Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Philippe Robba

Indice d'un opérateur différentiel linéaire p-adique d'ordre 1 et cohomologie p-adiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n° 3 (1981-1982), exp. n° J15, p. J1-J10

<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_3_A16_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, fasc. 3, n° J15, 10 p.
Journée d'Analyse p-adique
[1982. Marseille-Luminy]

INDICE D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE p-ADIQUE D'ORDRE 1 ET COHOMOLOGIE p-ADIQUES

par Philippe ROBBA (*)
[Université Paris-Sud, Orsay]

Motivé par des travaux récents de DWORK, ADOLPHSON et SPERBER sur des cohomologies p-adiques associées à des sommes exponentielles mixtes ([Dw] [A-S]), j'ai fait une étude systématique des cohomologies analytiques p-adiques d'une variable.

Dans cet exposé, j'indiquerai une formule permettant de calculer l'indice d'un opérateur différentiel agissant sur les fonctions analytiques dans un disque, et je donnerai quelques exemples d'utilisation de cette formule (§ 1). Puis je montrerai que les cohomologies analytiques p-adiques de Dwork sont finies, et je calculerai leur dimension. Je ferai également une comparaison avec les cohomologies algébriques (§ 2) J'indiquerai comment ces cohomologies sont utilisées dans l'étude des sommes exponentielles mixtes, et l'on retrouvera en particulier un résultat de WEIL, sur les fonctions L (§ 3). J'indiquerai également comment on peut obtenir des estimations des valuations p-adiques des zéros des fonctions L (§ 4).

Toutes les démonstrations et une bibliographie plus détaillée paraîtront dans un prochain article [Ro].

1. Indice dans un disque.

Soit K un corps valué ultramétrique complet dont le corps résiduel $\bar{K}$ est de caractéristique $p \neq 0$. Soit Ω une extension valuée complète dont le corps résiduel $\bar{\Omega}$ est transcendant sur $\bar{K}$.

1.1 Indice d'un opérateur linéaire.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps. Soit D une application linéaire de E dans F. On dit que D a un indice si son noyau est de dimension finie et son image est de codimension finie. L'indice de D est alors le nombr

$$\chi(D\ ;\ E\ ,\ F) = \dim \operatorname{Ker} D - \operatorname{codim} \operatorname{Im} D\ .$$

On voit que l'indice de D est la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{D} F \longrightarrow 0\ .$$

(*) Philippe ROBBA, 133 rue Nationale, 75013 PARIS.

1.2 Point et disque générique.

Soient $c \in \Omega$ et $r \in |\Omega^*|$. On dira que le point t de la circonférence $C(c, r) = \{x \in K ; |x - c| = r\}$ est un point générique si le disque ouvert $B(t, r^-)$, contenu dans $C(c, r)$, ne contient pas de point algébrique sur K. (L'existence de t résulte de l'hypothèse faite sur Ω). Le disque $B(t, r^-)$ est alors appelé disque générique.

1.3 Formule d'indice.

Pour $c \in \Omega$, $r \in |\Omega^*|$, on pose :

$H_c(r^+)$ = espace des fonctions analytiques dans le disque fermé $B(c, r^+)$
$= \{f = \sum a_n (x - c)^n \in \Omega[[x]] ; |a_n| r^n \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty\}$,

$H_c(r^-)$ = espace des fonctions analytiques bornées dans le disque ouvert $B(c, r^-)$
$= \{f = \sum a_n (x - c)^n \in \Omega[[x]] ; \sup_n |a_n| r^n < +\infty\}$.

Soit $D = a\frac{d}{dx} + b$ avec $a, b \in K[x]$. On pose :

$$\chi_c^{\pm}(D, r) = \text{indice de } D \text{ dans } H_c(r^{\pm})$$

si cet indice existe.

Pour $a \in K[x]$, on pose :

$$\mathrm{ord}_c^{\pm}(a, r) = \#\text{ zéros de } a \text{ dans le disque } B(c, r^{\pm}).$$

On note $\rho_c(D, r)$ le rayon de convergence d'une solution u de $Du = 0$ au voisinage d'un point générique t_r de la circonférence $C(c, r)$.

