ALEXEJ A. PANČIŠKIN

Le prolongement p-adique analytique des fonctions L de Rankin

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, nº 3 (1981-1982), exp. nº J14, p. J1-J6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_3_A15_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, fasc. 3, n° J14, 6 p.
Journée d'Analyse p-adique
[1982. Marseille-Luminy].

septembre 1982

LE PROLONGEMENT p-ADIQUE ANALYTIQUE DES FONCTIONS L DE RANKIN

By Alexej A. PANČIŠKIN (*)
[Université de Moscou]

1. Posons $q = e^{2\pi i z} = e(z)$, et soient

$$f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n \quad \text{et} \quad g = \sum_{n\geq 1} b_n q^n \quad (\mathrm{Im}(z) > 0) ,$$

deux formes holomorphes paraboliques des poids k et ℓ pour le groupe $\Gamma = SL_2(Z)$, qui sont fonctions propres des opérateurs de Hecke, où $a_1 = b_1 = 1$. Les séries de Dirichlet $L_f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ et $L_g(s) = \sum_{n\geq 1} b_n n^{-s}$ admettent un développement en produit eulérien, et sont associées à des représentations ℓ-adiques $\rho_{f,\ell}$ et $\rho_{g,\ell}$ du groupe $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/Q)$. Les analogues p-adiques de telles séries ont été construits par Ju. I. MANIN [5]. Dans ce qui suit, nous généralisons cette construction pour le cas de série $D_{f,g}(s) = \sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}$, associée au produit tensoriel $\rho_{f,\ell} \otimes \rho_{g,\ell}$.

Selon la théorie des représentations automorphes, cette série correspond à une certaine représentation du groupe adélique $G = GL_2 \times GL_2$ sur Q [3] . Notons que les fonctions L p-adiques automorphes n'ont été étudiées jusqu'à présent que pour le cas où $G = GL_1$ ou GL_2 sur un corps des nombres (totalement réel ou de " CM-type") (voir [6], [4]).

Rappelons que

$$D_{f,g}(s) = \zeta(2s - k - \ell + 2)\, L_{f,g}(s) , \tag{1.1}$$

où $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ est la fonction zêta de Riemann et $L_{f,g}(s) = \sum_{n\geq 1} a_n b_n n^{-s}$ est la convolution des séries $L_f(s)$ et $L_g(s)$. On peut écrire $D_{f,g}(s)$ comme produit eulérien $\prod_p (F_p(p^{-s}))^{-1}$ avec

$$F_p(X) = \prod_{i,j=1}^{2} (1 - \alpha_i^{(p)} \beta_j^{(p)} X) ,$$

où

$$((1 - \alpha_1^{(p)} p^{-s})(1 - \alpha_2^{(p)} p^{-s}))^{-1} = (1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}$$

et

$$((1 - \beta_1^{(p)} p^{-s})(1 - \beta_2^{(p)} p^{-s}))^{-1} = (1 - b_p + p^{\ell-1-2s})^{-1}$$

(*) Alexej A. PANČIŠKIN, Faculté de Mathématiques, Université d'Etat, MOSKVA 11723 (Union soviétique).

sont les facteurs locaux de L_f et de L_g. Pour des caractères de Dirichlet χ arbitraires, notons $D_{f,g}(s, \chi) = \sum_{n\geq 1} \chi(n)\, c_n\, n^{-s}$. La méthode de Rankin [3] permet d'étudier les propriétés analytiques (complexes) de $D_{f,g}$. Cette méthode fournit aussi des formules pour les valeurs de $D_{f,g}$ aux entiers critiques (au sens de DELIGNE [2]) : pour $m = 0, 1, \dots, ((k - \ell)/2) - 1$, les nombres

$$D_{f,g}(k - 1 - m, \chi)\ \omega_{f,g,m}^{-1}$$

sont algébriques, où $\omega_{f,g,m} = \pi^{2k-2m-\ell-1} \langle f, f\rangle$ est le "facteur transcendent", et $\langle f, f\rangle$ est le carré scalaire de f (dû à PETERSSON) [8].

Nous allons voir que cette méthode permet la construction du prolongement p-adique analytique de $D_{f,g}$.

2. Soient p un nombre premier, $\mathbb{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique du corps des nombres p-adiques, et $X = \mathrm{Hom}_{cont}(\mathbb{Z}_p^*, \mathbb{C}_p^*)$ l'ensemble des caractères de Dirichlet primitifs de conducteur p^M (M non négatif quelconque) et l'ensemble X^{tors} de caractères d'ordre fini de X.

