Yvette Amice

Prolongement analytique des sommes de Gauss, II

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, nº 3 (1981-1982), exp. nº J1, p. J1-J14
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_3_A2_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, fasc. 3, nº J1, 14 p.
Journée d'Analyse p-adique
[1982. Marseille-Luminy]

PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES SOMMES DE GAUSS, II

par Yvette AMICE (*)
[Université Paris-7]

Introduction.

Les notations sont celles de [1]. On a montré que, pour $\chi \in \hat{U}_p(m)$ et $\theta \in \hat{\mathbb{Z}}_p(m)$, la somme de Gauss

(1) $$g(\chi , \theta) = \lim_{k\to\infty}((1/mp^k) \sum_{a=0}^{mp^k-1} \chi(a)\ \theta(a)) = (\chi\theta * 1)'(- 1)$$

existe, et définit une fonction analytique des variables χ et θ.

Nous donnons ici une formule explicite de $g(\chi , \theta)$ comme fonction analytique de $\theta \in \hat{\mathbb{Z}}_p(m)$, pour χ fixé (§ 2). Cette expression s'obtient grâce aux propriétés reliant la convolution et la dérivation exposées au § 1. Au § 3, on montre comment l'application des mêmes techniques, de convolution, permet de retrouver les fonctions L partielles définies par N. KOBLITZ [14]. Leur rapport avec les sommes de Gauss, les fonctions $L_p(1 - s , \chi)$ et les fonctions $\mathrm{Log}\,\Gamma_{\chi_s}$ [9] permet de démontrer une formule de Taylor pour les fonctions $\mathrm{Log}\,\Gamma_{\chi_s}$ qui généralise celle obtenue au théorème 2 de [9] dans le cas où $s = 0$.

1. Dérivation et convolution.

1.1. Représentation des fonctions génératrices.

On sait que, si g est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}_p$, $g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p(m) , \mathbb{C}_p)$ à la condition nécessaire et suffisante que sa série génératrice, $F_g(T) = \sum_{n\geq 0} g(n)\ T^n$, soit la série de Taylor à l'origine d'un élément $F_g \in H_0(\Delta_m)$ ([1], proposition 1.3 ou [3]).

Soit $h \geq 0$ et $f = mp^h$. Dire que $g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p(m) , \mathbb{C}_p)$ équivaut à dire que chacune des fonctions φ_i définies sur $\mathbb{N}$ par $\varphi_i(k) = g(i + mp^h k)$, $i = 0 , \ldots , mp^h - 1$, est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$. On a alors, pour $t \in \mathbb{Z}_p$,

$$\varphi_i(t) = \sum_{k\geq 1} \lambda_{k,i} \binom{t + k - 1}{k - 1} , \text{ où } \lambda_{k,i} \longrightarrow 0 \text{ pour } k \longrightarrow \infty .$$

On en déduit que

$$F_g(T) = \sum_{i=0}^{f-1} T^i(\sum_{k\geq 0} \varphi_i(k)\ T^{fk}) = \sum_{i=0}^{f-1} T^i(\sum_{k\geq 1} \lambda_{(k,i)}/(1-T^f)^k) .$$

(*) Yvette AMICE, UER Mathématiques, Aile 45-55, Université Paris-7, 2 place Jussieu 75251 PARIS CEDEX 05.

En posant $P_k(T) = \sum_{i=0}^{f-1} \lambda_{k,i} T^i$, on obtient donc

(2) $$F_g(T) = \sum_{k\geq 1} \frac{P_k(T)}{(1 - T^m)^k} .$$

Notons $\|P_k\|_\infty = \sup_i |\lambda_{k,i}| = \sup\{|P_k(t)| \; ; \; |t| \leq 1\}$, on déduit, de ce que chaque φ_i est continue sur $\underset{\sim}{Z}_p$, le fait que $\|P_k\|_\infty \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$, et donc que la série (2) converge vers F_g , uniformément sur Δ_m , i. e. dans $H_0(\Delta_m)$.

Si on choisit $f = m$, la série (2) n'est autre que la représentation usuelle de F_g comme élément analytique sur le domaine Δ_m complémentaire de la lemniscate $D_m = \{t \in \underset{\sim}{C}_p \; ; \; |t^m - 1| < 1\}$ ([7], proposition 4.8.5).

Supposons de plus que g soit localement analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$, et choisissons $f = mp^h$ de telle sorte que g soit somme de sa série de Taylor sur chaque disque $i + mp^h \underset{\sim}{Z}_p$ de $\underset{\sim}{Z}_p(m)$. On sait [2] qu'alors, comme chaque φ_i est strictement analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$, $|\lambda_{k,i}/(k-1)!| \longrightarrow 0$ pour $k \longrightarrow \infty$ et que

$$\inf_{k,i} |\lambda_{k,i}/(k-1)!| = \|g\|_h ,$$

où $\|g\|_h$ désigne la norme de g dans l'espace $LA_h(\underset{\sim}{Z}_p(m) , \underset{\sim}{C}_p)$ des fonctions localement analytiques d'ordre h sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ (cf. [2]).

Pour ce choix de $f = mp^h$, la représentation (2) est telle que $\|P_k/(k-1)!\|_\infty \longrightarrow 0$, elle converge donc pour $|T^f - 1| > p^{-(1/(p-1))}$.

Soit $\Delta_{m,r_h} = \{t \in \underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C}_p) \; ; \; |t^{mp^h} - 1| > p^{-1/(p-1)}\}$, on a démontré :

LEMME 1.1. - <u>Si</u> g <u>est localement analytique d'ordre</u> h <u>sur</u> $\underset{\sim}{Z}_p(m)$, <u>la représentation</u>

(2) $$F_g(T) = \sum_{k\geq 1} \frac{P_k(T)}{(1 - T^m)^k} ,$$

<u>définie ci-dessus, converge pour</u> $T \in \Delta_{m,r_h}$, <u>et</u> F_g <u>est prolongeable en une fonction analytique bornée sur</u> Δ_{m,r_h}

Si, de plus, la série de Taylor à l'origine de chacune des fonctions φ_i a un rayon de convergence au moins égal à $\rho > 1$, on peut montrer que F_g est prolongeable en une fonction analytique sur un domaine $\Delta_{m,r'}$, $r' < r_h$ (voir un exemple au § 2.2).

