

# GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ALAIN ESCASSUT

**Ordre de transcendance sur  $\mathbb{Q}_p$**

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 7-8 (1979-1981), exp. n° 4, p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=GAU\\_1979-1981\\_\\_7-8\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A2_0)

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1979-1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ORDRE DE TRANSCENDANCE SUR  $\mathbb{Q}_p$

par Alain ESCASSUT (\*)

[Université de Bordeaux]

Introduction. - Soit  $p$  un entier premier.

On se propose d'étudier dans  $\mathbb{C}_p$  une notion d'ordre de transcendance sur  $\mathbb{Q}_p$  qui rappelle un peu la notion de type de transcendance sur  $\mathbb{Q}$ .

Soit  $|\cdot|$  la valeur absolue de  $\mathbb{C}_p$ , soit  $\log$  la fonction logarithme de base  $p$ , et soit  $v$  la valuation de  $\mathbb{C}_p$ , définie par  $v(x) = -\log |x|$ . Soit  $\|\cdot\|$  la valeur absolue canonique de  $\mathbb{C}_p[X]$ , définie par

$$\|\sum_{i=0}^{\ell} a_i X^i\| = \max_{0 \leq i \leq \ell} |a_i|.$$

Ici nous dirons qu'un nombre  $x \in \mathbb{C}_p$ , transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ , est d'ordre  $\leq \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq 1$ ) s'il existe une constante  $C_x \in \mathbb{R}^+$  telle que l'on ait, pour tout polynôme  $P(X) \in \mathbb{Q}_p[X]$ ,

$$v(P(x)) \leq -\log \|P\| + C_x (\deg P)^\alpha.$$

Nous démontrerons (théorème 1) que cette notion d'ordre  $\leq \alpha$  est stable par extension algébrique, c'est-à-dire que si  $x$  est d'ordre  $\leq \alpha$  sur  $\mathbb{Q}_p$ , et si  $y$  est transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$  et algébrique sur  $\mathbb{Q}_p(x)$ , alors  $y$  est également d'ordre  $\leq \alpha$ .

Enfin nous verrons, grâce à un exemple, que, pour tout  $\alpha > 1$ , il existe des nombres transcendants sur  $\mathbb{Q}_p$ , d'ordre  $\leq \alpha$ . On remarquera par ailleurs que si  $x$  est d'ordre  $\leq \alpha$ , alors  $\mathbb{Q}_p(x)$  admet un type de transcendance  $\leq \alpha$ .

1. Fonction de transcendance.

Soit  $x \in \mathbb{C}_p$ , transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ . Nous appellerons fonction de transcendance du corps  $\mathbb{Q}_p(x)$ , associée à  $x$ , la fonction  $dg$ , définie par

$$dg(P/Q) = 1 + \max(\deg P, \deg Q).$$

où  $P/Q$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}_p(x)$ .

Soit  $y$ , transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ , et algébrique de degré  $q$  sur  $\mathbb{Q}_p(x)$ . Nous appellerons fonction de transcendance du corps  $\mathbb{Q}_p(x)[y]$ , associée à  $(x, y)$ ,

---

(\*) Texte reçu le 17 mars 1980.

la fonction  $dg$  définie de la façon suivante. Pour tout  $h \in \mathbb{Q}_p(x)[y]$ ,  $h$  peut s'écrire de la façon unique, à une constante multiplicative près, sous la forme

$$\sum_{i=0}^{q-1} a_i(x) y^i / D(x),$$

telle que  $D(x)$  soit premier avec le p. g. c. d. de  $\{a_0, \dots, a_{q-1}\}$ . Alors soit

$$dg(h) = 1 + \max(\deg(a_0), \dots, \deg(a_{q-1}), \deg D).$$

Les propriétés opératoires de la fonction  $dg$  sont classiques, et analogues à celles de la taille définie sur une extension transcendante de  $\mathbb{Q}$  ([6]), lemme 4.2.5). Le lemme 1 rappelle les principales de ces propriétés.

LEMME 1. - Soit  $K$  une extension transcendante de  $\mathbb{Q}_p$  de la forme  $\mathbb{Q}_p(x)[y]$ , où  $y$  est transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ ; et soit  $dg$  la fonction de transcendance associée à  $(x, y)$ . Alors il existe une constante  $C \in \mathbb{R}^+$  telle que, pour tous  $h_1, \dots, h_m \in K$ , on ait

$$dg(h_1 + \dots + h_m) \leq C \sum_{i=1}^m dg(h_i) \quad \text{et} \quad dg(h_1 \times \dots \times h_m) \leq C \sum_{i=1}^m dg(h_i),$$

telle que, pour tous  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{Q}_p[x, y]$ , on ait

$$dg(\alpha_1 + \dots + \alpha_m) \leq \max_{i \leq m} (dg, \alpha_i),$$

et enfin telle que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{Q}_p[x, y]$  et  $\beta \in \mathbb{Q}_p[x]$ , on ait

$$dg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \leq C \max(dg(\alpha), dg(\beta)).$$

LEMME 2. - Soit  $x$  transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ ; soit  $K = \mathbb{Q}_p(x)[u]$  une extension algébrique de  $\mathbb{Q}_p(x)$ , soit  $y \in K$ , et soit  $v$  algébrique sur  $\mathbb{Q}_p(y)$  tel que  $K = \mathbb{Q}_p(y)[v]$ . Soit  $dg_1$  (resp.  $dg_2$ ) la fonction de transcendance de  $K$  associée au couple  $(x, u)$  (resp.  $(y, v)$ ). Alors il existe une constante  $B$  telle que

$$dg_1(h) \leq B dg(h) \quad \text{et} \quad dg_2(h) \leq B dg_1(h), \quad \forall h \in K.$$

Preuve. - Montrons d'abord l'existence d'une constante  $B'$  telle que

$$(1) \quad dg_1(P(y)) \leq B' dg_2(P(y)), \quad \forall P \in \mathbb{Z}_p[X].$$

D'après le lemme 1, il existe une constante  $C$  telle que  $dg_1(y^n) \leq C n dg_1(y)$ .

