

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

YVETTE AMICE

Prolongement analytique des sommes de Gauss, II

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n° 3 (1981-1982), exp. n° J1, p. J1-J14

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_3_A2_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES SOMMES DE GAUSS, II

par Yvette AMICE (*)

[Université Paris-7]

Introduction.

Les notations sont celles de [1]. On a montré que, pour $\chi \in \hat{U}_p(m)$ et $\theta \in \hat{Z}_p(m)$, la somme de Gauss

$$(1) \quad g(\chi, \theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} ((1/mp^k) \sum_{a=0}^{mp^k-1} \chi(a) \theta(a)) = (\chi\theta \times 1)'(-1)$$

existe, et définit une fonction analytique des variables χ et θ .

Nous donnons ici une formule explicite de $g(\chi, \theta)$ comme fonction analytique de $\theta \in \hat{Z}_p(m)$, pour χ fixé (§ 2). Cette expression s'obtient grâce aux propriétés reliant la convolution et la dérivation exposées au § 1. Au § 3, on montre comment l'application des mêmes techniques, de convolution, permet de retrouver les fonctions L partielles définies par N. KOBLITZ [14]. Leur rapport avec les sommes de Gauss, les fonctions $L_p(1-s, \chi)$ et les fonctions $\text{Log } \Gamma_{\chi_s}$ [9] permet de démontrer une formule de Taylor pour les fonctions $\text{Log } \Gamma_{\chi_s}$ qui généralise celle obtenue au théorème 2 de [9] dans le cas où $s = 0$.

1. Dérivation et convolution.

1.1. Représentation des fonctions génératrices.

On sait que, si g est une fonction définie sur \mathbb{N} et à valeurs dans \mathbb{C}_p , $g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p(m), \mathbb{C}_p)$ à la condition nécessaire et suffisante que sa série génératrice, $F_g(T) = \sum_{n \geq 0} g(n) T^n$, soit la série de Taylor à l'origine d'un élément $F_g \in H_0(\Delta_m)$ ([1], proposition 1.3 ou [3]).

Soit $h \geq 0$ et $f = mp^h$. Dire que $g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p(m), \mathbb{C}_p)$ équivaut à dire que chacune des fonctions φ_i définies sur \mathbb{N} par $\varphi_i(k) = g(i + mp^h k)$, $i = 0, \dots, mp^h - 1$, est prolongeable en une fonction continue sur \mathbb{Z}_p . On a alors, pour $t \in \mathbb{Z}_p$,

$$\varphi_i(t) = \sum_{k \geq 1} \lambda_{k,i} \binom{t+k-1}{k-1}, \text{ où } \lambda_{k,i} \rightarrow 0 \text{ pour } k \rightarrow \infty.$$

On en déduit que

$$F_g(T) = \sum_{i=0}^{f-1} T^i \left(\sum_{k \geq 0} \varphi_i(k) T^{fk} \right) = \sum_{i=0}^{f-1} T^i \left(\sum_{k \geq 1} \lambda_{k,i} / (1-T^f)^k \right).$$

(*) Yvette AMICE, UER Mathématiques, Aile 45-55, Université Paris-7, 2 place Jussieu 75251 PARIS CEDEX 05.

En posant $P_k(T) = \sum_{i=0}^{f-1} \lambda_{k,i} T^i$, on obtient donc

$$(2) \quad F_g(T) = \sum_{k \geq 1} \frac{P_k(T)}{(1 - T^m)^k}.$$

Notons $\|P_k\|_\infty = \sup_i |\lambda_{k,i}| = \sup\{|P_k(t)| ; |t| \leq 1\}$, on déduit, de ce que chaque φ_i est continue sur \underline{Z}_p , le fait que $\|P_k\|_\infty \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, et donc que la série (2) converge vers F_g , uniformément sur Δ_m , i. e. dans $H_0(\Delta_m)$.

Si on choisit $f = m$, la série (2) n'est autre que la représentation usuelle de F_g comme élément analytique sur le domaine Δ_m complémentaire de la lemniscate $D_m^g = \{t \in \underline{C}_p ; |t^m - 1| < 1\}$ ([7], proposition 4.8.5).

Supposons de plus que g soit localement analytique sur $\underline{Z}_p(m)$, et choisissons $f = mp^h$ de telle sorte que g soit somme de sa série de Taylor sur chaque disque $i + mp^h \underline{Z}_p$ de $\underline{Z}_p(m)$. On sait [2] qu'alors, comme chaque φ_i est strictement analytique sur \underline{Z}_p , $|\lambda_{k,i}/(k-1)!| \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$ et que

$$\inf_{k,i} |\lambda_{k,i}/(k-1)!| = \|g\|_h,$$

où $\|g\|_h$ désigne la norme de g dans l'espace $LA_h(\underline{Z}_p(m), \underline{C}_p)$ des fonctions localement analytiques d'ordre h sur $\underline{Z}_p(m)$ (cf. [2]).

Pour ce choix de $f = mp^h$, la représentation (2) est telle que $\|P_k/(k-1)!\|_\infty \rightarrow 0$, elle converge donc pour $|T^f - 1| > p^{-1/(p-1)}$.

Soit $\Delta_{m,r_h} = \{t \in \underline{P}^1(\underline{C}_p) ; |t^{mp^h} - 1| > p^{-1/(p-1)}\}$, on a démontré :

LEMME 1.1. - Si g est localement analytique d'ordre h sur $\underline{Z}_p(m)$, la représentation

$$(2) \quad F_g(T) = \sum_{k \geq 1} \frac{P_k(T)}{(1 - T^m)^k},$$

définie ci-dessus, converge pour $T \in \Delta_{m,r_h}$, et F_g est prolongeable en une fonction analytique bornée sur Δ_{m,r_h}

Si, de plus, la série de Taylor à l'origine de chacune des fonctions φ_i a un rayon de convergence au moins égal à $\rho > 1$, on peut montrer que F_g est prolongeable en une fonction analytique sur un domaine $\Delta_{m,r'}$, $r' < r_h$ (voir un exemple au § 2.2).

