GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ALAIN ESCASSUT

Ordre de transcendance sur $\mathbb{Q}_p$

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. nº 4, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A2_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
7e année, 1979/80, n° 4, 13 p.
17 décembre 1979

ORDRE DE TRANSCENDANCE SUR $\mathbb{Q}_p$

par Alain ESCASSUT (*)
[Université de Bordeaux]

Introduction. - Soit p un entier premier.

On se propose d'étudier dans $\mathbb{C}_p$ une notion d'ordre de transcendance sur $\mathbb{Q}_p$ qui rappelle un peu la notion de type de transcendance sur $\mathbb{Q}$.

Soit $|.|$ la valeur absolue de $\mathbb{C}_p$, soit $\log$ la fonction logarithme de base p, et soit v la valuation de $\mathbb{C}_p$, définie par $v(x) = -\log|x|$. Soit $\|.\|$ la valeur absolue canonique de $\mathbb{C}_p[X]$, définie par

$$\|\sum_{i=0}^{\ell} a_i X^i\| = \max_{0\leq i\leq\ell} |a_i| .$$

Ici nous dirons qu'un nombre $x \in \mathbb{C}_p$, transcendant sur $\mathbb{Q}_p$, est d'ordre $\leq \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$) s'il existe une constante $C_x \in \mathbb{R}^+$ telle que l'on ait, pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{Q}_p[X]$,

$$v(P(x)) \leq -\log\|P\| + C_x(\deg P)^{\alpha} .$$

Nous démontrerons (théorème 1) que cette notion d'ordre $\leq \alpha$ est stable par extension algébrique, c'est-à-dire que si x est d'ordre $\leq \alpha$ sur $\mathbb{Q}_p$, et si y est transcendant sur $\mathbb{Q}_p$ et algébrique sur $\mathbb{Q}_p(x)$, alors y est également d'ordre $\leq \alpha$.

Enfin nous verrons, grâce à un exemple, que, pour tout $\alpha > 1$, il existe des nombres transcendants sur $\mathbb{Q}_p$, d'ordre $\leq \alpha$. On remarquera par ailleurs que si x est d'ordre $\leq \alpha$, alors $\mathbb{Q}(x)$ admet un type de transcendance $\leq \alpha$.

1. Fonction de transcendance.

Soit $x \in \mathbb{C}_p$, transcendant sur $\mathbb{Q}_p$. Nous appellerons fonction de transcendance du corps $\mathbb{Q}_p(x)$, associée à x, la fonction dg, définie par

$$dg(P/Q) = 1 + \max(\deg P, \deg Q) .$$

où P/Q est irréductible dans $\mathbb{Q}_p(x)$.

Soit y, transcendant sur $\mathbb{Q}_p$, et algébrique de degré q sur $\mathbb{Q}_p(x)$. Nous appellerons fonction de transcendance du corps $\mathbb{Q}_p(x)[y]$, associée à (x, y),

---

(*) Texte reçu le 17 mars 1980.

Alain ESCASSUT, M-11 G' Résidence Compostelle, 33600 PESSAC.

la fonction dg définie de la façon suivante. Pour tout $h \in \mathbb{Q}_p(x)[y]$, h peut s'écrire de la façon unique, à une constante multiplicative près, sous la forme

$$\sum_{i=0}^{q-1} a_i(x)y^i/D(x) ,$$

telle que $D(x)$ soit premier avec le p. g. c. d. de $\{a_0, \ldots, a_{q-1}\}$. Alors soit

$$dg(h) = 1 + \max((\deg(a_0), \ldots, \deg(a_{q-1}), \deg D) .$$

Les propriétés opératoires de la fonction dg sont classiques, et analogues à celles de la taille définie sur une extension transcendante de $\mathbb{Q}$ ([6]), lemme 4.2.5). Le lemme 1 rappelle les principales de ces propriétés.

