

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

MARIE-CLAUDE SARMANT-DURIX

Rapports de produits croulants

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n° 1 (1981-1982), exp. n° 2, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A2_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RAPPORTS DE PRODUITS CROULANTS

par Marie-Claude SARMANT-DURIX (*)

[Université Pierre et Marie Curie]

Nous allons démontrer que des fonctions assez générales apparaissent comme des rapports de produits croulants. Nous nous plaçons toujours dans un corps k ultramétriquement valué, complet, maximalelement complet, et la valeur absolue p -adique associée à k est notée $|\cdot|$. Les autres notations sont celles utilisées dans [1].

THÉORÈME. - Soit f une série de Taylor de rayon de convergence 1^- , admettant une suite infinie de zéros dans son disque de convergence $D = D(0, 1^-)$. Alors, pour tout $\lambda \in k$, il existe un couple (Π_1, Π_2) de produits croulants de D tels que :

$$f = \lambda \left(\frac{\Pi_1 - 1}{\Pi_2 - 1} \right).$$

Démonstration.

1. D'après les propriétés classiques des zéros des séries de Taylor, nous savons que la suite des valeurs absolues des zéros de f converge vers 1. Nous pouvons donc, sans perte de généralité, indexer ces zéros en les appelant $b_{n,i}$ tels que

$$|b_{n,i}| = |b_{n,j}| < |b_{n+1,h}|$$

($\forall i, j$ tels que $1 \leq i < j \leq u_n$, $\forall h = 1 \dots u_{n+1}$).

Nous aurons donc u_n zéros sur la circonférence de centre 0, de rayon $d_n = |b_{n,i}|$, i varie de 1 à u_n pour chaque n . Nous appellerons $q_{n,i}$ l'ordre du zéro $b_{n,i}$.

Pour faire apparaître f sous la forme annoncée, nous allons construire une série de Taylor g telle que dans le domaine Δ_ρ obtenu en retirant à D les disques de diamètre ρ centrés en l'un quelconque des zéros de fg , la fonction g vérifie

$$\lim_{|x| \rightarrow 1, x \in \Delta_\rho} \frac{1}{g(x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{|x| \rightarrow 1, x \in \Delta_\rho} \frac{1}{f(x)g(x)} = 0.$$

(*) Texte reçu le 9 juillet 1982.

Marie-Claude SARMANT-DURIX, 16 boulevard Jourdan, 75014 PARIS.

En effet [3], ceci suffit pour établir que $1/g \in H(\Delta\rho)$ ainsi que $1/fg$, et que $\Delta\rho$ admet un T-filtre croissant, de diamètre 1, qui annule $1/g$ et $1/fg$, donc que quels que soient A et $B \in K$, il existe des produits croissants Π_1 et Π_2 tels que

$$\frac{1}{g} = A(1 - \Pi_1) \quad \text{et} \quad \frac{1}{fg} = B(1 - \Pi_2),$$

donc

$$f = \frac{(1/g)}{(1/fg)} = \frac{A}{B} \left(\frac{1 - \Pi_1}{1 - \Pi_2} \right)$$

ce qui est le résultat demandé.

Nous allons construire une suite $(\beta_{n,\ell})$, $1 \leq \ell \leq u_n$, $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de D telle que, en posant $|\beta_{n,v_n}| = \delta_n$:

$$(1) \quad |b_{n,1}| < |\beta_{n,1}| < |\beta_{n,2}| < \dots < |\beta_{n,v_n}| < |b_{n+1,1}|$$

$$(2) \quad n \leq (-\log d_{n+1}) v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(3) \quad \frac{q_n + \log \varphi_n}{v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1})} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(On a posé $\varphi_n = \sup_{1 \leq i \leq u_n} \prod_{i \neq j, 1 \leq j \leq u_n} (d_n / |b_{n,i} - b_{n,j}|)^{q_{n,j}}$).

En effet, on vérifie aisément qu'il n'y a aucune difficulté logique à construire une telle suite; il suffit de choisir, à chaque rang n , les entiers v_n assez grands.

Notons $P_{n,\ell}(x) = (x - \beta_{n,\ell})/\beta_{n,\ell}$, $1 \leq \ell \leq v_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Maintenant, grâce au théorème 1 de [2], il existe une série de Taylor g , convergente dans le disque D , telle que :

$$g(\beta_{n,\ell}) = 0, \quad \forall \ell = 1, \dots, v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$(4) \quad -1 \leq v(g, \mu) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\ell=1}^{v_n} v(P_{n,\ell}; \mu) \right) \leq 0, \quad \forall \mu > 0$$

Soit E l'ensemble des zéros de fg , et soit $\Delta\rho = D \setminus \bigcup_{\alpha \in E} d^-(\alpha, \rho)$.

