \|G\|\ p^{-p/(p-1)}\ .$$

Il en résulte que si la suite $m_h(G)$ converge (simplement) dans D_m vers une fonction, celle-ci sera bornée. Mais comme $m_h(G)$ "ne depend que de T^{mp^h}", on en déduit facilement que la limite doit être constante sur D_m.

DÉFINITION 3.3. - On note F le sous-espace de $\mathcal{O}(\mathrm{Log})$ constitué des fonctions analytiques G (sur D_m) pour lesquelles $\lim_{h\to\infty} m_h(G)$ existe, où m_h est définie par (10).

LEMME 3.4. - Pour $G \in F$, $m(G) = \lim_{h\to\infty} m_h(G)$ est constante sur D_m, $|m(G)| \leqslant \|G\| \, p^{-p/(p-1)}$. De plus, pour $\alpha \in D_m$ posons $G_\alpha(T) = G(\alpha T)$, alors $m(G_\alpha) = m(G)$.

On a déjà vu que $\lim_{h\to\infty} m_h(G)(T)$ est indépendant de T, or

$$m(G_\alpha)(T) = \lim_{h\to\infty}(\Sigma^{h\to\infty}_{\gamma\, \mu_{mp^h}} G_\alpha(\gamma T)) = \lim_{h\to\infty}(m_h(G)(\alpha T)) = m(G) ,$$

d'où le lemme.

Remarquons que si A est une fonction analytique bornée, on a

$$\sup_{T\in D_m} |m_h(A)(T)| \leqslant |mp^h| \sup_{T\in D_m} |A(T)| ,$$

donc $m_h(A) \dashrightarrow 0$.

Donc, si $B(T) = A(T)\,\mathrm{Log}\,T$ où A est bornée, comme

$$m_h(B)(T) = \mathrm{Log}\,T \; m_h(A)(T) ,$$

on a encore

$$\lim_{h\to\infty} m_h(B) = 0 .$$

Ceci montre que le théorème d'inversion 2.1 est en fait valable pour toutes les transformées de Fourier $\hat{f}_\mu$ définies par (9) à partir des distributions μ tempérées et invariantes par translation décrites en 3.1. Nous résumons dans la proposition suivante les propriétés démontrées dans ce paragraphe.

PROPOSITION 3.5. - Soit μ une distribution tempérée sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$, dont la restriction aux fonctions localement constantes est invariante par translation. A toute $f \in C^1_u(\underset{\sim}{Z}_p(m))$, on associe sa transformée de Fourier définie sur D_m par (9) :

$$\hat{f}_\mu(T) = (\mu | f\, \theta_T) .$$

Alors $\hat{f}_\mu$ est analytique (et $\mathcal{O}(\mathrm{Log})$) sur D_m et on a, pour tout $T \in D_m$ et uniformément en $a \in \underset{\sim}{Z}_p(m)$,

(13) $$f(a) = m(T^{-a}\, \hat{f}_\mu(T)) \quad \text{où} \quad m(G) = \lim_{h\to\infty}(\Sigma_{\gamma\in\mu_{mp^h}} G(\gamma T)) ,$$

est une forme linéaire continue sur un sous-espace de $\mathcal{O}(\mathrm{Log})$, invariante par les

<u>translations</u> $G \longrightarrow G_\alpha$ <u>où</u> $G_\alpha(T) = G(\alpha T)$, $\alpha \in D_m$.

Une autre interprétation de ces relations peut être donnée en termes de "distributions à densité" (à rapprocher de [4]).

