GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

GILLES CHRISTOL

Décomposition des matrices en facteurs singuliers Applications aux équations différentielles

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. n° 5, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A3_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
7e année, 1979/80, n° 5, 17 p.

7 janvier et 4 février 1980

DÉCOMPOSITION DES MATRICES EN FACTEURS SINGULIERS
APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par Gilles CHRISTOL (*)
[Université Pierre et Marie Curie]

La décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples se généralise d'une manière classique ([1] par exemple) et donne la décomposition de Mittag-Leffler des éléments analytiques en somme de termes singuliers. Dans [3], MOTZKIN a montré comment la décomposition (triviale) des fractions rationnelles en produit de facteurs "simples" pouvait se généraliser et donner une décomposition des éléments analytiques en produit de facteurs singuliers. Nous généralisons le résultat de MOTZKIN au cas des matrices.

Si la décomposition additive des éléments analytiques donne sans difficulté une décomposition additive des matrices à coefficients éléments analytiques, il n'en est plus de même pour la décomposition multiplicative. La première étape consiste à généraliser la décomposition des fractions rationnelles en produit de facteurs "simples" aux matrices à coefficients fractions rationnelles (lemme 2.1). Nous utilisons pour cela une idée de ROBBA que nous avons déjà employée dans [2]. A l'aide de cette technique, on peut obtenir plusieurs types de décompositions. L'un d'entre eux (proposition 2) se généralise aux matrices à coefficients éléments analytiques et donne une décomposition de celles-ci en facteurs singuliers (théorème 3). Nous nous limitons au cas où les éléments analytiques sont définis sur des ensembles standards (réunion de classes résiduelles), nous ne savons pas si nos résultats se généralisent à d'autres ensembles analytiques.

Une deuxième partie de ce travail (§ 4) donne quelques applications aux équations différentielles. En particulier, nous montrons (théorème 4.2) que, si une équation différentielle linéaire (à coefficients fractions rationnelles par exemple) a, au plus, un point singulier régulier dans chaque classe résiduelle, alors elle est équivalente à un système $\underset{\sim}{X}' = \underset{\sim}{BX}$, où la matrice $\underset{\sim}{B}$ n'a comme singularités que des pôles simples en ces points singuliers plus un autre pôle simple où son résidu est une matrice diagonale à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$ (entiers relatifs).

1. Notations.

Soit k un corps algébriquement clos, complet pour une norme ultramétrique. Nous

---

(*) Texte reçu le 18 décembre 1980.

Gilles CHRISTOL, UER 47, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

dirons que le corps k est discret si sa norme est triviale (autrement dit s'il est muni de la topologie discrète ; comme k est algébriquement clos, sa valuation n'est sûrement pas discrète s'il n'est pas discret, et il n'y a pas de confusion à craindre). Nous noterons $\bar{k}$ le corps des restes de k .

Pour tout élément a de l'anneau de valuation de k , nous posons

$$D_a = \{x \in k \ ; \quad |x - a| < 1\} , \qquad D^+ = \{x \in k \ ; \quad |x| \leqslant 1\} ,$$

le disque à l'infini étant, quant à lui, défini par

$$D_\infty = \{x \in k \ ; \quad |x| > 1\} \cup \{\infty\} .$$

Le disque D_a ne dépend que de l'image $\bar{a}$ de a dans $\bar{k}$; aussi, lorsque $\alpha \in \bar{k} \cup \infty$, nous noterons D_α le disque formé des éléments de k dont l'image dans $\bar{k} \cup \infty$ est α . Un sous-ensemble A de $k \cup \infty$ est dit standard s'il est constitué d'une réunion de disques D_a $(a \in k \cup \{\infty\})$. Autrement dit, si A est un ensemble standard, et si $\bar{A}$ désigne son image dans $\bar{k} \cup \infty$, nous avons

$$A = \cup_{a \in A} D_a = \cup_{\alpha \in \bar{A}} D_\alpha .$$

Le corps des fractions rationnelles à coefficients dans k sera noté E_0 . Si A est un sous-ensemble de $k \cup \infty$, l'anneau des fractions rationnelles de E_0 qui n'ont pas de pôle dans A sera noté $E_0(A)$ (une fraction rationnelle P/Q n'a pas de pôle à l'infini si $\deg P \leqslant \deg Q$). Par exemple $E_0(k)$ est l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans k c'est-à-dire l'ensemble $k[x]$ des polynômes à coefficients dans k .

L'anneau $k[x]$ est muni de la <u>norme de Gauss</u> qui est définie par

$$|\Sigma\, a_n\, x^n| = \sup\, |a_n| .$$

Cette norme se prolonge, de manière unique, au corps des fractions E_0 de $k[x]$. Le complété du corps E_0 , pour la norme ainsi définie, sera noté E . Si A est un ensemble standard, nous noterons $E(A)$ la fermeture de $E_0(A)$ dans E (si A n'est pas standard, et si B est le plus petit ensemble standard qui contient A , la fermeture de $E_0(A)$ dans E_0 est l'anneau $E_0(B)$). On a

$$E_0(A \cup B) = E_0(A) \cap E_0(B) ,$$

donc, si A et B sont deux ensembles standards, on a $E(A \cup B) = E(A) \cap E(B)$, et $E(A)$ s'identifie à l'anneau des éléments analytiques sur A .

Pour tout anneau $\mathcal{O}$, nous noterons $M_\mu(\mathcal{O})$ l'anneau des matrices $\mu \times \mu$ à coefficients dans $\mathcal{O}$, et $Gl_\mu(\mathcal{O})$ le sous-groupe des matrices inversibles (c'est-à-dire des matrices dont le déterminant est inversible dans $\mathcal{O}$). Si $\underset{\sim}{H}$ est une matrice de $M_\mu(\mathcal{O})$, le coefficient de $\underset{\sim}{H}$, qui se trouve sur la i-ième ligne et la j-ième colonne, sera noté $\underset{\sim}{H}_{ij}$.

La E-algèbre $M_\mu(E)$ est normée par

$$\|\underset{\sim}{E}\| = \sup_{i,j} |\underset{\sim}{H}_{ij}| ,$$

qui vérifie bien la condition $\|\underset{\sim}{HK}\| \leq \|\underset{\sim}{H}\| \; \|\underset{\sim}{K}\|$. Si $\mathcal{O}$ est un sous-anneau de E , nous utiliserons l'ensemble suivant

$$G_\mu(\mathcal{O}) = \{\underset{\sim}{H} \in Gl_\mu(\mathcal{O}) \;;\; \|\underset{\sim}{H}\| \leq 1 \,,\; \|\underset{\sim}{H}_{ii}\| = 1 \text{ et } \|\underset{\sim}{H}_{ij}\| < 1 \text{ si } i < \infty\} .$$

Autrement dit, une matrice $\underset{\sim}{H}$ de $Gl_\mu(\mathcal{O})$ appartient à $G_\mu(\mathcal{O})$ si, et seulement si, son image $\bar{\underset{\sim}{H}}$ dans $Gl_\mu(\bar{k}(x))$ existe, n'a que des zéros au-dessus de la diagonale, et est inversible. Ceci permet de constater que $G_\mu(\mathcal{O})$ est un groupe, et que toute matrice $\underset{\sim}{H}$ de $G_\mu(\mathcal{O})$ vérifie $\|\underset{\sim}{H}\| = \|\underset{\sim}{H}^{-1}\| = 1$.

2. Facteurs singuliers dans $Gl_\mu(E_0)$.

Etant donné deux ensembles A et A' complémentaires dans $k \cup \infty$, notre problème est de décomposer toute matrice $\underset{\sim}{H}$ de $Gl_\mu(E_0)$ en un produit d'une matrice $\underset{\sim}{H}_A$ de $Gl_\mu(E_0(A'))$ et d'une matrice $\underset{\sim}{K}_A$ de $Gl_\mu(E_0(A))$. Cette décomposition n'existe pas en général, même pour $\mu = 1$: dans ce cas, on a, à un facteur constant près,

$$\underset{\sim}{H} = \prod_{a_i \in A'} (x - a_i)^{n_i} \prod_{b_j \in A} (x - b_j)^{m_j} ,$$

ce qui définit entièrement $\underset{\sim}{H}_A$ et $\underset{\sim}{K}_A$. Si $\sum n_i > 0$ (resp. < 0) et si $\infty \in A'$, $\underset{\sim}{H}_A$ (resp. $\underset{\sim}{H}_A^{-1}$) a un pôle à l'infini que l'on ne peut pas supprimer (sans en ajouter un autre dans A').

Nous commençons par généraliser la décomposition que nous avons donnée dans le cas $\mu = 1$ (lemme 2.1). Malheureusement, cette décomposition n'est pas unique (voir la remarque qui suit le lemme 2.1). Aussi sommes-nous obligés de regarder ce qui se passe à l'infini : tout d'abord dans le corps des restes (lemme 2.2), puis en corrigeant "l'erreur" ainsi introduite (lemme 2.3).

LEMME 2.1. - Soit A un sous-ensemble de k , et soit A' son complémentaire dans k . Etant donné une matrice $\underset{\sim}{H}$ de $Gl_\mu(E_0)$, il existe une matrice $\underset{\sim}{R}$ de $G_\mu(E_0(A'))$, telle que la matrice $\underset{\sim}{RH}$ appartienne à $Gl_\mu(E_0(A))$.