THÉORÈME. - Supposons que, pour $r = r_0$, $\rho_c(D, r_0) < r_0$. Alors, pour r voisin de r_0, D est injectif, et a un indice dans $H_c(r^{\pm})$, $\rho_c(D, r)$ est une fonction continue de r, et l'on a

$$\left(\frac{d \log \rho_c(D, r)}{d \log r}\right)^{\pm} = \chi_c^{\pm}(D, r) + \mathrm{ord}_c^{\pm}(a, r).$$

Remarquons que puisque D est injectif

$$\chi_c^{\pm}(D, r) = -\dim(H_c(r^{\pm})/D\, H_c(r^{\pm})).$$

1.4 Exemple.

On prend $K = \underset{\sim}{C}_p$.

Etudions le cas considéré par DWORK dans son étude des sommes de Gauss [Dw]. On a l'opérateur

$$D = x\frac{d}{dx} + \alpha + \pi x \quad \text{avec } \alpha \in \underset{\sim}{Z}_p, \quad \pi^{p-1} = -p.$$

La solution formelle de D est $x^{-\alpha}\exp(-\pi x)$. Donc au voisinage du point t avec $|t| = r$, D a la solution

$$u(x) = (\tfrac{x}{t})^{-\alpha} \exp(-\pi(x-t)) .$$

Posons $x = t + y$,

$$u(t+y) = (1+\tfrac{y}{t})^{-\alpha} \exp(-\pi y) .$$

Comme $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, $(1+\frac{y}{t})^{-\alpha}$ a rayon de convergence $|t| = r$ et $\exp(-\pi y)$ a rayon de convergence 1 . Donc

$$\rho_0(D , r) = \begin{cases} r & \text{si } r < 1 , \\ 1 & \text{si } r > 1 , \end{cases}$$

la valeur pour $r = 1$ s'obtient par continuité. On peut appliquer le théorème pour $r > 1$, et l'on en déduit que, pour $r > 1$, D a l'indice -1 dans $H_0(r^{\pm})$.

Si $\alpha \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$, $(1+\frac{y}{t})^{-\alpha}$ a rayon de convergence $\frac{r}{|\alpha|}\, p^{-1/(p-1)}$ et donc

si $r < |\alpha|$, $\rho_0(D , r) = r\, p^{-1/(p-1)}/|\alpha|$ et $\chi_0^{\pm}(D , r) = 0$

si $r > |\alpha|$, $\rho_0(D , r) = p^{-1/(p-1)}$ et $\chi_0^{\pm}(D , r) = -1$

si $r = |\alpha|$, $\chi_0^{+}(D , r) = -1$ et $\chi_0^{-}(D , r) = 0$.

Avant de donner un exemple moins trivial nous allons indiquer quelques propriétés de l'indice d'un opérateur différentiel.

1.5 Propriétés de l'indice d'un opérateur différentiel.

On considère ici des opérateurs différentiels d'ordre quelconque à coefficients polynomiaux.

THÉORÈME. - Soient D et Δ des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $K[x]$. Supposons que, pour tout $r \in [r_0 , r_1]$ (et $r \in |\Omega^*|$), D et Δ n'ont pas de solution analytique dans tout le disque générique de $C(c , r)$. Alors D et Δ sont des indices dans $H_c(r^{\pm})$ et

(i) pour $r_0 < r < r' < r_1$, on a $0 \geq \chi_c^{-}(D , r) \geq \chi_c^{+}(D , r) \geq \chi_c^{-}(D , r')$,

(ii) $\chi_c^{\pm}(D\Delta , r) = \chi_c^{\pm}(D , r) + \chi_c^{\pm}(\Delta , r)$,

(iii) considérons une partition de $B(c , r^+)$ en classes résiduelles distinctes : $B(c , r^+) = \bigcup_i B(c_i , r^-)$, alors $\chi_{c_i}(D , r^-) = 0$ pour presque tout i , et l'on a

$$\chi_c^{+}(D , r) = \textstyle\sum_i \chi_{c_i}^{-}(D , r) .$$

Observons que si $a \in K[x]$, la multiplication par a a un indice dans $H_c(r^{\pm})$ qui est $-\operatorname{ord}_c^{\pm}(a , r)$. Il ne faut donc pas s'étonner si les propriétés de la fonction $\chi_c(D , r)$ ressemblent à celle de la fonction $-\operatorname{ord}_c^{\pm}(a , r)$.