Notons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi_{a,h}(t) = 1_{a+mp^h \underset{\sim}{Z}_p(m)}(t) .$$

Comme on a

$$\varphi_{a,h} = \frac{1}{mp^h} \sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} \gamma^{-a}\, \theta_\gamma$$

on voit que

$$m_h(T^{-a}\, \hat{f}_\mu(T)) = mp^h\, (\mu| f\, \varphi_{a,h}) .$$

Les hypothèses faites sur μ entraînent que $(\mu|\varphi_{a,h}) = 1/mp^h$, et (13) peut se lire :

(14) $$f(a) = \lim_{h\to\infty}((\mu| f\, \varphi_{a,h})/(\mu|\varphi_{a,h})) .$$

Plus généralement, si μ est une dsitribution tempérée quelconque, et G_μ la fonction analytique associée, on a

$$m_h(G_\mu(T)) = mp^h(\mu|\varphi_{0,h}\, \theta_T) = \frac{(\mu|\varphi_{a,h}\, \theta_T)}{(\nu|\varphi_{a,h}\, \theta_T)} \times \frac{(\nu|\varphi_{a,h}\, \theta_T)}{(\nu|\varphi_{a,h}\, \theta_1)}$$

où ν correspond à la distribution invariante, $G_\nu(T) = -(\mathrm{Log}\, T)/(1-T)$. On a déjà montré que $m_h(G_\nu(T)) \longrightarrow \theta_T(0) = 1$ (lemme 2.2). Donc, dire que " $m_h(G_\mu(T))$ a une limite quand $h \longrightarrow \infty$ " équivaut à " $(\mu|\varphi_{a,h}\, \theta_T)/(\nu|\varphi_{a,h}\, \theta_T)$ à une limite". On montre de même la partie (ii) du corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.6. - <u>Soit</u> G <u>une fonction analytique sur</u> D_m , <u>qui y est</u> $\mathcal{O}(\mathrm{Log})$, <u>et</u> μ <u>l'unique distribution tempérée telle que</u> $G = G_\mu$, i. e. $G(T) = (\mu|\theta_T)$. <u>Pour</u> $h \geqslant 0$, <u>on pose</u>

$$m_h(G)(T) = \sum_{\gamma\in\mu_{mp^h}} G(\gamma T)$$

(i) $\lim_{h\to\infty} m_h(G)(T)$ <u>existe si, et seulement si,</u> $\lim_{h\to\infty} (\mu|\varphi_{0,h}\, \theta_T)/(\nu|\varphi_{0,h}\, \theta_T)$ <u>existe, ces deux limites sont égales, indépendantes de</u> T .

(ii) <u>pour</u> $a \in \underset{\sim}{Z}_p(m)$, $\lim_{h\to\infty} m_h(T^{-a}\, G)(T)$ <u>existe si, et seulement si,</u> $\lim_{h\to\infty}(\mu|\varphi_{a,h}\, \theta_T)/(\nu|\varphi_{a,h}\, \theta_T)$ <u>existe, ces deux limites sont égales, indépendantes de</u> T , <u>leur valeur commune est appelée la densité de</u> μ <u>par rapport à</u> ν <u>au point</u> a .

Dans le vocabulaire de ce **corollaire,** la proposition 3.5 signifie donc que les "transformées de Fourier" $\hat{f}_\mu$ ont une densité par rapport à ν en tout point de

$\underset{\sim}{Z}_p(m)$ et que cette densité est égale à f.

4. Valeurs en $T = 1$.

On sait [1] que lorsque $f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p(m))$, $F_f(T) = \sum_{n\geq 0} f(n)\, T^n$ est un élément analytique nul à l'infini sur $\Delta_m = \{T \in \underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C}_p) \ ; \ |T^m - 1| \geq 1\}$. La décomposition de Mittag Leffler de F_f, relative aux trous $B_\zeta = \{T \ ; \ |\zeta T - 1| \leq 1\}$, $\zeta \in \mu_m$, est de la forme

$$(15) \qquad F_f(T) = \sum_{\zeta\in\mu_m} F_{f_\zeta}(\zeta T) \quad \text{où} \quad f_\zeta \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p) \quad \text{et} \quad F_{f_\zeta} \in H_0(\Delta_1) .$$

On sait que les fonctions f_ζ peuvent être calculées par les relations

$$(16) \qquad f_\zeta(n) = \frac{1}{m} \lim_{h\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \zeta^{-(n+ip^h)} f(n + ip^h)\right) .$$

Dans le cas particulier où $f_1 = 0$, F_f est un élément analytique sur $\Delta_m \cup B_1$ et la relation (2) donne

$$G(f\ ,\ 1) = F_{f'}(1) .$$

On sait [3] que si $f = \chi\,\langle\ \rangle^s$ où χ est un caractère de Dirichlet modulo mp^e dont le facteur modulo m est non trivial, $f_1 = 0$, ce qui donne la relation (1).