Considérons l'ensemble de matrices suivant

$$\mathcal{Y} = \{\underset{\sim}{S} \in G_\mu(E_0(A')) \;;\; \underset{\sim}{SH} \in M_\mu(E_0(A))\} .$$

$\mathcal{Y}$ n'est pas vide : il existe un polynôme P ayant tous ses zéros dans A tel que, pour tout i et j , $\underset{\sim}{PH}_{ij}$ n'ait pas de pôle dans A . Nous pouvons choisir P de telle sorte que $|P| = 1$ (comme D_∞ n'est pas contenu dans A , il suffit de prendre P unitaire). Dans ces conditions la matrice $\underset{\sim}{PI}$ appartient à $\mathcal{Y}$.

Pour chaque $\underset{\sim}{S}$ appartenant à $\mathcal{Y}$ nous notons $n(\underset{\sim}{S})$ le nombre de zéros du déterminant de la matrice $\underset{\sim}{SH}$ qui sont contenus dans A . Pour que $\underset{\sim}{SH}$ appartienne à $Gl_\mu(E_0(A))$, il faut et il suffit que son déterminant soit inversible dans $E_0(A)$; autrement dit, il faut et il suffit que $n(\underset{\sim}{S}) = 0$. Nous considérons donc une matrice $\underset{\sim}{R}$ de $\mathcal{Y}$ qui rend $n(\underset{\sim}{R})$ minimal, et nous allons montrer que $n(\underset{\sim}{R}) = 0$, ce qui démontrera le lemme.

Supposons $n(\underset{\sim}{R}) > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $\det (\underset{\sim}{RH})(a) = 0$. Par suite, il existe des $\lambda_i \in k$ tels que l'on ait :

(2.1) Pour tout j, $\sum_i \lambda_i \, (\underset{\sim}{RH})_{ij} \, (a) = 0$, $\sup |\lambda_i| = 1$.

Soit i_0 l'indice le plus élevé pour lequel on a $|\lambda_{i_0}| = 1$. Nous définissons une matrice $\underset{\sim}{\Lambda}$ de $G_\mu(E_0(A'))$ en posant

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{\Lambda}_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{si } i \neq i_0 \quad (\delta_{ij} \text{ symbole de Kronecker}) \\ \underset{\sim}{\Lambda}_{i_0 j} = \lambda_j/(x - a) . \end{cases}$$

Il vient

$$\begin{cases} (\underset{\sim}{\Lambda RH})_{ij} = (\underset{\sim}{RH})_{ij} \quad \text{pour } i \neq i_0 \\ (\underset{\sim}{\Lambda RH})_{i_0 j} = \sum_\ell \lambda_\ell \, (\underset{\sim}{RH})_{\ell j}/(x - a) . \end{cases}$$

D'après la relation (2.1), le pôle en a de $(\underset{\sim}{\Lambda RH})_{i_0 j}$ n'est qu'apparent. Donc $\underset{\sim}{\Lambda RH}$ appartient à $M_\mu(E_0(A))$. La matrice $\underset{\sim}{\Lambda R}$ appartient à $G_\mu(E_0(A'))$, donc à γ. Par ailleurs, comme $\det(\underset{\sim}{\Lambda}) = \lambda_{i_0}/(x - a)$, on a $n(\underset{\sim}{\Lambda R}) = n(\underset{\sim}{R}) - 1$, ce qui contredit la minimalité de $n(\underset{\sim}{R})$.

<u>Remarque</u>. - Il n'y a pas unicité de la matrice $\underset{\sim}{R}$ qui satisfait aux conditions du lemme 2.1. En effet, une matrice R' satisfait aussi ces conditions si, et seulement si,

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{R'} \, \underset{\sim}{R}^{-1} \in G_\mu(E_0(A')) \cap Gl_\mu(E_0(A)) = G_\mu(E_0(k)) = G_\mu(k[x]) .$$

Nous allons donc examiner de plus près le comportement de la matrice $\underset{\sim}{R}$ près de l'infini. Nous commençons par travailler sur le corps $\bar{k}$. Pour cela nous posons, pour toute fraction rationnelle P/Q de $\bar{k}(x)$,

$$v_\infty(P/Q) = \deg Q - \deg P .$$

LEMME 2.2. - <u>Soit</u> $\underset{\sim}{R}$ <u>une matrice de</u> $G_\mu(E_0)$. <u>Il existe une matrice</u> $\underset{\sim}{S}$ <u>de</u> $G_\mu(k[x])$ <u>telle que, pour tout</u> i, j <u>avec</u> $i \neq j$, <u>on ait</u>

$$v_\infty[(\underset{\sim}{\bar{S}\bar{R}})_{ij}] > v_\infty[(\underset{\sim}{\bar{S}\bar{R}})_{jj}] ,$$

<u>où</u> $\underset{\sim}{\bar{S}}$ <u>et</u> $\underset{\sim}{\bar{R}}$ <u>désignent les images de</u> $\underset{\sim}{S}$ <u>et</u> $\underset{\sim}{R}$ <u>dans</u> $Gl_\mu(\bar{k}(x))$.

Nous démontrons le lemme par récurrence sur μ. Pour $\mu = 1$, il est évident si on pose $\underset{\sim}{S} = 1$. Supposons donc le lemme démontré pour $\mu - 1$, et démontrons-le pour μ.

Nous pouvons écrire

$$\underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{R}_{11} & (\underset{\sim}{R}_{1j}) \\ (\underset{\sim}{R}_{i1}) & \underset{\sim}{P} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \underset{\sim}{P} \in G_{\mu-1}(E_0) .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une matrice $\underset{\sim}{Q}$ de $G_{\mu-1}(k[x])$ telle que, pour tout $i \neq j$, on ait

(2.3) $$v_\infty[(\underset{\sim}{QP})_{ij}] > v_\infty[(\underset{\sim}{QP})_{jj}] .$$

Nous définissons de nouveaux éléments $\underset{\sim}{R}'_i$ de E_0 en posant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & \underset{\sim}{Q} \end{pmatrix} \underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{R}_{11} & (\underset{\sim}{R}_{1j}) \\ & \\ (\underset{\sim}{R}'_i) & \underset{\sim}{QP} \end{pmatrix} .$$

La division euclidienne dans $\bar{k}[x]$ permet de construire des polynômes $\bar{S}_i$ dans $\bar{k}[x]$ tels que

(2.4) $$v_\infty(\underset{\sim}{\bar{R}}'_i - \underset{\sim}{\bar{R}}_{11}\, \underset{\sim}{\bar{S}}_i) > v_\infty(\underset{\sim}{\bar{R}}_{11}) .$$

Nous relevons les polynômes $\bar{S}_i$ en des polynômes S_i de $k[x]$ (tels que $|S_i| \leqslant 1$), et nous posons

$$\underset{\sim}{S} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ & \\ (-\underset{\sim}{S}_i) & \underset{\sim}{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ & \\ (0) & \underset{\sim}{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ & \\ (-\underset{\sim}{S}_i) & \underset{\sim}{Q} \end{pmatrix} .$$

Il est clair que $\underset{\sim}{S}$ appartient à $G_\mu(k[x])$ (en effet, $\det \underset{\sim}{S} = \det \underset{\sim}{Q}$ est inversible dans $k[x]$). Par ailleurs,

$$\underset{\sim}{SR} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{R}_{11} & (\underset{\sim}{R}_{1j}) \\ & \\ (-\underset{\sim}{S}_i)\underset{\sim}{R}_{11} + (\underset{\sim}{R}'_i) & (-\underset{\sim}{S}_i)(\underset{\sim}{R}_{1j}) + \underset{\sim}{QP} \end{pmatrix} .$$

L'inégalité $v_\infty[(\underset{\sim}{\bar{S}\bar{R}})_{ij}] > v_\infty[(\underset{\sim}{\bar{S}\bar{R}})_{jj}]$ est alors vérifiée :

pour $i = 1 \neq j$, car $\underset{\sim}{\bar{R}}_{1j} = 0$,

pour $j = 1$ d'après (2.4),

pour i et $j \neq 1$ d'après (2.3), car $\bar{S}_i\, \underset{\sim}{\bar{R}}_{1j} = 0$.

Le lemme suivant est trivial si k est discret (c'est-à-dire si $k = \bar{k}$). Nous rappelons que

$$D^+ = \{x \in k \ ; \ |x| \leqslant 1\} .$$

LEMME 1.4. - <u>Soit $\underset{\sim}{S}$ une matrice de $M_\mu(E_0)$ telle que $\|S\| < 1$. Il existe une matrice $\underset{\sim}{M}$ de $G_\mu(E(D^+))$ telle que $\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S})(\infty) = \underset{\sim}{I}$. Si on suppose en outre que la matrice $(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S})$ appartient à $Gl_\mu(E_0(D_\infty - \{\infty\}))$, alors on peut choisir la matrice $\underset{\sim}{M}$ dans $G_\mu(k[x])$.</u>

Pour toute fraction rationnelle f, la décomposition en éléments simples permet d'écrire $f = f_0 + f_\infty$ avec $f_0 \in E_0(D_\infty)$, $f_0(\infty) = 0$ et $f_\infty \in E_0(D^+)$. On vérifie classiquement que $|f| = \sup(|f_0|, |f_\infty|)$, ce qui permet de décomposer tout élément de E, sous la forme $f = f_0 + f_\infty$ avec $f_0 \in E(D_\infty)$, $f_0(\infty) = 0$ et $f_\infty \in E(D^+)$ (décomposition de Mittag-Leffler [1]). En décomposant chacun des coefficients, nous obtenons, pour toute matrice $\underset{\sim}{S}$ de $M_\mu(E_0)$ une décomposition $\underset{\sim}{S} = [\underset{\sim}{S}]_0 + [\underset{\sim}{S}]_\infty$, qui vérifie

$$[\underset{\sim}{S}]_0 \in M_\mu(E_0(D_\infty)) \ , \quad [\underset{\sim}{S}]_0(\infty) = 0 \ , \quad [\underset{\sim}{S}]_\infty \in M_\mu(E_0(D^+)) \ ,$$

et

$$\|\underset{\sim}{S}\| = \sup(\|[\underset{\sim}{S}]_0\| , \|[\underset{\sim}{S}]_\infty\|) \ .$$

Nous définissons, par récurrence, la suite

$$\underset{\sim}{S}_0 = \underset{\sim}{I} \ , \quad \underset{\sim}{S}_n = [\underset{\sim}{S}_{n-1} \underset{\sim}{S}]_\infty \ .$$

On a $\|\underset{\sim}{S}_n\| \leqslant \|\underset{\sim}{S}_{n-1} \underset{\sim}{S}\| \leqslant \|\underset{\sim}{S}_{n-1}\| \, \|\underset{\sim}{S}\| \leqslant \|\underset{\sim}{S}\|^n$ et $\underset{\sim}{S}_n \in M_\mu(E_0(D^+))$.