Alors soit

$$P(y) = \sum_{j=0}^r \lambda_j y^j \quad (\lambda_j \in \mathbb{Z}_p);$$

d'après le lemme 1, on a  $dg_1(P(y)) \leq C \max_{j \leq r} dg(y^j)$ , d'où

$$dg_1(P(y)) \leq r C^2 dg_1(y),$$

ce qui établit la relation (1) en prenant  $B' = C^2 \operatorname{dg}_1(y)$ .

Nous allons en déduire l'existence d'une constante  $B''$  telle que la fonction  $\operatorname{dg}_2$  vérifie

$$\operatorname{dg}_1(h) \leq B'' \operatorname{dg}_2(h), \quad \forall h \in K.$$

En effet,  $h$  s'écrit  $\sum_{i=0}^{s-1} (b_i(y)/D(y)) v^i$ , soit  $h' = \sum_{i=0}^{s-1} b_i(y) v^i$ ; alors on a  $\operatorname{dg}_1(h) \leq (\max \operatorname{dg}_1 D(y), \operatorname{dg}_1(h'))$ .

Or, d'après (1), on voit que

$$(2) \quad \operatorname{dg}_1(D(y)) \leq B' \operatorname{dg}_2(D(y)).$$

D'autre part,  $\operatorname{dg}_1(h') \leq C^2 \max((\operatorname{dg}_1 b_i(y)) + i \operatorname{dg}_1(v))$ , et d'après (1), on a donc

$$\operatorname{dg}_1(h') \leq B' C^2 \max_{0 \leq i \leq s-1} \operatorname{dg}_2(b_i(y)) + C^2(s-1) \operatorname{dg}_1(v).$$

Alors, comme  $\operatorname{dg}_2(b_i(y)) \geq 1$ ,  $\forall i$ , il existe trivialement  $U > 0$  telle que

$$\operatorname{dg}_1(h') \leq U \max_{0 \leq i \leq s-1} \operatorname{dg}_2(b_i(y))$$

et par suite, grâce à (2), il existe  $B'' > 0$  tel que

$$\operatorname{dg}_1(h) \leq B'' \operatorname{dg}_2(h).$$

De même, on montrerait évidemment l'existence de  $B''' > 0$  telle que

$$\operatorname{dg}_2(h) \leq B''' \operatorname{dg}_1(h), \quad \forall h \in K,$$

ce qui achève de prouver le lemme 2.

COROLLAIRE. - Soit  $x \in \mathbb{C}_p$  transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ , soit  $u \in \mathbb{C}_p$ , algébrique sur  $\mathbb{Q}_p$ , et soit  $y \in \mathbb{Q}_p(x)[u]$ , transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ . Soit  $\operatorname{dg}_1$  (resp.  $\operatorname{dg}_2$ ) la fonction de transcendance de  $\mathbb{Q}_p(x)[u]$  associée à  $(x, u)$  (resp. de  $\mathbb{Q}_p(y)$  associée à  $y$ ). Alors il existe  $B \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\operatorname{dg}_1(h) \leq B \operatorname{dg}_2(h) \quad \text{et} \quad \operatorname{dg}_2(h) \leq B \operatorname{dg}_1(h) \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{Q}_p(y).$$

LEMME 3. - Soit  $x$  transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ , soit  $u$  algébrique sur  $\mathbb{Q}_p(x)$ , et soit  $y \in \mathbb{Q}_p(x)[u]$ . Soit  $\operatorname{dg}$  la fonction de transcendance associée au couple  $(x, y)$  dans  $\mathbb{Q}_p(x)[u]$ . Alors, il existe une constante  $E$  telle que, pour tout  $h \in \mathbb{Q}_p(x)[u]$ , la norme  $\gamma(h)$  de  $h$  sur  $\mathbb{Q}_p(x)$  vérifie

$$E \operatorname{dg}(h) \geq \operatorname{dg}(\gamma(h)).$$

Preuve. - Soit  $h = \sum_{i=0}^{q-1} (a_i(x)/D(x)) u^i$ , où  $q$  est le degré de  $u$  sur  $\mathbb{Q}_p(x)$ . Soient  $u_j = u_1, u_2, \dots, u_q$  des conjugués de  $u$  sur  $\mathbb{Q}_p(x)$ . Alors

$$\gamma(h) = \prod_{j=1}^q \left( \sum_{i=0}^{q-1} (a_i(x)/D(x)) u_j^i \right).$$

On voit que  $\gamma(h)$  est de la forme  $\sum_{\ell=1}^q (A_\ell(x)/D(x)^q) v_\ell$ , où chaque  $A_\ell$  est une somme de produits de  $q$  facteurs de la forme  $a_i$ , et où les  $v_\ell$  sont les fonctions symétriques de  $u_1, \dots, u_q$ . Les  $v_\ell$  appartiennent donc à  $\mathbb{Q}_p(x)$ . Soit  $V = \max_{1 \leq \ell \leq q} (\deg v_\ell)$ ; on voit que  $\deg \gamma(h) \leq C(V + \max_{1 \leq \ell \leq q} (\deg A_\ell), q \deg D)$ .