LEMME 1. - <u>Soit</u> K <u>une extension transcendante de</u> $\mathbb{Q}_p$ <u>de la forme</u> $\mathbb{Q}_p(x)[y]$, <u>où</u> y <u>est transcendant sur</u> $\mathbb{Q}_p$; <u>et soit</u> dg <u>la fonction de transcendance associée à</u> (x, y). <u>Alors il existe une constante</u> $C \in \mathbb{R}^+$ <u>telle que, pour tous</u> $h_1, \ldots, h_m \in K$, <u>on ait</u>

$$dg(h_1 + \ldots + h_m) \leqslant C \sum_{i=1}^{m} dg(h_i) \quad \text{et} \quad dg(h_1 \times \ldots \times h_m) \leqslant C \sum_{i=1}^{m} dg(h_i) ,$$

<u>telle que, pour tous</u> $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Q}_p[x, y]$, <u>on ait</u>

$$dg(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m) \leqslant \max_{i \leqslant m}(dg, \alpha_i) ,$$

<u>et enfin telle que, pour tout</u> $\alpha \in \mathbb{Q}_p[x, y]$ et $\beta \in \mathbb{Q}_p[x]$, <u>on ait</u>

$$dg(\frac{\alpha}{\beta}) \leqslant C \max(dg(\alpha), dg(\beta)) .$$

LEMME 2. - <u>Soit</u> x <u>transcendant sur</u> $\mathbb{Q}_p$; <u>soit</u> $K = \mathbb{Q}_p(x)[u]$ <u>une extension algébrique de</u> $\mathbb{Q}_p(x)$, <u>soit</u> $y \in K$, <u>et soit</u> v <u>algébrique sur</u> $\mathbb{Q}_p(y)$ <u>tel que</u> $K = \mathbb{Q}_p(y)[v]$. <u>Soit</u> dg_1 (resp. dg_2) <u>la fonction de transcendance de</u> K <u>associée au couple</u> (x, u) (resp. (y, v)). <u>Alors il existe une constante</u> B <u>telle que</u>

$$dg_1(h) \leqslant B\, dg(h) \quad \text{et} \quad dg_2(h) \leqslant B\, dg_1(h) , \quad \forall\, h \in K .$$

<u>Preuve</u>. - Montrons d'abord l'existence d'une constante B' telle que

$$(1) \qquad dg_1(P(y)) \leqslant B'\, dg_2(P(y)) , \quad \forall\, P \in \mathbb{Z}_p[X] .$$

D'après le lemme 1, il existe une constante C telle que $dg_1(y^n) \leqslant C\, n\, dg_1(y)$. Alors soit

$$P(y) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j\, y^j \quad (\lambda_j \in \mathbb{Z}_p) ;$$

d'après le lemme 1, on a $dg_1(P(y)) \leqslant C \max_{j \leqslant r} dg(y^j)$, d'où

$$dg_1(P(y)) \leqslant r\, C^2\, dg_1(y) ,$$

ce qui établit la relation (1) en prenant $B' = C^2 \, dg_1(y)$.

Nous allons en déduire l'existence d'une constante B'' telle que la fonction dg_2 vérifie

$$dg_1(h) \leq B'' \, dg_2(h) \ , \quad \forall\, h \in K \ .$$

En effet, h s'écrit $\sum_{i=0}^{s-1} (b_i(y)/D(y)) \, v^i$, soit $h' = \sum_{i=0}^{s-1} b_i(y) \, v^i$; alors on a $dg_1(h) \leq (\max dg_1 \, D(y) \ , \ dg_1(h'))$.

Or, d'après (1), on voit que

$$dg_1(D(y)) \leq B' \, dg_2(D(y)) \ . \tag{2}$$

D'autre part, $dg_1(h') \leq C^2 \max((dg_1 \, b_i(y)) + i \, dg_1(v))$, et d'après (1), on a donc

$$dg_1(h') \leq B' \, C^2 \max_{0 \leq i \leq s-1} dg_2(b_i(y)) + C^2(s-1) \, dg_1(v) \ .$$

Alors, comme $dg_2(b_i(y)) \geq 1$, $\forall\, i$, il existe trivialement $U > 0$ telle que

$$dg_1(h') \leq U \max_{0 \leq i \leq s-1} dg_2(b_i(y))$$

et par suite, grâce à (2), il existe $B'' > 0$ tel que

$$dg_1(h) \leq B'' \, dg_2(h) \ .$$

De même, on montrerait évidemment l'existence de $B''' > 0$ telle que

$$dg_2(h) \leq B''' \, dg_1(h) \ , \quad \forall\, h \in K \ ,$$

ce qui achève de prouver le lemme 2.