Rappelons que X^{tors} est discret dans X, muni de la structure de variété p-adique analytique [5].

THÉORÈME. - Supposons que $k > 1$, et que la racine $\rho^{(p)} = \alpha_1^{(p)} \beta^{(p)}$ du polynôme $X^4 F_p(X^{-1})$ est une unité p-adique algébrique. Alors, pour chaque nombre $m = 0, 1, \dots, ((k - \ell)/2) - 1$, il existe une fonction analytique p-adique bornée $D^{(p)}_{f,g,m} : X \to \mathbb{C}_p$ qui prolonge l'application

$$\chi \mapsto \frac{p^{M(k-m-2)}}{(\rho^{(p)})^M}\, G(\chi)\, D_{f,g}(k - 1 - m, \bar{\chi})\ \omega^{-1}_{f,g,m} \tag{2.1}$$

de X^{tors} dans $\mathbb{C}_p$ (ou dans $\bar{\mathbb{Q}}$). Cette fonction est unique.

Ici $G(\chi) = \sum_{u=1}^{p^M-1} \chi(u)\, e(u/p^M)$ est la somme de Gauss, et p^M désigne le conducteur de χ.

La construction de ce prolongement utilise la théorie de l'intégration non archimédienne [6]. Nous démontrons l'existence des distributions p-adiques bornées $\mu_{f,g,m}$ sur $\mathbb{Z}_p^*$ telles que, pour tout $\chi \in X^{tors}$, l'intégrale $\int_{\mathbb{Z}_p^*} \chi\mu_{f,g,m}$ est égale à la valeur de l'application (2.1) en χ. Le théorème résultera de la propriété générale des distributions p-adiques bornées μ : la fonction

$$\chi \in X \mapsto \int_{\mathbb{Z}_p^*} \chi\mu \in \mathbb{C}_p$$

est bornée et analytique sur X, et les valeurs aux $\chi \in X^{tors}$ définissent cette fonction de manière univoque [5].

3. Construction de distributions : Tout d'abord nous définissons certaines

distributions μ_s à valeurs complexes, attachées à la série $D(s) = D_{f,g}(s)$, $s \in C$. Pour $x \in Q$, posons $D(s, x) = \sum_{n\geq 1} e(nx)\, c_n\, n^{-s}$ (cette série est la fonction holomorphe sur $\underset{\sim}{C}$).

Proposition-définition.

(a) Pour le sous-ensemble compact ouvert $a + (p^M)$ dans Z_p^* posons

$$(3.1) \qquad \mu_s(a + (p^M)) = \frac{p^{M(s-1)}}{(\rho(p))^M} \left[D\left(s, \frac{a}{p^M}\right) + \sum_{i=2}^{4} k_{i,s}\, D\left(s, \frac{a}{p^{M-i+1}}\right)\right]$$

où $k_{i,s} = -p^{(1-i)s} \sum_{j=i}^{4} A_{p,j}/(\rho(p))^{j-i+1}$, $i = 2, 3, 4$, et $A_{p,j}$ sont des coefficients du polynôme

$$F_p(X) = \sum_{i=0}^{4} A_{p,i}\, X^i$$

$$= 1 - a_p b_p X + (p^{\ell-1} a_p + p^{k-1} b_p - 2p^{k+\ell-2}) X^2 + p^{k+\ell-2} a_p b_p X^3 + p^{2(k+\ell-2)} X^4 .$$

Alors l'identité (3.1) définit une distribution sur Z_p^* à valeurs complexes.

(b) Pour les caractères χ de Dirichlet primitifs de conducteurs p^M, on a

$$(3.2) \qquad \int_{Z_p^*} \chi\mu_s = \frac{p^{M(s-1)}}{(\rho(p))^M}\, G(\chi)\, D_{f,g}(s, \bar{\chi})$$

avec les notations comme ci-dessus).

Cette proposition est la généralisation facile du résultat correspondant pour les séries de Hecke [5], et on omet la démonstration, qui est similaire.