1.6 Comparaison des rayons de convergence des solutions au voisinage d'un point et au voisinage du point générique.

Un corollaire du théorème 1.3 est la propriété suivante.

THÉORÈME. - On suppose que les hypothèses du théorème 1.3 sont satisfaites et que de plus $\mathrm{ord}_c^-(a , r_0) = 0$ (c'est-à-dire : D n'a pas de singularité dans $B(c , r_0^-)$) Soit ρ le rayon de convergence d'une solution u de D au voisinage de c. Alors $\rho \geq \rho_c(D , r_0)$ et $\rho = \rho_c(D , r_0)$ si, et seulement si, $\chi_c^-(D , r_0) = 0$.

Il résulte de ce théorème et du théorème 1.5 (iii) que pour presque toute classe résiduelle du disque $B(c , r_0^+)$ le rayon de convergence d'une solution de D est égal au rayon de convergence d'une solution au voisinage du point générique.

1.7 Exemple.

On prend $K = \underset{\sim}{C}_p$, $D = \frac{d}{dx} - x^{p-1}$. Une solution u de D près de t est $u(x) = \exp(\pi(x^p - t^p)/p)$. Posons $x = t + y$,

$$u(t + y) = \prod_{i=1}^{p} \exp \frac{1}{p} \binom{p}{i} t^{p-i} y^i .$$

Pour $|t| = r < 1$, c'est le facteur $\exp(y^p/p)$ qui a le plus petit rayon de convergence et donc $\rho_0(D , r) = p^{-1/(p-1)}$.

Pour $|t| = r > 1$, c'est le facteur $\exp(t^{p-1} y)$ qui a le plus petit rayon de convergence et donc $\rho_0(D , r) = p^{-1/(p-1)}/r^{p-1}$.

Le théorème 1.3 s'applique si $\rho_0(D , r) < r$. Donc : si $p^{-1/(p-1)} < r < 1$

$$\chi_0^{\pm}(D , r) = 0 \quad \text{(donc } D \text{ est surjectif)}$$

si $1 < r$

$$\chi_0^{\pm}(D , r) = -(p - 1)$$

$$\chi_0^-(D , 1) = 0 , \quad \chi_0^+(D , 1) = -(p - 1) .$$

D'après le théorème 1.5 (iii) on s'attend que, dans certaines classes résiduelles de la circonférence $C(0 , 1)$, l'indice de D ne soit pas nul. D'après le théorème 1.6, ce seront les classes où le rayon de convergence d'une solution de D sera plus grand que $p^{-1/(p-1)}$.

Près de $t = 1$, on a la solution

$$u(1 + y) = \exp(y + y^p/p) \prod_{i=2}^{p-1} \exp(\frac{1}{p} \binom{p}{i} y^i)$$

Il est bien connu que $\exp(y + y^p/p)$ a un rayon de convergence $> p^{-1/(p-1)}$. Il en est de même des autres facteurs et donc aussi de $u(1 + y)$. Donc $\chi_1^-(D , 1) < 0$. Il en est de même dans les classes résiduelles $2 , \ldots , p - 1$. On a donc $\chi_c^-(D , 1) < 0$ pour $c = 1 , 2 , \ldots , p - 1$ et

$$\chi_1^-(D\ ,\ 1) + \chi_2^-(D\ ,\ 1) + \dots + \chi_{p-1}^-(D\ ,\ 1) \geqslant \chi_0^+(D\ ,\ 1) = -\ (p-1)$$

et donc $\chi_1^-(D\ ,\ 1) = \dots = \chi_{p-1}^-(D\ ,\ 1) = -\ 1$.