Or, les  $A_\ell$  étant des sommes de produits de  $q$  facteurs de la forme  $a_i$ , on voit que si l'on pose  $A = \max(\deg a_i)$ , on a  $\deg A_\ell \leq qA$ , et finalement

$$\deg(\gamma(h)) \leq q \deg(h) + CV.$$

Par suite il existe une constante  $E \geq \max(q, CV)$  telle que

$$\deg(\gamma(h)) \leq E \deg(h), \quad \forall h \in \mathbb{Q}_p(x)[u].$$

## 2. Filtres circulaires.

Notations et définitions. - Soit  $a \in \mathbb{C}_p$ , et soit  $r \geq 0$ . On notera désormais  $d(a, r)$  le disque circonferencié de centre  $a$ , de diamètre  $r$

$$\{\lambda \in \mathbb{C}_p; |\lambda - a| \leq r\} \quad \text{et} \quad C(a, r) = \{\lambda \in \mathbb{C}_p; |\lambda - a| = r\}.$$

Soient  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$  tels que  $0 < r_1 < r_2$ . On notera  $\Gamma(a, r_1, r_2)$  l'ensemble  $\{\lambda \in \mathbb{C}_p; r_1 < |a - \lambda| < r_2\}$ .

On définit de la façon suivante la notion de filtre circulaire ([2],[4]).

Pour toute suite strictement décroissante  $\hat{\phi}$ , de disques  $D_n$ , on note  $\hat{\phi}$  la famille des couronnes  $\Gamma(a, r_1, r_2)$  ( $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$ ,  $r_1 < \lim_n (\text{diam}(D_n)) < r_2$ ), et l'on appelle filtre circulaire un filtre  $\mathfrak{F}$  engendré par une famille de la forme  $\hat{\phi} \cup \hat{\phi}$ .

Le disque  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$  est noté  $\Delta(\mathfrak{F})$ , et tout point de  $\Delta(\mathfrak{F})$  est appelé centre de  $\mathfrak{F}$ .

Le nombre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(D_n)$  est appelé diamètre de  $\mathfrak{F}$ .

On appelle filtre circulaire large un filtre circulaire de diamètre non nul.

On sait ([2],[4]) que tout filtre circulaire large  $\mathfrak{F}$  définit une valeur absolue  $\varphi_{\mathfrak{F}}$  sur  $\mathbb{C}_p[X]$  par

$$\varphi_{\mathfrak{F}}(P) = \lim_{\mathfrak{F}} |P(\lambda)|,$$

et que l'application  $\mathfrak{F} \rightarrow \varphi_{\mathfrak{F}}$  est une bijection de l'ensemble des filtres circulaires larges de  $\mathbb{C}_p$  sur l'ensemble des valeurs absolues de  $\mathbb{C}_p[X]$ . Pour toute valeur absolue  $\psi$  de  $\mathbb{C}_p[X]$ , on appelle filtre circulaire associé le filtre circulaire  $\mathfrak{F}$  tel que  $\psi = \varphi_{\mathfrak{F}}$ .

Soit  $a \in \mathbb{C}_p$ , et soit  $\mu \in \mathbb{R}$ ; soit  $\mathfrak{S}$  le filtre circulaire de centre  $a$  et de diamètre  $p^{-\mu}$ . On notera

$$v_a(P, \mu) = \lim_{\mathfrak{S}} v(P(\lambda)),$$

et en particulier si  $a = 0$ , on notera  $v(P, \mu) = v_0(P, \mu)$ .

Alors, on sait que  $-\log \|P\| = v(P, 0)$  ([1],[2]). D'autre part, on retient des résultats classiques ([1],[2]) le lemme 4 qui sera utile par la suite.

LEMME 4.

(i) Soient  $a$  et  $b \in \mathbb{C}_p$ , et soit  $\mu \leq v(a - b)$ . Alors, pour tout  $P \in \mathbb{C}_p[X]$ , on a  $v_a(P, \mu) = v_b(P, \mu)$ .

(ii) Soient  $\mu_1 \geq \mu_2$ ; soit  $a \in \mathbb{C}_p$ , et soit  $Q \in \mathbb{C}_p[X]$ . Soit  $q_1$  (resp.  $q_2$ ) le nombre des zéros de  $Q$  dans  $d(a, p^{-\mu_1})$  (resp. dans  $d(a, p^{-\mu_2})$ ). Alors

$$v_a(Q, \mu_1) - v_a(Q, \mu_2) \in [q_2(\mu_1 - \mu_2), q_1(\mu_1 - \mu_2)].$$

LEMME 5. - Soit  $\mathfrak{S}$  un filtre circulaire de  $\mathbb{C}_p$  de diamètre  $R$ . Alors, pour tout polynôme  $P(x) \in \mathbb{C}_p[X]$ , on a

$$\lim_{\mathfrak{S}} |P(\lambda)| \geq \|P\| R^{\deg P}.$$

Preuve. - Soit  $w$  la valuation définie sur  $\mathbb{C}_p[X]$  par  $w(P) = -\lim_{\mathfrak{S}} v(P(\lambda))$ . Soit  $\rho = -\log R$ . Soit  $\mathfrak{D} = (D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de disques strictement décroissante telle que  $\mathfrak{S}$  soit engendré par  $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{D}^c$ . Il existe un nombre  $M \in \mathbb{R}^+$  unique tel que  $\mathfrak{S}$  soit sécant à  $C(0, M)$ : Si  $0$  est centré de  $\mathfrak{S}$ , alors  $M = R$ , et sinon  $M$  est la distance de  $0$  aux disques  $D_n$  quand  $n$  est assez grand. Soit  $\mu = -\log M$ . D'après le lemme 4 (ii), on a

$$(3) \quad v(P, \mu) \leq -\log \|P\| + \mu \deg P, \quad \forall P \in \mathbb{C}_p[X].$$

Nous allons évaluer maintenant  $v(P, \mu) - w(P)$ .

