Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Yvette Amice

# Prolongement analytique des sommes de Gauss, I

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 9, nº 1 (1981-1982), exp. nº 13, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A7_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, n° 13, 9 p. 
11 janvier 1982

# PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES SOMMES DE GAUSS, I

par Yvette AMICE (*)
(Université Paris-7)

Introduction. - Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet modulo $f$ , et $\theta$ un caractère (additif) de $\underset{\sim}{Z}$ d'ordre $f$ , nous noterons

(1) $$g(\chi , \theta) = \frac{1}{f} \sum_{a=0}^{f-1} \chi(a)\ \theta(a) = G(\chi , \theta)/f .$$

La somme de Gauss ainsi définie est aussi, pour toute période $N$ commune à $\chi$ et $\theta$ :

$$g(\chi , \theta) = \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} \chi(a)\ \theta(a) .$$

Soit $p$ un nombre premier, $m$ premier à $p$ , et $\chi$ un caractère de Dirichlet modulo $f = mp^e$ , $e \geq 1$ . On sait que $\chi$ admet un unique prolongement continu (localement constant) à l'anneau

$$\underset{\sim}{Z}_p(m) = \varprojlim_k (\underset{\sim}{Z}/mp^k \underset{\sim}{Z}) \simeq (\underset{\sim}{Z}/m\underset{\sim}{Z}) \times \underset{\sim}{Z}_p ,$$

dont la restriction au groupe $U_p(m)$ des unités de $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ est un caractère continu de ce groupe, et qui est nul sur $\underset{\sim}{Z}_p(m) \setminus U_p(m)$ .

De même, si $\theta$ est un caractère additif de $\underset{\sim}{Z}$ d'ordre $f = mp^e$ , il admet un unique prolongement continu en un caractère du groupe additif de $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ .

Notations-conventions. - Soit $\underset{\sim}{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$ : on fixe une fois pour toutes un plongement du corps $\bar{Q}$ des nombres algébriques dans $\underset{\sim}{C}_p$ .

Soit $G$ un groupe topologique abélien, on note $\hat{G} = \text{Hom cont}(G , \underset{\sim}{C}_p^*)$ le groupe topologique de ses morphismes continus dans $\underset{\sim}{C}_p^*$ , c'est-à-dire le groupe des caractères p-adiques de $G$ . Lorsque $G$ est compact, $\hat{G}$ est muni de la métrique de la convergence uniforme sur $G$ .

On convient de dire que $\chi$ est un caractère de Dirichlet modulo $f$ , s'il est de période $f$ et si $\chi(n) = 0 \Longleftrightarrow (n , f) \neq 1$ . Si $\chi$ et $\chi'$ sont deux caractères de Dirichlet modulo $f$ , leur produit $\chi\chi'$ est, par convention, encore un caractère

---

(*) Texte reçu le 4 octobre 1982.
Yvette AMICE, UER Mathématiques, Université Paris-7, Tour 45-55, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

modulo $f$ (et non le caractère primitif associé). En particulier le produit de $\chi$ et de son inverse $\bar{\chi}$ est le caractère unité modulo $f$.

Avec ces conventions, le sous-groupe $\hat{U}_p(m)_{tors}$ des éléments de torsion de $\hat{U}_p(m)$ est constitué des prolongements continus à $U_p(m)$ des caractères de Dirichlet modulo $mp^e$ pour $e \geqslant 1$.

De même, $\hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)_{tors}$ est constitué des prolongements à $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ des caractères $\theta$ de $\underset{\sim}{Z}$ dont l'ordre divise $mp^h$ pour $h$ assez grand.

Comme $\hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$ et $\hat{\underset{\sim}{U}}_p(m)$ ont les structures naturelles d'espaces analytiques (cf. § 2), il est raisonnable d'essayer de prolonger la définition (1) des sommes de Gauss à des couples de caractères p-adiques continus $\chi \in \hat{U}_p(m)$ et $\theta \in \hat{Z}_p(m)$, de façon que la fonction $g(\chi , \theta)$ obtenue soit analytique.