1.8 Généralisation aux systèmes du 1er ordre.

Le théorème de Turritin permet de ramener un système différentiel près d'un point singulier à une forme normale. La matrice de passage peut avoir un rayon de convergence nul, mais l'on sait grâce à Baldassari que, si les différences des exposants du système ne sont pas des nombres de Lionville, le rayon de convergence n'est pas nul. Dans un disque où la matrice de passage converge, le système initial et le système sous forme normale auront même indice.

On sait calculer l'indice de notre système différentiel dans l'espace vectoriel des polynômes (indice algébrique). Si pour le rayon choisi l'indice analytique (c'est-à-dire, dans l'espace des fonctions analytiques, dans le disque considéré) est égal à l'indice algébrique on saura donc calculer l'indice analytique. Or on peut montrer que l'égalité de ces indices se déduit de l'égalité des indices algébriques et analytiques pour certains opérateurs différentiels du 1er ordre. Les dernières vérifications peuvent donc se faire en utilisant les résultats précédents.

2. Cohomologies de Dwork.

2.1 Cohomologie rationnelle.

On prend $K = \underset{\sim}{C}_p$. Soit S un sous-ensemble fini de $\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{C}_p)$ avec $\infty \in S$. Soit $f \in \underset{\sim}{C}_p(x)$ avec $|f|_{gauss} = 1$, et supposons que les pôles de f appartiennent à S. Soient $\alpha_i \in \underset{\sim}{C}_p$, $a_i \in S$, $1 \leqslant i \leqslant S$. Posons

$$F = \prod_{i=1}^{s} (x - a_i)^{\alpha_i} \exp \pi\ f(x) \ ,$$

avec $\pi^{p-1} = -\ p$.

Soit $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des éléments de $\underset{\sim}{C}_p(x)$ qui ont leurs pôles dans S . Alors la différentiation d envoie l'espace $F\mathcal{L}$ dans l'espace des différentielles $F\mathcal{L}\,dx$ parce que $F'/F \in \mathcal{L}$. La cohomologie rationnelle est l'espace $W = F\mathcal{L}\ dx/d(F\mathcal{L})$. On désire calculer $\dim W$.

Ce problème se ramène à un problème d'indice pour un opérateur différentiel. En effet on a un isomorphisme naturel entre $\mathcal{L}$ et $F\mathcal{L}$ défini par la correspondance $u \longmapsto Fu$. De même, on a un isomorphisme naturel entre $\mathcal{L}$ et $F\mathcal{L}\ dx$ défini par la correspondance $u \longmapsto Fu\ dx$. Alors à l'application $d :\ F\mathcal{L} \longrightarrow F\mathcal{L}\ dx$ correspond l'application $D : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ définie par $D = F^{-1} \circ \frac{d}{dx} \circ F = \frac{d}{dx} + F'/F$. Par conséquent, calculer $\dim W$ équivaut à calculer $\operatorname{codim} \operatorname{Im} D$ dans $\mathcal{L}$.

Nous allons calculer l'indice de D dans $\mathcal{L}$ dans une situation un peu plus générale.

Nous abandonnons l'hypothèse que les pôles de f appartiennent à S , et nous ne supposons plus que les a_i appartiennent à S. Alors F'/F peut avoir des pôles en dehors de S. On choisit $P \in \underset{\sim}{C}_p[x]$ tel que $PF'/F \in \mathcal{L}$, et on considère l'opérateur différentiel $D = P\frac{d}{dx} + PF'/F = PF^{-1} \circ \frac{d}{dx} \circ F$.

THÉORÈME. - *L'opérateur différentiel $D = PF^{-1} \circ \frac{d}{dx} \circ F$ a dans $\mathcal{L}$ l'indice*

$$\chi(D, \mathcal{L}) = 2 - \Sigma_{c\in S}\, n_c - \Sigma_{a\notin S}\, \mathrm{ord}_a P \quad \text{avec} \quad n_c = 1 - \inf(0, \mathrm{ord}_c f).$$

2.2 L'espace poignard de Monsky-Washnitzer.

Soit $A = B(0, 1^+) - \bigcup_{j=1}^n B(c_j, 1^-)$, où les $B(c_j, 1^-)$ sont des classes résiduelles distinctes. L'espace poignard $\mathcal{H}^+(A)$ de Monsky-Washnitzer est l'espace des éléments analytiques sur A surconvergents c'est-à-dire qui se prolongent sur un ensemble de la forme $A_\epsilon = B(0, (1+\epsilon)^+) - \bigcup_{j=1}^m B(c_j, (1-\epsilon)^-)$ où $\epsilon > 0$ n'est pas spécifié.