Nous obtenons alors une matrice $\underset{\sim}{M}$ de $M_\mu(E(D^+))$ en posant

$$\underset{\sim}{M} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underset{\sim}{S}_n = \underset{\sim}{I} - [\underset{\sim}{S}]_\infty + \dots$$

Comme $\|\underset{\sim}{M} - \underset{\sim}{I}\| < 1$, on obtient $\underset{\sim}{M}^{-1} \in M_\mu(E(D^+))$ et $\bar{\underset{\sim}{M}} = \underset{\sim}{I} \in Gl_\mu(\bar{k}[x])$, ce qui montre immédiatement que $\underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{G}_\mu(E(D^+))$.

Par ailleurs, nous avons

$$\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underset{\sim}{S}_n + (-1)^n \underset{\sim}{S}_n \underset{\sim}{S}$$

$$= \underset{\sim}{I} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\underset{\sim}{S}_n - \underset{\sim}{S}_{n-1} \underset{\sim}{S}) = \underset{\sim}{I} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\underset{\sim}{S}_{n-1} \underset{\sim}{S}]_0 \ .$$

Le même raisonnement que ci-dessus (avec $\|[\underset{\sim}{S}_n \underset{\sim}{S}]_0\| \leqslant \|\underset{\sim}{S}\|^n$) montre que $\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S}) \in G_\mu(E(D_\infty))$. D'autre part, on a clairement $\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S})(\infty) = \underset{\sim}{I}$.

Supposons maintenant que $(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S})$ appartienne à $Gl_\mu(E_0(D_\infty - \{\infty\}))$, et montrons que $\underset{\sim}{M} \in G_\mu(k[x])$. Pour cela, il suffit de vérifier que les coefficients de $\underset{\sim}{M}$ et de $\underset{\sim}{M}^{-1}$ appartiennent à $k[x]$.

Pour cela, nous remarquons que, si f est une fraction rationnelle de $E_0(D_\infty - \{\infty\})$, elle n'a comme singularité dans D_∞ qu'un pôle à l'infini. Par suite, si $g \in E(D_\infty)$, le produit fg n'a, au pis, comme singularité dans D_∞ qu'un pôle à l'infini. Autrement dit, $(fg)_\infty$ est un polynôme de $k[x]$. Or, la relation

$$\underset{\sim}{M} = [\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S})](\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S})^{-1}$$

montre que les coefficients $\underset{\sim}{M}_{ij}$ de la matrice $\underset{\sim}{M}$ s'obtiennent comme somme de produits d'un élément de $E(D_\infty)$ et d'un élément de $E_0(D_\infty - \{\infty\})$. Comme par ailleurs on a $\underset{\sim}{M}_{ij} \in E(D_0^+)$, c'est-à-dire $\underset{\sim}{M}_{ij} = (\underset{\sim}{M}_{ij})_\infty$, il résulte de notre remarque que les coefficients $\underset{\sim}{M}_{ij}$ appartiennent à $k[x]$. De la même manière, la relation $\underset{\sim}{M}^{-1} = (\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S})[\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S})]^{-1}$ montre que les coefficients de $\underset{\sim}{M}^{-1}$ sont des polynômes.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'existence d'une décomposition de toute matrice de $Gl_\mu(E_0)$ en un produit de facteurs singuliers.

PROPOSITION 2.4. - <u>Soit A un ensemble standard contenu dans k, et soit A' le complémentaire de A dans k. A toute matrice $\underset{\sim}{H}$ de $Gl_\mu(E_0)$ sont associées une matrice $\underset{\sim}{H}_A$ de $G_\mu(E_0(A'))$, une matrice $\underset{\sim}{K}_A$ de $Gl_\mu(E_0(A))$ et une matrice diagonale $\underset{\sim}{N}$ de $M_\mu(\underset{\sim}{Z})$, telles que</u>

1° $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}_A \underset{\sim}{K}_A$,

2° $(x^{\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}_A)(\infty) = \underset{\sim}{I}$.

<u>Remarques</u>.

1° L'ensemble standard A, ne contenant pas ∞, ne contient aucun point du disque D_∞. L'ensemble A' n'est donc pas standard contrairement à l'ensemble $A' \cup \{\infty\}$.

2° Si les coefficients de la diagonale de $\underset{\sim}{N}$ sont n_i, la matrice diagonale $x^{\underset{\sim}{N}}$ a pour coefficients x^{n_i}. Une conséquence de la condition 2° est que, pour tout $a \in A$, la matrice $(x-a)^{\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}_A$ appartient à $G_\mu(E_0(A' \cup \{\infty\}))$.

3° Si la matrice $\underset{\sim}{H}$ appartient à $Gl_\mu(E_0(B))$, où B est un sous-ensemble de k, on constate facilement qu'il en est de même des matrices $\underset{\sim}{H}_A$ et $\underset{\sim}{K}_A$.

4° Les matrices $\underset{\sim}{H}_A$, $\underset{\sim}{K}_A$ et $\underset{\sim}{N}$, définies dans la proposition 2, sont uniques : ceci sera une conséquence immédiate du lemme 3.1 ci-dessous. Elles dépendent effectivement de l'ensemble A, nous n'avons pas mis d'indice à la matrice $\underset{\sim}{N}$ pour ne pas alourdir les notations.

Le lemme 2.1, la remarque qui le suit et le lemme 2.2 permettent de voir qu'il existe une matrice $\underset{\sim}{R}$ de $G_\mu(E_0(A'))$ telle que $\underset{\sim}{RH}$ appartienne à $Gl_\mu(E_0(A))$ et telle que, pour tout $i \neq j$, on ait $v_\infty(\bar{R}_{ij}) > v_\infty(\bar{R}_{jj})$.

Posons $n_i = -v_\infty(\underset{\sim}{R}_{ii})$, et soit $\underset{\sim}{N}$ la matrice diagonale de $M_\mu(\underset{\sim}{Z})$ telle que $\underset{\sim}{N}_{ii} = n_i$. Soit a un point de A. Comme la matrice $\underset{\sim}{R}(x-a)^{-\underset{\sim}{N}}$ appartient à $G_\mu(E_0(A'))$, les coefficients de la matrice $\overline{\underset{\sim}{R}(x-a)^{-\underset{\sim}{N}}}$ ont tous leurs pôles dans $\bar{A} \cup \{\infty\}$ ($\bar{A}$ est l'image de A dans $\bar{k}$). Par ailleurs,

$$v_\infty[(\overline{\underset{\sim}{R}(x-a)^{-\underset{\sim}{N}}})_{ij}] = v_\infty(\bar{\underset{\sim}{R}}_{ij}) + v_\infty((\overline{x-a})^{-n_j})$$

$$= v_\infty(\bar{\underset{\sim}{R}}_{ij}) - v_\infty(\bar{\underset{\sim}{R}}_{ii}) \begin{cases} = 0 & \text{si } i = j \\ > 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La décomposition en éléments simples s'écrit donc

$$\overline{\underset{\sim}{R}(x-a)^{-N}} = \underset{\sim}{\bar{\Lambda}} + \sum_{\bar{\alpha}, m\geq 1} \underset{\sim}{\bar{C}}_{m,\alpha}(x-\bar{\alpha})^{-m} ,$$

où $\underset{\sim}{\bar{\Lambda}}$ est une matrice diagonale de $Gl_\mu(\bar{k})$, les $\bar{C}_{m,\alpha}$ sont des matrices de $M_\mu(\bar{k})$, et les $\bar{\alpha}$ sont des éléments (en nombre fini) de $\bar{A}$.