D'autre part, on sait que, pour chaque i ,

$$\varphi_i'(t) = \sum_{k \geq 1} \binom{t + k - 1}{k - 1} \left(\sum_{j \geq 1} (\lambda_{k+j,i}/j) \right).$$

On en déduit que la représentation (2) correspondant à la dérivée g' de g est

$$(3) \quad F_{g'}(T) = (1/m) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(1 - T^m)^k} \left(\sum_{j \geq 1} (P_{k+j}(T)/j) \right).$$

On peut d'ailleurs aussi montrer que la représentation (3) de F_g^1 est valable dès que $g \in C_u^1(Z_p(m), C_p)$ (en appliquant la caractérisation de C_u^1 de D. BARSKY [10]).

Soit $D_m = \{t \in C_p; |t^m - 1| < 1\} = P^1(C_p) \setminus \Delta_m$, on note $\mathcal{A}(D_m)$ l'espace des fonctions analytiques sur D_m , c'est-à-dire l'espace des fonctions définies sur D_m et dont la restriction à chacun des disques $\{|t - \zeta| < 1; \zeta^m = 1\}$, constituant D_m , est analytique sur ce disque.

LEMME 1.2. - Toute fonction $G \in \mathcal{A}(D_m)$ admet une unique représentation, convergent sur D_m

$$(4) \quad G(T) = \sum_{k \geq 0} A_k(T)(1 - T^m)^k,$$

où $A_k(T)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à m .

La démonstration peut se faire soit "directement", à l'aide des séries de Taylor des restrictions de G à chacun des disques constituant D_m , soit en utilisant une identification de $\mathcal{A}(D_m)$ à l'espace des formes linéaires continues sur $\text{Loc an}(Z_p(m), C_p)$ (cf. [6] ou [1], 2.3) et une caractérisation des fonctions F_g correspondant aux $g \in \text{Loc an}(Z_p(m), C_p)$.

1.2. Décomposition type "Mittag-Loeffler" pour les fonctions analytiques sur des "couronnes" $C_{m,r}$.

Soit $r < 1$ et $C_{m,r} = D_m \cap \Delta_{m,r} = \{t \in C_p; r < |t^m - 1| < 1\}$, et soit $\mathcal{A}(C_{m,r})$ l'espace des fonctions analytiques sur la "couronne" $C_{m,r}$: c'est une somme directe d'espace de fonctions analytiques au sens classique sur m couronnes $r_1 < |t - \zeta| < 1$. On montre que $\mathcal{A}(C_{m,r}) = \mathcal{A}(D_m) \oplus \mathcal{A}_0(\Delta_{m,r})$, où $\mathcal{A}_0(\Delta_{m,r})$ désigne l'espace des fonctions analytiques sur $\Delta_{m,r}$ et nulles à l'infini. Ceci signifie que, pour toute $F \in \mathcal{A}(C_{m,r})$, il existe une unique décomposition "à la Mittag-Loeffler",

$$F = F^+ + F^-, \text{ où } F^+ \in \mathcal{A}(D_m) \text{ et } F^- \in \mathcal{A}_0(\Delta_{m,r}).$$

En particulier, si $F \in \mathcal{A}_0(\Delta_{m,r})$ et $G \in \mathcal{A}(D_m)$, le produit FG , qui est une fonction analytique sur $C_{m,r}$, admet une unique décomposition $(FG) = (FG)^+ + (FG)^-$, que l'on obtient par exemple de la façon suivante. Soit

$$F(T) = \sum_{k \geq 1} \frac{P_k(T)}{(1 - T^m)^k} \text{ et } G(T) = \sum_{\lambda \geq 0} A_\lambda(T)(1 - T^m)^\lambda,$$

les représentations (2) et (4) de F et G respectivement dans $\mathcal{A}_0(\Delta_{m,r})$ et $\mathcal{A}(D_m)$. En effectuant une multiplication formelle, avec restes, on obtient, si

$$D_n(T) = \sum_{\ell - k = n} P_k A_\ell = D_n^1(1 - T^m) + D_n^2 \text{ et } C_n(T) = D_n^2 + D_{n-1}^1,$$

la décomposition

$$(FG)^+ = \sum_{n \geq 0} C_n(T)(1 - T^m)^n \text{ et } (FG)^- = \sum_{n \leq -1} C_n(T)(1 - T^m)^n,$$

l'on constate que les conditions de croissance imposées aux P_k et A_j impliquent que $(FG)^+ \in \mathcal{O}(D_m)$ et $(FG)^- \in \mathcal{O}_0(\Delta_{m,r})$. L'unicité de la décomposition résulte de l'unicité des représentations (4) et (2) dans $\mathcal{O}(D_m)$ et $\mathcal{O}_0(\Delta_{m,r})$ respectivement. De plus, cette décomposition jouit des propriétés usuelles de continuité des décompositions de Mittag-Leoffler. Plus précisément, pour $r' \in]r, 1[$, posons

$$M(F, r') = \sup\{|F(t)| ; |t^m - 1| = r'\}, \text{ si } r' \in]C_p|,$$

et prolongeons $M(F, r')$ par continuité pour r' quelconque dans $]r, 1[$. On vérifie que :

- si $F = F^+ \in \mathcal{O}(D_m)$, $M(F, r') = \sup\{|F(t)| ; |t^m - 1| \leq r'\}$;
- si $F = F^- \in \mathcal{O}_0(\Delta_{m,r})$, $M(F, r') = \sup\{|F(t)| ; |t^m - 1| \geq r'\}$;
- si $F = F^+ + F^- \in \mathcal{O}(C_{m,r})$, $M(F, r') = \max(M(F^+, r'), M(F^-, r'))$.