2.3 Cohomologie analytique.

Soit F comme au début du paragraphe 2.1. On suppose que $A \cap S = \emptyset$. Alors $F'/F \in \mathcal{H}^+(A)$, et il en résulte que la différentiation d envoie $\Omega^0 = F\mathcal{H}^+(A)$ dans l'espace des différentielles $\Omega^1 = F\mathcal{H}^+(A)\,dx$. La cohomologie analytique est l'espace $W = \Omega^1/d\Omega^0$. On désire calculer $\dim W$. Comme dans le cas de la cohomologie rationnelle, on a $W = \mathcal{H}^+(A)/D\mathcal{H}^+(A)$.

Comme précédemment on va calculer l'indice de D dans $\mathcal{H}^+(A)$ dans une situation un peu plus générale. On ne suppose pas que les pôles de f et les a_i n'appartiennent pas à A. On choisit $P \in \underset{\sim}{C}_p[x]$ tel que $PF'/F \in \mathcal{H}^+(A)$, et l'on considère l'opérateur différentiel $D = PF^{-1} \circ \frac{d}{dx} \circ F$.

On notera $\bar{A}$ (resp. $\bar{f}$) la réduction de A (resp. f) dans le corps résiduel $\underset{\sim}{F}_p^{alg}$ (resp. $\underset{\sim}{F}_p^{alg}(x)$).

THÉORÈME. - *On suppose que $\alpha_i \in \underset{\sim}{Q}^{alg} \cap \underset{\sim}{Z}_p$. Alors l'opérateur différentiel $D = PF^{-1} \circ \frac{d}{dx} \circ F$ a, dans $\mathcal{H}^+(A)$, l'indice*

$$\chi(D, \mathcal{H}^+(A)) = 2 - \Sigma_{c\notin\bar{A}}\, \bar{n}_c - \Sigma_{a\in A}\, \mathrm{ord}_a P$$

avec $\bar{n}_c = 1 - \inf(0, \sup(\mathrm{ord}_c(\bar{f} - \bar{\xi}^{\sim} + \xi);\ \xi \in \underset{\sim}{F}_p^{alg}(x)))$.

2.4 Comparaison des cohomologies rationnelles et analytiques.

Supposons que $S \cap A = \emptyset$. Alors $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}^+(A)$, et l'on a par conséquent une application canonique $\mathcal{W} = \mathcal{L}/D\mathcal{L} \longrightarrow W = \mathcal{H}^+(A)/D\mathcal{H}^+(A)$.

Une question importante est de savoir quand cette application définit un isomorphisme de $\mathcal{W}$ sur W.

Cette question est entièrement résolue par le théorème suivant (et les calculs d'indice effectués précédemment).

THÉORÈME. - Soit E un espace métrique complet (ou une limite inductive de Fréchet) Soit F un sous-espace vectoriel dense dans E. Soit D un homomorphisme de E tel que $D(F) \subset F$. Supposons que D ait un indice dans E et dans F. Alors $\chi(D, E) \geqslant \chi(D, F)$. Si l'on a $\chi(D, E) = \chi(D, F)$, alors E/DE et F/DF sont isomorphes, et un supplémentaire de DF dans F est un supplémentaire de DE dans E.

Pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut que $\mathcal{F}$ soit dense dans $\mathcal{H}^{+}(A)$. Ceci a lieu si, et seulement si, S a des points dans chaque classe résiduelle non contenue dans A, c'est-à-dire que, pour tout j, $S \cap B(c_j, 1^-) \neq \emptyset$ (rappelons que $\infty \in S$).