Nous relevons $\underset{\sim}{\bar{\Lambda}}$ en une matrice diagonale $\underset{\sim}{\Lambda}$ de $G_\mu(k)$, les $\underset{\sim}{\bar{C}}_{m,\alpha}$ en des matrices $\underset{\sim}{C}_{m,\alpha}$ de $M_\mu(k)$, et les $\bar{\alpha}$ en des éléments α de A , et nous posons

$$\underset{\sim}{T} = [\underset{\sim}{I} + \sum_{\alpha, m\geq 1} \underset{\sim}{\Lambda}^{-1} \underset{\sim}{C}_{m,\alpha}(x-\alpha)^{-m}](x-a)^N \in M_\mu(E_0(A')) .$$

Il est clair que $(\underset{\sim}{T}x^{-\underset{\sim}{N}})(\infty) = (\underset{\sim}{T}(x-a)^{-\underset{\sim}{N}})(\infty) = \underset{\sim}{I}$, et que $\|\underset{\sim}{R} - \underset{\sim}{\Lambda T}\| < 1$. Si $|b| > 1$, on a $\|\underset{\sim}{T}(b) - (b-a)^{-\underset{\sim}{N}}\| < \|(b-a)^{\underset{\sim}{N}}\|$, ce qui donne

$$|\det \underset{\sim}{T}(b)| = |b-a|^{\sum n_i} \neq 0 .$$

Si $|b| \leq 1$ et si $\det \underset{\sim}{T}(b) = 0$, on trouve

$$\det \bar{\underset{\sim}{R}}(b) = \det (\overline{\underset{\sim}{R}(b)}) = \det \underset{\sim}{\bar{\Lambda}} \det \bar{\underset{\sim}{T}}(b) = 0 .$$

D'après le lemme d'Hensel, il existe c tel que $\bar{c} = \bar{b}$ et tel que $\det \underset{\sim}{R}(c) = 0$. Comme $\underset{\sim}{R} \in G_\mu(E_0(A'))$, c ne peut appartenir à A' , donc c appartient à A . Comme A est un ensemble standard, on en déduit $b \in A$. Autrement dit, $\det \underset{\sim}{T}$ ne s'annule pas sur A' , donc $\underset{\sim}{T}$ appartient à $Gl_\mu(E_0(A'))$. Si $i < j$, la condition $|\underset{\sim}{R}_{ij}| < i$ entraîne $|\underset{\sim}{T}_{ij}| < 1$, donc $\underset{\sim}{T} \in G_\mu(E_0(A'))$.

Posons $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{\Lambda}^{-1} \underset{\sim}{RT}^{-1} - I$. On a $\|\underset{\sim}{S}\| = \|\underset{\sim}{R} - \underset{\sim}{\Lambda T}\| < 1$, et

$$\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{\Lambda}^{-1} \underset{\sim}{RT}^{-1} \in G_\mu(E_0(A'))(Gl_\mu(E_0(D_\infty - \{\infty\}))) .$$

D'après le lemme 2.3, il existe une matrice $\underset{\sim}{M}$ de $G_\mu(k[x])$ telle que

$$[\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S})](\infty) = \underset{\sim}{I} .$$

Nous posons alors $\underset{\sim}{H}_A = \underset{\sim}{R}^{-1} \underset{\sim}{\Lambda M}^{-1}$. La matrice $\underset{\sim}{H}_A$ appartient, comme les matrices $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{\Lambda}$ et $\underset{\sim}{M}$, à $G_\mu(E_0(A'))$. Si nous posons $\underset{\sim}{K}_A = \underset{\sim}{M\Lambda}^{-1} \underset{\sim}{RH}$, la matrice $\underset{\sim}{K}_A$, comme les matrices $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{\Lambda}$ et $\underset{\sim}{RH}$, appartient à $Gl_\mu(E_0(A))$. On a aussi évidemment $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}_A \underset{\sim}{K}_A$. Comme $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{\Lambda}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S})\ \underset{\sim}{T}$, on trouve

$$(x^{\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}_A)(\infty) = [\underset{\sim}{M\Lambda}^{-1} \underset{\sim}{R}x^{-\underset{\sim}{N}}]^{-1}(\infty) = [[\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{S})](\infty)]^{-1}[[\underset{\sim}{T}x^{-\underset{\sim}{N}}](\infty)]^{-1} = \underset{\sim}{I} .$$

Ce qui démontre la proposition 2.4.

2. Facteurs singuliers dans $Gl_\mu(E)$.

Nous allons généraliser, dans ce paragraphe, la décomposition des matrices de $Gl_\mu(E_C)$, trouvée au paragraphe 2, aux matrices du complété $Gl_\mu(E)$ de $Gl_\mu(E_C)$. Nous suivons une méthode inspirée de celle qu'utilise MOTZKIN dans le cas $\mu = 1$ [3].

LEMME 3.1. - *Soit* A *et* A' *deux ensembles standards complémentaires dans* $k \cup \{\infty\}$ *, nous supposons que* $D_\infty \subset A'$ *, et soit* $\underset{\sim}{H}_A$ *et* $\underset{\sim}{H}'_A$ *deux matrices de* $G_\mu(E(A' - D_\infty))$ *,* $\underset{\sim}{K}_A$ *et* $\underset{\sim}{K}'_A$ *deux matrices de* $Gl_\mu(E(A))$ *, et* $\underset{\sim}{N}$ *et* $\underset{\sim}{N}'$ *deux matrices diagonales de* $M_\mu(\underset{\sim}{Z})$ *telles que :*

(1) $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}_A \underset{\sim}{K}_A$,

(1') $\underset{\sim}{H}' = \underset{\sim}{H}'_A \underset{\sim}{K}'_A$,

(2) $x^{\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}_A$ *et* $x^{\underset{\sim}{N}'} \underset{\sim}{H}'_A$ *appartiennent à* $G_\mu(E(D_\infty))$ *et vérifient*

$$(x^{\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}_A)(\infty) = (x^{\underset{\sim}{N}'} \underset{\sim}{H}'_A)(\infty) = \underset{\sim}{I}$$

(3) $\|\underset{\sim}{H} - \underset{\sim}{H}'\| \, \|\underset{\sim}{H}'^{-1}\| = \gamma < 1$.

Alors on a $\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{N}'$, $\|\underset{\sim}{H}_A - \underset{\sim}{H}'_A\| < \gamma$ et $\|\underset{\sim}{K}_A - \underset{\sim}{K}'_A\| \leq \gamma \|\underset{\sim}{H}'\|$.

Les relations (1) et (1') permettent d'obtenir

$$\underset{\sim}{H}_A^{-1}(\underset{\sim}{H} - \underset{\sim}{H}') \, \underset{\sim}{K}'^{-1}_A = \underset{\sim}{K}_A \underset{\sim}{K}'^{-1}_A - \underset{\sim}{H}_A^{-1} \underset{\sim}{H}'_A . \tag{3.1}$$

Comme $\underset{\sim}{H}'_A$ appartient à $G_\mu(E)$, on a

$$\|\underset{\sim}{K}'^{-1}_A\| = \|\underset{\sim}{H}'^{-1} \underset{\sim}{H}'_A\| \leq \|\underset{\sim}{H}'^{-1}\| \, \|\underset{\sim}{H}'_A\| = \|\underset{\sim}{H}'^{-1}\| .$$

Ce qui donne, puisque $\underset{\sim}{H}_A$ appartient aussi à $G_\mu(E)$,

$$\|\underset{\sim}{H}_A^{-1}(\underset{\sim}{H} - \underset{\sim}{H}') \, \underset{\sim}{K}'^{-1}_A\| \leq \|\underset{\sim}{H} - \underset{\sim}{H}'\| \, \|\underset{\sim}{H}'^{-1}\| = \gamma < 1 . \tag{3.2}$$

Nous en déduisons que $\|\underset{\sim}{K}_A \underset{\sim}{K}'^{-1}_A\| = \|\underset{\sim}{H}_A^{-1} \underset{\sim}{H}'_A\| = 1$ et que

$$\overline{\underset{\sim}{K}_A \underset{\sim}{K}'^{-1}_A} = \overline{\underset{\sim}{H}}{}_A^{-1} \overline{\underset{\sim}{H}}{}'_A \tag{3.3}$$

La matrice $\underset{\sim}{K}_A \underset{\sim}{K}'^{-1}_A$ appartenant à $Gl_\mu(E(A))$, les coefficients (resp. le déterminant) de $\overline{\underset{\sim}{K}_A \underset{\sim}{K}'^{-1}_A}$ sont des fractions rationnelles de $\overline{k}(x)$ sans pôle dans $\overline{A}$ (resp. sans zéro dans $\overline{A}$). Par ailleurs, la matrice $\underset{\sim}{H}_A^{-1} \underset{\sim}{H}'_A$ appartenant à $G_\mu(E(A' - D_\infty))$, les coefficients de $\overline{\underset{\sim}{H}}{}_A^{-1} \overline{\underset{\sim}{H}}{}'_A$ sont des fractions rationnelles de $\overline{k}(x)$ sans pôle dans $\overline{A}' - \{\infty\}$, et le déterminant de la matrice triangulaire $\overline{\underset{\sim}{H}}{}_A^{-1} \overline{\underset{\sim}{H}}{}'_A$, qui vaut $\prod_i (\overline{\underset{\sim}{H}}{}'^{-1}_A \overline{\underset{\sim}{H}}{}'_A)_{ii}$, ne s'annule pas dans $\overline{A}' - \{\infty\}$. Il résulte alors de l'égalité (3.3) que, pour tout i , la fraction rationnelle $(\overline{\underset{\sim}{H}}{}_A^{-1} \overline{\underset{\sim}{H}}{}'_A)_{ii}$ n'a ni pôle ni zéro dans $\overline{A} \cup (\overline{A}' - \{\infty\}) = \overline{k}$ (aucun des coefficients de la diagonale n'ayant de pôle il ne peut y avoir de compensation des zéros dans le produit). Par suite, $(\overline{\underset{\sim}{H}}{}_A^{-1} \overline{\underset{\sim}{H}}{}'_A)_{ii}$ est une constante non nulle.