On montre au § 1 que, pour $\chi \in \hat{U}_p(m)$ et $\theta \in \hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$, la limite

$$(2) \qquad g(\chi , \theta) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{mp^k} \sum_{a=0}^{mp^k-1} \chi(a)\ \theta(a)\right)$$

existe. Il est alors clair que, si $\chi$ et $\theta$ sont de torsion, elle coïncide avec la valeur (1). Au § 2 on montre que cette fonction est analytique en $\chi$ et $\theta$, et qu'elle a, aux bords des disques constituant les espaces analytiques $\hat{U}_p(m)$ et $\hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$, une croissance logarithmique.

Au § 3, on montre quelle relation il y a entre $g(\chi , 1)$ et la fonction $\operatorname{Log} \Gamma_\chi$ [4], pour $\chi \in \hat{U}_p(m)$. On montre aussi que si $\chi = \chi_0$ est de torsion, et si $\chi_s = \chi_0 \langle\ \rangle^s$, on a

$$(3) \qquad g(\chi_s , 1) = - sL_p(1 - s , \chi_0) .$$

On donne enfin une expression explicite de $g(\chi_0 , \theta)$ lorsque $\chi_0$ est de torsion et $\theta$ quelconque dans $\hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$.

## 1. Convolution sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$.

On convient que, si une fonction $f$ est définie sur $\underset{\sim}{N}$ et prolongeable en une fonction continue sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$, on dira, par abus de langage, que $f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p(m) , \underset{\sim}{C}_p)$, et on notera encore $f$ son prolongement à $\underset{\sim}{Z}_p(m)$.

D'autre part, pour $g \in \mathcal{C}(U_p(m) , \underset{\sim}{C}_p)$ on convient de prolonger $g$ à $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ en posant $g(x) = 0$ si $x \notin U_p(m)$. On désignera en général par la même lettre la fonction définie sur $U_p(m)$ et son prolongement standard à $\underset{\sim}{Z}_p(m)$.

Rappelons d'abord la définition de la convolution sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ [4].

PROPOSITION 1.1. - Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}_p$ , et, pour $n \geqslant 0$ , posons

$$f * g(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)\, g(n-i) \ ,$$

alors $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p(n) , \mathbb{C}_p)$ .

Exemple. - Soient $\chi$ et $\theta$ des caractères de torsion dans $\hat{U}_p(m)$ et $\hat{\mathbb{Z}}_p(m)$ respectivement, et soit $mp^h$ une de leurs périodes communes, la définition (1) peut se lire

$$g(\chi , \theta) = \frac{1}{mp^h} (\chi\theta * 1)(mp^h - 1) \ .$$

Parmi les propriétés de la convolution, signalons la proposition suivante.

PROPOSITION 1.2.

(i) Pour toutes $f$ et $g$ continues sur $\mathbb{Z}_p(m)$ , $f * g(-1) = 0$ , et, si $f$ est continue, il existe $g$ telle que $f = g * 1$ (i. e. $f(1+x) - f(x) = g(x)$ ) à la condition nécessaire et suffisante que $f(-1) = 0$ .

(ii) La convolution munit $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p(m) , \mathbb{C}_p)$ d'une structure d'algèbre de Banach, non unitaire à norme multiplicative.

(iii) Chaque espace $\mathcal{C}_u^k(\mathbb{Z}_p(m) , \mathbb{C}_p)$ , espace des fonctions k-fois continuement et uniformément dérivables sur $\mathbb{Z}_p(m)$ (cf. [5] ou [3]) est, pour la convolution, une algèbre de Banach (pour la norme naturelle de ces espaces).

(iv) L'espace $\mathrm{Loc\ an} = \mathrm{Loc\ an}(\mathbb{Z}_p(m) , \mathbb{C}_p)$ des fonctions localement analytiques sur $\mathbb{Z}_p(m)$ est une algèbre pour la convolution et, si $g \in \mathrm{Loc\ an}$ est fixée, $f \longrightarrow f * g$ est un opérateur continu sur $\mathrm{Loc\ an}$ muni de sa topologie naturelle (pour cette topologie cf. [1] ou [3] par exemple).

Ces diverses propriétés se déduisent de la caractérisation suivante.