Nous noterons $\mathcal{C}_0(\underset{\sim}{Z}_p(m))$ (resp. $\mathcal{C}^1_{u,0}(\underset{\sim}{Z}_p(m))$) le sous-espace de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p(m))$ (resp. $\mathcal{C}^1_{u,0}(\underset{\sim}{Z}_p(m))$) constitue des fonctions f pour lesquelles $f_1 = 0$. Remarquons qu'une comparaison entre les parties principales des deux membres de (2) relatives à un trou de Δ_m montre que $f_\zeta = 0 \Longrightarrow (f')_\zeta = 0$, car $(f')_\zeta = f'_\zeta$. En particulier, si $f \in \mathcal{C}^1_{u,0}(\underset{\sim}{Z}_p(m))$, $f' \in \mathcal{C}_0(\underset{\sim}{Z}_p(m))$.

LEMME 4.1. - Pour $f \in \mathcal{C}_0(\underset{\sim}{Z}_p(m))$, $(f * 1)_1$ est constante sur $\underset{\sim}{Z}_p$, et on a

$$(f * 1)_1 = F_f(1) .$$

En effet, $F_{(f*1)_1}(T)$ est la partie principale relative au trou B_1 de $(1/(1 - T))\, F_f(T)$. Comme $f_1 = 0$, F_f est analytique sur B_1, et la partie principale en question est $F_f(1)/(1 - T)$, d'où le lemme.

LEMME 4.2. - Soit $f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p(m)$, $t \in \underset{\sim}{Z}_p$ et $\zeta \in \mu_m$, on a

$$(17) \qquad f_\zeta(t) = \frac{1}{m} \sum_{p_2(x)=t} \zeta^{-p_1(x)} f(x)$$

où p_1 et p_2 désignent les projections naturelles de $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ sur $\underset{\sim}{Z}/m\underset{\sim}{Z}$ et $\underset{\sim}{Z}_p$ respectivement.

Soit $n \in \underset{\sim}{N}$, comme $(m\ ,\ p) = 1$, la famille $\{n + ip^h\}_{i=0,\dots,m-1}$ est, pour chaque h, un système de représentants modulo m. Soit σ_h la permutation de $\{0\ ,\ 1\ ,\ \dots\ ,\ m - 1\}$ telle que

$$n + \sigma_h(i)\, p^h \equiv i \mod m .$$

Pour n et i fixés, lorsque h tend vers l'infini, la suite d'entiers $n + \sigma_h(i)\, p^h$ tend, dans $\underset{\sim}{Z}_p(n)$, vers l'élément $\alpha_i(n)$ tel que $p_1(\alpha_i(n)) = i$ et $p_2(\alpha_i(n)) = n$. Comme f est continue, la formule (16) signifie donc que

$$f_\zeta(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-i} f(\alpha_i(n))$$

ce qui est exactement (17) dans le cas où $t = n$. La formule générale (17) en résulte par densité de $\underset{\sim}{N}$ et continuité des deux membres.

PROPOSITION 4.3. - <u>Soit</u> $f \in \mathcal{C}_0(\underset{\sim}{Z}_p(n))$, <u>alors</u>

$$(18) \qquad (f * 1)_1 = F_f(1) = \frac{-1}{n} \lim_{h\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \sum_{j=0}^{p^h-1} f(j + ip^h)\right) .$$

En effet, d'après 4.2, en choisissant $t = -1$,

$$(f * 1)_1 = \frac{1}{n} \lim_{h\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{ip^h-1} f(j + ip^h)\right) = \frac{1}{n} \lim_{h\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} (n - i) \sum_{j=0}^{p^h-1} f(j + ip^h)\right).$$

Mais comme

$$\lim_{h\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p^h-1} f(j + ip^h) = \lim_{h\to\infty} (f * 1)(np^h - 1) = 0$$

la proposition s'en déduit.