COROLLAIRE. - Soit $x \in \underset{\sim}{C}_p$ transcendant sur $\underset{\sim}{Q}_p$, soit $u \in \underset{\sim}{C}_p$, algébrique sur $\underset{\sim}{Q}_p$, et soit $y \in \underset{\sim}{Q}_p(x)[u]$, transcendant sur $\underset{\sim}{Q}_p$. Soit dg_1 (resp. dg_2) la fonction de transcendance de $\underset{\sim}{Q}_p(x)[u]$ associée à $(x \, , \, u)$ (resp. de $\underset{\sim}{Q}_p(y)$ associée à y). Alors il existe $B \in \underset{\sim}{R}^+$ tel que

$$dg_1(h) \leq B \, dg_2(h) \quad \text{et} \quad dg_2(h) \leq B \, dg_1(h) \quad \text{pour tout} \quad h \in \underset{\sim}{Q}_p(y) \ .$$

LEMME 3. - Soit x transcendant sur $\underset{\sim}{Q}_p$, soit u algébrique sur $\underset{\sim}{Q}_p(x)$, et soit $y \in \underset{\sim}{Q}_p(x)[u]$. Soit dg la fonction de transcendance associée au couple $(x \, , \, y)$ dans $\underset{\sim}{Q}_p(x)[u]$. Alors, il existe une constante E telle que, pour tout $h \in \underset{\sim}{Q}_p(x)[u]$, la norme $\gamma(h)$ de h sur $\underset{\sim}{Q}_p(x)$ vérifie

$$E \, dg(h) \geq dg(\gamma(h)) \ .$$

Preuve. - Soit $h = \sum_{i=0}^{q-1} (a_i(x)/D(x)) \, u^i$, où q est le degré de u sur $\underset{\sim}{Q}_p(x)$. Soient $u_j = u_1 \, , \, u_2 \, , \, \ldots \, , \, u_q$ des conjugués de u sur $\underset{\sim}{Q}_p(x)$. Alors

$$\gamma(h) = \prod_{j=1}^{q} \left(\sum_{i=0}^{q-1} (a_i(x)/D(x))\, u_j^i\right) .$$

On voit que $\gamma(h)$ est de la forme $\sum_{\ell=1}^{q} (A_\ell(x)/D(x)^q)\, v_\ell$, où chaque A_ℓ est une somme de produits de q facteurs de la forme a_i , et où les v_ℓ sont les fonctions symétriques de $u_1 , \dots , u_q$. Les v_ℓ appartiennent donc à $\mathbb{Q}_p(x)$. Soit $V = \max_{1\leq \ell\leq q} (\mathrm{dg}\ v_\ell)$; on voit que $\mathrm{dg}\ \gamma(h) \leq C(V + \max((\mathrm{dg}\ A_\ell)_{\ell\leq q} , q \deg D))$.

Or, les A_ℓ étant des sommes de produits de q facteurs de la forme a_i , on voit que si l'on pose $A = \max(\mathrm{dg}\ a_i)$, on a $\deg A_\ell \leq qA$, et finalement

$$\mathrm{dg}(\gamma(h)) \leq q\ \mathrm{dg}(h) + CV .$$

Par suite il existe une constante $E \geq \max(q , CV)$ telle que

$$\mathrm{dg}(\gamma(h)) \leq E\ \mathrm{dg}(h) , \quad \forall\ h \in \mathbb{Q}_p(x)[u] .$$

2. Filtres circulaires.

Notations et définitions. - Soit $a \in \mathbb{C}_p$, et soit $r \geq 0$. On notera désormais $d(a , r)$ le disque circonférencié de centre a , de diamètre r

$$\{\lambda \in C_p ; \ |\lambda - a| \leq r\} \quad \text{et} \quad C(a , r) = \{\lambda \in C_p ; \ |\lambda - a| = r\} .$$

Soient $r_1 , r_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $0 < r_1 < r_2$. On notera $\Gamma(a , r_1 , r_2)$ l'ensemble $\{\lambda \in C_p ; \ r_1 < |a - \lambda| < r_2\}$.

On définit de la façon suivante la notion de filtre circulaire ([2],[4]).

Pour toute suite strictement décroissante Φ , de disques D_n , on note $\hat{\Phi}$ la famille des couronnes $\Gamma(a , r_1 , r_2)$ $(a \in \bigcap_{n\in \mathbb{N}} D_n , \ r_1 < \lim_n \mathrm{diam}(D_n) < r_2)$, et l'on appelle filtre circulaire un filtre $\mathcal{F}$ engendré par une famille de la forme $\Phi \cup \hat{\Phi}$.