Un exemple important de fonction analytique sur D_m est celui du logarithme

$$\text{Log } T = (\text{Log } T^m)/m = (1/m) \left(- \sum_{k \geq 1} \frac{(1 - T^m)^k}{k} \right).$$

Soit g une fonction localement analytique sur $\mathbb{Z}_p(m)$: il existe $r < 1$ tel que $F_g \in H_0(\Delta_{m,r})$. Pour un tel r , on obtient, comme décomposition de $F_g \cdot \text{Log}$ dans $\mathcal{O}(C_{m,r})$:

$$(F_g \cdot \text{Log})^- (T) = (-1/m) \sum_{k \geq 1} (1 - T^m)^{-k} \left(\sum_{j \geq 1} (P_{j+k}(T)/j) \right)$$

et

$$(F_g \cdot \text{Log})^+ (T) = (-1/m) \sum_{k \geq 0} (1 - T^m)^k \left(\sum_{j \geq 1} (P_j(T)/(j+k)) \right).$$

On reconnaît dans le développement de $(-F_g \cdot \text{Log})^-$ celui qu'on a trouvé pour F_g , (3), on en déduit :

PROPOSITION 1.3. - Soit g une fonction localement analytique sur $\mathbb{Z}_p(m)$ et $r < 1$ tel que F_g soit un élément analytique sur $\Delta_{m,r}$, alors la fonction

$$(5) \quad \mathcal{L}_g(T) = - \text{Log } T \cdot F_g(T) - F_{g'}(T),$$

analytique sur la "couronne" $C_{m,r}$, admet un unique prolongement en une fonction analytique sur D_m ,

$$(5 \text{ bis}) \quad \mathcal{L}_g(T) = (1/m) \sum_{k \geq 0} (1 - T^m)^k \left(\sum_{j \geq 1} ((P_j(T)/(j+k)) \right),$$

où les polynômes P_j sont ceux figurant dans la représentation (2) de F_g .

Remarque. - Les formules (5) et (5 bis) gardent un sens si g est seulement supposée continuellement et uniformément différentiable : la décomposition obtenue est alors formelle, et se justifie dans le cadre d'un espace de séries de Laurent analogue à ceux étudiés en [5]. Le produit $\text{Log} \cdot F_g$ n'a dans ce cas aucun "domaine de définition" mais la série (5 bis) définit encore une fonction analytique sur D_m . Plus généralement, si $g \in C_{u,p}^k(\mathbb{Z}_p(m), \mathbb{Z}_p)$ et si G est une fonction analytique sur D_m satisfaisant une condition de croissance au bord, $G = \mathcal{O}(\text{Log}^k)$, le produit $F_g \cdot G$ peut

être défini, c'est un élément de $H_0(\Delta_m) \oplus \mathcal{G}(D_m)$, dont les parties $(F \underset{g}{G})^+$ et $(F \underset{g}{G})^-$ peuvent être interprétées en termes de distributions au sens de [6] ou [8], cette étude concrétisant la dualité entre C_u^k et $\mathcal{O}(\text{Log}^k)$. On retrouve ici, par $m = 1$, la fonction $J(x \rightarrow g(x))$, étudiée en [11] par P. CASSOU-NOGUES, puisqu'on vérifie que $J(x \rightarrow g(x))(T) = \mathcal{E}_g(T)$ lorsque g est continuellement et uniformément dérivable sur \mathbb{Z}_p et $T \in D_1$.

Grâce aux propriétés des fonctions $M(F, r')$ indiquées plus haut, et à l'évaluation des coefficients des polynômes P_k qui résulte des propriétés des fonctions φ_i , on peut évaluer l'ordre de croissance de $\mathcal{E}_g(T)$ au bord des disques constituant D_m et par exemple montrer que, si $g \in C_u^1$,

$$M(\mathcal{E}_{g, r'}) \leq M(\text{Log}, r') (\max(\|g\|_\infty, p\|g'\|_\infty)),$$

où $\|g\|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{Z}_p(m)$.

Parmi les interprétations que l'on peut donner de \mathcal{E}_g , nous ne retiendrons ici que la suivante :

PROPOSITION 1.4. - Pour g continuellement et uniformément différentiable,

$$(6) \quad \mathcal{E}_g(1) = (g * 1)'(-1),$$

où \mathcal{E}_g est la fonction analytique sur D_m définie dans la proposition 1.3.

Preuve. - On a visiblement, $\mathcal{E}_g(1) = (1/m) \sum_{i=0}^{m-1} (\sum_{k \geq 1} (\lambda_{k,i}/k))$. Or, comme

$$\varphi_i(t) = \sum_{k \geq 1} \lambda_{k,i} \binom{t+k-1}{k-1}, \quad (\varphi_i *_{\mathbb{Z}_p} 1)(t) = \sum_{k \geq 1} \lambda_{k,i} \binom{t+k}{k}$$

(on note ici $*_{\mathbb{Z}_p}$ ou $*_{\mathbb{Z}_p(m)}$ les convolutions définies respectivement pour des fonctions continues sur \mathbb{Z}_p ou $\mathbb{Z}_p(m)$, ceci pour éviter les confusions).

On a donc

$$\sum_{k \geq 1} (\lambda_{k,i}/k) = (\varphi_i *_{\mathbb{Z}_p} 1)'(-1).$$

D'autre part, on vérifie aisément que, pour $n > 0$,

$$\sum_{i=0}^{m-1} (\varphi_i *_{\mathbb{Z}_p} 1)(n) = (g *_{\mathbb{Z}_p(m)} 1)((n+1) m - 1).$$

On en déduit, en prenant $n = p^\ell$, $\ell \rightarrow +\infty$, que

$$(g *_{\mathbb{Z}_p(m)} 1)'(-1) = (1/m) \sum_{i=0}^{m-1} (\varphi_i *_{\mathbb{Z}_p} 1)'(-1),$$

d'où la relation (6).