Supposons d'abord  $\Delta(\mathfrak{S}) \neq \emptyset$ , et soit  $a \in \Delta(\mathfrak{S})$ . Alors on a

$$(4) \quad w(P) = \lim_{v(\lambda-a) \nearrow \rho} v|P(\lambda)|.$$

Mais

$$(5) \quad \lim_{v(\lambda-a) \nearrow \rho} v|P(\lambda)| = v_a(P, \rho).$$

Or, d'après le lemme 4 (ii), on a

$$(6) \quad v_a(P, \rho) \leq v_a(P, \mu) + (\rho - \mu) \deg P.$$

Mais par hypothèse,  $\mathfrak{S}$  est sécant au cercle  $C(0, \mu)$  de sorte que  $v(a) \geq \mu$ , et par suite, d'après le lemme 4 (i),  $v_a(P, \mu) = v(P, \mu)$ , de sorte que, d'après

(2), (3), (4), on obtient

$$w(P) - v(P, \mu) \leq (\rho - \mu) \deg P,$$

et, grâce à (3), on voit que

$$w(P) \leq -\log \|P\| + \rho \deg P.$$

Supposons maintenant  $\Delta(\mathfrak{F}) = \emptyset$ . Pour tout  $n$ , il existe un filtre circulaire unique  $\mathfrak{F}_n$  tel que  $\Delta(\mathfrak{F}_n) = D_n$ . Chacun de ces filtres  $\mathfrak{F}_n$  définit une valuation  $w_n$  de  $\mathbb{C}_p[X]$  (par  $w_n(P) = \lim_{\mathfrak{F}_n} v(P(\lambda))$ ), et on sait que la suite  $w_n$  converge (pour la convergence simple) vers  $w$  ([2],[4],[5]). Alors on voit que, pour tout  $P(X) \in \mathbb{C}_p[X]$ , on a

$$w_n(P) \leq -\log \|P\| - \log(\text{diam}(\mathfrak{F}_n)) \deg P,$$

et comme  $\text{diam } \mathfrak{F}_n = \text{diam } D_n$ , on voit qu'à la limite on a

$$w(P) \leq -\log \|P\| - \log(\text{diam}(\mathfrak{F}_n)) \deg P,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 5.

### 3. Semi-normes multiplicatives de $\mathbb{Q}_p$ -algèbre.

Soit  $K$  un corps muni d'une valeur absolue  $|\cdot|$ , et soit  $A$  une  $K$ -algèbre commutative unitaire.

Rappelons que l'on note  $\text{Mult}(A)$  l'ensemble des semi-normes multiplicatives de  $K$ -algèbres de  $A$ , c'est-à-dire des semi-normes de  $K$ -espace vectoriel telles que

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y), \quad \forall x, y \in A \quad [5].$$

On note  $\text{Mult}_m(A)$  l'ensemble des éléments  $\varphi$  de  $\text{Mult}(A)$  dont le noyau, c'est-à-dire l'idéal premier des  $x \in A$  tels que  $\varphi(x) = 0$ , est un idéal maximal, et on note  $\text{Mult}_a(A)$  l'ensemble des éléments de  $A$  dont le noyau est un idéal maximal de codimension finie.

**LEMME 6.** - Soit  $A$  une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre commutative unitaire, et soit  $\varphi \in \text{Mult}_a(A)$ . Alors il existe un homomorphisme de  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre  $\theta$  de  $A$  dans  $\mathbb{C}_p$  tel que

$$\varphi(x) = |\theta(x)|, \quad \forall x \in A.$$

Preuve. - Soit  $\mathfrak{M} = \text{Ker } \varphi$ ; le corps  $K = A/\mathfrak{M}$  est une extension algébrique finie de  $\mathbb{Q}_p$  que l'on peut plonger dans  $\mathbb{C}_p$  par un homomorphisme  $\Lambda$  et si l'on note  $\chi$  la surjection canonique de  $A$  sur  $K$  l'homomorphisme  $\theta = \Lambda \circ \chi$  envoie  $A$  dans  $\mathbb{C}_p$ . Alors  $K$  est muni de la valeur absolue  $\psi$  induite par celle de  $\mathbb{C}_p$ :

$$\psi(y) = |\Lambda(y)|, \quad \forall y \in K,$$

et, d'après le lemme de Krasner [1], nous savons que c'est la seule valeur absolue de  $K$  prolongeant celle de  $\underline{\mathbb{Q}}_p$ . Or  $\varphi$  permet de définir sur  $K$  une valeur absolue  $\psi'$  qui prolonge celle de  $\underline{\mathbb{Q}}_p$ , en posant  $\psi'(\varphi(x)) = \varphi(x)$  ( $x \in A$ ). Par suite,  $\psi' = \psi$ , et l'on a bien

$$\varphi(x) = |\theta(x)|, \quad \forall x \in A.$$

Soit  $|\cdot|_\infty$  la valeur absolue archimédienne de  $\underline{\mathbb{R}}$ .