Le disque $\bigcap_{n\in \mathbb{N}} D_n$ est noté $\Delta(\mathcal{F})$, et tout point de $\Delta(\mathcal{F})$ est appelé centre de $\mathcal{F}$.

Le nombre $\lim_{n\infty} \mathrm{diam}(D_n)$ est appelé diamètre de $\mathcal{F}$.

On appelle filtre circulaire large un filtre circulaire de diamètre non nul.

On sait ([2],[4]) que tout filtre circulaire large $\mathcal{F}$ définit une valeur absolue $\varphi_{\mathcal{F}}$ sur $\mathbb{C}_p[X]$ par

$$\varphi_{\mathcal{F}}(P) = \lim_{\mathcal{F}} |P(\lambda)| ,$$

et que l'application $\mathcal{F} \longrightarrow \varphi_{\mathcal{F}}$ est une bijection de l'ensemble des filtres circulaires larges de $\mathbb{C}_p$ sur l'ensemble des valeurs absolues de $\mathbb{C}_p[X]$. Pour toute valeur absolue ψ de $\mathbb{C}_p[X]$, on appelle filtre circulaire associé le filtre circulaire $\mathcal{F}$ tel que $\psi = \varphi_{\mathcal{F}}$.

Soit $a \in \underset{\sim}{C}_p$, et soit $\mu \in \underset{\sim}{R}$; soit $\mathfrak{F}$ le filtre circulaire de centre a et de diamètre $p^{-\mu}$. On notera

$$v_a(P , \mu) = \lim_{\mathfrak{F}} v(P(\lambda)) ,$$

et en particulier si $a = 0$, on notera $v(P , \mu) = v_0(P , \mu)$.

Alors, on sait que $-\log \|P\| = v(P , 0)$ ([1],[2]). D'autre part, on retient des résultats classiques ([1],[2]) le lemme 4 qui sera utile par la suite.

LEMME 4.

(i) Soient a et $b \in \underset{\sim}{C}_p$, et soit $\mu \leqslant v(a - b)$. Alors, pour tout $P \in \underset{\sim}{C}_p[X]$, on a $v_a(P , \mu) = v_b(P , \mu)$.

(ii) Soient $\mu_1 \geqslant \mu_2$; soit $a \in \underset{\sim}{C}_p$, et soit $Q \in \underset{\sim}{C}_p[X]$. Soit q_1 (resp. q_2) le nombre des zéros de Q dans $d(a , p^{-\mu_1})$ (resp. dans $d(a , p^{-\mu_2})$. Alors

$$v_a(Q , \mu_1) - v_a(Q , \mu_2) \in [q_2(\mu_1 - \mu_2) , q_1(\mu_1 - \mu_2)] .$$

LEMME 5. - Soit $\mathfrak{F}$ un filtre circulaire de $\underset{\sim}{C}_p$ de diamètre R . Alors, pour tout polynôme $P(x) \in \underset{\sim}{C}_p[X]$, on a

$$\lim_{\mathfrak{F}} |P(\lambda)| \geqslant \|P\| R^{\deg P} .$$

Preuve. - Soit w la valuation définie sur $\underset{\sim}{C}_p[X]$ par $w(P) = - \lim_{\mathfrak{F}} v(P(\lambda))$. Soit $\rho = - \log R$. Soit $\Phi = (D_n)_{n\in N}$ une suite de disques strictement décroissante telle que $\mathfrak{F}$ soit engendré par $\Phi \cup \hat{\Phi}$. Il existe un nombre $M \in \underset{\sim}{R}^+$ unique tel que $\mathfrak{F}$ soit sécant à $C(0 , M)$: Si 0 est centré de $\mathfrak{F}$, alors $M = R$, et sinon M est la distance de 0 aux disques D_n quand n est assez grand. Soit $\mu = - \log M$. D'après le lemme 4 (ii), on a

$$(3) \qquad v(P , \mu) \leqslant - \log \|P\| + \mu \deg P , \quad \forall P \in \underset{\sim}{C}_p[X] .$$

Nous allons évaluer maintenant $v(P , \mu) - w(P)$.