D'autre part, on sait que, pour chaque i ,

$$\varphi_i'(t) = \sum_{k\geq 1} \binom{t+k-1}{k-1} \left(\sum_{j\geq 1} (\lambda_{k+j,i}/j)\right) .$$

On en déduit que la représentation (2) correspondant à la dérivée g' de g est

(3) $$F_{g'}(T) = (1/m) \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(1 - T^m)^k} \left(\sum_{j\geq 1} (P_{k+j}(T)/j)\right) .$$

On peut d'ailleurs aussi montrer que la représentation (3) de $F_{g'}$ est valable dès que $g \in \mathcal{C}_u^1(\underset{\sim}{Z}_p(m)\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$ (en appliquant la caractérisation de $\mathcal{C}_u^1$ de D. BARSKY [10]).

Soit $D_m = \{t \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ |t^m - 1| < 1\} = \underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C}_p) \setminus \Delta_m$, on note $\mathcal{A}(D_m)$ l'espace des fonctions analytiques sur D_m, c'est-à-dire l'espace des fonctions définies sur D_m et dont la restriction à chacun des disques $\{|t - \zeta| < 1\ ;\ \zeta^m = 1\}$, constituant D_m, est analytique sur ce disque.

LEMME 1.2. - <u>Toute fonction</u> $G \in \mathcal{A}(D_m)$ <u>admet une unique représentation, convergeant sur</u> D_m

(4) $$G(T) = \sum_{k \geq 0} A_k(T)(1 - T^m)^k ,$$

<u>où</u> $A_k(T)$ <u>est un polynôme de degré strictement inférieur à</u> m.

La démonstration peut se faire soit "directement", à l'aide des séries de Taylor des restrictions de G à chacun des disques constituant D_m, soit en utilisant une identification de $\mathcal{A}(D_m)$ à l'espace des formes linéaires continues sur $\mathrm{Loc\ an}(\underset{\sim}{Z}_p(m)\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$ (cf. [6] ou [1], 2.3) et une caractérisation des fonctions F_g correspondant aux $g \in \mathrm{Loc\ an}(\underset{\sim}{Z}_p(m)\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$.

1.2. <u>Décomposition type "Mittag-Loeffler" pour les fonctions analytiques sur des "couronnes"</u> $C_{m,r}$.

Soit $r < 1$ et $C_{m,r} = D_m \cap \Delta_{m,r} = \{t \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ r < |t^m - 1| < 1\}$, et soit $\mathcal{A}(C_{m,r})$ l'espace des fonctions analytiques sur la "couronne" $C_{m,r}$: c'est une somme directe d'espace de fonctions analytiques au sens classique sur m couronnes $r_1 < |t - \zeta| < 1$. On montre que $\mathcal{A}(C_{m,r}) = \mathcal{A}(D_m) \oplus \mathcal{A}_0(\Delta_{m,r})$, où $\mathcal{A}_0(\Delta_{m,r})$ désigne l'espace des fonctions analytiques sur $\Delta_{m,r}$ et nulles à l'infini. Ceci signifie que, pour toute $F \in \mathcal{A}(C_{m,r})$, il existe une unique décomposition "à la Mittag-Loeffler",

$$F = F^+ + F^- ,\ \text{où}\ F^+ \in \mathcal{A}(D_m)\ \ \text{et}\ \ F^- \in \mathcal{A}_0(\Delta_{m,r}) .$$

En particulier, si $F \in \mathcal{A}_0(\Delta_{m,r})$ et $G \in \mathcal{A}(D_m)$, le produit FG, qui est une fonction analytique sur $C_{m,r}$, admet une unique décomposition $(FG) = (FG)^+ + (FG)^-$, que l'on obtient par exemple de la façon suivante. Soit

$$F(T) = \sum_{k \geq 1} \frac{P_k(T)}{(1 - T^m)^k} \quad \text{et} \quad G(T) = \sum_{\ell \geq 0} A_\ell(T)(1 - T^m)^\ell ,$$

les représentations (2) et (4) de F et G respectivement dans $\mathcal{A}_0(\Delta_{m,r})$ et $\mathcal{A}(D_m)$. En effectuant une multiplication formelle, avec restes, on obtient, si

$$D_n(T) = \sum_{\ell - k = n} P_k A_\ell = D_n^1(1 - T^m) + D_n^2 \quad \text{et} \quad C_n(T) = D_n^2 + D_{n-1}^1 ,$$

la décomposition

$$(FG)^+ = \sum_{n \geq 0} C_n(T)(1 - T^m)^n \quad \text{et} \quad (FG)^- = \sum_{n \leq -1} C_n(T)(1 - T^m)^n ,$$

l'on constate que les conditions de croissance imposées aux P_k et A_λ impliquent que $(FG)^+ \in \mathfrak{A}(D_m)$ et $(FG)^- \in \mathfrak{A}_0(\Delta_{m,r})$. L'unicité de la décomposition résulte de l'unicité des représentations (4) et (2) dans $\mathfrak{A}(D_m)$ et $\mathfrak{A}_0(\Delta_{m,r})$ respectivement. De plus, cette décomposition jouit des propriétés usuelles de continuité des décompositions de Mittag-Loeffler. Plus précisément, pour $r' \in \,]r , 1[$, posons

$$M(F , r') = \sup\{|F(t)| \ ; \ |t^m - 1| = r'\} , \text{ si } r' \in |C_p| ,$$

et prolongeons $M(F , r')$ par continuité pour r' quelconque dans $]r , 1[$. On vérifie que :

- si $F = F^+ \in \mathfrak{A}(D_m)$, $M(F , r') = \sup\{|F(t)| \ ; \ |t^m - 1| \leqslant r'\}$;
- si $F = F^- \in \mathfrak{A}_0(\Delta_{m,r})$, $M(F , r') = \sup\{|F(t) \ ; \ |t^m - 1| \geqslant r'$;
- si $F = F^+ + F^- \in \mathfrak{A}(C_{m,r})$, $M(F , r') = \max(M(F^+ , r') , M(F^- , r'))$.