Rappelons que, pour tout polynôme  $P(X, Y) = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j$  appartenant à  $\underline{\mathbb{Z}}[X, Y]$ , on note

$$h(P) = \max_{i,j} |a_{ij}| \quad \text{et} \quad t(P) = \max(\deg_X(P) + 1, \deg_Y(P) + 1, \log H(P)).$$

LEMME 7. - Pour tout  $\bar{\varphi} \in \text{Mult } \underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$ , il existe une suite  $\bar{\varphi}_n$  de  $\text{Mult}_a \underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$  telle que  $\bar{\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_n$ , pour la topologie de la convergence simple.

Preuve. - Ce résultat est un raffinement (facile à établir lorsque le corps de base est  $\underline{\mathbb{Q}}_p$ ) ([5], chapitre III, proposition 1), montrant ici que  $\text{Mult}_m \underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$  est dense dans  $\text{Mult } \underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$ . En effet, on sait que  $\text{Mult}_m \underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y] = \text{Mult}_a \underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$  (puisque les idéaux maximaux d'un anneau  $K[X, Y]$ , où  $K$  est un corps, sont de codimension finie). Ainsi  $\text{Mult}_a \underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$  étant dense dans  $\text{Mult } \underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$ , pour tout entier  $n \in \underline{\mathbb{N}}$ , il existe  $\varphi_n \in \text{Mult}_a \underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$  tel que, pour tout polynôme  $F(X, Y) \in \underline{\mathbb{Z}}[X, Y]$  vérifiant  $t(F) \leq n$ , on ait

$$\psi_n(F) - \psi(F) < \frac{1}{p^n}.$$

Vérifions que la suite  $\psi_n$  converge bien vers  $\psi$ . En effet, soit  $G(X, Y)$  appartenant à  $\underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$ , il existe  $\rho \in \underline{\mathbb{Z}}$  tel que  $\rho G \in \underline{\mathbb{Z}}_p[X, Y]$ . Pour tout entier  $n$ , il existe évidemment  $F(X, Y) \in \underline{\mathbb{Z}}[X, Y]$  tel que  $t(F) \leq n$  et tel que  $\|F - \rho G\| \leq 1/p^n$ . Comme  $\psi_n \in \text{Mult}_a \underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$ ,  $\psi_n$  est évidemment continue (d'après le lemme 6) pour la norme canonique  $\|\cdot\|$  de  $\underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$  et, d'après les résultats classiques sur les semi-normes multiplicatives ([4],[5]), on sait que  $\psi_n(P) \leq \|P\|$  pour tout  $P \in \underline{\mathbb{Q}}_p[X, Y]$ . Donc ici,  $\psi_n(F - \rho G) \leq 1/p^n$  et  $\psi(F - \rho G) \leq 1/p^n$ . Alors, a fortiori, on voit que

$$|\psi(F) - \psi(\rho G)|_\infty \leq 1/p^n \quad \text{et} \quad |\psi_n(F) - \psi_n(\rho G)|_\infty \leq 1/p^n,$$

et on en déduit que

$$|\psi(\rho G) - \psi_n(\rho G)|_\infty \leq |\psi(\rho G) - \psi(F)|_\infty + |\psi(F) - \psi_n(F)|_\infty + |\psi_n(F) - \psi_n(\rho G)|_\infty \leq 3/p^n.$$

Finalement,

$$|\psi(G) - \psi_n(G)|_\infty = \left| \frac{1}{|\rho|} (\psi(\rho G) - \psi_n(\rho G)) \right|_\infty = \frac{1}{|\rho|} |\psi(\rho G) - \psi_n(\rho G)|_\infty \leq \frac{3}{\rho p^n},$$

ce qui prouve que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(G) = \psi(G)$ , et le lemme 7 est donc démontré.

#### 4. Valeurs absolues d'extensions transcendentes de $\mathbb{Q}_p$ .

LEMME 8. - Soit une valeur absolue  $\varphi$  du corps  $\mathbb{Q}_p(X)$  qui prolonge celle de  $\mathbb{Q}_p$ . Alors il existe un filtre circulaire  $\mathfrak{F}$  de  $\mathbb{C}_p$  tel que

$$\varphi(h) = \lim_{\mathfrak{F}} |h(\lambda)|, \quad \forall h \in \mathbb{Q}_p(X).$$

De plus, si  $\mathfrak{F}$  converge vers un point  $\alpha \in \mathbb{C}_p$ , alors  $\alpha$  est transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ .

Preuve. - Soit  $\Omega_p$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ . Alors  $\Omega_p(X)$  admet une valeur absolue  $\tilde{\varphi}$  qui prolonge  $\varphi$ . Supposons d'abord que  $\Omega_p$  soit dense dans  $\mathbb{Q}_p(X)$  pour la topologie de  $\tilde{\varphi}$ . Alors, dans ce cas, il existe un homomorphisme continu de  $\Omega_p(X)$  dans  $\mathbb{C}_p$ ; on voit que  $X$  apparaît comme un élément  $\alpha$  de  $\mathbb{C}_p$  et par suite, on a

$$\varphi(h) = |h(\alpha)|, \quad \forall h \in \Omega_p(X).$$

En particulier, on voit que le filtre des voisinages de  $\alpha$  est bien le filtre  $\mathfrak{F}$  annoncé,  $\alpha$  étant transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$  par hypothèse.