2. Nous allons établir d'abord

$$\lim_{|x| \rightarrow 1, x \in \Delta \rho} \frac{1}{g(x)} = 0 .$$

Prenons x tel que $|x| = r \in (d_n, d_{n+1}[$.

Considérons $|1/g(x)|$ dans une classe $\Gamma = D(\alpha, r^-)$.

(a) Si $g(x)$ n'a pas de zéro dans cette classe, alors

$$v\left(\frac{1}{g(x)}\right) = v\left(\frac{1}{g}, -\log r\right) .$$

(b) Si $g(x)$ a un zéro dans cette classe, il en a au plus un ; soit q l'ordre de ce zéro β . On peut alors poser :

$$g(x) = G(x) \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^q .$$

Alors

$$\begin{aligned} v\left(\frac{1}{g(x)}\right) &= v(G(x)) + q[v(\beta) - v(x - \beta)] \\ &= v\left[\frac{1}{g(x)}, -\log r\right] + q[-\log r - v(x - \beta)] . \end{aligned}$$

Comme $x \in \Gamma \cap \Delta \rho$,

$$\rho \leq |x - \beta| \leq r \text{ entraîne } -\log r \leq v(x - \beta) \leq -\log \rho .$$

D'où, dans tous les cas, que $g(x)$ ait ou non un zéro dans la classe Γ :

$$(5) \quad q(\log \rho - \log r) \leq v\left[\frac{1}{g(x)}\right] - v\left[\frac{1}{g(x)}, -\log r\right] \leq 0 .$$

D'autre part, d'après les propriétés de la fonction g , cette fonction ayant dans Γ un zéro d'ordre q au plus, nous pouvons écrire, $\forall \mu < -\log r$:

$$-1 \leq v(g, \mu) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\ell=1}^n v(P_{n, \ell}, \mu) \leq v\left(\frac{x - \beta}{\beta}\right)^{q-1} .$$

D'où, comme $v(x - \beta) = v(x) = \mu$ et $v(\beta) = -\log r$:

$$-1 \leq (q - 1)(\log r + \mu) .$$

En faisant tendre μ vers 0, on en déduit $-1 \leq (q - 1) \log r$, et finalement

$$(6) \quad (q - 1)(-\log d_{n+1}) \leq 1 .$$

Alors les relations (5) et (6) nous donnent

$$0 \leq v\left[\frac{1}{g}, -\log r\right] - v\left[\frac{1}{g}\right] \leq (\log r - \log \rho) \left(1 + \frac{1}{-\log d_{n+1}}\right)$$

D'où la relation :

$$(7) \quad 0 \leq v\left[\frac{1}{g}, -\log r\right] - v\left[\frac{1}{g}\right] \leq -\log \rho \left(1 - \frac{1}{\log d_{n+1}}\right).$$

Essayons maintenant de borner inférieurement $v(1/g)$, pour $d_n \leq |x| < d_{n+1}$,

$$v\left(\frac{1}{g(x)}\right) = v\left(\frac{1}{g(x)}\right) - v\left[\frac{1}{g(x)}, -\log r\right] + v\left[\frac{1}{g(x)}, -\log r\right]$$

$$(8) \quad v\left(\frac{1}{g(x)}\right) \geq v\left[\frac{1}{g(x)}, v(x)\right] + \log \rho \left(1 - \frac{1}{\log d_{n+1}}\right).$$

D'après (4), nous pouvons borner inférieurement $v\left(\frac{1}{g(x)}, v(x)\right)$ en utilisant les $v(P_{n,l}, v(x))$, c'est-à-dire $v(x)$ et $|\beta_{m,l}|$, d'où

$$(9) \quad v\left[\frac{1}{g(x)}, v(x)\right] \geq \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\lambda=1}^{v_j} \log d_n - \log |\beta_{j,\lambda}| \geq v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1})$$

ou encore

$$(10) \quad v\left[\frac{1}{g(x)}\right] \geq \log \rho \left(1 - \frac{1}{\log d_{n+1}}\right) + v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1})$$

$$v\left[\frac{1}{g(x)}\right] \geq v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1}) \left(1 + \frac{\log \rho (1 - (1/\log d_{n+1}))}{v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1})}\right)$$

ce qui permet, en utilisant la relation (2), d'en déduire que

$$\lim_{|x| \rightarrow 1, x \in \Delta \rho} \frac{1}{g(x)} = 0.$$

3. Nous allons maintenant montrer, de façon tout à fait analogue, que

$$\lim_{|x| \rightarrow 1, x \in \Delta \rho} \frac{1}{f(x)g(x)} = 0.$$

Supposons encore que $d_n \leq |x| < d_{n+1}$. Considérons

$$v\left[\frac{1}{f(x)g(x)}\right] - v\left[\frac{1}{fg}, v(x)\right] = v\left(\frac{1}{f(x)}\right) - v\left(\frac{1}{f}, v(x)\right) + v\left(\frac{1}{g(x)}\right) - v\left(\frac{1}{g}, v(x)\right).$$