Un exemple important de fonction analytique sur D_m est celui du logarithme

$$\operatorname{Log} T = (\operatorname{Log} T^m)/m = (1/m)\left(- \sum_{k\geqslant 1} \frac{(1 - T^m)^k}{k}\right) .$$

Soit g une fonction localement analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$: il existe $r < 1$ tel que $F_g \in H_0(\Delta_{m,r})$. Pour un tel r , on obtient, comme décomposition de $F_g.\operatorname{Log}$ dans $\mathfrak{A}(C_{m,r})$:

$$(F_g.\operatorname{Log})^- (T) = (- 1/m) \sum_{k\geqslant 1} (1 - T^m)^{-k} \left(\sum_{j\geqslant 1} (P_{j+k}(T)/j)\right)$$

et

$$(F_g.\operatorname{Log})^+ (T) = (- 1/m) \sum_{k\geqslant 0} (1 - T^m)^k \left(\sum_{j\geqslant 1} (P_j(T)/(j + k))\right).$$

On reconnaît dans le développement de $(- F_g.\operatorname{Log})^-$ celui qu'on a trouvé pour $F_{g'}$ (3), on en déduit :

PROPOSITION 1.3. - *Soit g une fonction localement analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ et $r < 1$ tel que F_g soit un élément analytique sur $\Delta_{m,r}$, alors la fonction*

(5) $$\mathcal{E}_g(T) = - \operatorname{Log} T.F_g(T) - F_{g'}(T) ,$$

analytique sur la "couronne" $C_{m,r}$, admet un unique prolongement en une fonction analytique sur D_m ,

(5 bis) $$\mathcal{E}_g(T) = (1/m) \sum_{k\geqslant 0} (1 - T^m)^k \left(\sum_{j\geqslant 1} ((P_j(T)/(j + k))\right) ,$$

où les polynômes P_j sont ceux figurant dans la représentation (2) de F_g .

Remarque. - Les formules (5) et (5 bis) gardent un sens si g est seulement supposée continuement et uniformément différentiable : la décomposition obtenue est alors formelle, et se justifie dans le cadre d'un espace de séries de Laurent analogue à ceux étudiés en [5]. Le produit $\operatorname{Log}.F_g$ n'a dans ce cas aucun "domaine de définition" mais la série (5 bis) définit encore une fonction analytique sur D_m . Plus généralement, si $g \in C_u^k(\underset{\sim}{Z}_p(m) , \underset{\sim}{C}_p)$ et si G est une fonction analytique sur D_m satisfaisant une condition de croissance au bord, $G = O(\operatorname{Log}^k)$, le produit $F_g.G$ peut être défini, c'est un élément de $H_0(\Delta_m) \oplus \mathfrak{a}(D_m)$, dont les parties $(F_g\, G)^+$ et $(F_g\, G)^-$ peuvent être interprétées en termes de distributions au sens de [6] ou [8], cette étude concrétisant la dualité entre $\mathcal{C}_u^k$ et $O(\mathrm{Log}^k)$. On retrouve ici, par $m = 1$, la fonction $J(x \longrightarrow g(x))$, étudiée en [11] par P. CASSOU-NOGUÈS, puisqu'on vérifie que $J(x \longrightarrow g(x))(T) = \mathcal{L}_g(T)$ lorsque g est continuement et uniformément dérivable sur $\underset{\sim}{Z}_p$ et $T \in D_1$.

Grâce aux propriétés des fonctions $M(F\, ,\, r')$ indiquées plus haut, et à l'évaluation des coefficients des polynômes P_k qui résulte des propriétés des fonctions φ_i , on peut évaluer l'ordre de croissance de $\mathcal{L}_g(T)$ au bord des disques constituant D_m et par exemple montrer que, si $g \in \mathcal{C}_u^1$,

$$M(\mathcal{L}_{g,r'}) \lesssim M(\mathrm{Log}\, ,\, r')(\max(\|g\|_\infty\, ,\, p\|g'\|_\infty))\ ,$$

où $\|g\|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$.

Parmi les interprétations que l'on peut donner de $\mathcal{L}_g$, nous ne retiendrons ici que la suivante :

PROPOSITION 1.4. - Pour g continuement et uniformément différentiable,

$$\mathcal{L}_g(1) = (g * 1)'\ (-1)\ , \tag{6}$$

où $\mathcal{L}_g$ est la fonction analytique sur D_m définie dans la proposition 1.3.

Preuve. - On a visiblement, $\mathcal{L}_g(1) = (1/m)\ \sum_{i=0}^{m-1} (\sum_{k\geq 1} (\lambda_{k,i}/k))$. Or, comme

$$\varphi_i(t) = \sum_{k\geq 1} \lambda_{k,i} \binom{t+k-1}{k-1}\ ,\quad (\varphi_i *_{\underset{\sim}{Z}_p} 1)(t) = \sum_{k\geq 1} \lambda_{k,i} \binom{t+k}{k}$$

(on note ici $*_{\underset{\sim}{Z}_p}$ ou $*_{\underset{\sim}{Z}_p(m)}$ les convolutions définies respectivement pour des fonctions continues sur $\underset{\sim}{Z}_p$ ou $\underset{\sim}{Z}_p(m)$, ceci pour éviter les confusions).

On a donc

$$\sum_{k\geq 1} (\lambda_{k,i}/k) = (\varphi_i *_{\underset{\sim}{Z}_p} 1)'\ (-1)\ .$$

D'autre part, on vérifie aisément que, pour $n > 0$,

$$\sum_{i=0}^{m-1} (\varphi_i *_{\underset{\sim}{Z}_p} 1)(n) = (g *_{\underset{\sim}{Z}_p(m)} 1)((n+1)\, m - 1)\ .$$

On en déduit, en prenant $n = p^\ell$, $\ell \longrightarrow +\infty$, que

$$(g *_{\underset{\sim}{Z}_p(m)} 1)'\ (-1) = (1/m)\ \sum_{i=0}^{m-1} (\varphi_i *_{\underset{\sim}{Z}_p} 1)'\ (-1)\ ,$$

d'où la relation (6).