Supposons maintenant que  $\Omega_p$  ne soit pas dense dans  $\mathbb{Q}_p(X)$ , et soit  $\hat{\Omega}_p$  le complété de  $\Omega_p$  pour  $\tilde{\varphi}$ . On voit que  $\hat{\Omega}_p(X)$  est muni d'une valeur absolue  $\hat{\varphi}$  qui prolonge naturellement  $\varphi$  et comme  $\hat{\Omega}_p$  est isométriquement isomorphe à  $\mathbb{C}_p$ ,  $\hat{\varphi}$  apparaît comme une valeur absolue sur  $\mathbb{C}_p(X)$ . Alors on sait ([2],[4]) que  $\hat{\varphi}$  est définie par un filtre circulaire large  $\hat{\mathfrak{F}}$  tel que

$$\hat{\varphi}(h) = \lim_{\hat{\mathfrak{F}}} |h(\lambda)|, \quad \forall h \in \hat{\Omega}_p(X),$$

ce qui achève la démonstration.

LEMME 9. - Soit  $x$  transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ . Soit  $y$  transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ , mais algébrique sur  $\mathbb{Q}_p(x)$ , et soit  $\varphi$  une valeur absolue définie sur  $\mathbb{Q}_p(x)[y]$  telle que le filtre circulaire, associé à sa restriction à  $\mathbb{Q}_p(x)$ , soit large. Alors le filtre circulaire associé à la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbb{Q}_p(y)$  est large.

Preuve. - Soit  $\mathfrak{K}$  le filtre circulaire large associé à la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbb{Q}_p(x)$ , et soit  $\mathfrak{F}$  le filtre circulaire associé à la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbb{Q}_p(y)$ . Supposons que  $\mathfrak{F}$  converge vers un point  $\alpha \in \mathbb{C}_p$ . On a donc

$$\varphi(h(y)) = |h(\alpha)|, \quad \forall h \in \mathbb{Q}_p(X).$$

Soit  $\psi$  la semi-norme multiplicative de  $\mathbb{Q}_p[x, Y]$ , définie par

$$\psi(F(x, Y)) = \varphi(F(x, y)), \quad \forall F(x, Y) \in \mathbb{Q}_p[x, Y].$$

Alors d'après le lemme 7, il existe une suite  $\phi_n \in \text{Mult}_e \mathbb{Q}_p[x, Y]$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \psi .$$

Or, d'après le lemme 6, un élément  $\phi$  de  $\text{Mult}_a \mathbb{Q}_p[x, Y]$  est associé à un homomorphisme unique  $\chi$  de  $\mathbb{Q}_p[x, Y]$  dans  $\mathbb{C}_p$  par

$$\phi(F(x, Y)) = |\chi(F(x, Y))| = |F(\chi(x), \chi(Y))|, \quad \forall F(x, Y) \in \mathbb{Q}_p[x, Y].$$

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\chi_n$  l'homomorphisme de  $\mathbb{Q}_p[x, Y]$  dans  $\mathbb{C}_p$  tel que  $\phi_n = |\chi_n|$ . Soit  $\lambda_n = \chi_n(x)$ , et soit  $\mu_n = \chi_n(Y)$ . On a donc

$$\phi_n(F(x, Y)) = F(\lambda_n, \mu_n) \quad (\forall F \in \mathbb{Q}_p[x, Y]),$$

et par suite on voit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \alpha$ . Alors la suite  $\psi_n$  de  $\text{Mult}_a \mathbb{Q}_p[x, Y]$ , définie par  $\psi_n(F(x, Y)) = F(\lambda_n, \alpha)$ , converge, elle aussi vers  $\psi$ .

Remarquons d'autre part que, puisque la restriction de  $\psi$  à  $\mathbb{Q}_p(x)$  est associée à un filtre circulaire large, la suite  $\lambda_n$  est plus fine qu'un filtre circulaire large  $\mathfrak{F}$ .

Soit  $M(x, Y) \in \mathbb{Q}_p(x)[Y]$  le polynôme minimal de  $y$  sur  $\mathbb{Q}_p(x)$ . On voit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(M(x, Y)) = 0$  (puisque trivialement  $\psi(M(x, Y)) = 0$ ) et par suite on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\lambda_n, \alpha) = 0.$$

Alors la fraction  $h(X) = M(X, \alpha) \in \mathbb{C}_p(X)$ , qui vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\lambda_n) = 0$ , satisfait également  $\lim_{\mathfrak{F}} |h(\lambda)| = 0$ , et comme  $\mathfrak{F}$  est large, et définit sur  $\mathbb{Q}_p(x)$  une valeur absolue, il en résulte que  $h = 0$ , ce qui entraîne que  $\alpha$  est algébrique sur  $\mathbb{Q}_p$ , et c'est en contradiction avec le lemme 3.

Ainsi on voit que  $\mathfrak{F}$  est large.

### 5. Éléments d'ordre $\leq \alpha$ .

Soit  $x \in \mathbb{C}_p$ , transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ . Nous dirons que  $x$  est d'ordre  $\leq \alpha$  s'il existe une constante  $C_x \in \mathbb{R}^+$  telle que, pour tout polynôme  $P(X) \in \mathbb{Q}_p[X]$ , on ait

$$v(P(x)) \leq -\log \|P\| + C_x (\deg P)^\alpha.$$

Remarque 1. - Si  $\alpha < 1$ , il n'existe aucun élément d'ordre  $\leq \alpha$ ; il suffit de considérer la suite  $X^n$  pour le constater.