On note $\Delta_m = \{t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \ ; \ |t^m - 1| \geqslant 1\}$ , $\Delta_{m,r} = \{t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \ ; \ |t^m - 1| \geqslant r\}$ , et $H_0(\Delta_m)$ (resp. $H_0(\Delta_{m,r})$ ) l'espace des éléments analytiques sur $\Delta_m$ (resp. $\Delta_{m,r}$ ) et nuls à l'infini.

PROPOSITION 1.3 [2]. - Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}_p$ , et soit $F_f$ sa fonction génératrice

$$F_f(T) = \sum_{n \geqslant 0} f(n)\, T^n \ .$$

(i) $f$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p(m)$ à la condition nécessaire et suffisante que $F_f$ soit la série de Taylor à l'origine d'un élément $F_f \in H_0(\Delta_m)$ .

(ii) $f$ <u>est localement analytique sur</u> $\underset{\sim}{Z}_p(m)$ <u>à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe</u> $r < 1$ <u>tel que</u> $F_f \in H_0(\Delta_{m,r})$ .

Comme la fonction génératrice de $f * g$ est visiblement $F_f \cdot F_g$ , on déduit les propriétés (i) et (iv) de la proposition 1.2 du fait que $H_0(\Delta_m)$ et $H_0(\Delta_{m,r})$ sont des algèbres (pour la multiplication ordinaire), et la propriété (ii) de ce que les normes de $f$ (dans $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p(m), \underset{\sim}{C}_p)$ et $F_f$ (dans $H_0(\Delta_m)$ ) sont égales. La propriété (iii) utilise la caractérisation des fonctions k-fois uniformément différentiables de D. BARSKY [5] (voir aussi [3]).

CCROLLAIRE 1.4. - <u>Pour des caractères continus</u> $\chi \in \hat{U}_p(m)$ <u>et</u> $\theta \in \hat{Z}_p(m)$ , <u>la limite</u>

$$g(\chi , \theta) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{mp^k} \sum_{a=0}^{mp^k-1} \chi(a)\ \theta(a)\right)$$

<u>existe, et on a</u>

$$g(\chi , \theta) = (\chi\theta * 1)'(- 1) . \tag{5}$$

En effet, $\chi\theta * 1(- 1) = 0$ , on a donc

$$\frac{1}{mp^k} \sum_{a=0}^{mp^k-1} \chi(a)\ \theta(a) = \frac{\chi\theta * 1(mp^k - 1) - \chi\theta * 1(- 1)}{mp^k} .$$

D'autre part, tous les caractères continus considérés sont des fonctions localement analytiques, donc $\chi\theta * 1$ l'est aussi : le corollaire en résulte.

## 2. Analyticité des sommes de Gauss.

Rappelons d'abord brièvement une description de la structure analytique des groupes de caractères considérés.

2.1. <u>Caractères additifs</u> : $\hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$ .

Soit $\theta \in \hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$ , sa série génératrice est $F_\theta(T) = \sum_{n\geq 0} \theta(n)\ T^n = 1/(1 - \theta(1)\ T)$. D'après la proposition 1.3, il s'agit d'un caractère continu à la condition nécessaire et suffisante que $F_\theta \in H_\theta(\Delta_m)$ , c'est-à-dire que $\theta(1) \notin \Delta_m$ .

Soit $D_m = \underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C}_p) \setminus \Delta_m = \{t \in \underset{\sim}{C}_p ; |t^m - 1| < 1\}$ . On voit que $\theta\in\hat{Z}_p(m) \Leftrightarrow \theta(1)\in D_m$, et on vérifie que $\theta \longrightarrow \theta(1)$ est un isomorphisme de groupes topologiques et une isométrie. Comme $(m , p) = 1$ , $D_m = \bigcup D_\zeta$ , où $\zeta$ parcourt le groupe $\mu_m$ des racines m-ièmes de l'unité, et $D_\zeta = \{t \in \underset{\sim}{C}_p ; |t - \zeta| < 1\}$ . Une fonction analytique sur $\hat{Z}_p(m)$ est alors une fonction dont l'image sur $D_m$ est analytique sur chacun des disques constituant $D_m$ . Par exemple, comme $\theta$ est un caractère du groupe additif, $\theta'/\theta$ est une constante : en fait, $\theta'/\theta = \mathrm{Log}(\theta(1)) = (\mathrm{Log}(\theta(m))/m$. On notera $\mathrm{Log}\ \theta = \theta'/\theta$ : c'est une fonction analytique sur $D_m$ .