2. Formules explicites.

2.1. Sommes de Gauss.

Pour $\chi \in \hat{U}_p(m)$ et $\theta \in \underset{\sim}{Z}_p(m)$, on a, par définition,

$$g(\chi\, ,\, \theta) = (\chi\theta * 1)'\ (-1)\ .$$

Compte tenu de la proposition 1.4, cela s'écrit encore

$$g(\chi\ ,\ \theta) = \mathcal{L}_{\chi\theta}(1)\ .$$

D'autre part, il est évident que $F_{\chi\theta}(T) = F_\chi(\theta(1)\ T)$, et on en déduit aisément que $\mathcal{L}_{\chi\theta}(1) = \mathcal{L}_\chi(\theta(1))$.

Rappelons par ailleurs qu'on a défini en [1], 2.2, une fonction $\operatorname{Log}\chi$, analytique sur $\hat{U}_p(m)$, à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$, et telle que, si $x = (x_0\ ,\ x_1) \in U_p(m)$, $x_0 \in (Z/mZ)^\times$ et $x_1 \in U_p(1) = \underset{\sim}{Z}_p^\times$, on ait

$$\chi'(x) = (\operatorname{Log}\chi)\ x_1^{-1}\ \chi(x)\ .$$

Notons ε le <u>caractère fondamental</u> de $U_p(m)$: $\varepsilon(x) = x_1$, on a donc

$$\chi' = (\operatorname{Log}\chi)\ \varepsilon^{-1}\ \chi\ .$$

THÉORÈME 2.1. - <u>Soit</u> $\chi \in \hat{U}_p(m)$, <u>et</u> $F_\chi(T) = \sum_{n\geq 0} \chi(n)\ T^n$ <u>sa série génératrice.</u> <u>Soit</u> $r < 1$ <u>tel que</u> $F_\chi \in H_0(\Delta_{m,r})$, <u>alors la fonction</u>

(7) $$\mathcal{L}_\chi(T) = -\operatorname{Log} TF_\chi(T) - \operatorname{Log}\chi\ F_{\varepsilon^{-1}\chi}(T)\ ,$$

<u>analytique pour</u> $r < |t^m - 1| < 1$, <u>est prolongeable de façon unique en une fonction analytique sur</u> D_m , <u>encore notée</u> $\mathcal{L}_\chi$, <u>et on a, pour</u> $\theta \in \hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$,

(8) $$g(\chi\ ,\ \theta) = \mathcal{L}_\chi(\theta(1))\ .$$

<u>Remarque 1.</u> - On voit ici explicitement comment, pour χ fixé dans $\hat{U}_p(m)$, $\theta \dashrightarrow g(\chi\ ,\ \theta)$ est, sur $\hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$, une fonction analytique à croissance logarithmique. Pour $|\theta(1)^m - 1|$ assez proche de 1 , $\mathcal{L}_\chi(\theta(1))$ est donné par (7) (où $T = \theta(1)$), or $\operatorname{Log}\chi\ F_{\varepsilon^{-1}\chi}(T)$ et $F_\chi(T)$ sont bornées pour $|T^m - 1| \dashrightarrow 1^-$, et on voit, sur (7), que, pour $r \dashrightarrow 1^-$,

$$\sup_{|\theta(1)^m-1|\leq r} |g(\chi\ ,\ \theta)| \simeq CM(\operatorname{Log}\ ,\ r)\ ,$$

où C est une constante dépendant de χ .

<u>Remarque</u> 2. - Si χ est de torsion, i. e. localement constant, $\chi' = \operatorname{Log}\chi = 0$, et (7) se réduit dans ce cas à la formule (9) de [1].

Soit $\chi_k = \chi_0 \langle\ \rangle^k$, où χ_0 est de torsion et k entier, $k \geq 0$, alors $\operatorname{Log}\chi = k$, $\varepsilon^{-1}\ \chi_k = \chi_0\ \omega^{-1}\ \langle\ \rangle^{k-1}$. Dans ce cas, les fonctions F_{χ_k} et $F_{\varepsilon^{-1}\chi_k}$ sont des fractions rationnelles, et la formule (8) s'écrit :

$$g(\chi_k\ ,\ \theta(1)) = -\operatorname{Log}(\theta(1)\ F_{\chi_k}(\theta(1)) - k\ F_{(\chi_0\omega^{-1})_{k-1}}(\theta(1))$$

pour $\theta(1)^f \neq 1$.

<u>Remarque</u> 3. - On retrouve encore sur cette formule (7), l'évaluation de $g(\chi\ ,\ \theta)$, obtenue en [1], proposition 2.2. En effet, $M(F_\chi\ ,\ 1) = M(F_{\varepsilon^{-1}\chi}\ ,\ 1) = 1$, et pour

θ fixé et χ variant dans $\hat{U}_p(m)$, la dépendance en χ de $g(\chi , \theta)$ au bord est celle de $\mathrm{Log}\, \chi$.

2.2. Application aux fonctions L_p .

Soit χ un caractère de Dirichlet modulo $f = mp^h$, $h \geq 1$, et soit

$$S = \{s \in \mathbb{C}_p \ ; \quad v(s) > \frac{1}{p-1} - 1\} .$$

On note $\chi_s = \chi \langle \ \rangle^s$, et on sait que $s \longrightarrow \chi_s$ est un paramétrage du disque D_χ de $\hat{U}_p(m)$, plus grand disque contenant χ et ne contenant aucun autre élément de torsion. Pour $s \in S$, on a

$$g(\chi_s , 1) = - sL_p(1 - s , \chi) .$$

Pour $i = 0 , \dots , f - 1$, $\varphi_i(t) = \chi_s(i + ft) = \chi(i) \langle i + mt\rangle^s$. Posons $\sigma = \inf(v(s) , 0)$; la série de Taylor de φ_i converge pour $v(t) > \frac{1}{p-1} - h - \sigma$, et sa somme est bornée par 1 dans ce disque. On en déduit que, si

$$\varphi_i(t) = \sum_{k\geq 1} \lambda_{k,i} \binom{t + k - 1}{k - 1} ,$$

$$\inf_{k,i}(v(\lambda_{k,i}) - v((k - 1)!) + (k - 1)(\frac{1}{p-1} - h - \sigma)) = 0 .$$

Dans la représentation $F_{\chi_s}(T) = \sum_{k\geq 1} P_k(T)/(1 - T^f)^k$, où $P_k(T) = \sum_{i=0}^{f-1} \lambda_{k,i} T^i$, on a donc,

$$w(P_k) = \inf_i(v(\lambda_{k,i})) \geq v(k - 1)!) - \frac{k-1}{p-1} + (k - 1)(h + \sigma) ,$$

et cette série converge, et a une somme bornée, pour $v(T^f - 1) < h + \sigma$.