Remarque 2. - Un nombre  $x \in \mathbb{C}_p$  est d'ordre  $\leq \alpha$  si, et seulement si, la relation  $v(P)(x) \leq C_x (\deg P)^\alpha$  est vraie pour tous les polynômes  $P$  vérifiant  $\|P\| = 1$ .

Remarque 3. - Si  $x$  est d'ordre  $\leq \alpha$ , alors tout polynôme  $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$  vérifie

$$v(P(x)) \leq -\log \|P\| + C_x (\deg P)^\alpha.$$

or  $\|F\| \geq 1/H(P)$ , et par suite (en choisissant  $C_x \geq 1$ ) on voit que

$$vP(x) \leq C_x t(P)^\alpha,$$

ce qui montre que  $\underline{Q}(x)$  a un type de transcendance sur  $\underline{Q}$  inférieur ou égal à  $\alpha$ .

**THEOREME 1.** - Soit  $x \in \underline{C}_p$ , transcendant sur  $\underline{Q}_p$ , et soit  $y \in \underline{C}_p$ , transcendant sur  $\underline{Q}_p$  mais algébrique sur  $\underline{Q}_p(x)$ . Alors, si  $x$  est d'ordre  $\leq \alpha$  sur  $\underline{Q}_p$ ,  $y$  est également d'ordre  $\leq \alpha$  sur  $\underline{Q}_p$ .

Preuve. - Soit  $K = \underline{Q}_p(x)[y]$ , et soit  $dg_1$  (resp.  $dg_2$ ) la fonction de transcendance de  $K$  (resp. de  $\underline{Q}_p(y)$ ) associée à  $(x, y)$  (resp. à  $y$ ).

Soit  $D \in \underline{Q}_p[x]$  un dénominateur de  $y$  sur  $\underline{Q}_p[x]$ , tel que  $\|D\| = 1$ . Alors il est clair que, pour tout  $i = 2, \dots, n$ , et pour tout polynôme  $F(X) \in \underline{Q}_p(X)$ ,  $D^{\deg F} F(y_i)$  est entier algébrique sur  $\underline{Q}_p[x]$ . On voit donc que  $D^{\deg F} \gamma(F(y))$  est de la forme  $R(x) \in \underline{Q}_p[x]$  et alors, comme  $x$  est d'ordre  $\leq \alpha$ , par définition on a

$$v(R(x)) \leq -\log \|R\| + C_x (\deg R)^\alpha.$$

Soit  $w$  une valuation de  $K$  associée à une valeur absolue qui prolonge la valeur absolue canonique de  $\underline{Q}_p(x)$ . On a donc

$$(7) \quad v(R(x)) \leq w(R(x)) + C_x (dg_1 R(x))^\alpha.$$

Soit  $t = dg_1(D)$ , et soit  $a = -\inf(v(x), 0)$ . Il est clair que  $v(D) \geq -at$ .

Soit  $b = \max_{i=2, \dots, n} (-\inf v(y_i), 0)$ ; on voit que  $v(F(y_i)) > -b \deg F$  et par suite, on obtient

$$v(D(x)^{\deg F} \gamma(F(y))) \geq v(F(y)) - (n-1)b \deg F - at \deg F,$$

et donc a fortiori

$$v(D^{\deg F} \gamma(F(y))) \geq v(F(y)) - n(at + b) \deg F,$$

de sorte que, d'après (7), on obtient la relation

$$(8) \quad v(F(y)) \leq n(at + b) + w(D(x)^{\deg F} \gamma(F(y))) + C_x (dg_1(D(x)^{\deg F} \gamma(F(y))))^\alpha.$$

Considérons d'abord  $dg_1(D(x)^{\deg F} \gamma(F(y)))$ .

D'après le lemme 2, pour tout polynôme  $F(y) \in \underline{Q}_p[Y]$ , on a

$$(9) \quad dg_1(D^{\deg F} \gamma(F(y))) \leq dg_1(D^{\deg F}) + dg_1(\gamma(F(y))),$$

et

$$dg_1(D^{\deg F}) = nt \deg F = nt dg_2(F(y)).$$

D'autre part, d'après le lemme 3, on sait qu'il existe  $A \in \underline{R}^+$  tel que

$$dg_1(\gamma(F(y))) \leq A dg_1(F(y)) , \quad \forall F \in \mathbb{Q}_p[Y] ,$$

et d'autre part, grâce au corollaire du lemme 2, on sait qu'il existe  $B \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$dg_1 F(y) \leq B dg_2(F(y)) , \quad \forall F \in \mathbb{Q}_p[Y] ,$$

d'où finalement la relation (9) nous donne

$$dg_1(D(x)^{ndeg F} \gamma(F(y))) \leq (nt + AB) dg_2 F(y) ,$$

c'est-à-dire

$$(10) \quad dg_1(D(x)^{ndeg F} \gamma(F(y))) \leq (nt + AB)(deg(F) + 1) .$$

Considérons maintenant  $w(D(x)^{ndeg F} \gamma(F(y)))$  ; puisque  $\|D\| = 1$  , on voit que

$$(11) \quad w(D(x)^{ndeg F} \gamma(F(y))) = w(\gamma(F(y))) .$$

Maintenant, comme la valeur absolue canonique  $\|\cdot\|$  de  $\mathbb{Q}_p$  est définie par le filtre circulaire  $\mathcal{U}$  de centre 0 , de rayon 1 , on sait, grâce au lemme 9, qu'il existe un filtre circulaire large  $\mathfrak{S}$  , de diamètre  $T_1$  , tel que, pour tout  $F \in \mathbb{Q}_p[Y]$  , on ait