Or

$$v\left(\frac{1}{f(x)}\right) - v\left(\frac{1}{f}, v(x)\right) \geq -\log \varphi_n - q_n (\log d_n - \log \rho) \geq -\log \varphi_n + q_n \log \rho$$

lorsque $d_n \leq |x| < d_{n+1}$ et donc, grâce à (7), on a

$$(11) \quad v\left(\frac{1}{f(x)g(x)}\right) - v\left(\frac{1}{fg}, v(x)\right) \geq -\frac{\log \varphi}{\log d_{n+1}} (\log d_{n+1} - 1) - \log \varphi_n + q_n \log \rho.$$

Considérons $v((1/fg), v(x))$. On a évidemment $v((1/f), v(x)) \geq c$ (c constante réelle).

$$(12) \quad v\left(\frac{1}{g}, v(x)\right) \geq v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1}).$$

D'où finalement,

$$(13) \quad v\left(\frac{1}{fg}, v(x)\right) \geq v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1}) + c.$$

Et, grâce à (11) et (13),

$$v\left(\frac{1}{f(x)g(x)}\right) \geq v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1}) - \frac{\log \varphi}{\log d_{n+1}} (\log d_{n+1} - 1) - \log \varphi_n + q_n \log \rho + c$$

ou encore

$$v\left(\frac{1}{f(x)g(x)}\right) \geq v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1}) (1 - \sigma_n) + c,$$

où

$$\sigma_n = \frac{(\log \rho / \log d_{n+1}) (\log d_{n+1} - 1) + \log \varphi_n - q_n \log \rho}{v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1})}$$

D'après (2),

$$\frac{\log \rho (1 - \log d_{n+1})}{(-\log d_{n+1}) v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1})} \text{ tend vers } 0 \text{ si } n \text{ devient infini.}$$

D'après (3),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n + \log \varphi_n}{v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1})} = 0.$$

On a donc aussi, $\forall \rho \in]0, 1[$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi_n + q_n \log(1/\rho)}{v_{n-1} (\log d_n - \log \delta_{n-1})} = 0.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$, ce qui achève de montrer que

$$\lim_{|x| \rightarrow 1, x \in \Delta_\rho} \frac{1}{f(x)g(x)} = 0.$$

4. Nous allons maintenant pouvoir conclure. Soit $\Lambda \in k$; montrons que $f = fg/g$ peut se mettre sous la forme $\Lambda((\Pi_1 - 1)/(\Pi_2 - 1))$.

Considérons la suite $(\gamma_{m,j})$, $1 \leq j \leq t_m$, $m \in \mathbb{N}$, des zéros de g , coordonnés de façon telle que

$$|\gamma_{m,i}| = |\gamma_{m,j}| < |\gamma_{m+1,h}|,$$

d'ordre respectif $\tau_{m,j}$, et notons de même $(\theta_{m,j})$, $1 \leq j \leq W_m$, $m \in \mathbb{N}$, les zéros de fg , d'ordre respectif $\nu_{m,j}$.

Maintenant, soient A et $B \in k$; d'après [3], nous savons qu'il existe une famille $(a_{m,j,h}(A))$ avec $1 \leq h \leq \tau_{m,j}$, $1 \leq j \leq t_m$, $m \in \mathbb{N}$, telle que :

$$1 - \frac{A}{g(x)} = \prod_{m \in \mathbb{N}} \left(\prod_{j=1}^{t_m} \left(\prod_{h=1}^{\tau_{m,j}} \frac{x - a_{m,j,h}}{x - \gamma_{m,j}} \right) \right),$$

d'où

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{A}(1 - \Pi_1(x)).$$

De même, on peut mettre $1/fg$ sous la forme :

$$\frac{1}{f(x)g(x)} = \frac{1}{B}(1 - \Pi_2(x)).$$

D'où finalement

$$f(x) = \frac{B}{A} \frac{1 - \Pi_1(x)}{1 - \Pi_2(x)},$$

où Π_1 et Π_2 sont les produits croissants annoncés.

Remarque. - Nous n'avons pas utilisé ici la condition restrictive

$$\inf |b_{n,i} - b_{n,j}| \geq 0.$$

En effet, il apparaît que les théorèmes s'appliquent aussi au cas où chaque disque $D(b_{n,i}; \rho)$ contient un nombre fini de pôles $b_{n,i}$, ce qui est le cas ici (on peut se ramener au cas des pôles multiples).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ESCASSUT (A.). - T-filtres, ensembles analytiques et transformations de Fourier p-adiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, fasc. 2, 1975, p. 45-80.
 - [2] FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - L'image de la transformation de Fourier p-adique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, série A, 1974, p. 653-656.
 - [3] SARMANT-DURIK (M.-C.). - Existence de fonctions croulantes, groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 5e année, 1977/78, n° 17, 10 P.
-