Notons Δ_σ le domaine défini par $v(1 - T^f) < h + \sigma$. On vérifie que

$$\Delta_\sigma = \cap_{\zeta^f=1} \Delta_{\sigma,\zeta} , \text{ où } \Delta_{\sigma,\zeta} = \{t \in \underset{\sim}{P}^1(\mathbb{C}_p) \ ; \quad v(t - \zeta) < \frac{1+\sigma}{p}\} .$$

D'autre part, si $\zeta^p = \zeta'^p$, les domaines $\Delta_{\sigma,\zeta}$ et $\Delta_{\sigma,\zeta'}$ coïncident. Pour décrire Δ_σ à l'aide de ses trous distincts, on considèrera donc, pour $\alpha^{f/p} = 1$, le domaine $\Delta'_{\alpha,\sigma} = \Delta_{\sigma,\zeta}$ pour tout ζ tel que $\zeta^p = \alpha$, et l'on a $\Delta_\sigma = \cap_{\alpha^{f/p}=1} \Delta'_{\alpha,\sigma}$, où les $\Delta'_{\alpha,\sigma}$ sont des complémentaires de disques disjoints.

De l'évaluation ci-dessus de $w(P_k)$, on déduit :

LEMME 2.2. - <u>Soit</u> χ <u>un caractère de Dirichlet modulo</u> $f = mp^h$, $h \geq 1$ <u>et</u> $s \in S$ <u>alors</u> F_{χ_s} <u>est une fonction analytique bornée, nulle à l'infini sur</u> Δ_σ .

Soit $B_0(\Delta_\sigma)$ l'espace des fonctions analytiques bornées et nulles à l'infini sur Δ_σ . Toute $F \in B_0(\Delta_\sigma)$ admet une unique décomposition de Mittag-Loeffler :

$$F = \sum_{\alpha^{f/p}=1} F_\alpha , \text{ où } F_\alpha \in B_0(\Delta'_{\alpha,\sigma}) .$$

Si $F = F_{\chi_0}$, c'est une fraction rationnelle dont les parties principales relatives aux racines non primitives f-ièmes de 1 sont nulles (on suppose ici que f est la plus petite période de χ).

LEMME 2.3. - Pour $k \geqslant 0$, les parties principales $F_{\chi_k,\alpha}$ de F_{χ_k} relatives aux disques $\Delta_{\alpha,\sigma}$ pour lesquels α n'est pas racine primitive (f/p)-ième de 1 sont nulles.

On a en effet $F_{\chi_k}(T) = k\,T\,\frac{d}{dT}(F_{\chi\omega_{k-1}^{-1}}(T))$, la propriété est vraie pour $k = 0$, et donc pour tout $k \geqslant 0$.

D'autre part, on montre aisément que, pour tout χ, $s \longrightarrow F_{\chi_s}$, est une application analytique de S dans $B_0(\Delta_\sigma)$. Plus précisément si on note $U_k(x) = \chi(x)\,(\langle x\rangle - 1)^k$, on a

$$F_{\chi_s} = \sum_{k\geqslant 1} \binom{s}{k} F_{U_k},$$

où cette série converge pour $s \in S$, car $\|F_{U_k}\|_{\Delta_\sigma} = O(p^{-k})$. Si α est une racine non primitive (f/p)-ième de 1, on a $F_{U_k,\alpha} = 0$, donc aussi $F_{\chi_s,\alpha} = 0$ pour tout $s \in S$.

Notation. - Soit A l'ensemble des racines primitives (f/p)-ièmes de 1, pour $\alpha \in A$, soit ζ l'une des racines de $\zeta^p = \alpha$, et $\Delta'_{\alpha,\sigma} = \{t \in \underset{\sim}{C}_p \; ; \; v(t-\zeta) > (1+\sigma)/p)$, on note $\Delta_{\sigma,0} = \bigcap_{\alpha\in A} \Delta'_{\alpha,\sigma}$.

PROPOSITION 2.4. - Soit χ un caractère de Dirichlet modulo $f = mp^h$, $h \geqslant 1$, où f est la plus petite période de χ, pour $s \in S$, $F_{\chi_s}(T)$ est prolongeable en une fonction analytique bornée sur $\Delta_{\sigma,0}$, nulle à l'infini. Pour $\theta \in \underset{\sim}{Z}_p(m)$ et tel que $\theta(1) \in \Delta_{\sigma,0}$, on a

$$g(\chi_s, \theta) = -\operatorname{Log}(\theta(1))\,F_{\chi_s}(\theta(1)) - s\,F_{\chi\omega_{s-1}^{-1}}(\theta(1)), \tag{9}$$

en particulier,

$$s\,L_p(1-s, \chi) = s\,F_{\chi\omega_{s-1}^{-1}}(1). \tag{10}$$

Remarquons d'abord que $\sigma = \inf(v(s), 0) = \inf(v(s-1, 0)$, donc $F_{\chi\omega_{s-1}^{-1}}$ est dans $B_0(\Delta_\sigma)$. On voit, en appliquant les lemmes 2.2 et 2.3, et la remarque qui suit ce dernier, que F_{χ_s} est en fait dans $B_0(\Delta_{\sigma,0})$ puisque ses parties principales relatives aux trous correspondant à des α non primitives sont nulles. La relation (9) se déduit donc des relations (7) et (8) du théorème 2.1. De plus, $1 \in \Delta_{\sigma,0}$, donc (10), s'obtient en appliquant (9) à $\theta(1) = 1$.

On peut retrouver à partir de là une formule "fermée" pour $L_p(1, \chi)$. Soit $\gamma_p(\chi)$ la constante d'Euler :

$\gamma_p(\chi) = L_p(1, \chi)$ si χ est non trivial, et

$\gamma_p(\chi) = \lim_{s\to 0}(-s\,L_p(1-s, \chi))$ si χ est trivial, i. e.