Supposons d'abord $\Delta(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$, et soit $a \in \Delta(\mathfrak{F})$. Alors on a

$$(4) \qquad w(P) = \lim_{v(\lambda-a)\underset{\neq}{\to}\rho} v|P(\lambda)| .$$

Mais

$$(5) \qquad \lim_{v(\lambda-a)\underset{\neq}{\to}\rho} v|P(\lambda)| = v_a(P , \rho) .$$

Or, d'après le lemme 4 (ii), on a

$$(6) \qquad v_a(P , \rho) \leqslant v_a(P , \mu) + (\rho - \mu) \deg P .$$

Mais par hypothèse, $\mathfrak{F}$ est sécant au cercle $C(0 , \mu)$ de sorte que $v(a) \geqslant \mu$, et par suite, d'après le lemme 4 (i), $v_a(P , \mu) = v(P , \mu)$, de sorte que, d'après

(2), (3), (4), on obtient

$$w(P) - v(P\ ,\ \mu) \leqslant (\rho - \mu) \deg P\ ,$$

et, grâce à (3), on voit que

$$w(P) \leqslant -\log \|P\| + \rho \deg P\ .$$

Supposons maintenant $\Delta(\mathfrak{F}) = \emptyset$. Pour tout n, il existe un filtre circulaire unique $\mathfrak{F}_n$ tel que $\Delta(\mathfrak{F}_n) = D_n$. Chacun de ces filtres $\mathfrak{F}_n$ définit une valuation w_n de $\underset{\sim}{C}_p[X]$ (par $w_n(P) = \lim_{\mathfrak{F}_n} v(P(\lambda)))$, et on sait que la suite w_n converge (pour la convergence simple) vers w ([2],[4],[5]). Alors on voit que, pour tout $P(X) \in \underset{\sim}{C}_p[X]$, on a

$$w_n(P) \leqslant -\log \|P\| - \log(\mathrm{diam}(\mathfrak{F}_n)) \ \deg P\ ,$$

et comme $\mathrm{diam}\ \mathfrak{F}_n = \mathrm{diam}\ D_n$, on voit qu'à la limite on a

$$w(P) \leqslant -\log \|P\| - \log(\mathrm{diam}(\mathfrak{F}_n)) \ \deg P\ ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 5.

3. Semi-normes multiplicatives de $\underset{\sim}{Q}_p$-algèbre.

Soit K un corps muni d'une valeur absolue $|.|$, et soit A une K-algèbre commutative unitaire.

Rappelons que l'on note $\mathrm{Mult}(A)$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives de K-algèbres de A, c'est-à-dire des semi-normes de K-espace vectoriel telles que

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\ \varphi(y)\ ,\quad \forall\ x\ ,\ y \in A\ \ [5]\ .$$

On note $\mathrm{Mult}_m(A)$ l'ensemble des éléments φ de $\mathrm{Mult}(A)$ dont le noyau, c'est-à-dire l'idéal premier des $x \in A$ tels que $\varphi(x) = 0$, est un idéal maximal, et on note $\mathrm{Mult}_a(A)$ l'ensemble des éléments de A dont le noyau est un idéal maximal de codimension finie.

LEMME 6. - <u>Soit A une $\underset{\sim}{Q}_p$-algèbre commutative unitaire, et soit</u> $\varphi \in \mathrm{Mult}_a(A)$. <u>Alors il existe un homomorphisme de $\underset{\sim}{Q}_p$-algèbre θ de A dans $\underset{\sim}{C}_p$ tel que</u>

$$\varphi(x) = |\theta(x)|\ ,\quad \forall\ x \in A\ .$$

<u>Preuve</u>. - Soit $\mathfrak{M} = \mathrm{Ker}\ \varphi$; le corps $K = A/\mathfrak{M}$ est une extension algébrique finie de $\underset{\sim}{Q}_p$ que l'on peut plonger dans $\underset{\sim}{C}_p$ par un homomorphisme Λ et si l'on note χ la surjection canonique de A sur K l'homomorphisme $\theta = \Lambda \circ \chi$ envoie A dans $\underset{\sim}{C}_p$. Alors K est muni de la valeur absolue ψ induite par celle de $\underset{\sim}{C}_p$:

$$\psi(y) = |\Lambda(y)|\ ,\quad \forall\ y \in K\ ,$$

et, d'après le lemme de Krasner [1], nous savons que c'est la seule valeur absolue de K prolongeant celle de $\mathbb{Q}_p$. Or φ permet de définir sur K une valeur absolue ψ' qui prolonge celle de $\mathbb{Q}_p$, en posant $\psi'(\lambda(x)) = \varphi(x)$ $(x \in A)$. Par suite, $\psi' = \psi$, et l'on a bien

$$\varphi(x) = |\theta(x)| , \quad \forall\ x \in A .$$

Soit $|.|_\infty$ la valeur absolue archimédienne de $\mathbb{R}$.