2.2. Caractères multiplicatifs : $\hat{U}_p(m)$ .

L'isomorphisme canonique $\underset{\sim}{Z}/mp^h \underset{\sim}{Z} \simeq \underset{\sim}{Z}/m\underset{\sim}{Z} \times (\underset{\sim}{Z}/p^h \underset{\sim}{Z})$ définit par passage à la limite un isomorphisme canonique $\underset{\sim}{Z}_p(m) \simeq (\underset{\sim}{Z}/m\underset{\sim}{Z}) \times \underset{\sim}{Z}_p$ . Pour $x \in \underset{\sim}{Z}_p(m)$ , on notera $x \simeq (x_0 , x_1)$ , $x_0 \in (Z/mZ)$ , $x_1 \in \underset{\sim}{Z}_p$ , l'image canonique de $x$ dans $(\underset{\sim}{Z}/m\underset{\sim}{Z})\times\underset{\sim}{Z}_p$, et on écrira parfois $x = (x_0 , x_1)$ . On rappelle que si $x_1 \in \underset{\sim}{Z}_p$ , $\omega(x_1)$ est défini par $\omega(x_1) \equiv x_1 \mod p$ , et $\omega(x_1)^p = \omega(x_1)$ . C'est un caractère modulo $p$ . Pour $x \in \underset{\sim}{Z}_p(m)$ , on pose

$$\omega(x) = \epsilon_m(x_0)\ \omega(x_1)$$

et

$$\langle x\rangle = \epsilon_m(x_0)\ \langle x_1\rangle \quad \text{où} \quad \langle x_1\rangle = \omega^{-1}(x_1)\ x_1 \quad \text{si} \quad \omega(x_1) \neq 0 \text{ , et } \quad \langle x_1\rangle = 0$$

sinon, ( $\epsilon_m$ désigne le caractère unité modulo $m$ ). On note $U_1 = 1 + p\underset{\sim}{Z}_p$ , alors $\langle x\rangle \in U_1$ quand $x \in U_p(m)$ . Soit $\chi \in \hat{U}_p(m)$ : il existe un unique triplet $(\chi_0 , a , \chi_1)$ , où $\chi_0 \in (\hat{Z}/mZ)$ , $a \in (0 , \dots , p - 2)$ , et $\chi_1 \in \hat{U}_1$ tel que, pour tout $x \in U_p(m)$ , on ait

$$\chi(x) = \chi_0(x_0)\ \omega(x_1)^a\ \chi_1(\langle x_1\rangle) .$$

Soit $u$ un générateur de $U_1$ , i. e. un élément tel que $u^{\underset{\sim}{Z}}$ soit dense dans $U_1$, $\chi_1$ est continu si, et seulement si, $\chi_1(u) \in D_1 = \{t \in \underset{\sim}{C}_p ; |t - 1| < 1\}$ , et l'application

$$\chi \longrightarrow (\chi_0 , a , \chi_1(u))$$

de $\hat{U}_p(m)$ dans $(\hat{\underset{\sim}{Z}/m\underset{\sim}{Z}})^x \times (\underset{\sim}{Z}/(p - 1) \underset{\sim}{Z}) \times D_1$ est un isomorphisme de groupes topologiques et une isométrie (la distance sur les ensembles finis est triviale, et le produit est muni de la distance "Sup" ). Notons $\dot{\chi}$ la dérivée invariante de $\chi$ : $\dot{\chi}(x) = x_1 \frac{d}{dx} \chi(x)$ , alors $\dot{\chi}/\chi$ est une constante : on vérifie que

$$\dot{\chi}/\chi = \mathrm{Log}\ \chi(u)/\mathrm{Log}(u) = \mathrm{Log}\ \chi .$$

Ceci définit une fonction analytique sur $\hat{U}_p(m)$ .