$\gamma_p(\chi) = \lim_{s\to 0}(\frac{d}{ds}(-s\,L_p(1-s, \chi))$, dans tous les cas. On déduit de (10) que

$$\gamma_p(\chi) = F_{\chi\omega_1^{-1}}(1) .$$

Pour des raisons typographiques évidentes, notons provisoirement $G = F_{\chi\omega_1^{-1}}$. La série de Taylor à l'origine de G (série génératrice de $\chi\omega_1^{-1}$) est

$$G(T) = \Sigma_{n\geq 0} \chi(n)/n) T^n .$$

Comme, d'autre part, $\chi(n) = \Sigma_{\theta^f=1} g(\chi , \bar{\theta}) \theta(n)$, on a donc

$$G(T) = \Sigma_{\theta^f=1} g(\chi , \bar{\theta})(\Sigma_{n\geq 1} (\theta(n)/n) T^n = \Sigma_{\theta^f=1} g(\chi , \theta) \operatorname{Log}(1 - \theta(1) T) .$$

L'égalité si-dessus, a priori formelle, est aussi une relation entre fonctions analytiques pour $|T| < 1$. Mais chaque fonction $\operatorname{Log}(1 - \theta(1) T)$ n'est pas prolongeable en un élément analytique sur un domaine plus grand et contenant 1 , donc ne peut servir à évaluer $G(1)$. Cependant,

$$\Sigma_{(n,p)=1} (\theta(n)/n) T^n = (1/p)(\operatorname{Log}((1 - \theta(1) T^p)/(1 - \theta(p) T^p)))$$

est prolongeable en un élément analytique sur Δ_m , et même sur $\Delta_{\zeta,\sigma}$, où $\zeta=\theta(1)^{-1}$. On sait que G est prolongeable dans $\Delta_{\sigma,0}$, et l'on a ici sa décomposition de Mittag-Loeffler :

$$pG(T) = \Sigma_{\theta^f=1} g(\chi , \bar{\theta})(\operatorname{Log}((1 - \theta(1) T)^p/(1 - \theta(p) T^p) ,$$

où l'on obtient la partie principale relative à $\alpha \in A$ en sommant les termes pour lesquels $\theta(p) \alpha = 1$.

COROLLAIRE 2.5. - <u>Soit</u> $L_p(1) = \frac{1}{p} (\Sigma_{\theta^f=1} g(\chi , \bar{\theta}) \operatorname{Log}((1 - \theta(1))^p/(1 - \theta(p)))$, <u>alors</u>

(11) $$L_p(1) = \gamma_p(\chi) = L_p(1 , \chi) \quad \underline{\text{si}} \quad \chi \quad \underline{\text{est non trivial}} ,$$

<u>ou</u>

$$\lim_{s\to 0} (- s L_p(1 - s , \chi)) \quad \underline{\text{si}} \quad \chi \quad \underline{\text{est trivial}}.$$

On retrouve ici les formules classiques ([4], [13] et [15]).

On voit d'ailleurs que si on définit des fonctions " Log multiple", pour $|T| < 1$, par

$$\operatorname{Log}_k(1 - T) = -\Sigma_{n\geq 1} \frac{T^n}{n^k} ,$$

On vérifie que $\operatorname{Log}_k(1 - T) - (1/p^k) \operatorname{Log}_k(1 - T^p)$ est prolongeable en un élément analytique sur le domaine $v(1 - T^p) < 1$: on en déduit, de la même manière que ci-dessus, qur pour $k \geq 1$

(12) $$L_p(k , \chi) = \Sigma_{\theta^f=1} g(\chi\omega^{k-1} , \bar{\theta})(\operatorname{Log}_k(1 - \theta(1)) - (1/p^k) \operatorname{Log}_k(1 - \theta(p))).$$

Les formules "fermées" ainsi obtenues pour $L_p(k , \chi)$, $k \geq 1$, répondent en partie à une question posée par K. IWASAWA ([13], § 5). Une autre réponse de type assez différent a été donnée par J. DIAMOND [12].

2.3. Autre représentation de $g(\chi, \theta)$ au voisinage de $\theta = 1$.

Soit χ un caractère de Dirichlet, et

$$\Phi_\chi(U) = \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)\ U\ e^{aU}}{e^{fU} - 1} = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} \frac{T^n}{n!} .$$

On vérifie immédiatement l'identité formelle

$$F_\chi(T) = (\sum_{a=0}^{f-1} \chi(a)\ T^a)/(1 - T^f) =) - \Phi_\chi(\mathrm{Log}\ T)/\mathrm{Log}\ T .$$

De plus, les fonctions considérées sont analytiques pour $v(T - 1) > 1/(p - 1)$. En comparant cette relation avec (7), on obtient :

COROLLAIRE 2.6. - Soit χ un caractère de Dirichlet, et $\theta \in \hat{\mathbb{Z}}_p(m)$ tel que $v(\theta(1) - 1) > 1/(p - 1)$, alors

$$g(\chi, \theta) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} \frac{(\mathrm{Log}(\theta(1))^n}{n!} , \tag{13}$$

où $B_{n,\chi}$ est le n-ième nombre de Bernoulli généralisé associé à χ.

D'autre part, pour $x \in \mathbb{Z}_p(m)$, $\theta(x) = \sum_{n\geq 0} (\mathrm{Log}\ \theta(1))^n\ x^n/n!$.

Posons, pour $s \in S$, $u_n(x, s) = \chi(x)\ \langle x\rangle^s\ x^n$: on a, d'une part

$$g(\chi_s, \theta) = \sum_{n\geq 0} (\mathrm{Log}(\theta(1))^n\ (u_n * 1)'\ (-1)/n! ,$$

et d'autre part

$$u_n(x, s) = \chi\omega^n(x)\ \langle x\rangle^{n+s} ,$$

donc

$(u_n * 1)'\ (-1) = g(\chi\omega^n_{n+s}, 1) = B(s + n, \chi\omega^n)$, où $B(s, \chi) = - s\ L_p(1 - s, \chi)$.