3. Application aux sommes exponentielles mixtes.

Soit p un nombre premier, et soit $q = p^m$. On dénote par Tr_r la trace absolue $\mathbb{F}_{q^r} \to \mathbb{F}_p$. Soit ζ une racine primitive p-ième de l'unité dans $\mathbb{C}_p$. On considère le caractère additif

$$\theta_r : \mathbb{F}_{q^r} \to \mathbb{C}_p^{*}, \text{ défini par } \theta_r(x) = \zeta^{Tr_r(x)} .$$

On considère le caractère multiplicatif

$$\chi_r : \mathbb{F}_{q^r}^{*} \to \mathbb{C}_p^{*}, \text{ défini par } \chi_r(x) = (\operatorname{Teich} x)^{(q^r-1)/(q-1)} .$$

Observons que si, pour $x \in \mathbb{F}_q$, $\chi(x) = \chi_1(x) = \operatorname{Teich} x$, alors, pour $x \in \mathbb{F}_{q^r}$, $\chi_r(x) = \chi(N_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}(x))$. (Nous notons χ le caractère multiplicatif pour nous conformer à la tradition, ceci n'a bien sur rien à voir avec l'indice d'un opérateur).

Soit $g \in \mathbb{F}_q[x]$, $g \neq 0$. Soient f, $h \in \mathbb{F}_q(x)$ telles que les pôles de f, les pôles et les zéros de h soient des zéros de g.

On considère les sommes mixtes

$$S_r(g ; f, h) = \Sigma_{x \in \mathbb{F}_{q^r}, g(x) \neq 0} \chi_r(h(x)) \theta_r(f(x)) ,$$

auxquelles est associée la fonction L

$$L(g ; f, h ; t) = \exp(\Sigma_{r=1}^{\infty} S_r(g ; f, h) t^r/r) .$$

C'est un résultat classique (dû à A. WEIL [We]) que L est un polynôme sauf dans le cas trivial (équivalent à $f = Cte$ $h = Cte$). De plus, si l'on pose

$$Z = \{\infty\} \cup \{x \in \mathbb{F}_p^{alg}, \quad g(x) = 0\} ,$$

et, pour $x \in Z$,

$$n_x = 1 - \inf(0, \operatorname{Sup}(\operatorname{ord}_x f - \xi^p + \xi) ; \quad \xi \in \mathbb{F}_p^{alg}(x)) ,$$

on a

$$\deg(L) = (\Sigma_{x \in Z} n_x) - 2 .$$

Nous allons indiquer comment les sommes mixtes et la fonction L sont liées aux cohomologies de Dwork, et nous allons retrouver la formule pour $\deg(L)$ en utilisant les résultats du paragraphe précédent.

Nous faisons l'hypothèse $g(0) = 0$.

On considère des relèvements $g^* \in \underset{\sim}{C}_p[x]$, f^*, $h^* \in \underset{\sim}{C}_p(x)$ de g, f, h respectivement, tels que les pôles de f^* et h^* soient des relèvements des pôles de f et h.

On pose $A = \{x \in \underset{\sim}{C}_p \; ; \; |x| \leq 1 \text{ et } g^*(x) = 1\}$. Alors A est du type considéré au § 2.2, les classes résiduelles manquantes étant les zéros de g. On lui associe son espace poignand $\mathcal{H}^+(A)$.

On pose $F(x) = h^*(x)^{-1/(q-1)} \exp \pi \, f^*(x)$. (Dire qu'on n'est pas dans le cas trivial équivaut à dire que $F \notin \mathcal{H}^+(A)$).

Il résulte du fait que $g \in \underset{\sim}{F}_q[x]$, que, pour $\zeta \in \mathcal{H}^+(A)$, la fonction $\psi_q(\zeta)$ définie par

$$\psi_q(\zeta)(x) = \sum_{Z^q = x} \frac{1}{q} \zeta(Z)$$

est un élément de $\mathcal{H}^+(A)$. L'application ψ_q est un inverse à gauche de l'application de Frobenius ϕ_q : $\zeta(x) \longmapsto \zeta(x^q)$.