2.3. Fonctions analytiques sur $\hat{U}_p(m)$ et $\hat{Z}_p(m)$ .

On sait ([3] théorème 1.3) qu'une forme linéaire sur Loc an$(\underset{\sim}{Z}_p(m) , \underset{\sim}{C}_p)$ (resp. sur Loc an$(\underset{\sim}{U}_p(m) , \underset{\sim}{C}_p))$ est continue à la condition nécessaire et suffisante que sa restriction à $\hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$ (resp. $\hat{\underset{\sim}{U}}_p(m))$ soit une fonction analytique. Par exemple les deux fonctions Log , définies sur ces duaux, sont restriction aux duaux de la forme linéaire continue sur Loc an : $f \longrightarrow f'(0)$ et $g \longrightarrow g'(1)$ respectivement.

PROPOSITION 2.1. - Pour $\chi \in \hat{U}_p(m)$ , $\theta \longrightarrow g(\chi , \theta)$ est analytique sur $\hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$ et, pour $\theta \in \hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$ , $\chi \longrightarrow g(\chi , \theta)$ est analytique sur $\hat{U}_p(m)$ .

Il suffit en effet de combiner la propriété (iv) de la proposition 1.2 et le fait que, pout tout $a \in \mathbb{Z}_p(m)$ , $f \to f'(a)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}oc$ an .

2.4. Conditions de croissance au bord.

Rappelons que si $f$ est analytique sur $D_1 = \{t \in \mathbb{C}_p ; |t - 1| < 1\}$ , on note, pour $r < 1$ , $M(f , r) = \sup_{|t-1|<r} |f(t)|$ . Si $f$ et $g$ sont deux fonctions analytiques sur $D_1$ , on note $f = \mathfrak{o}(g)$ (resp. $f = \mathfrak{O}(g)$) si $M(f , r) = \mathfrak{o}(M(g , r)$ (resp. $M(f , r) = O(M(g , r))$ pour $r \to 1^-$ .

On vérifie que, bien que les fonctions $M(f , r)$ dépendent du choix d'un centre pour le disque considéré, les notions de $\mathfrak{o}$ et $O$ n'en dépendent pas. Si $f$ et $g$ sont analytiques sur une réunion finie de disques, on dit que $f = \mathfrak{o}(g)$ ou $f = O(g)$ si les restrictions de $f$ et $g$ à chacun des disques satisfont cette propriété : on en déduit des notions de $\mathfrak{o}$ et $O$ sur les variétés $\hat{U}_p(m)$ et $\hat{\mathbb{Z}}_p(m)$ , notions intrinsèques, i. e. ne dépendant pas du choix d'une coordonnée choisie pour réaliser l'isomorphisme avec une réunion finie de copies de $D_1$ . On note en particulier $f = O(\mathcal{L}og)$ lorsque $f = O(g)$ , où $g$ est la fonction logarithme définie sur l'une ou l'autre de ces variétés en 2.2.

On montre (cf. D. BARSKY [5] et [3]) qu'une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^1_u(\mathbb{Z}_p(m) , \mathbb{C}_p)$ (resp. sur $\mathcal{C}^1_u(U_p(m) , \mathbb{C}_p)$ est continue si, et seulement si, sa restriction à $\hat{\mathbb{Z}}_p(m)$ (resp. à $\hat{U}_p(m)$ ) y est $O(\mathcal{L}og)$ .

PROPOSITION 2.2. - <u>Soient</u> $\theta \in \hat{Z}_p(m)$ <u>et</u> $\chi \in \hat{U}_p(m)$ , <u>on a</u>

$$|g(\chi , \theta)| \leq \max(M(\mathcal{L}og , \|\theta^m - 1\| , M(\mathcal{L}og , \|\chi\,\varphi^{(m)(p-1)} - 1\|/p))$$

<u>et chacune des fonctions</u> $\theta \to g(\chi , \theta)$ <u>et</u> $\chi \to g(\chi , \theta)$ <u>est</u> $O(\mathcal{L}og)$ .

La preuve repose sur la proposition 1.2 (iii) et sur une évaluation précise de la norme, dans $\mathcal{C}^k_u$ , d'un opérateur $f \to f * g$ .