Rappelons que, pour tout polynôme $P(X, Y) = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j$ appartenant à $\mathbb{Z}[X, Y]$, on note

$$H(P) = \max_{i,j} |a_{ij}| \quad \text{et} \quad t(P) = \max(\deg_X(P) + 1 , \deg_Y(P) + 1 , \log H(P)) .$$

LEMME 7. - <u>Pour tout</u> $\Phi \in \mathrm{Mult}\,\mathbb{Q}_p[X, Y]$, <u>il existe une suite</u> Φ_n <u>de</u> $\mathrm{Mult}_a\,\mathbb{Q}_p[X, Y]$ <u>telle que</u> $\Phi = \lim_{n\to\infty} \Phi_n$, <u>pour la topologie de la convergence simple.</u>

<u>Preuve</u>. - Ce résultat est un raffinement (facile à établir lorsque le corps de base est $\mathbb{Q}_p$) ([5], chapitre III, proposition 1), montrant ici que $\mathrm{Mult}_m\,\mathbb{Q}_p[X, Y]$ est dense dans $\mathrm{Mult}\,\mathbb{Q}_p[X, Y]$. En effet, on sait que $\mathrm{Mult}_m\,\mathbb{Q}_p[X, Y] = \mathrm{Mult}_a\,\mathbb{Q}_p[X, Y]$ (puisque les idéaux maximaux d'un anneau $K[X, Y]$, où K est un corps, sont de codimension finie). Ainsi $\mathrm{Mult}_a\,\mathbb{Q}_p[X, Y]$ étant dense dans $\mathrm{Mult}\,\mathbb{Q}_p[X, Y]$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $\psi_n \in \mathrm{Mult}_a\,\mathbb{Q}_p[X, Y]$ tel que, pour tout polynôme $F(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ vérifiant $t(F) \leq n$, on ait

$$\psi_n(F) - \psi(F) < \frac{1}{p^n} .$$

Vérifions que la suite ψ_n converge bien vers ψ. En effet, soit $G(X, Y)$ appartenant à $\mathbb{Q}_p[X, Y]$, il existe $\rho \in \mathbb{Z}$ tel que $\rho G \in \mathbb{Z}_p[X, Y]$. Pour tout entier n, il existe évidemment $F(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ tel que $t(F) \leq n$ et tel que $\|F - \rho G\| \leq 1/p^n$. Comme $\psi_n \in \mathrm{Mult}_a\,\mathbb{Q}_p[X, Y]$, ψ_n est évidemment continue (d'après le lemme 6) pour la norme canonique $\|.\|$ de $\mathbb{Q}_p[X, Y]$ et, d'après les résultats classiques sur les semi-normes multiplicatives ([4],[5]), on sait que $\psi_n(P) \leq \|P\|$ pour tout $P \in \mathbb{Q}_p[X, Y]$. Donc ici, $\psi_n(F - \rho G) \leq 1/p^n$ et $\psi(F - \rho G) \leq 1/p^n$. Alors, a fortiori, on voit que

$$|\psi(F) - \psi(\rho G)|_\infty \leq 1/p^n \quad \text{et} \quad |\psi_n(F) - \psi_n(\rho G)|_\infty \leq 1/p^n ,$$

et on en déduit que

$$|\psi(\rho G) - \psi_n(\rho G)|_\infty \leq |\psi(\rho G) - \psi(F)|_\infty + |\psi(F) - \psi_n(F)|_\infty + |\psi_n(F) - \psi_n(\rho G)|_\infty \leq 3/p^n .$$

Finalement,

$$|\psi(G) - \psi_n(G)|_\infty = \left|\frac{1}{|\rho|}(\psi(\rho G) - \psi_n(\rho G))\right|_\infty = \frac{1}{|\rho|} |\psi(\rho G) - \psi_n(\rho G)|_\infty \leq \frac{3}{\rho p^n} ,$$

ce qui prouve que $\lim_{n\infty} \psi_n(G) = \psi(G)$, et le lemme 7 est donc démontré.