2. Formules explicites.

2.1. Sommes de Gauss.

Pour $\chi \in \hat{U}_p(m)$ et $\theta \in \hat{\mathbb{Z}}_p(m)$, on a, par définition,

$$g(\chi, \theta) = (\chi\theta * 1)'(-1).$$

Compte tenu de la proposition 1.4, cela s'écrit encore

$$g(\chi, \theta) = \mathcal{L}_{\chi^\theta}(1) .$$

D'autre part, il est évident que $F_{\chi^\theta}(T) = F_\chi(\theta(1) T)$, et on en déduit aisément que $\mathcal{L}_{\chi^\theta}(1) = \mathcal{L}_\chi(\theta(1))$.

Rappelons par ailleurs qu'on a défini en [1], 2.2, une fonction $\text{Log } \chi$, analytique sur $\hat{U}_p(m)$, à valeurs dans $\hat{\mathbb{C}}_p$, et telle que, si $x = (x_0, x_1) \in U_p(m)$, $x_0 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ et $x_1 \in U_p(1) = \hat{\mathbb{Z}}_p^\times$, on ait

$$\chi'(x) = (\text{Log } \chi) x_1^{-1} \chi(x) .$$

Notons ϵ le caractère fondamental de $U_p(m)$: $\epsilon(x) = x_1$, on a donc

$$\chi' = (\text{Log } \chi) \epsilon^{-1} \chi .$$

THEOREME 2.1. - Soit $\chi \in \hat{U}_p(m)$, et $F_\chi(T) = \sum_{n \geq 0} \chi(n) T^n$ sa série génératrice.
Soit $r < 1$ tel que $F_\chi \in H_0(\Delta_m, r)$, alors la fonction

$$(7) \quad \mathcal{L}_\chi(T) = - \text{Log } TF_\chi(T) - \text{Log } \chi F_{\epsilon^{-1}\chi}(T) ,$$

analytique pour $r < |t^m - 1| < 1$, est prolongeable de façon unique en une fonction
analytique sur D_m , encore notée \mathcal{L}_χ , et on a, pour $\theta \in \hat{\mathbb{Z}}_p(m)$,

$$(8) \quad g(\chi, \theta) = \mathcal{L}_\chi(\theta(1)) .$$

Remarque 1. - On voit ici explicitement comment, pour χ fixé dans $\hat{U}_p(m)$, $\theta \rightarrow g(\chi, \theta)$ est, sur $\hat{\mathbb{Z}}_p(m)$, une fonction analytique à croissance logarithmique. Pour $|\theta(1)^m - 1|$ assez proche de 1, $\mathcal{L}_\chi(\theta(1))$ est donné par (7) (où $T = \theta(1)$), or $\text{Log } \chi F_{\epsilon^{-1}\chi}(T)$ et $F_\chi(T)$ sont bornées pour $|T^m - 1| \rightarrow 1^-$, et on voit, sur (7), que, pour $r \rightarrow 1^-$,

$$\sup_{|\theta(1)^m - 1| \leq r} |g(\chi, \theta)| \simeq C M(\text{Log}, r) ,$$

où C est une constante dépendant de χ .

Remarque 2. - Si χ est de torsion, i. e. localement constant, $\chi' = \text{Log } \chi = 0$, et (7) se réduit dans ce cas à la formule (9) de [1].

Soit $\chi_k = \chi_0 \langle \rangle^k$, où χ_0 est de torsion et k entier, $k \geq 0$, alors $\text{Log } \chi = k$, $\epsilon^{-1} \chi_k = \chi_0 \omega^{-1} \langle \rangle^{k-1}$. Dans ce cas, les fonctions F_{χ_k} et $F_{\epsilon^{-1}\chi_k}$ sont des fractions rationnelles, et la formule (3) s'écrit :

$$g(\chi_k, \theta(1)) = - \text{Log}(\theta(1) F_{\chi_k}(\theta(1))) - k F_{(\chi_0 \omega^{-1})_{k-1}}(\theta(1))$$

pour $\theta(1)^f \neq 1$.

Remarque 3. - On retrouve encore sur cette formule (7), l'évaluation de $g(\chi, \theta)$, obtenue en [1], proposition 2.2. En effet, $M(F_\chi, 1) = M(F_{\epsilon^{-1}\chi}, 1) = 1$, et pour

θ fixé et χ variant dans $\hat{U}_p(m)$, la dépendance en χ de $g(\chi, \theta)$ au bord est celle de $\text{Log } \chi$.

2.2. Application aux fonctions L_p .

Soit χ un caractère de Dirichlet modulo $f = mp^h$, $h \geq 1$, et soit

$$S = \{s \in \mathbb{C}_p; v(s) > \frac{1}{p-1} - 1\}.$$

On note $\chi_s = \chi \langle \rangle^s$, et on sait que $s \rightarrow \chi_s$ est un paramétrage du disque D_χ de $\hat{U}_p(m)$, plus grand disque contenant χ et ne contenant aucun autre élément de torsion. Pour $s \in S$, on a

$$g(\chi_s, 1) = -sL_p(1-s, \chi).$$

Pour $i = 0, \dots, f-1$, $\varphi_i(t) = \chi_s(i+ft) = \chi(i) \langle i+mt \rangle^s$. Posons $\sigma = \inf(v(s), 0)$; la série de Taylor de φ_i converge pour $v(t) > \frac{1}{p-1} - h - \sigma$, et sa somme est bornée par 1 dans ce disque. On en déduit que, si

$$\varphi_i(t) = \sum_{k \geq 1} \lambda_{k,i} \binom{t+k-1}{k-1},$$

$$\inf_{k,i} (v(\lambda_{k,i}) - v((k-1)!)) + (k-1) \left(\frac{1}{p-1} - h - \sigma \right) = 0.$$

Dans la représentation $F_{\chi_s}(T) = \sum_{k \geq 1} P_k(T)/(1-T^f)^k$, où $P_k(T) = \sum_{i=0}^{f-1} \lambda_{k,i} T^i$, on a donc,

$$w(P_k) = \inf_i (v(\lambda_{k,i})) \geq v((k-1)!) - \frac{k-1}{p-1} + (k-1)(h + \sigma),$$

et cette série converge, et a une somme bornée, pour $v(T^f - 1) < h + \sigma$.