COROLLAIRE 2.7. - Soit χ un caractère de Dirichlet, et $s \in S$, pour $\theta \in \hat{\mathbb{Z}}_p(m)$ tel que $v(\theta(1) - 1) > \frac{1}{p - 1}$, on a

$$g(\chi_s, \theta) = \sum_{n\geq 0} - (s + n)\ L_p(1 - s - n, \chi\omega^n)\ \frac{(\mathrm{Log}\ \theta(1))^n}{n!} \tag{14}$$

3. Fonctions L partielles et fonctions $\mathrm{Log}\,\Gamma_\chi$.

Dans [14], N. KOBLITZ définit des fonctions L partielles de la façon suivante. Pour N entier, $N \geq 1$ et $(N, mp) = 1$, soit

$$T_N\ f(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\frac{x + i}{N}) . \tag{15}$$

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p(m), \mathbb{C}_p)$, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des opérateurs linéaires continus sur E, et F le sous-espace de E constitué des f telles que $f(1 + x) = f(x)$ pour $x \notin U_p(m)$. On montre que $N \longrightarrow T_N$ définit une représentation continue de $\mathbb{N} \cap U_p(m)$ dans $\mathcal{L}(E)$, qui peut donc se prolonger en une représentation continue de $U_p(m)$ dans $\mathcal{L}(E)$. On montre de plus que F est stable par T_u pour tout $u \in U_p(m)$.

Soit χ un caractère p-adique continu de $U_p(m)$ (i. e. $\chi \in \hat{U}_p(m)$), le sous-espace porpre F_χ de la représentation $u \longrightarrow T_u$ de $U_p(m)$ dans $\mathcal{L}(F)$, associé au caractère χ , est l'espace des $f \in F$ telles que $T_u\, f = \chi(u)\, f$ pour tout $u \in U_p(m)$. N. KOBLITZ montre que, pour tout χ , ce sous-espace propre est de dimension 1 , et il appelle fonction L partielle, notée f_χ , un générateur de $F_{\bar\chi}$.

On montre facilement que $f \in F$ équivaut à : Il existe $g \in E$ telle que $g(x)=0$ si $x \in U_p(m)$ et $f(1 + x) = (g * 1)'\,(x)$ (cf. § 4). En cherchant une fonction propre f sous cette forme, on trouve par des calculs élémentaires que

$$f(1 + x) = (g * 1)'\,(x) \quad \text{et} \quad T_u(f) = \bar\chi(u)\, f \quad \text{équivaut à} \quad g'(x) = \frac{1}{x}\, \bar\chi(x)\, g'(1) \ .$$

On obtient donc une base de $F_{\bar\chi}$ en choisissant $g(x) = \chi(x)$ si χ n'est pas de torsion, ou $g(x) = \chi(x) \operatorname{Log} \langle x \rangle$ si χ est de torsion. On vérifie que les fonctions f_χ correspondantes sont bien, exprimées en termes de convolution, les mêmes que celles trouvées par KOBLITZ.

En particulier, pour χ de torsion, on trouve

$$f_\chi(1 + x) = \frac{d}{dx}\,(\operatorname{Log} \Gamma_\chi(1 + x)) \ .$$

Pour χ de torsion et $s \in S$, notons $f_\chi(1 + x\ ,\ s) = (\chi_s * 1)'\,(x)$ la fonction L partielle associée à χ_s . On vérifie que

$$f_\chi(1 + x\ ,\ s) = g(\chi_s\ ,\ 1) + s(\chi\omega_{s-1}^{-1} * 1)(x) \ .$$

Il en résulte que

$$\frac{d}{dx}(f_\chi(1 + x\ ,\ s) = s\ f_{\chi\omega^{-1}}(1 + x\ ,\ s - 1)$$

et par récurrence sur k

$$\frac{1}{k!}\ \frac{d^k}{dx^k}(f_\chi(1 + x\ ,\ s)) = \binom{s}{k}\ f_{\chi\omega^{-k}}(1 + x\ ,\ s - k)$$

en particulier,

$$\frac{1}{k!}\ \frac{d^k}{dx^k}\ f_\chi(1\ ,\ s) = \binom{s}{k}\ B(s - k\ ,\ \chi\omega^{-k}) \ .$$

D'autre part,

$$\frac{d}{ds}(f_\chi(1 + x\ ,\ s)) = \frac{d}{ds}((\chi_s * 1)'\,(x)) = \frac{d}{dx}(\chi_s \operatorname{Log} \langle\ \rangle * 1)(x) = \operatorname{Log} \Gamma'_{\chi_s}(1 + x) \ .$$

On en déduit, d'une part que la série de Taylor en $x = 0$ de $f_\chi(1 + x\ ,\ s)$ est

$$\sum_{k\geq 0} \binom{s}{k}\ B(s - k\ ,\ \chi\omega^{-k})\ x^k \ ,$$

et on vérifie que cette série converge vers f_χ pour $x \in f\mathbb{Z}_p(m)$, où f est le conducteur de χ , et d'autre part, en dérivant cette relation par rapport à s on obtient :

PROPOSITION 3.1. - <u>Soit</u> χ <u>un caractère de Dirichlet modulo</u> $f = mp^h$, $h \geq 1$, <u>et soit</u> $s \in S$, <u>on a</u>

$$\operatorname{Log} \Gamma'_{\chi_s}(1 + x) = \sum_{k\geq 0} \frac{d}{ds}\left(\binom{s}{k}\ B(s - k\ ,\ \chi\omega^{-k})\right)\ x^k \tag{16}$$

(où $B(s, \chi) = - s L_p(1 - s, \chi)$) pour $x \in f\mathbb{Z}_p(m)$.

Cette formule redonne, pour $s = 0$, la série de Taylor de $\operatorname{Log} \Gamma_{\chi_0}$ démontrée au théorème 2 de [9].

Pour des caractères $\chi \in \hat{U}_p(m)$ n'appartenant à aucun D_{χ_0} pour χ_0 de torsion, i. e. ne pouvant pas se représenter sous la forme χ_s , on peut déterminer, par des méthodes analogues, la série de Taylor de $\operatorname{Log} \Gamma_\chi$: les dérivations par rapport à s doivent être remplacées par des dérivations "intrinsèques" sur $\hat{U}_p(m)$, et le rôle des fonctions $B(s, \chi)$ est tenu par des sommes de Gauss.