3. Relation avec les fonctions $L$ et $\Gamma$ .

On note $S = \{s \in \mathbb{C}_p ; v(s) > (1/(p - 1)) - 1\}$ . Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet modulo $mp^h$ , $h \geqslant 1$ , on note $\chi_s = \chi \langle\ \rangle^s$ .

On sait (cf. KUBOTA-LEOPOLDT [7] ou IWASAWA [6]) que, pour $k$ entier, $k \geqslant 1$ ,

$$B_{k,\chi} = - k\, L_p(1 - k , \chi) = \lim_{\ell\to\infty} \Big(\frac{1}{mp^\ell} \sum_{a=0}^{mp^\ell-1} \chi_k(a)\Big)$$

(rappelons qu'ici, par hypothèse, $\chi(p) = 0$ ). Ceci s'écrit aussi

$$B_{k,\chi} = g(\chi_k , 1) .$$

D'autre part, $s \to \chi_s$ est une bijection bianalytique de $S$ sur un disque $D_\chi$ de $\hat{U}_p(m)$ (en fait : le plus grand disque contenant $\chi$ et ne contenant aucun autre caractère de torsion). On en déduit que $s \to g(\chi_s , 1)$ est une fonction analytique sur $S$ , qui coïncide pour $s = k$ , $k$ entier $\geqslant 1$ , avec $B(s,\chi) = - sL_p(1 - s,\chi)$. Ces deux fonctions sont donc égales sur $S$ .

PROPOSITION 3.1. - Pour $\chi$ de torsion et $v(s) > (1/(p - 1)) - 1$ ,

(6) $$B(s , \chi) = - s L_p(1 - s) \chi) = g(\chi_s , 1) .$$

On peut ainsi retrouver le fait que $B(s , \chi)$ est bornée sur $S$ , grâce au fait que $g(. , 1)$ est bornée sur $D_\chi$ . On peut aussi retrouver les majorations classiques de $B(s , \chi)$ en fonction du conducteur de $\chi$ en utilisant la proposition 2.2.

D'autre part, on montre facilement que, lorsqu'une fonction $f_s$ dépend d'un paramètre $s$ , l'opérateur $d/ds$ commute à la convolution et la dérivation sur $Z_p(m)$ , i. e. $d/ds\ (f_s * g) = ((d/ds)f_s) * g$ , et $(d/ds)f'_s = ((d/ds)f_s)'$ . On en déduit que

$$\frac{d}{ds}(g(\chi_s , 1)) = (\frac{d}{ds} \chi_s * 1)'(- 1) = (\chi_s \operatorname{Log} \langle\ \rangle * 1)'(- 1) .$$

On retrouve ainsi les fonctions $\operatorname{Log} \Gamma_{\chi_s}$ , définies en [4].

COROLLAIRE 3.2. - Pour $\chi$ de torsion et $v(s) > (1/(p - 1)) - 1$ ,

(7) $$\frac{d}{ds}(g(\chi_s , 1) = \frac{d}{ds}(- s L_p(1 - s , \chi)) = \operatorname{Log} \Gamma'_{\chi_s}(0) .$$

En particulier, on retrouve, pour $s = 0$ , la valeur (cf. [4], théorème 2)

$$\operatorname{Log} \Gamma'_{\chi_s}(0) = - \gamma_p(\chi) = - L_p(1 , \chi) \quad \text{pour } \chi \text{ non trivial}$$

$$= \lim_{s\to 0} (s L_p(1 - s , \chi)) \quad \text{pour } \chi \text{ trivial} .$$

Plus généralement, on donnera dans la partie II de cet article une formule de Taylor pour $\operatorname{Log} \Gamma_{\chi_s}$ généralisant aux caractères de la forme $\chi_s$ la formule du théorème 2 de [4].

## 4. Exemple de formule explicite.

Pour $\chi$ de torsion, provenant d'un caractère de Dirichlet modulo $f = mp^h$ , on sait que $F_\chi(T) = \sum_{n\geqslant 0} \chi(n) T^n$ est une fraction rationnelle. Plus précisément,

(8) $$F_\chi(T) = \sum_{\alpha^f=1} \frac{g(\chi , \bar{\alpha})}{1 - \alpha(1) T} ,$$

où $\bar{\alpha}$ désigne l'inverse du caractère additif $\alpha$ . On sait aussi que $g(\chi , \alpha) = 0$ si l'ordre (exact) de $\alpha$ n'est pas égal à celui de $\chi$ .