Notons Δ_σ le domaine défini par $v(1-T^f) < h + \sigma$. On vérifie que

$$\Delta_\sigma = \bigcap_{\zeta^f=1} \Delta_{\sigma, \zeta}, \text{ où } \Delta_{\sigma, \zeta} = \{t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p); v(t - \zeta) < \frac{1+\sigma}{p}\}.$$

D'autre part, si $\zeta^p = \zeta'^p$, les domaines $\Delta_{\sigma, \zeta}$ et $\Delta_{\sigma, \zeta'}$ coïncident. Pour décrire Δ_σ à l'aide de ses trous distincts, on considèrera donc, pour $\alpha^{f/p} = 1$, le domaine $\Delta'_{\alpha, \sigma} = \Delta_{\sigma, \zeta}$ pour tout ζ tel que $\zeta^p = \alpha$, et l'on a $\Delta_\sigma = \bigcap_{\alpha^{f/p}=1} \Delta'_{\alpha, \sigma}$, où les $\Delta'_{\alpha, \sigma}$ sont des complémentaires de disques disjoints.

De l'évaluation ci-dessus de $w(P_k)$, on déduit :

LEMME 2.2. - Soit χ un caractère de Dirichlet modulo $f = mp^h$, $h \geq 1$ et $s \in S$ alors F_{χ_s} est une fonction analytique bornée, nulle à l'infini sur Δ_σ .

Soit $B_0(\Delta_\sigma)$ l'espace des fonctions analytiques bornées et nulles à l'infini sur Δ_σ . Toute $F \in B_0(\Delta_\sigma)$ admet une unique décomposition de Mittag-Loeffler :

$$F = \sum_{\alpha^{f/p}=1} F_\alpha, \text{ où } F_\alpha \in B_0(\Delta'_{\alpha, \sigma}).$$

Si $F = F_{\chi_0}$, c'est une fraction rationnelle dont les parties principales relatives aux racines non primitives f -ièmes de 1 sont nulles (on suppose ici que f est

la plus petite période de χ).

LEMME 2.3. - Pour $k \geq 0$, les parties principales $F_{\chi_k, \alpha}$ de F_{χ_k} relatives aux disques $\Delta_{\alpha, \sigma}$ pour lesquels α n'est pas racine primitive (f/p) -ième de 1 sont nulles.

On a en effet $F_{\chi_k}(T) = k T \frac{d}{dT} (F_{\chi_{k-1}}(T))$, la propriété est vraie pour $k = 0$, et donc pour tout $k \geq 0$.

D'autre part, on montre aisément que, pour tout χ , $s \rightarrow F_{\chi_s}$, est une application analytique de S dans $B_0(\Delta_\sigma)$. Plus précisément si on note $U_k(x) = \chi(x) (\langle x \rangle - 1)^k$, on a

$$F_{\chi_s} = \sum_{k \geq 1} \binom{s}{k} F_{U_k},$$

où cette série converge pour $s \in S$, car $\|F_{U_k}\|_{\Delta_\sigma} = O(p^{-k})$. Si α est une racine non primitive (f/p) -ième de 1, on a $F_{U_k, \alpha} = 0$, donc aussi $F_{\chi_s, \alpha} = 0$ pour tout $s \in S$.

Notation. - Soit A l'ensemble des racines primitives (f/p) -ièmes de 1, pour $\alpha \in A$, soit ζ l'une des racines de $\zeta^p = \alpha$, et $\Delta'_{\alpha, \sigma} = \{t \in \mathbb{C}_p; v(t - \zeta) > (1 + \sigma)/p\}$, on note $\Delta_{\sigma, 0} = \bigcap_{\alpha \in A} \Delta'_{\alpha, \sigma}$.

PROPOSITION 2.4. - Soit χ un caractère de Dirichlet modulo $f = mp^h$, $h \geq 1$, où f est la plus petite période de χ , pour $s \in S$, $F_{\chi_s}(T)$ est prolongeable en une fonction analytique bornée sur $\Delta_{\sigma, 0}$, nulle à l'infini. Pour $\theta \in \mathbb{Z}(m)$ et tel que $\theta(1) \in \Delta_{\sigma, 0}$, on a

$$(9) \quad g(\chi_s, \theta) = -\text{Log}(\theta(1)) F_{\chi_s}(\theta(1)) - s F_{\chi_{s-1}}(\theta(1)),$$

en particulier,

$$(10) \quad s L_p(1 - s, \chi) = s F_{\chi_{s-1}}(1).$$

Remarquons d'abord que $\sigma = \inf(v(s), 0) = \inf(v(s - 1), 0)$, donc $F_{\chi_{s-1}}$ est dans $B_0(\Delta_\sigma)$. On voit, en appliquant les lemmes 2.2 et 2.3, et la remarque qui suit ce dernier, que F_{χ_s} est en fait dans $B_0(\Delta_{\sigma, 0})$ puisque ses parties principales relatives aux trous correspondant à des α non primitives sont nulles. La relation (9) se déduit donc des relations (7) et (3) du théorème 2.1. De plus, $1 \in \Delta_{\sigma, 0}$, donc (10), s'obtient en appliquant (9) à $\theta(1) = 1$.