Maintenant on introduit les distributions $\mu_{f,g,m}$ d'après la règle suivante :

$$(3.3) \qquad \mu_{f,g,m}(U) = \omega_{f,g,m}^{-1}\, \mu_{k-1-m}(U), \text{ où } m = 0, 1, \ldots, ((k-\ell)/2) - 1 .$$

U est un sous-ensemble compact de Z_p^*. Il est possible de montrer, que les nombres (3.3) sont algébriques et que leurs dénominateurs sont uniformément bornés. En vertu de (3.1), il suffit de prouver l'algébricité et l'intégralité des nombres $p^{M(k-2-m)}\, D(k-1-m, (a/p^M))\, \omega_{f,g,m}^{-1}$ après la multiplication par un entier positif A, indépendant de M.

$\underset{\sim}{4}$. On considère ici des entiers positifs N au lieu de p^M, et on suppose que tout facteur premier de N appartient à un ensemble fini fixé S.

PROPOSITION. - Les nombres

$$(4.1) \qquad N^{k-2-m}\, D\left(k-1-m, \frac{a}{N}\right) \omega_{f,g,m}^{-1}$$

sont algébriques, et leurs dénominateurs sont bornés.

Pour démontrer ceci on note, grâce à l'identité (1.1), que

(4.2) $D(s, \frac{a}{N}) = \sum_{d_1, d_2 (\mathrm{mod} N)} e(\frac{d_1 d_2^2 a}{N}) \sum_{\substack{n_1 \geq 1 \\ n_1 \equiv d_1 (N)}} n_1^{k+\ell-2-2s} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv d_2 (N)}} a_n b_n n^{-s}$.

En utilisant la définition de la fonction $\Gamma(s)$ on obtient l'expression suivante (pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand) :

$$(4.3) \quad (4\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv d_2 (N)}} a_n b_n n^{-s+m}$$

$$= \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} f(z) \, \theta^m g_{d_2, N}(z) \, y^{s-1} \, dx \, dy \quad (z = x + iy \, , \quad y > 0) \, ,$$

où

$$g_{d_2, N}(z) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv d_2 (N)}} b_n q^n \, , \quad \theta = q \frac{d}{dq}$$

(l'opérateur de Ramanujan). Les propriétés modulaires de f, $g_{d,N}$ et θ permettent de transformer l'intégration dans (4.3) en l'intégration sur le domaine fondamentale $D_0(N^2)$ du sous-groupe $\Gamma_0(N^2)$ de $\Gamma = SL_2(Z)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont le coefficient c est divisible par N^2 (comme dans [8]). En posant $s = k - 1$ et appliquant (4.2), on obtient l'expression, pour $(4)^{1-k} (k-2)! \, D(k-1-m, \frac{a}{N})$ en termes de produit scalaire de Petersson :

$$[\bar{\Gamma} : \bar{\Gamma}_0(N^2)] \times \langle f , F_{a,N}^{(m)} \rangle \, ,$$

où $\bar{\Gamma} = PSL_2(Z)$, $\bar{\Gamma}_0(N^2) \, \{\pm 1\}/\{\pm 1\}$, et $F_{a,N}^{(m)}$ est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma_0(N^2)$ de la forme

$$F_{a,N}^{(m)}(z)$$

$$= \frac{\Gamma(k-\ell-2m)}{\Gamma(k-\ell-m)} \sum_{\nu | N} \nu^{-(k-\ell-2m)} \times \sum_{\substack{w (\mathrm{mod} N) \\ (w,N)=\nu}} C_m(g(z + \frac{w^2 a}{N}) \, , \, G_{k-\ell-2m}(N\nu z \, ; \, 0 \, , \frac{w}{\nu} \, ; \frac{N}{\nu})).$$

On désigne ici par

$$G_r(z \, ; \, a_1 \, , \, a_2 \, ; \, A) = \sum_{\substack{c \equiv a_1 \\ d \equiv a_2}(\mathrm{mod}\ A)} (cz + d)^{-r}$$

la série d'Eisenstein (a_1, a_2, A, r sont entiers, $A \geq 1$, $r \geq 2$; pour définir G_2 dans le cas $r = 2$, on utilise la sommation due à HECKE comme dans [7]) et $C_m = C_m^{\ell, k-\ell-2m}$ est l'opérateur de Cohen [4] : par définition, pour les fonctions holomorphes h_1, h_2 sur H, on a

$$C_m^{\ell, k-\ell-2m}(h_1 \, , \, h_2)$$

$$= \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} \binom{m}{r} \frac{\Gamma(\ell + m) \, \Gamma(k - \ell - m)}{\Gamma(\ell + r) \, \pi(k - \ell - m - r)} \theta^r h_1 \, \theta^{m-r} h_2 \, .$$

Puisque les coefficients de $\pi^{-r} G_r$ sont algébriques [3], l'algébricité des nombres $\pi^{-(k-\ell-2m)} \langle f , F_{a,N}^{(m)} \rangle / \langle f , f \rangle$ de (4.1) et des valeurs des distributions $\mu_{f,g,m}$ se déduit de la théorie de Hecke-Petersson.