Définissons formellement

$$D = F^{-1} \circ x \frac{d}{dx} \circ F \, , \quad \alpha = F^{-1} \circ \psi_q \circ F \, .$$

Il est clair que D envoie $\mathcal{H}^+(A)$ dans lui-même (car $D = x \frac{d}{dx} + xF'/F$ et $F'/F \in \underset{\sim}{C}_p(x)$ et n'a pas de pôles dans A). On peut également interpréter α comme une application de $\mathcal{H}^+(A)$ dans lui-même (on écrit $\alpha = \psi_q \circ (\phi_q(F^{-1}) F)$ et l'on interprète $\phi_q(F^{-1}) F$ comme un élément de $\mathcal{H}^+(A)$).

Notons que ψ_q transforme une fraction rationnelle en fraction rationnelle (toutefois en changeant les pôles), mais $\phi_q(F^{-1}) F$ n'est pas une fraction rationnelle, par conséquent l'opérateur α n'agit pas dans l'espace des fractions rationnelles, et c'est pourquoi on doit considérer la cohomologie analytique et on ne peut pas se contenter de la cohomologie rationnelle.

Posons $W = \mathcal{H}^+(A)/D\mathcal{H}^+(A)$. On vérifie que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathcal{H}^+(A) & \xrightarrow{D} & \mathcal{H}^+(A) & \longrightarrow & W & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle q\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \bar\alpha} & \\ 0 \longrightarrow & \mathcal{H}^+(A) & \xrightarrow{D} & \mathcal{H}^+(A) & \longrightarrow & W & \longrightarrow 0 \, , \end{array}$$

où $\bar{\alpha}$ est défini par réduction, est commutatif.

On montre, en utilisant la formule de trace de Lonsky-Reich, que

$$S_r(g \; ; \; f \, , \, h) = (q^r - 1) \operatorname{Tr} \alpha^r$$

et par conséquent

$$L(g\ ;\ f\ ,\ h\ ;\ t) = \det(1 - t\alpha)/\det(1 - tq\alpha)\ .$$

Au vu du diagramme commutatif on en déduit

$$L(g\ ;\ f\ ,\ h\ ;\ t) = \det(1 - t\bar{\alpha})\ .$$

Par ailleurs α ayant un inverse à droite (qui est formellement $F \circ \xi_q \circ F^{-1}$), α est surjectif et donc $\bar{\alpha}$ aussi ce qui implique que $\det(1 - t\bar{\alpha})$ (et donc la fonction L) est un polynôme de degré égal à $\dim W$. On conclut alors en utilisant le théorème 2.3.

4. Estimation des valuations p-adiques des zéros de la fonction L.

Nous allons indiquer comment il est possible d'estimer les valuations p-adiques des zéros de la fonction L.

Pour simplifier nous considérerons le cas où $q = p$ (dans le cas $q = p^m$, $m \neq 1$, il faut utiliser la théorie des applications semi-linéaires), $g(x) = x$, $h(x) = 1$ (donc on a à faire purement à des sommes exponentielles) et $f(x) = \sum_{i=-d}^{d'} \bar{u}_i\, x^i$ avec $d\ ,\ d' \geq 1\ ,\ p \nmid d\ ,\ p \nmid d'\ ,\ \bar{u}_{-d} \neq 0\ ,\ \bar{u}_d \neq 0$.

On prend les relèvements $g^*(x) = x$, $f^*(x) = \sum_{i=-d}^{d'} u_i\, x^i$ avec $u_i = \mathrm{Teich}(\bar{u}_i)$. Par conséquent, A est la circonférence $C(0\ ,\ 1)$, et $\mathcal{K}^+(A)$ est l'espace des séries de Laurent appartenant à $\underset{\sim}{C}_p[[x\ ,\ \frac{1}{x}]]$ qui convergent dans une couronne non spécifiée $\epsilon < |x| < 1/\epsilon$ avec $\epsilon < 1$.

Ici D est injectif et, d'après le théorème 2.3, on a $\dim(W) = d + d'$.

Soit $\mathcal{L} = \underset{\sim}{C}_p[x\ ,\ \frac{1}{x}]$. D'après le théorème 2.1, on a $\chi(D\ ,\ \mathcal{L}) = -\ (d + d')$.