On peut retrouver à partir de là une formule "fermée" pour $L_p(1, \chi)$. Soit $\gamma_p(\chi)$ la constante d'Euler :

$$\gamma_p(\chi) = L_p(1, \chi) \text{ si } \chi \text{ est non trivial, et}$$

$$\gamma_p(\chi) = \lim_{s \rightarrow 0} (-s L_p(1 - s, \chi)) \text{ si } \chi \text{ est trivial, i. e.}$$

$$\gamma_p(\chi) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{d}{ds} (-s L_p(1 - s, \chi)) \right), \text{ dans tous les cas. On déduit de (10) que}$$

$$\gamma_p(\chi) = F_{\chi\omega^{-1}}(1) .$$

Pour des raisons typographiques évidentes, notons provisoirement $G = F_{\chi\omega^{-1}}$. La série de Taylor à l'origine de G (série génératrice de $\chi\omega^{-1}$) est

$$G(T) = \sum_{n \geq 0} \chi(n)/n T^n .$$

Comme, d'autre part, $\chi(n) = \sum_{\theta^f=1} g(\chi, \bar{\theta}) \theta(n)$, on a donc

$$G(T) = \sum_{\theta^f=1} g(\chi, \bar{\theta}) (\sum_{n \geq 1} (\theta(n)/n) T^n = \sum_{\theta^f=1} g(\chi, \bar{\theta}) \text{Log}(1 - \theta(1) T) .$$

L'égalité si-dessus, a priori formelle, est aussi une relation entre fonctions analytiques pour $|T| < 1$. Mais chaque fonction $\text{Log}(1 - \theta(1) T)$ n'est pas prolongeable en un élément analytique sur un domaine plus grand et contenant 1, donc ne peut servir à évaluer $G(1)$. Cependant,

$$\sum_{(n,p)=1} (\theta(n)/n) T^n = (1/p) (\text{Log}((1 - \theta(1) T^p)/(1 - \theta(p) T^p)))$$

est prolongeable en un élément analytique sur Δ_m , et même sur $\Delta_{\zeta, \sigma}$, où $\zeta = \theta(1)^{-1}$. On sait que G est prolongeable dans $\Delta_{\sigma, 0}$, et l'on a ici sa décomposition de Mittag-Leoffler :

$$pG(T) = \sum_{\theta^f=1} g(\chi, \bar{\theta}) (\text{Log}((1 - \theta(1) T)^p / (1 - \theta(p) T^p)) ,$$

où l'on obtient la partie principale relative à $\alpha \in A$ en sommant les termes pour lesquels $\theta(p) \alpha = 1$.

COROLLAIRE 2.5. - Soit $L_p(1) = \frac{1}{p} (\sum_{\theta^f=1} g(\chi, \bar{\theta}) \text{Log}((1 - \theta(1))^p / (1 - \theta(p))))$, alors

$$(11) \quad L_p(1) = \gamma_p(\chi) = L_p(1, \chi) \quad \underline{\text{si}} \quad \chi \quad \underline{\text{est non trivial}} ,$$

ou

$$\lim_{s \rightarrow 0} (-s L_p(1-s, \chi)) \quad \underline{\text{si}} \quad \chi \quad \underline{\text{est trivial}} .$$

On retrouve ici les formules classiques ([4], [13] et [15]).

On voit d'ailleurs que si on définit des fonctions "Log multiple", pour $|T| < 1$, par

$$\text{Log}_k(1 - T) = - \sum_{n \geq 1} \frac{T^n}{n^k} ,$$

On vérifie que $\text{Log}_k(1 - T) - (1/p^k) \text{Log}_k(1 - T^p)$ est prolongeable en un élément analytique sur le domaine $v(1 - T^p) < 1$: on en déduit, de la même manière que ci-dessus, que pour $k \geq 1$

$$(12) \quad L_p(k, \chi) = \sum_{\theta^f=1} g(\chi\omega^{k-1}, \bar{\theta}) (\text{Log}_k(1 - \theta(1)) - (1/p^k) \text{Log}_k(1 - \theta(p))) .$$

Les formules "fermées" ainsi obtenues pour $L_p(k, \chi)$, $k \geq 1$, répondent en partie à une question posée par K. IWASAWA ([13], § 5). Une autre réponse de type assez différent a été donnée par J. DIAMOND [12].

2.3. Autre représentation de $g(\chi, \theta)$ au voisinage de $\theta = 1$.

Soit χ un caractère de Dirichlet, et

$$\phi_\chi(U) = \sum_{a=1}^f \frac{\chi(a) U e^{aU}}{e^{fU} - 1} = \sum_{n \geq 0} B_{n,\chi} \frac{T^n}{n!}.$$

On vérifie immédiatement l'identité formelle

$$F_\chi(T) = (\sum_{a=0}^{f-1} \chi(a) T^a) / (1 - T^f) = - \phi_\chi(\text{Log } T) / \text{Log } T.$$

De plus, les fonctions considérées sont analytiques pour $v(T - 1) > 1/(p - 1)$.
En comparant cette relation avec (7), on obtient :

COROLLAIRE 2.6. - Soit χ un caractère de Dirichlet, et $\theta \in \hat{\mathbb{Z}}_p(m)$ tel que $v(\theta(1) - 1) > 1/(p - 1)$, alors

$$(13) \quad g(\chi, \theta) = \sum_{n \geq 0} B_{n,\chi} \frac{(\text{Log}(\theta(1)))^n}{n!},$$

où $B_{n,\chi}$ est le n -ième nombre de Bernoulli généralisé associé à χ .

D'autre part, pour $x \in \mathbb{Z}_p(m)$, $\theta(x) = \sum_{n \geq 0} (\text{Log } \theta(1))^n x^n / n!$.