Pour démontrer la propriété d'intégralité, notons que les nombres (4.1) sont égaux à $4^{k-1} N^{k-2-m} \omega_{f,g,m}^{-1} \langle f , Tr_1^{N^2} F_{a,N}^{(m)} \rangle$ où $Tr_1^{N^2}$ est la trace : $Tr_1^{N^2} = \sum_{\alpha \in \Gamma_0(N^2)} \gamma$

Maintenant il suffit de montrer que les dénominateurs des coefficients de la forme modulaire

$$\pi^{-(k-\ell-2m)} N^{k-2-m} Tr_1^{N^2} F_{a,N}^{(m)}$$

sont bornés. On a

$$Tr_1^{N^2} = Tr_N^{N^2} . Tr_1^{N_0} , \text{ où } N_0 = \prod_{p|N} p$$

et

$$Tr_{N_0}^{N^2} = \sum_{b=1}^{N^2/N_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ bN_0 & 1 \end{pmatrix} .$$

D'autre part,

$$H_{N^2} \, Tr_{N_0}^{N^2} = B_{N_0}^{N^2} H_{N_0} \quad \text{où} \quad H_A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad A \geq 1$$

et

$$B_{N_0}^{N^2} = \sum_{b=1}^{N^2/N_0} \begin{pmatrix} N_0/N^2 & -bN_0/N^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Evidemment si $H(z) = \sum_{n=0} A(n) q^n$ est une série de Fourier

$$B_{N_0}^{N^2} H(z) = (N_0/N^2)^{(k/2)-1} \sum_{n\geq 0} A(nN^2/N_0) \, q^n \quad [7] .$$

Notons que les opérateurs $Tr_1^{N_0}$ et H_{N_0} dépendent de S , mais ne dépendent pas de N , et que H_{N^2} est l'involution.

Si l'on introduit la série

$$A(n) \, q^n = \pi^{-(k-\ell-2m)} F_{a,N}^{(m)} k_{N^2}^{H} = \pi^{\ell+2m-k} (Nz)^{-k} F_{a,N}^{(m)}(-1/N^2 z) ,$$

le calcul direct montre que les dénominateurs des nombres $N^{-m} A(nN^2/N_0)$ ne dépendent pas de N ; ceci entraîne la proposition (et le théorème).

Signalons en conclusion que le résultat similaire a lieu pour les séries de Rankin sur un corps totalement réel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COHEN (H.). - Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, Math. Annalen, t. 217, 1975, p. 271-285.

[2] DELIGNE (P.). - Valeurs des fonctions L et périodes des intégrales, "Automorphic forms, representations and L-functions," part 2, p. 313-346. - Providence, American mathematical Society, 1979 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 33).

[3] JACQUET (H.). - Automorphic forms on GL(2), part II. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1972 (Lecture Notes in Mathematics, 278).

[4] KATZ (N. M.). - p-adic L-functions for CM-fields, Invent. Math., t. 49, 1978, p. 199-297.

[5] MANIN (Ju. I.). - Les périodes des formes paraboliques et les séries p-adiques de Hecke, [en russe] Mat. Sbornik, t. 92, 1973, p. 378-401 ; [en anglais] Math. of the URSS-Sbornik, t. 92, 1979, p. 371-393.

[6] MANIN (Ju. I.). - L'intégration non archimédienne et les fonctions L p-adiques de Jacquet-Langlands, [en russe] Uspekhi Mat. Nauk, t. 31, 1979, p. 5-54 ; [en anglais] Russian math. Surv., t. 31, fasc. 1, 1976, p. 5-57.

[7] MANIN (Ju. I.) et PANČIŠKIN (A. A.). - Convolution des séries de Hecke et leurs valeurs aux entiers, [en russe] Mat. Sbornik, t. 104, 1977, p. 617-651 ; [en anglais] Math. of the URSS Sbornik, t. 104, 1977, p. 519-537.

[8] SHIMURA (G.). - The special values of the zeta-functions associated with cusp forms, Commun. pure appl. Math., t. 29, 1976, p. 783-804.