Soit $\theta \in \hat{Z}_p(m)$ , et supposons d'abord que $\theta^f \neq 1$ . On a

$$F_{\chi\theta}(T) = \sum_{\alpha^f=1} \frac{g(\chi , \bar{\alpha})}{1 - \alpha(1)\ \theta(1)\ T} .$$

Donc,

$$F_{\chi\theta*1}(T) = \frac{1}{1-T} \times F_{\chi\theta}(T)$$

$$= \sum_{\alpha^f=1} g(\chi\ ,\ \bar{\alpha})\left(\frac{1}{1-\bar{\alpha}\bar{\theta}(1)} \times \frac{1}{1-\alpha\theta(1)\ T} + \frac{1}{1-\alpha\theta(1)} \times \frac{1}{1-T}\right) .$$

On en déduit que

$$\chi\theta * 1(x) = \sum_{\alpha^f=1} g(\chi\ ,\ \bar{\alpha})\left(\frac{1}{1-\bar{\alpha}\bar{\theta}(1)}\ (\alpha\theta)(x) + \frac{1}{1-\alpha\theta(1)}\right)$$

et

$$\chi\theta * 1'(x) = \mathrm{Log}(\theta(1)) \sum_{\alpha^f=1} g(\chi\ ,\ \bar{\alpha})\ \frac{1}{1-\bar{\alpha}\bar{\theta}(1)}\ ,$$

soit

$$g(\chi\ ,\ \theta) = -\ \mathrm{Log}(\theta(1)\ F_\chi(\theta(1)) .$$

On vérifie qu'aux pôles (simples) de $F_\chi(T)$ la valeur de $-\ \mathrm{Log}\ T\ F_\chi(T)$ est encore $g(\chi\ ,\ \alpha)$ si $T = \alpha(1)$ avec $\alpha^{f_\chi} = 1$ , finalement, pour tout $\theta \in \hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$ , la formule ci-dessus est valable.

PROPOSITION 4.1. - Soit $\chi \in \hat{U}_p(m)_{tors}$ et $\theta \in \hat{Z}_p(m)$ , on a

(9) $$g(\chi\ ,\ \theta) = -\ \mathrm{Log}(\theta(1))\ F_\chi(\theta(1))$$

où $F_\chi(T) = \sum_{n\geq 0} \chi(n)\ T^n$ est la fonction génératrice de $\chi$ .

On retrouve ici, sous une forme explicite, le fait que, pour $\chi$ de torsion, $\theta \longrightarrow g(\chi\ ,\ \theta)$ est une fonction analytique à croissance logarithmique sur $\hat{\underset{\sim}{Z}}_p(m)$ .

On peut, par la même méthode de calcul direct, donner des expressions analogues pour $g(\chi_1\ ,\ \theta)$ , $g(\chi_2\ ,\ \theta)$ , le calcul se compliquant assez vite pour $g(\chi_k\ ,\ \theta)$ lorsque $k$ augmente. On donnera, dans la partie II, une expression explicite analogue à (9) et valable pour tout $\chi \in \hat{U}_p(m)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180.

[2] AMICE (Y.). - Fonctions analytiques sur le complémentaire d'une famille de disques, Séminaire de théorie des nombres, Université de Bordeaux, 1968/69, n° 8.

[3] AMICE (Y.). - Duals, Proceedings of the conference on p-adic analysis [1978 Nijmegen] ; p. 1-15. - Nijmegen, Mathematisch Instituut Katholieke Universiteit, 1978.

[4] AMICE (Y.). - Fonctions $\Gamma$ p-adiques associées à un caractère de Dirichlet, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 8e année, 1979/80, n° 17, 11 p.

[5] BARSKY (D.). - Fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 397-411.

[6] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L-functions. - Princeton, Princeton University Press, 1972 (Annals of mathematic Studies, 74).

[7] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zeta-werte, J. für reine und angew. Math., t. 215-216, 1964, p. 328-339.