Comme l'indice analytique est égal à l'indice rationnel d'après le théorème 2.4, les deux cohomologies sont isomorphes et un supplémentaire de $D\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$ est un supplémentaire de $D\mathcal{K}^+(A)$ dans $\mathcal{K}^+(A)$. On vérifie sans peine que $B = \{x^i\}_{-d\leq i\leq d'-1}$ forme une base d'un tel espace supplémentaire qui, par passage au quotient, définit une base de W.

A partir de l'expression de $D = x\frac{d}{dx} + \pi \times f^*(x) = x\frac{d}{dx} + \pi \sum_{i=-d}^{d'} u_i\, x^i$ on peut déterminer les coordonnées (a_{ni}) de x^n dans la base B, c'est-à-dire

$$x^n = \sum_{i=-d}^{d'} a_{ni}\, x^i \mod D\mathcal{L}\ .$$

Par ailleurs si $\zeta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, x^n \in \mathcal{K}^+(A)$, on vérifie que

$$(\psi_p\, \zeta)(x) = \frac{1}{p} \sum_{Z^p=x} \zeta(Z) = \sum_n c_{np}\, x^n\ .$$

Enfin $\alpha = \psi_p \circ b$ avec $b(x) = \exp \pi(f^*(x) - f^*(x^p)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n\, x^n$.

Soit $\Gamma = (\gamma_{ij})$, $-d \leq i \leq d' - 1$, $-d \leq j \leq d' - 1$, la matrice de l'applicatio quotient $\bar{\alpha}$ dans la base B, c'est-à-dire que l'on a

$$\alpha(x^i) = \sum_{j=d}^{d'-1} \gamma_{ij}\, x^j \mod D\mathcal{K}^+(A)\ .$$

On déduit de ces différentes formules

$$\gamma_{ij} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{np-i}\, a_{nj} \;.$$

Ces formules explicites, du courage, et quelques calculs, nous permettent d'obtenir des estimations des valuations p-adiques des coefficients γ_{ij} .

Comme les valeurs propres de $\bar{\alpha}$ sont les inverses des zéros de la fonction L , on peut en déduire des estimations des valuations p-adiques des inverses des zéros de L .

Ce programme mené à terme (pour $p \geqslant 5$), dans l'exemple ci-dessus, nous a permi de montrer que :

<u>Le polygône de Newton des valeurs propres de $\bar{\alpha}$ est au-dessus du polygône de Newton qui a les pentes</u>

$$0 \;;\; [k\frac{p}{d'}]\frac{1}{p-1} \;,\quad 1 \leqslant k \leqslant d'-1 \;;\; [k\frac{p}{d}]\frac{1}{p-1} \;\text{ pour }\; 1 \leqslant k \leqslant d-1 \;;\; 1$$

<u>et les extrémités de ces deux polygônes coïncident.</u> ([ ] désigne la "partie entière")

<u>De plus, si</u> $p \equiv 1 \mod d'$ (<u>ou</u> $d' = 1$) <u>et si</u> $p \equiv 1 \mod d$ (<u>ou</u> $d = 1$), <u>alors les polygônes coïncident, c'est-à-dire que les valeurs propres</u> (w_i) , $-d \leqslant i \leqslant d'-1$, de $\bar{\alpha}$ <u>peuvent être ordonnées de sorte que</u>

$$\operatorname{ord}(w_i) = i/d' \;,\quad 0 \leqslant i \leqslant d'-1$$

$$\operatorname{ord}(w_i) = i/d \;,\quad 1 \leqslant i \leqslant d \;.$$

BIBLIOGRAPHIE

[A-S] ADOLPHSON (A.) and SPERBER (S.). - Twisted Kloosterman sums and p-adic Bessel functions, Amer. J. of Math. (à paraître).

[Dw] DWORK (B.). - On the Boyarski principle, Amer. J. of Math. (à paraître).

[Ro] ROBBA (P.). - Index of p-adic differential operators, III : Application to twisted exponential sums (à paraître).

[We] WEIL (A.). - Basic number theory, 3rd edition. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1974 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 144).