Posons, pour $s \in S$, $u_n(x, s) = \chi(x) \langle x \rangle^s x^n$: on a, d'une part

$$g(\chi_s, \theta) = \sum_{n \geq 0} (\text{Log}(\theta(1)))^n (u_n * 1)' (-1) / n!,$$

et d'autre part

$$u_n(x, s) = \chi \omega^n(x) \langle x \rangle^{n+s},$$

donc

$$(u_n * 1)' (-1) = g(\chi \omega^n, 1) = B(s + n, \chi \omega^n), \text{ où } B(s, \chi) = -s L_p(1 - s, \chi).$$

COROLLAIRE 2.7. - Soit χ un caractère de Dirichlet, et $s \in S$, pour $\theta \in \hat{\mathbb{Z}}_p(m)$ tel que $v(\theta(1) - 1) > \frac{1}{p-1}$, on a

$$(14) \quad g(\chi_s, \theta) = \sum_{n \geq 0} - (s + n) L_p(1 - s - n, \chi \omega^n) \frac{(\text{Log } \theta(1))^n}{n!}$$

3. Fonctions L partielles et fonctions $\text{Log } \Gamma_\chi$.

Dans [14], N. KOBLITZ définit des fonctions L partielles de la façon suivante.
Pour N entier, $N \geq 1$ et $(N, mp) = 1$, soit

$$(15) \quad T_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{x+i}{N}\right).$$

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p(m), \mathbb{C}_p)$, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des opérateurs linéaires continus sur E, et F le sous-espace de E constitué des f telles que $f(1+x) = f(x)$ pour $x \notin U_p(m)$. On montre que $N \rightarrow T_N$ définit une représentation continue de $N \cap U_p(m)$ dans $\mathcal{L}(E)$, qui peut donc se prolonger en une représentation continue de $U_p(m)$ dans $\mathcal{L}(E)$. On montre de plus que F est stable par T_u pour tout $u \in U_p(m)$.

Soit χ un caractère p-adique continu de $U_p(m)$ (i. e. $\chi \in \hat{U}_p(m)$), le sous-

espace propre F_χ de la représentation $u \rightarrow T_u$ de $U_p(m)$ dans $\mathfrak{L}(F)$, associé au caractère χ , est l'espace des $f \in F$ telles que $T_u f = \chi(u) f$ pour tout $u \in U_p(m)$. N. KOBLITZ montre que, pour tout χ , ce sous-espace propre est de dimension 1, et il appelle fonction L partielle, notée f_χ , un générateur de F_χ .

On montre facilement que $f \in F$ équivaut à : Il existe $g \in E$ telle que $g(x)=0$ si $x \in U_p(m)$ et $f(1+x) = (g * 1)'(x)$ (cf. § 4). En cherchant une fonction propre f sous cette forme, on trouve par des calculs élémentaires que

$$f(1+x) = (g * 1)'(x) \text{ et } T_u(f) = \bar{\chi}(u) f \text{ équivaut à } g'(x) = \frac{1}{x} \bar{\chi}(x) g'(1).$$

On obtient donc une base de F_χ en choisissant $g(x) = \chi(x)$ si χ n'est pas de torsion, ou $g(x) = \chi(x) \text{Log} \langle x \rangle$ si χ est de torsion. On vérifie que les fonctions f_χ correspondantes sont bien, exprimées en termes de convolution, les mêmes que celles trouvées par KOBLITZ.

En particulier, pour χ de torsion, on trouve

$$f_\chi(1+x) = \frac{d}{dx} (\text{Log } \Gamma_\chi(1+x)).$$

Pour χ de torsion et $s \in S$, notons $f_\chi(1+x, s) = (\chi_s * 1)'(x)$ la fonction L partielle associée à χ_s . On vérifie que

$$f_\chi(1+x, s) = g(\chi_s, 1) + s(\chi_{\omega_{s-1}}^{-1} * 1)(x).$$

Il en résulte que

$$\frac{d}{dx} (f_\chi(1+x, s)) = s f_{\chi\omega^{-1}}(1+x, s-1)$$

et par récurrence sur k

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (f_\chi(1+x, s)) = \binom{s}{k} f_{\chi\omega^{-k}}(1+x, s-k)$$

en particulier,

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} f_\chi(1, s) = \binom{s}{k} B(s-k, \chi\omega^{-k}).$$

D'autre part,

$$\frac{d}{ds} (f_\chi(1+x, s)) = \frac{d}{ds} ((\chi_s * 1)'(x)) = \frac{d}{dx} (\chi_s \text{Log} \langle \cdot \rangle * 1)(x) = \text{Log } \Gamma'_{\chi_s}(1+x).$$

On en déduit, d'une part que la série de Taylor en $x=0$ de $f_\chi(1+x, s)$ est

$$\sum_{k \geq 0} \binom{s}{k} B(s-k, \chi\omega^{-k}) x^k,$$

et on vérifie que cette série converge vers f_χ pour $x \in f_{\tilde{p}}^Z(m)$, où f est le conducteur de χ , et d'autre part, en dérivant cette relation par rapport à s on obtient :

PROPOSITION 3.1. - Soit χ un caractère de Dirichlet modulo $f = mp^h$, $h \geq 1$, et soit $s \in S$, on a

$$(16) \quad \text{Log } \Gamma'_{\chi_s}(1+x) = \sum_{k \geq 0} \frac{d}{ds} \left(\binom{s}{k} B(s-k, \chi\omega^{-k}) \right) x^k$$

(où $B(s, \chi) = -s L_p(1-s, \chi)$) pour $x \in \mathbb{F}_p^*(m)$.

Cette formule redonne, pour $s = 0$, la série de Taylor de $\log \Gamma_{\chi_0}$ démontrée au théorème 2 de [9].

Pour des caractères $\chi \in \hat{U}_p(m)$ n'appartenant à aucun D_{χ_0} pour χ_0 de torsion, i. e. ne pouvant pas se représenter sous la forme χ_s , on peut déterminer, par des méthodes analogues, la série de Taylor de $\log \Gamma_\chi$: les dérivations par rapport à s doivent être remplacées par des dérivations "intrinsèques" sur $\hat{U}_p(m)$, et le rôle des fonctions $B(s, \chi)$ est tenu par des sommes de Gauss.