Maintenant, la condition (2) du lemme donne

$$(\underset{\sim}{H}_A^{-1} x^{-\underset{\sim}{N}} x^{\underset{\sim}{N}'} \underset{\sim}{H}'_A)(\infty) = \underset{\sim}{I} . \tag{3.4}$$

Toutes les matrices considérées étant triangulaires, il vient en notant n_i et n'_i les coefficients de la diagonale de $\underset{\sim}{N}$ et de $\underset{\sim}{N}'$,

$$[x^{n'_i - n_i} (\underset{\sim}{\bar{H}}_A^{-1})_{ii} (\underset{\sim}{\bar{H}}'_A)_{ii}](\infty) = 1 .$$

Comme $(\underset{\sim}{\bar{H}}_A^{-1})_{ii} (\underset{\sim}{\bar{H}}'_A)_{ii} = (\bar{H}_A^{-1} \bar{H}'_A)_{ii}$ est une constante non nulle, cette égalité ne peut avoir lieu que si $n'_i = n_i$ pour tout i c'est-à-dire $\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{N}'$.

Puisque $\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{N}'$, la condition (2) exprime que les coefficients de la matrice $(\underset{\sim}{H}_A^{-1} \underset{\sim}{H}'_A - \underset{\sim}{I})$ appartiennent à $E(A')$ et s'annulent à l'infini. La décomposition

$$(3.1') \qquad \underset{\sim}{H}_A^{-1}(\underset{\sim}{H} - \underset{\sim}{H}') \underset{\sim}{K}'^{-1}_A = (\underset{\sim}{K}_A \underset{\sim}{K}'^{-1}_A - \underset{\sim}{I}) + (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{H}_A^{-1} \underset{\sim}{H}'_A) ,$$

est la décomposition de Mittag-Leffler correspondant aux ensembles standards A et A' . Il en résulte

$$\|\underset{\sim}{K}_A - \underset{\sim}{K}'_A\| \leqslant \|\underset{\sim}{K}_A \underset{\sim}{K}'^{-1}_A - \underset{\sim}{I}\| \, \|\underset{\sim}{K}'_A\| \leqslant \|\underset{\sim}{H}_A^{-1}(\underset{\sim}{H} - \underset{\sim}{H}') \underset{\sim}{K}'^{-1}_A\| \, \|\underset{\sim}{H}'\| = \gamma\|\underset{\sim}{H}'\|$$

$$\|\underset{\sim}{H}_A - \underset{\sim}{H}'_A\| \leqslant \|\underset{\sim}{H}_A\| \, \|\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{H}_A^{-1} \underset{\sim}{H}'_A\| \leqslant \|\underset{\sim}{H}_A^{-1}(\underset{\sim}{H} - \underset{\sim}{H}') \underset{\sim}{K}'^{-1}_A\| = \gamma .$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'existence et l'unicité des facteurs singuliers dans $Gl_\mu(E)$.

THÉORÈME 3.2. - <u>Soit</u> A <u>et</u> A' <u>deux ensembles standards complémentaires dans</u> $k \cup \{\infty\}$ <u>tels que</u> $D_\infty \subset A'$. <u>A toute matrice</u> $\underset{\sim}{H}$ <u>de</u> $Gl_\mu(E)$ <u>sont associées de manière unique une matrice</u> $\underset{\sim}{H}_A$ <u>de</u> $G_\mu(E(A' - D_\infty))$, <u>une matrice</u> $\underset{\sim}{K}_A$ <u>de</u> $Gl_\mu(E(A))$ <u>et une matrice diagonale</u> $\underset{\sim}{N}$ <u>de</u> $M_\mu(\underset{\sim}{Z})$ <u>telles que</u> :

1° $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}_A \underset{\sim}{K}_A$,

2° $x^{\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}_A$ <u>appartient à</u> $G_\mu(E(D_\infty))$ <u>et vérifie</u> $(x^{\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}_A)(\infty) = \underset{\sim}{I}$.

L'unicité de la décomposition est une conséquence immédiate du lemme 3.1 appliqué avec $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}'$ c'est-à-dire $\gamma = 0$.

Puisque $\underset{\sim}{H}$ appartient à $Gl_\mu(E)$, pour tout n , il existe une matrice $\underset{\sim}{H}_n$ de $M_\mu(E_0)$ telle que $\|\underset{\sim}{H} - \underset{\sim}{H}_n\| \leqslant 1/n\|\underset{\sim}{H}^{-1}\|$. Comme $\underset{\sim}{H}$ est inversible, pour n assez grand, on a $|\det \underset{\sim}{H}_n| = |\det \underset{\sim}{H}|$, donc $\underset{\sim}{H}_n \in Gl_\mu(E_0)$, et $\|\underset{\sim}{H}^{-1}\| = \|\underset{\sim}{H}_n^{-1}\|$. Nous appliquons la proposition 2.4 à chaque $\underset{\sim}{H}_n$, ce qui nous donne des suites de matrices

$$\underset{\sim}{H}_{A,n} \in G_\mu(E_0(A' - \{\infty\})) , \quad \underset{\sim}{K}_{A,n} \in Gl_\mu(E_0(A)) \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{N}_n \in M(\underset{\sim}{Z}) ,$$

telles que $\underset{\sim}{H}_n = \underset{\sim}{H}_{A,n} \underset{\sim}{K}_{A,n}$ et $(x^{\underset{\sim}{N}_n} \underset{\sim}{H}_{A,n})(\infty) = \underset{\sim}{I}$.

Nous appliquons alors le lemme 3.1 aux deux matrices $\underset{\sim}{H}_n$ et $\underset{\sim}{H}_m$, avec $1 < n < m$. On a

$$\|\underset{\sim}{H}_n - \underset{\sim}{H}_m\| \, \|\underset{\sim}{H}_m^{-1}\| = \|\underset{\sim}{H}_n - \underset{\sim}{H}_m\| \, \|\underset{\sim}{H}^{-1}\| \leqslant \|\underset{\sim}{H}^{-1}\|/n\|\underset{\sim}{H}^{-1}\| < 1 .$$

On constate alors que $\underset{\sim}{N}_n = \underset{\sim}{N}_m$, autrement dit, la matrice $\underset{\sim}{N}_n$ ne dépend pas de n . Notons-la $\underset{\sim}{N}$. On a aussi

$$\|\underset{\sim}{K}_{A,n} - \underset{\sim}{K}_{A,m}\| \leq (1/n)\|\underset{\sim}{H}_m^{-1}\| \leq \|\underset{\sim}{H}^{-1}\|/n$$

$$\|\underset{\sim}{K}_{A,n}^{-1} - \underset{\sim}{K}_{A,m}^{-1}\| \leq \|\underset{\sim}{K}_{A,m}^{-1}\| \, \|\underset{\sim}{K}_{A,n} - \underset{\sim}{K}_{A,m}\| \, \|\underset{\sim}{K}_{A,n}^{-1}\| \leq \|\underset{\sim}{H}_m^{-1}\|(\|\underset{\sim}{H}^{-1}\|/n)\|\underset{\sim}{H}_m^{-1}\| \leq \|\underset{\sim}{H}^{-1}\|^3/n$$

c'est-à-dire que les suites $\underset{\sim}{K}_{A,n}$ et $\underset{\sim}{K}_{A,n}^{-1}$ sont des suites de Cauchy de l'espace complet $M_\mu(E(A))$, elles convergent donc vers des matrices inverses l'une de l'autre $\underset{\sim}{K}_A$ et $\underset{\sim}{K}_A^{-1}$ de ce même espace. Autrement dit, $\underset{\sim}{K}_A$ appartient à $Gl_\mu(E(A))$. On démontre d'une manière analogue que la suite $\underset{\sim}{H}_{A,n}$ converge vers une matrice $\underset{\sim}{H}_A$ de $Gl_\mu(E(A' - D_\infty))$ et que $x^{\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}_A$, qui est la limite de la suite $x^{\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}_{A,n}$, appartient à $Gl_\mu(E(D_\infty))$. L'espace $G_\mu(E)$ étant clairement un espace complet, et $\underset{\sim}{H}_{A,n}$ appartenant à $G_\mu(E)$, on a bien $\underset{\sim}{H}_A \in G_\mu(E(A' - D_\infty))$. Enfin les égalités 1° et 2° se déduisent immédiatement des égalités correspondantes pour $\underset{\sim}{H}_{A,n}$ et $\underset{\sim}{K}_{A,n}$.

Remarques.

1° Si B est un ensemble standard et si la matrice $\underset{\sim}{H}$ appartient à $Gl_\mu(E(B))$, on a $\underset{\sim}{K}_A = \underset{\sim}{H}_A^{-1} \underset{\sim}{H} \in Gl_\mu(E([A' - D_\infty] \cap B))$, ce qui montre que $\underset{\sim}{K}_A$ appartient à $Gl_\mu(E(A \cup B - D_\infty))$, on montre de même que $\underset{\sim}{H}_A$ appartient à $G_\mu(E(A' \cup B - D_\infty))$.

2° En passant aux matrices transposées, on démontre qu'il existe des matrices $\underset{\sim}{H}'_A$ de $G_\mu(E(A' - D_\infty))$, $\underset{\sim}{K}'_A$ de $Gl_\mu(E(A))$ et $\underset{\sim}{N}'$ de $M_\mu(\underset{\sim}{Z})$ telles que :

1° $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{K}'_A \underset{\sim}{H}'_A$,

2° La matrice $(\underset{\sim}{H}'_A x^{\underset{\sim}{N}'})$ appartient à $G_\mu(E(D_\infty))$, et vérifie $(\underset{\sim}{H}'_A x^{\underset{\sim}{N}'})(\infty) = \underset{\sim}{I}$.