$$w(F(y)) = \lim_{\mathfrak{S}} v(F(\gamma)) ,$$

et par suite, d'après le lemme 5, on a

$$w(F(y)) \leq - \log \|F\| + T_1 \deg F ,$$

de même, pour chaque conjugué  $y_i$  ( $2 \leq i \leq n$ ) de  $y$  sur  $\mathbb{Q}_p(x)$  , il existe  $T_i > 0$  tel que  $w(F(y_i)) \leq - \log \|F\| + T_i \deg F$  , d'où une constante  $T > 0$  telle que

$$w(\gamma(F(y))) \leq - n \log \|F\| + T \deg F ,$$

et donc, grâce à (11), que tout polynôme  $F \in \mathbb{Q}_p[Y]$  vérifiant  $\|F\| = 1$  satisfait la relation

$$w(D(x)^{ndeg F} \gamma(F(y))) \leq T \deg F .$$

Alors d'après (9) et (10), on voit qu'on obtient la relation (12), vraie pour tout polynôme  $F \in \mathbb{Q}_p[Y]$  tel que  $\|F\| = 1$  .

$$(12) \quad v(F(y)) \leq n((at + b) + T)(deg(F) + 1) + C_x (nt + AB)^\alpha (deg(F) + 1)^\alpha ,$$

et comme  $\alpha \geq 1$  , on voit que (12) donne a fortiori

$$v(F(y)) \leq C_y (deg F)^\alpha ,$$

en posant

$$C_y = 2[n(at + b + T) + C_x(nt + AB)^\alpha] ,$$

pour tout polynôme  $F(Y)$  tel que  $\|F\| = 1$  et  $\deg F \geq 1$ , et comme le cas  $\deg F = 0$  est trivial, cette relation est vraie quel que soit  $\deg F$ , ce qui achève la démonstration du théorème 1 grâce à la remarque 1 qui précède le théorème 1.

Le théorème 1 permet de définir la notion d'ordre de transcendance  $\leq \alpha$  pour une extension de  $\mathbb{Q}_p$  de degré de transcendance égal à 1.

Nous dirons qu'une extension transcendante  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$  de degré de transcendance 1 sur  $\mathbb{Q}_p$  a un ordre  $\leq \alpha$  si ses éléments transcendents sur  $\mathbb{Q}_p$  ont un ordre de transcendance  $\leq \alpha$ .

COROLLAIRE. - Une extension transcendante  $E$  de  $\mathbb{Q}_p$  de degré de transcendance 1 sur  $\mathbb{Q}_p$  est d'ordre  $\leq \alpha$  si, et seulement si, l'un au moins de ses éléments est d'ordre  $\leq \alpha$ .

## 6. Existence d'éléments d'ordre $\leq \alpha$

Nous avons remarqué que si  $\alpha < 1$ , il n'existe aucun élément d'ordre  $\leq \alpha$ . Nous allons montrer que, par contre, si  $\alpha > 1$ , il existe des éléments d'ordre  $\leq \alpha$ .

THÉORÈME 2. - Pour tout  $\alpha > 1$ , il existe des nombres de  $\mathbb{C}_p$  transcendents sur  $\mathbb{Q}_p$ , d'ordre  $\leq \alpha$ .

Preuve. - En pratique, on va établir la proposition suivante.

PROPOSITION. - Soit  $\epsilon > 0$ , soit  $r_n = u_n/v_n$  une suite de  $\mathbb{Q}$ , et soit  $a_n$  une suite de  $\mathbb{C}_p$  telles que :

- (i)  $r_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,
- (ii)  $r_n < n^\epsilon$ ,
- (iii)  $a_n$  est une racine  $v_n$ -ième de  $p^{u_n}$ ,
- (iv) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $m = 1, \dots, n$ ,  $mr_n$  n'appartient pas au groupe de valuation du corps  $x_{n-1} = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_{n-1})$ .

Alors  $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  est transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$  et d'ordre  $\leq 1 + \epsilon$ .

En effet, dans [3], nous avons montré que  $\mathbb{Q}(x)$  a un type de transcendance  $\leq 1 + \epsilon$ . Mais en fait, pour établir ce résultat, on a montré plus précisément que  $x$  vérifie  $v(P(x)) \leq (\deg P)^{1+\epsilon}$ ,  $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $\|P\| = 1$ , pour tout polynôme, donc aussi bien pour tout  $P(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$  tel que  $\|P\| = 1$ , ce qui prouve bien que  $x$  est d'ordre  $\leq 1 + \epsilon$ .

Remarque. - La question de savoir s'il existe des éléments d'ordre  $\leq 1$  reste ouverte.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Les nombres  $p$ -adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 14).
  - [2] ESCASSUT (Alain). - Eléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe, *Annali di Mat. pura ed apl.*, Bologna, t. 110, 1976, p. 335-352.
  - [3] ESCASSUT (Alain). - Type de transcendance  $p$ -adique, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 5e année, 1977/78, n° 8, 10 p.
  - [4] GARANDEL (Gérard). - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, *Indagationes Mathematicae*, t. 37, 1975, p. 327-341.
  - [5] GUENNEBAUD (Bernard). - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques, Thèse d'Etat de l'Université de Poitiers-I, 1973.
  - [6] WALDSCHMIDT (Michel). - Nombres transcendants. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 402).
-