4. Appendice.

On a utilisé au paragraphe précédent, plus ou moins explicitement, certaines propriétés de la convolution, comme, par exemple, la suivante :

PROPOSITION 4.1. - Si f est continuellement et uniformément différentiable sur $\mathbb{Z}_p(m)$,

$$(17) \quad (f * 1)' = (f' * 1) + (f * 1)'(-1).$$

Ceci se démontre en utilisant les relations (5) et (6). En effet,

$$F_{f*1}(T) = \frac{1}{1-T} F_f(T),$$

donc

$$-\text{Log } T F_{f*1}(T) = \frac{1}{1-T} (-\text{Log } T F_f(T)) = \frac{1}{1-T} (F_{f'}(T) + \mathcal{L}_f(T)).$$

En identifiant les composantes dans $H_0(\Delta_m)$ des deux membres, on trouve

$$F_{(f*1)'},(T) = \frac{1}{1-T} F_{f'}(T) + \frac{\mathcal{L}_f(1)}{1-T},$$

d'où la relation (17).

De même, au § 3, on a signalé que toute $f \in E$ telle que $f(1+x) = f(x)$ pour $x \notin U_p(m)$ peut se mettre sous la forme $f(1+x) = (g * 1)'(x)$, où g est une fonction à support dans $U_p(m)$. En effet, toute $f \in E$ peut s'écrire (de manière unique) $f(1+x) = f(0) + (h * 1)(x)$, et la condition " $f(1+x) = f(x)$ si $x \in U_p(m)$ " devient : " h est à support dans $U_p(m)$ ". Soit g_1 une primitive de h , à support dans $U_p(m)$: on a

$$f(1+x) = f(0) + (g_1' * 1)(x) = (g_1 * 1)'(x) + f(0) - (g_1 * 1)'(-1).$$

On montre d'autre part que, si φ est une fonction localement constante, $(\varphi * 1)'$ est aussi localement constante. On peut donc, en ajoutant à g_1 une fonction localement constante à support dans $U_p(m)$ bien choisie, obtenir une fonction g telle que $f(1+x) = (g * 1)'(x)$. On montre aussi que, si f est localement analytique, on peut choisir g localement analytique du même ordre, ou si f est continuellement et uniformément différentiable k -fois, on peut exiger que g le soit $(k+1)$ -fois.

Signalons enfin une propriété arithmétique de la convolution qui n'a pas été utilisée plus haut, mais peut avoir de l'intérêt par ailleurs.

PROPOSITION 4.2. - Soit A un sous-anneau de $\underline{\mathbb{C}}_p$, et soit

$$E_A = \{f \in \mathcal{C}(\underline{\mathbb{Z}}_p(m), \underline{\mathbb{C}}_p) ; f(\underline{\mathbb{Z}}) \subset A\}$$

(i) E_A est stable par convolution,

(ii) si $f' \in E_A$, $(f * 1)' - (f * 1)'(-1) \in E_A$.

La preuve est simple : il est clair, par définition, que si $f(\underline{\mathbb{N}}) \subset A$ et $g(\underline{\mathbb{N}}) \subset A$, $f * g(\underline{\mathbb{N}}) \subset A$. D'autre part, la définition des coefficients $\lambda_{k,i}$ dans la représentation (2) de F_f montre que " $f(-n) \in A$ pour $n \geq 1$ " équivaut à " $\lambda_{k,i} \in A$ pour $i = 0, \dots, m-1$ et $k \geq 1$ ". Comme $F_{f*g} = F_f F_g$, il est clair que si F_f et F_g ont tous leurs coefficients $\lambda_{k,i}$ dans A , il en est de même pour $F_f * F_g$, d'où l'assertion (i). L'assertion (ii) résulte immédiatement de (17). On en déduit par exemple :

COROLLAIRE 4.3. - Soit χ un caractère de Dirichlet, $K = \mathbb{Q}(\chi, \omega)$ le corps des valeurs de χ et ω , et soit A l'anneau des entiers de K , alors, pour tout $n \in \underline{\mathbb{Z}}$ et tout $k \in \underline{\mathbb{Z}}$,

$$f_\chi(n, k) + k L_p(1-k, \chi) \in A,$$

où f_χ est la fonction L partielle définie en 3.

En effet, pour $k \in \underline{\mathbb{Z}}$, $\chi \langle \rangle^k \in E_A$, et sa dérivée $k\chi\omega^{-1} \langle \rangle^{k-1}$ aussi.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). - Prolongement analytique des sommes de Gauss, I, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 9e année, 1981/82, n° 13, 9 p.
- [2] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180.
- [3] AMICE (Y.). - Fonctions analytiques dans le complémentaire d'une famille de disques, Séminaire de Théorie des nombres, Université de Bordeaux, 1968/69, n° 8.
- [4] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonction zêta p-adique des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.
- [5] AMICE (Y.). - Dual d'un espace $H(D)$ et transformation de Fourier, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 10e année, 1973/74, n° 5, 12 p.
- [6] AMICE (Y.) et VÉLU (J.). - Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke, "Journées arithmétiques", [1974. Bordeaux], Astérisque, n° 24-25, 1975, p. 119-131.
- [7] AMICE (Y.). - Nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).
- [8] AMICE (Y.). - Duals, Proceedings of the conference on p-adic analysis, [1978. Nijmegen], p. 1-15. - Nijmegen, Mathematisch Instituut Katholieke Universiteit, 1978.

- [9] AMICE (Y.). - Fonction Γ p -adique associée à un caractère de Dirichlet, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 7e année, 1979/80, n° 17, 11 p.
- [10] BARSKY (D.). - Fonctions k -lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 397-411.
- [11] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Formes linéaires p -adiques et prolongement analytique, Thèse 3e cycle, Université de Bordeaux-I, 1971.
- [12] DIAMOND (J.). - On the values of p -adic L -functions and positive integers, Acta Arithm., Warszawa, t. 35, 1979, p. 223-237.
- [13] IWASAWA (K.). - Lectures on p -adic L -functions. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 74).
- [14] KOBLITZ (N.). - p -adic eigenfunctions for Kubert distributions (preprint).
- [15] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p -adische Theorie der Zetawerte, J. für reine und angew. Math., t. 214-215, 1964, p. 328-339.
-