4. Appendice.

On a utilisé au paragraphe précédent, plus ou moins explicitement, certaines propriétés de la convolution, comme, par exemple, la suivante :

PROPOSITION 4.1. - Si f est continuement et uniformément différentiable sur $\mathbb{Z}_p(m)$,

$$(f * 1)' = (f' * 1) + (f * 1)'(-1) . \tag{17}$$

Ceci se démontre en utilisant les relations (5) et (6). En effet,

$$F_{f*1}(T) = \frac{1}{1 - T} F_f(T) ,$$

donc

$$- \operatorname{Log} T\, F_{f*1}(T) = \frac{1}{1 - T} (- \operatorname{Log} T\, F_f(T)) = \frac{1}{1 - T}(F_{f'}(T) + \mathcal{E}_f(T)) .$$

En identifiant les composantes dans $H_0(\Delta_m)$ des deux membres, on trouve

$$F_{(f*1)'}(T) = \frac{1}{1 - T} F_{f'}(T) + \frac{\mathcal{E}_f(1)}{1 - T} ,$$

d'où la relation (17).

De même, au § 3, on a signalé que toute $f \in E$ telle que $f(1 + x) = f(x)$ pour $x \notin U_p(m)$ peut se mettre sous la forme $f(1 + x) = (g * 1)'(x)$, où g est une fonction à support dans $U_p(m)$. En effet, toute $f \in E$ peut s'écrire (de manière unique) $f(1 + x) = f(0) + (h * 1)(x)$, et la condition "$f(1 + x) = f(x)$ si $x \in U_p(m)$" devient : "h est a support dans $U_p(m)$" . Soit g_1 une primitive de h , à support dans $U_p(m)$: on a

$$f(1 + x) = f(0) + (g_1' * 1)(x) = (g_1 * 1)'(x) + f(0) - (g_1 * 1)'(-1) .$$

On montre d'autre part que, si φ est une fonction localement constante, $(\varphi*1)'$ est aussi localement constante. On peut donc, en ajoutant à g_1 une fonction localement constante à support dans $U_p(m)$ bien choisie, obtenir une fonction g telle que $f(1 + x) = (g * 1)'(x)$. On montre aussi que, si f est localement analytique, on peut choisir g localement analytique du même ordre, ou si f est continuement et uniformément différentiable k-fois, on peut exiger que g le soit $(k + 1)$-fois.

Signalons enfin une propriété arithmétique de la convolution qui n'a pas été utilisée plus haut, mais peut avoir de l'intérêt par ailleurs.

PROPOSITION 4.2. - Soit A un sous-anneau de $\underset{\sim}{C}_p$, et soit

$$E_A = \{f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p(m)\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)\ ;\quad f(\underset{\sim}{Z}) \subset A\}$$

(i) E_A est stable par convolution,

(ii) si $f' \in E_A$, $(f * 1)' - (f * 1)'(-1) \in E_A$.

La preuve est simple : il est clair, par définition, que si $f(\underset{\sim}{N}) \subset A$ et $g(\underset{\sim}{N}) \subset A$, $f * g(\underset{\sim}{N}) \subset A$. D'autre part, la définition des coefficients $\lambda_{k,i}$ dans la représentation (2) de F_f montre que "$f(-n) \in A$ pour $n \geqslant 1$" équivaut à "$\lambda_{k,i} \in A$ pour $i = 0, \ldots, m-1$ et $k \geqslant 1$". Comme $F_{f*g} = F_f F_g$, il est clair que si F_f et F_g ont tous leurs coefficients $\lambda_{k,i}$ dans A, il en est de même pour $F_f * F_g$, d'où l'assertion (i). L'assertion (ii) résulte immédiatement de (17). On en déduit par exemple :

COROLLAIRE 4.3. - Soit χ un caractère de Dirichlet, $K = Q(\chi, \omega)$ le corps des valeurs de χ et ω, et soit A l'anneau des entiers de K, alors, pour tout $n \in \underset{\sim}{Z}$ et tout $k \in \underset{\sim}{Z}$,

$$f_\chi(n, k) + k\, L_p(1-k, \chi) \in A,$$

où f_χ est la fonction L partielle définie en 3.

En effet, pour $k \in \underset{\sim}{Z}$, $\chi \langle\ \rangle^k \in E_A$, et sa dérivée $k\chi\omega^{-1} \langle\ \rangle^{k-1}$ aussi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Prolongement analytique des sommes de Gauss, I, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 9e année, 1981/82, n° 13, 9 p.

[2] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180.

[3] AMICE (Y.). - Fonctions analytiques dans le complémentaire d'une famille de disques, Séminaire de Théorie des nombres, Université de Bordeaux, 1968/69, n° 8.

[4] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonction zêta p-adique des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.

[5] AMICE (Y.). - Dual d'un espace H(D) et transformation de Fourier, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 5, 12 p.

[6] AMICE (Y.) et VÉLU (J.). - Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke, "Journées arithmétiques", [1974. Bordeaux], Astérisque, n° 24-25, 1975, p. 119-131.

[7] AMICE (Y.). - Nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).

[8] AMICE (Y.). - Duals, Proceedings of the conference on p-adic analysis, [1978. Nijmegen], p. 1-15. - Nijmegen, Mathematisch Instituut Katholieke Universiteit, 1978.

[9] AMICE (Y.). - Fonction Γ p-adique associée à un caractère de Dirichlet, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 7e année, 1979/80, n° 17, 11 p.

[10] BARSKY (D.). - Fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 397-411.

[11] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique, Thèse 3e cycle, Université de Bordeaux-I, 1971.

[12] DIAMOND (J.). - On the values of p-adic L-functions and positive integers, Acta Arithm., Warszawa, t. 35, 1979, p. 223-237.

[13] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L-functions. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 74).

[14] KOBLITZ (N.). - p-adic eigenfunctions for Kubert distributions (preprint).

[15] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, J. für reine und angew. Math., t. 214-215, 1964, p. 328-339.