Nous terminons ce paragraphe en donnant quelques applications immédiates du théorème 3.

Nous notons $(d/dx)(\underset{\sim}{H})$ la matrice obtenue en dérivant chacun des coefficients de la matrice $\underset{\sim}{H}$ par rapport à x .

COROLLAIRE 3.1. - Soit $\underset{\sim}{H}$ une matrice de $Gl_\mu(E)$, et soit α un point de $\bar{k}$. Si $(d/dx)(\underset{\sim}{H}) \underset{\sim}{H}^{-1}$ appartient à $M_\mu(E(D_\alpha))$, alors la matrice $\underset{\sim}{H}$ appartient à $Gl_\mu(E(D_\alpha))$. Si $x^2(d/dx)(\underset{\sim}{H}) \underset{\sim}{H}^{-1}$ appartient à $M_\mu(E(D_\infty))$, alors $\underset{\sim}{H}$ appartient à $Gl_\mu(E(D_\infty))$.

D'après le théorème 3 et la remarque qui le suit, si on prend $A = D_\alpha$, il existe une matrice $\underset{\sim}{H}_\alpha$ de $Gl_\mu(E(D^+ - D_\alpha))$, une matrice $\underset{\sim}{K}_\alpha$ de $Gl_\mu(E(D_\alpha))$, et une matrice $\underset{\sim}{N}$ de $M_\mu(Z)$ telles que $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{K}_\alpha \underset{\sim}{H}_\alpha$ et

$$(\underset{\sim}{H}_\alpha x^{\underset{\sim}{N}}) \in Gl_\mu(E(D_\infty)) , \quad (\underset{\sim}{H}_\alpha x^{\underset{\sim}{N}})(\infty) = \underset{\sim}{I} .$$

On vérifie que

$$(d/dx)(\underset{\sim}{H}_\alpha)\,\underset{\sim}{H}_\alpha^{-1} = \underset{\sim}{K}_\alpha^{-1}(d/dx(\underset{\sim}{H})\,\underset{\sim}{H}^{-1})\,\underset{\sim}{K}_\alpha - (d/dx)(\underset{\sim}{K}_\alpha^{-1})\,\underset{\sim}{K}_\alpha \in M_\mu(E(D_\alpha)) .$$

Comme la dérivation applique $E(D_\beta)$ sur lui-même, on a aussi

$$(d/dx)(\underset{\sim}{H}_\alpha)\,\underset{\sim}{H}_\alpha^{-1} \in M_\mu(E(D^+ - D_\alpha)) ,$$

donc $(d/dx)(\underset{\sim}{H}_\alpha)\,\underset{\sim}{H}_\alpha^{-1} \in M_\mu(E(D^+))$.

Par ailleurs, la dérivation transforme une fonction de $E(D_\infty)$ en une fonction de $E(D_\infty)$ nulle à l'infini. $(d/dx)(\underset{\sim}{H}_\alpha\, x^{\underset{\sim}{N}})$ est une matrice de $M_\mu(E(D_\infty))$ nulle à l'infini. Comme $x^{\underset{\sim}{N}}$ et $\underset{\sim}{N}$ commutent (ce sont des matrices diagonales), on trouve

$$(d/dx)(\underset{\sim}{H}_\alpha)\,\underset{\sim}{H}_\alpha^{-1} = (d/dx)(\underset{\sim}{H}_\alpha\, x^{\underset{\sim}{N}})(\underset{\sim}{H}_\alpha\, x^{\underset{\sim}{N}})^{-1} - (\underset{\sim}{H}_\alpha\, x^{\underset{\sim}{N}})(\underset{\sim}{N}/x)(\underset{\sim}{H}_\alpha\, x^{\underset{\sim}{N}})^{-1} .$$

Par suite $(d/dx)(\underset{\sim}{H}_\alpha)\,\underset{\sim}{H}_\alpha^{-1}$ appartient à $M_\mu(E(D_\infty))$, et est nulle à l'infini.

Les coefficients de $(d/dx)(\underset{\sim}{H}_\alpha)\,\underset{\sim}{H}_\alpha^{-1}$ n'ont donc aucun pôle et sont nuls à l'infini. Autrement dit $(d/dx)(\underset{\sim}{H}_\alpha)\,\underset{\sim}{H}_\alpha^{-1} = 0$. Ceci montre que $\underset{\sim}{H}_\alpha$ est une matrice constante et d'après la condition à l'infini, $\underset{\sim}{H}_\alpha = \underset{\sim}{I}$, c'est-à-dire $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{K}_\alpha \in Gl_\mu(E(D_\alpha))$.

Le cas $\alpha = \infty$ se déduit du cas $\alpha = 0$ en changeant x en $1/x$.

Soit (r , s) un intervalle (ouvert ou fermé en r et s) de $R^+ \cup \{\infty\}$ et soit $C(r , s)$ la couronne $\{x \in k \cup \{\infty\} , |x| \in (r , s)\}$. Nous notons $W(r , s)$ l'anneau des fonctions strictement analytiques sur $C(r , s)$ (c'est-à-dire développables en série de Laurent dans cette couronne). Comme k est algébriquement clos, on a unicité du développement en série de Laurent : en particulier si

$$C(r , s) \cap C(r' , s') \neq \emptyset ,$$

on a

$$W(r , s) \cap W(r' , s') = W((r , s) \cup (r' , s')) .$$

Si nous considérons un intervalle fermé $[r , s]$, une fonction f de $W[r , s]$ est limite uniforme sur $C[r , s]$ des polynômes de Laurent obtenus en tronquant sa série de Laurent (autrement dit, f est un élément analytique sur $C[r , s]$). En particulier, on a

$$W[0 , 1] = E(D^+) , \quad W[1] = E(D^+ - D_0) \quad \text{et} \quad W[1 , \infty] = E(k \cup \{\infty\} - D_0) .$$

Nous allons utiliser cette remarque pour décomposer les matrices de $Gl_\mu(W(r , s))$ en produit de "facteurs singuliers" (comparer au théorème II de [4]).

COROLLAIRE 3.3. - Soit $C(r , s)$ une couronne non vide qui ne contient ni 0 ni ∞ , et soit $\underset{\sim}{X}$ une matrice de $Gl_\mu(W(r , s))$. Il existe une matrice $\underset{\sim}{Y}$ de $Gl_\mu(W(r , \infty])$, une matrice $\underset{\sim}{Z}$ de $Gl_\mu(W[0 , s))$ et une matrice diagonale $\underset{\sim}{N}$ de $M_\mu(\underset{\sim}{Z})$ telles que $\underset{\sim}{X} = x^{\underset{\sim}{N}}\,\underset{\sim}{Y}\underset{\sim}{Z}$.

La couronne $C(r , s)$ étant non vide, il existe un élément a de k tel que $|a| \in (r , s)$, c'est-à-dire tel que $[1] \subset (r/|a| , s/|a|)$.

On trouve alors

$$\underset{\sim}{X}(x/a) \in Gl_\mu(W(r/|a| , s/|a|) \subset Gl_\mu(W[1]) = Gl_\mu(E(D^+ - D_0)) .$$

Nous appliquons le théorème 3 à la matrice $\underset{\sim}{X}(x/a)$ avec $A = D^+$. Nous obtenons une matrice $\underset{\sim}{H}$ de $Gl_\mu(E)$, une matrice $\underset{\sim}{K}$ de $Gl_\mu(E(D^+))$ et une matrice diagonale $(-\underset{\sim}{N})$ de $\underset{\sim}{M}_\mu(Z)$ telles que $\underset{\sim}{X}(x/a) = \underset{\sim}{HK}$ et telles que la matrice $x^{-\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}$ appartienne à $Gl_\mu(D_\infty)$. D'après la remarque 1° qui suit le théorème 3.2, on peut assurer que la matrice $\underset{\sim}{H}$ appartient à $Gl_\mu(E(D^+ - D_0))$, donc que la matrice $x^{-\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}$ appartient à $Gl_\mu(E(k \cup \infty - D_0)) = Gl_\mu(W(1 , \infty))$.

Pour avoir $\underset{\sim}{X} = x^{\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{YZ}$, il suffit de poser

$$\underset{\sim}{Y} = x^{-\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H}(ax) = a^{\underset{\sim}{N}}(x^{-\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{H})(ax) \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{K}(ax) .$$

Nous avons alors immédiatement $Y \in Gl_\mu(W(|a| , \infty))$ et $\underset{\sim}{Z} \in Gl_\mu(W(0 , |a|))$. Maintenant, comme $0 , \infty \notin (r , s)$, on a $x^{-\underset{\sim}{N}} \in Gl_\mu(W(r , s))$. Donc $\underset{\sim}{Y} = x^{-\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{XY}^{-1}$ appartient à $Gl_\mu(W(r , |a|))$. Comme $(r , |a|) \cap (|a| , \infty) \neq \emptyset$, on en déduit que $\underset{\sim}{Y}$ appartient à $Gl_\mu(W(r , \infty))$. De même, de la relation $\underset{\sim}{Z} = x^{-\underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{Y}^{-1} \underset{\sim}{X}$, on déduit que $\underset{\sim}{Z}$ appartient à $Gl_\mu(W(|a| , s))$, donc à $Gl_\mu(W(0 , s))$.