En appliquant cette proposition au cas où $f = (\chi\omega^{-1})_{s-1}$ et en appliquant (1), on obtient :

$$L_p(1 - s , \chi) = -\frac{1}{n} \lim_{h\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \sum_{j=0}^{p^h-1} \chi\omega^{-1}(j + ip^h)\langle j + ip^h\rangle^{1-s}\right) .$$

Pour $h \geqslant 1$, $\omega^{-1}(j + ip^h) = \omega^{-1}(j)$ et $|\langle j + ip^h\rangle^{1-s} - \langle j\rangle^{1-s}| \leqslant K_s\, p^{-h}$, on a donc aussi

$$(19) \qquad L_p(1 - s , \chi) = -\frac{1}{n} \lim_{h\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{p^h-1} \omega^{-1}(j)\langle j\rangle^{1-s} \left(\sum_{i=0}^{n-1} i\chi(j + ip^h)\right)\right) .$$

Soit $\chi = \chi_0\, \varphi$, où χ_0 est modulo n et φ modulo p^e, alors pour $h \geqslant e$,

$$\chi(j + ip^h) = \varphi(j)\ \chi_0(j + ip^h)$$

et si α est l'ordre de p dans $(\underset{\sim}{Z}/n\underset{\sim}{Z})^*$, i. e. $p^\alpha = 1 \bmod n$, on a

$$\chi(j + ip^{n\alpha}) = \varphi(j)\ \chi_0(j + i) .$$

Comme χ_0 est supposé non trivial,

$$a(j) = \sum_{i=0}^{n-1} i\ \chi_0(j + i) = \sum_{i=0}^{n-1} (j + i)\ \chi_0(j + i)$$

est de période n, et on montre aisément que pour $0 \leqslant j < n$,

$$a(j) = a(0) + n(\chi(0) + \chi(1) + \dots + \chi(j - 1)) .$$

COROLLAIRE 4.4.

$$(20) \qquad L_p(1 - s , \chi) = - \lim_{h\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{p^h-1} \varphi(j)\, \omega^{-1}(j) \langle j\rangle^{1-s}\, b(j)\right)$$

où $b(j)$ est la fonction de période m telle que

$$b(0) = 0 \quad \text{et} \quad b(j) = \chi(0) + \dots + \chi(j - 1) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j < m .$$

Pour $s = 1$, la formule (19) se trouve dans [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Fonctions analytiques dans le complémentaire d'une famille de disques, Séminaire de Théorie des nombres, Université de Bordeaux, 1968/69, n° 8.

[2] AMICE (Y.). - Duals, "Proceedings of the conference on p-adic analysis" [1978. Nijmegen] p. 1-15. - Nijmegen, Mathematisch Instituut Universiteit, 1978.

[3] AMICE (Y.). - Prolongement analytique des sommes de Gauss, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 9e année, 1981/82, n° 13, 9 p. et n° J1, 14 p.

[4] BARSKY (D.). - Mesures p-adiques à densité, Koninkl. nederl. Acad. Wetensch. Proc., Series A, t. 79, 1976, p. 388-399.

[5] BARSKY (D.). - Sur la norme de certaines séries d'Iwasawa (Une démonstration analytique p-adique du théorème de Ferrero-Washington), Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 10e année, 1982/83, n° 13, 44 p.

[6] BRUHAT (F.). - Intégration p-adique, Séminaire Bourbaki, 14e année, 1961/62, n° 229, 16 p.

[7] WASHINGTON (L. C.). - Introduction to cyclotomic fields. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982 (Graduate Texts in Mathematics, 83).