<u>Remarque</u>. - En changeant d'abord la matrice $\underset{\sim}{X}$ en sa transposée, puis en changeant x en $1/x$, on obtient les décompositions

$$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{Z}_1 \underset{\sim}{Y}_1 x^{\underset{\sim}{N}_1} = x^{\underset{\sim}{N}_2} \underset{\sim}{Z}_2 \underset{\sim}{Y}_2 = \underset{\sim}{Y}_3 \underset{\sim}{Z}_3 x^{\underset{\sim}{N}_3} ,$$

où les matrices $\underset{\sim}{Y}_i$, $\underset{\sim}{Z}_i$ et $\underset{\sim}{N}_i$ vérifient les mêmes conditions que les matrices $\underset{\sim}{Y}$, $\underset{\sim}{Z}$ et $\underset{\sim}{N}$.

4. Applications aux équations différentielles à points singuliers réguliers.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'équation différentielle

$$(d/dx)(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{AX} , \tag{4.1}$$

associée à la matrice $\underset{\sim}{A}$ de $M_\mu(E)$.

Etant donné une autre équation différentielle $D(\underset{\sim}{Y}) = \underset{\sim}{BY}$, nous avons (au moins formellement) $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{HY}$ si, et seulement si, la matrice $\underset{\sim}{H}$ vérifie

$$\underset{\sim}{A} = (d/dx)(\underset{\sim}{H}) \underset{\sim}{H}^{-1} + \underset{\sim}{HBH}^{-1} . \tag{4.2}$$

Nous dirons donc que les équations différentielles (ou que les matrices $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$ de $M_\mu(E)$ associées) sont équivalentes s'il existe une matrice $\underset{\sim}{H}$ de $Gl_\mu(E)$ qui vérifie (4.2).

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on définit bien ainsi une relation d'équivalence.

Nous dirons que la matrice $\underset{\sim}{A}$ de $M_\mu(E)$ (ou que l'équation différentielle (4.1) associée) a un point non singulier en $\alpha \in \bar{k}$ (resp. à l'infini) s'il existe une matrice $\underset{\sim}{A}_\alpha$ (resp. $\underset{\sim}{A}_\infty$) équivalente à $\underset{\sim}{A}$ et qui appartient à $M_\mu(E(D_\alpha))$ (resp. $x^{-2} M_\mu(E(D_\infty))$.

Nous dirons que la matrice $\underset{\sim}{A}$ de $M_\mu(E)$ (ou que l'équation différentielle associée) a un point singulier régulier en $\alpha \in \bar{k}$ (resp. à l'infini) s'il existe un point a de D_α et une matrice $\underset{\sim}{A}_\alpha$ (resp. $\underset{\sim}{A}_\infty$) équivalente à $\underset{\sim}{A}$ tels que $(x - a)\,\underset{\sim}{A}_\alpha$ appartienne à $M_\mu(E(D_\alpha))$ (resp. $x^{-1}\,\underset{\sim}{A}$ appartient à $M_\mu(E(D_\infty))$).

(Cette définition impose donc, pour $\alpha = \infty$, la condition $a = \infty$.)

Nous allons donner deux applications de nos théorèmes de décomposition en facteurs singuliers à l'étude des équations différentielles. On en trouvera une troisième dans [2], théorème 8.3 (le lemme 8.2 est une forme faible de notre théorème 3.2).

Nous commençons par donner une conséquence immédiate du corollaire 3.2.

PROPOSITION 4.1. - Supposons k non discret, et soit $r < 1$. S'il existe une matrice $\underset{\sim}{X}$ de $Gl_\mu(W(r\,,\,1[)$ solution de l'équation différentielle (4.1), alors la matrice $\underset{\sim}{A}$ a un point non singulier en 0 .

Comme k est un corps non discret et algébriquement clos, la couronne $C(r\,,\,1[$ est non vide. Nous pouvons appliquer le corollaire 3.3 à la matrice $\underset{\sim}{X}$. On trouve

$$\underset{\sim}{X} = x^{\underset{\sim}{N}}\,\underset{\sim}{YZ} = \underset{\sim}{HZ}\ ,$$

avec $\underset{\sim}{Z} \in Gl_\mu(W(0\,,\,1[)$ et $\underset{\sim}{H} = x^{\underset{\sim}{N}}$ avec $\underset{\sim}{Y} \in Gl_\mu(W(r\,,\,\infty[) \subset Gl_\mu(E(D^+))$. Comme

$$\underset{\sim}{A} = (d/dx)(\underset{\sim}{X})\,\underset{\sim}{X}^{-1} = (d/dx)(\underset{\sim}{H})\,\underset{\sim}{H}^{-1} + \underset{\sim}{H}(d/dx)(\underset{\sim}{Z})\,\underset{\sim}{Z}^{-1}\,\underset{\sim}{H}^{-1}\ ,$$

la matrice $\underset{\sim}{A}$ est équivalente à la matrice $(d/dx)(\underset{\sim}{Z})\,\underset{\sim}{Z}^{-1}$ qui appartient à $M_\mu(W(0\,,\,1[)$ et à $M_\mu(E)$ (car $(d/dx)(\underset{\sim}{Z})\,\underset{\sim}{Z}^{-1} = \underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{AH} - \underset{\sim}{H}^{-1}(d/dx)(\underset{\sim}{H})$) , donc à $M_\mu(E(D_0))$.

Nous voyons notre deuxième application comme un résultat de globalisation pour les équations différentielles.

THÉORÈME 4.2. - Soit k un corps non discret de caractéristique nulle, et soit $\underset{\sim}{A}$ une matrice de $M_\mu(E)$ telle que :

1° pour presque tout $\alpha \in \bar{k}$, $\underset{\sim}{A}$ appartient à $M_\mu(E(D_\alpha))$,

2° il existe un ensemble fini S contenu dans $\bar{k}$ tel que ;

si $\alpha \in \bar{k} \cup \{\infty\} - S$, $\underset{\sim}{A}$ a un point non singulier en α ,

si $\alpha \in S$, $\underset{\sim}{A}$ a un point singulier régulier en α .

Nous notons a_α et $\underset{\sim}{A}_\alpha$ le point de D_α et la matrice équivalente à $\underset{\sim}{A}$, tels que $(x - a_\alpha)\,\underset{\sim}{A}_\alpha \in M_\mu(E(D_\alpha))$.

<u>Alors la matrice</u> $\underset{\sim}{A}$ <u>est équivalente à une matrice</u> $\underset{\sim}{B}$ <u>de la forme</u>

$$\underset{\sim}{B} = \textstyle\sum_{\alpha\in S} (x - a_\alpha)^{-1} \underset{\sim}{B}_\alpha ,$$

<u>où</u> $\underset{\sim}{B}_\alpha$ <u>est une matrice de</u> $M_\mu(k)$ <u>semblable à la matrice</u> $[(x - a_\alpha)\ \underset{\sim}{A}_\alpha](a_\alpha)$, <u>et</u> <u>où</u> $\sum_{\alpha\in S} \underset{\sim}{B}_\alpha$ <u>est une matrice diagonale de</u> $M_\mu(\underset{\sim}{Z})$.

Nous commençons par examiner le cas des disques $D_\alpha \neq D_\infty$.

Soit P le polynôme $\prod_{\alpha\in S} (x - a_\alpha)$. A toute matrice $\underset{\sim}{C}$ équivalente à $\underset{\sim}{A}$ nous associons le sous-ensemble minimum $\omega(\underset{\sim}{C})$ de $\bar{k}$ tel que :

pour tout $\alpha \in \bar{k} - \omega(\underset{\sim}{C})$, $P\underset{\sim}{C}$ appartient à $M_\mu(E(D_\alpha))$,

pour tout $\alpha \in [\bar{k} - \omega(\underset{\sim}{C})] \cap S$, la matrice $[(x - a_\alpha)\ \underset{\sim}{C}](a_\alpha)$ est semblable à la matrice $[(x - a_\alpha)\ \underset{\sim}{A}_\alpha](a_\alpha)$.

La condition 1° du théorème exprime que $\omega(\underset{\sim}{A})$ est un ensemble fini, la condition 2° signifie que, pour tout $\alpha \in \bar{k}$, il existe une matrice $\underset{\sim}{A}_\alpha$ équivalente à $\underset{\sim}{A}$ telle que $P\underset{\sim}{A}_\alpha \in M_\mu(E(D_\alpha))$ (autrement dit $\omega(\underset{\sim}{A}_\alpha) \not\ni \alpha$).

Considérons une matrice $\underset{\sim}{C}$ équivalente à la matrice $\underset{\sim}{A}$ telle que $\omega(\underset{\sim}{C})$ soit minimum, et montrons que $\omega(\underset{\sim}{C}) = \emptyset$.

Nous supposons que α appartient à $\omega(\underset{\sim}{C})$. La matrice $\underset{\sim}{C}$ est équivalente à la matrice $\underset{\sim}{A}_\alpha$. Il existe donc une matrice $\underset{\sim}{H}$ de $Gl_\mu(E)$ telle que

(4.3) $$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{H}\underset{\sim}{A}_\alpha \underset{\sim}{H}^{-1} + (d/dx)(\underset{\sim}{H})\ \underset{\sim}{H}^{-1} .$$

Le théorème 3.2, appliqué à la matrice $\underset{\sim}{H}$ et à l'ensemble $A = D_\alpha$, nous donne la décomposition $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}_\alpha \underset{\sim}{K}_\alpha$ avec $\underset{\sim}{H}_\alpha \in Gl_\mu(E(D^+ - D_\alpha))$ et $\underset{\sim}{K}_\alpha \in Gl_\mu(E(D_\alpha))$.

D'après l'égalité (4.3) nous trouvons

(4.4) $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{H}_\alpha \underset{\sim}{C}_\alpha \underset{\sim}{H}_\alpha^{-1} + (d/dx)(\underset{\sim}{H}_\alpha)\ \underset{\sim}{H}_\alpha^{-1}$ avec $\underset{\sim}{C}_\alpha = \underset{\sim}{K}_\alpha \underset{\sim}{A}_\alpha \underset{\sim}{K}_\alpha^{-1} + (d/dx)(\underset{\sim}{K}_\alpha)\ \underset{\sim}{K}_\alpha^{-1}$,

La première égalité montre que $\underset{\sim}{C}_\alpha$ est une matrice équivalente à $\underset{\sim}{C}$, donc à $\underset{\sim}{A}$, et que, pour tout $\beta \in \bar{k} - \omega(\underset{\sim}{C})$, c'est-à-dire $D_\beta \subset D^+ - D_\alpha$, nous avons

$$P\underset{\sim}{C}_\alpha = \underset{\sim}{H}_\alpha^{-1}(P\underset{\sim}{C})\ \underset{\sim}{H}_\alpha - P\underset{\sim}{H}_\alpha^{-1}\ (d/dx)(\underset{\sim}{H}_\alpha) \in M_\mu(E(D_\beta)) .$$

D'autre part, si $\beta \in (\bar{k} - \omega(\underset{\sim}{C})) \cap S$, on a évidemment :

$$((x - a_\beta)\ \underset{\sim}{C}_\alpha)(a_\beta) = \underset{\sim}{H}_\alpha^{-1}(a_\beta)[(x - a_\beta)\ \underset{\sim}{C}_\alpha](a_\beta)\ \underset{\sim}{H}_\alpha(a_\beta) .$$

Autrement dit, $\omega(\underset{\sim}{C}_\alpha) \subset \omega(\underset{\sim}{C})$.

La deuxième égalité de (4.4) montre que la matrice $P\underset{\sim}{C}_\alpha$ appartient à $M_\mu(E(D_\alpha))$ et que, si $\alpha \in S$,

$$[(x - a_\alpha)\ \underset{\sim}{C}_\alpha](a_\alpha) = \underset{\sim}{K}_\alpha(a_\alpha)[x - a_\alpha)\ \underset{\sim}{A}_\alpha](a_\alpha)\ \underset{\sim}{K}_\alpha^{-1}(a_\alpha) ,$$

autrement dit, $\alpha \notin \omega(\underset{\sim}{C}_\alpha)$. L'ensemble $\omega(\underset{\sim}{C}_\alpha)$ est strictement plus petit que l'ensemble $\omega(\underset{\sim}{C})$, ce qui contredit la minimalité de ce dernier. Donc $\omega(\underset{\sim}{C}) = \emptyset$. En particulier, $PC \in M_\mu(E(D^+))$.

Nous regardons maintenant ce qui se passe à l'infini. Le point à l'infini n'étant pas singulier pour la matrice A_∞, il existe une matrice A_α de $x^{-2} M_\mu(E(D_\infty))$ qui est équivalente à A . Comme k est un corps non discret de caractéristique nulle, un théorème classique de Cauchy assure que l'équation $(d/dx)(X) = A_\infty X$ a une matrice solution X dans $Gl_\mu(W(r , \infty))$ pour un certain r fini.

Les matrices C et A_∞ étant équivalentes, il existe une matrice H de $Gl_\mu(E)$ telle que

$$C = (d/dx)(HX)(HX)^{-1} = HAH^{-1} + (d/dx)(H)\, H^{-1} .$$

D'après le théorème 3.2 (et la remarque 2° qui le suit) appliqué à la matrice H et à l'ensemble $A = D^+$, il existe une matrice H_∞ de $Gl_\mu(E) \cap Gl_\mu(W]1 , \infty[)$ et une matrice K_∞ de $Gl_\mu(E(D^+))$ telles que $H = K_\infty H_\infty$. Dans ces conditions, la matrice $H_\infty X$ appartient à $Gl_\mu(W(r , \infty[)$. D'après le corollaire 3.3 (et la remarque qui le suit), on a la décomposition

$$H_\infty X = YZx^{N} ,$$

où Y est une matrice de $Gl_\mu(W]0 , \infty[) \subset Gl_\mu(E(D^+))$, Z une matrice de $Gl_\mu(W(r , \infty))$, et N une matrice diagonale de $M_\mu(Z)$. Quitte à multiplier Y par la matrice inversible $Z(\infty)$, on peut supposer que $Z(\infty) = I$.

Nous posons alors

$$B = (d/dx)(Zx^{N})(Zx^{N})^{-1} = (d/dx)(Y^{-1}\, K_\infty^{-1}\, HX)(Y^{-1}\, K_\infty^{-1}\, HX)^{-1}$$
$$= -\, (K_\infty Y)^{-1}\, (d/dx)(K_\infty Y) + (K_\infty Y)^{-1}\, C(K_\infty Y) .$$

Les matrices K_∞ et Y appartenant à $Gl_\mu(E(D^+))$ et la matrice PC appartenant à $M_\mu(E(D^+))$, on a $PB \in M_\mu(E(D^+))$.

D'autre part, on a

$$B = (Y^{-1}\, H_\infty X)(Y^{-1}\, H_\infty X)^{-1} = (Y^{-1}\, H_\infty)(Y^{-1}\, H_\infty)^{-1} + (Y^{-1}\, H_\infty)\, A_\infty (Y^{-1}\, H_\infty)^{-1} .$$

Comme les matrices Y et H_∞ appartiennent à $Gl_\mu(W]1 , \infty[)$, et comme la matrice A_∞ appartient à $M_\mu(W]1 , \infty))$, on en déduit que $B \in M_\mu(W]1 , \infty[)$.

Enfin on a

$$B = (d/dx)(Z)\, Z^{-1} + Z(N/x)Z^{-1} .$$

La matrice Z appartenant à $Gl_\mu(W(r , \infty))$, la matrice $(d/dx)(Z)$ appartient à $x^{-2} M_\mu(W(r , \infty))$. On voit donc que la matrice B appartient à $M_\mu(W(r , \infty))$, et s'annule à l'infini. Plus précisément, on a $(xB)(\infty) = N$.

Les coefficients de B n'ont donc comme singularités dans $k \cup \{\infty\}$, que des pôles simples aux points a_α . La décomposition annoncée est donnée par la décomposition de Mittag-Leffler de ces coefficients. On a en particulier

$$\underset{\sim}{B}_{\alpha} = [(x - a_{\alpha})\ \underset{\sim}{B}](a_{\alpha}) = (\underset{\sim}{K}_{\infty}\ \underset{\sim}{Y})^{-1}\ (a_{\alpha})[(x - a_{\alpha})\ \underset{\sim}{C}](a_{\alpha})(\underset{\sim}{K}_{\infty}\ \underset{\sim}{Y})(a_{\alpha})\ .$$

La matrice $\underset{\sim}{B}_{\alpha}$ est donc semblable à la matrice $[(x - a_{\alpha})\ \underset{\sim}{C}\ ](a_{\alpha})$, qui est elle-même semblable à la matrice $[(x - a_{\alpha})\ \underset{\sim}{A}_{\alpha}](a_{\alpha})$. La somme $\sum_{\alpha\in S} \underset{\sim}{B}_{\alpha}$ représente le "résidu à l'infini" de $\underset{\sim}{B}$, elle est clairement donnée par $(x\underset{\sim}{B})(\infty)$ et vaut donc $\underset{\sim}{N}$.

Un cas particulier du théorème montre qu'une équation différentielle ayant au plus un point singulier régulier est entièrement soluble dans E (et donc n'a en fait aucun point singulier !) .

COROLLAIRE 4.3. - Avec les hypothèses du théorème 4.2, et en supposant que l'ensemble S contient un point au plus, il existe une matrice $\underset{\sim}{X}$ de $Gl_{\mu}(E)$ telle que $(d/dx)(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{AX}$.

Si $S = \{\alpha\}$, la matrice $\underset{\sim}{B}$ du théorème 4.2 est de la forme $(x - a_{\alpha})^{-1}\ \underset{\sim}{N}$, où $\underset{\sim}{N}$ est une matrice diagonale de $M_{\mu}(\underset{\sim}{Z})$. Posons $\underset{\sim}{Y} = (x - a_{\alpha})^{\underset{\sim}{N}}$, la matrice $\underset{\sim}{Y}$ appartient à $Gl_{\mu}(E)$ (et même à $Gl_{\mu}(E_0)$) et vérifie $(d/dx)(\underset{\sim}{Y}) = \underset{\sim}{BY}$. Comme la matrice $\underset{\sim}{B}$ est équivalente à la matrice $\underset{\sim}{A}$, il existe une matrice $\underset{\sim}{H}$ de $Gl_{\mu}(E)$ telle que la matrice $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{HY}$ appartienne à $Gl_{\mu}(E)$ et vérifie $(d/dx)(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{AX}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).

[2] CHRISTOL (G.). - Systèmes différentiels linéaires p-adiques, Structure de Frobenius faible, Bull. Soc. math. France, t. 109, 1981, p. 83-122.

[3] MOTZKIN (E.). - La décomposition d'un élément analytique en facteurs singuliers, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 27, 1977, n° 1, p. 67-82.

[4] TURRITIN (H. L.). - Reduction of differential equations to canonical form, Trans. Amer. math. Soc., t. 107, 1963, p. 485-507.