4. Valeurs absolues d'extensions transcendantes de $\underset{\sim}{Q}_p$.

LEMME 8. - Soit une valeur absolue φ du corps $\underset{\sim}{Q}_p(X)$ qui prolonge celle de $\underset{\sim}{Q}_p$. Alors il existe un filtre circulaire $\mathfrak{F}$ de $\underset{\sim}{C}_p$ tel que

$$\varphi(h) = \lim_{\mathfrak{F}} |h(\lambda)| \ , \quad \forall\ h \in \underset{\sim}{Q}_p(X) \ .$$

De plus, si $\mathfrak{F}$ converge vers un point $\alpha \in \underset{\sim}{C}_p$, alors α est transcendant sur $\underset{\sim}{Q}_p$.

Preuve. - Soit Ω_p une clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$. Alors $\Omega_p(X)$ admet une valeur absolue $\tilde{\varphi}$ qui prolonge φ . Supposons d'abord que Ω_p soit dense dans $\Omega_p(X)$ pour la topologie de $\tilde{\varphi}$. Alors, dans ce cas, il existe un homomorphisme continu de $\Omega_p(X)$ dans $\underset{\sim}{C}_p$; on voit que X apparaît comme un élément α de $\underset{\sim}{C}_p$ et par suite, on a

$$\varphi(h) = |h(\alpha)| \ , \quad \forall\ h \in \Omega_p(X) \ .$$

En particulier, on voit que le filtre des voisinages de α est bien le filtre $\mathfrak{F}$ annoncé, α étant transcendant sur $\underset{\sim}{Q}_p$ par hypothèse.

Supposons maintenant que Ω_p ne soit pas dense dans $\underset{\sim}{\Omega}_p(X)$, et soit $\hat{\Omega}_p$ le complété de Ω_p pour $\tilde{\varphi}$. On voit que $\hat{\Omega}_p(X)$ est muni d'une valeur absolue $\hat{\varphi}$ qui prolonge naturellement φ et comme $\hat{\Omega}_p$ est isométriquement isomorphe à $\underset{\sim}{C}_p$, $\hat{\varphi}$ apparaît comme une valeur absolue sur $\underset{\sim}{C}_p(X)$. Alors on sait ([2],[4]) que $\hat{\varphi}$ est définie par un filtre circulaire large $\mathfrak{F}$ tel que

$$\hat{\varphi}(h) = \lim_{\mathfrak{F}} |h(\lambda)| \ , \quad \forall\ h \in \hat{\Omega}_p(X) \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

LEMME 9. - Soit x transcendant sur $\underset{\sim}{Q}_p$. Soit y transcendant sur $\underset{\sim}{Q}_p$, mais algébrique sur $\underset{\sim}{Q}_p(x)$, et soit φ une valeur absolue définie sur $\underset{\sim}{Q}_p(x)[y]$ telle que le filtre circulaire, associé à sa restriction à $\underset{\sim}{Q}_p(x)$, soit large. Alors le filtre circulaire associé à la restriction de φ à $\underset{\sim}{Q}_p(y)$ est large.

Preuve. - Soit $\mathfrak{K}$ le filtre circulaire large associé à la restriction de φ à $\underset{\sim}{Q}_p(x)$, et soit $\mathfrak{F}$ le filtre circulaire associé à la restriction de φ à $\underset{\sim}{Q}_p(y)$. Supposons que $\mathfrak{F}$ converge vers un point $\alpha \in \underset{\sim}{C}_p$. On a donc

$$\varphi(h(y)) = |h(\alpha)| \ , \quad \forall\ h \in \underset{\sim}{Q}_p(X) \ .$$

Soit ψ la semi-norme multiplicative de $\underset{\sim}{Q}_p[x\ ,\ Y]$, définie par

$$\psi(F(x\ ,\ Y)) = \varphi(F(x\ ,\ y)) \ , \quad \forall\ F(x\ ,\ Y) \in \underset{\sim}{Q}_p[x\ ,\ Y] \ .$$

Alors d'après le lemme 7, il existe une suite $\Phi_n \in \mathrm{Mult}_a\, \underset{\sim}{Q}_p[x\ ,\ Y]$ telle que

$\lim_{n\to\infty}\Phi_n = \psi$.

Or, d'après le lemme 6, un élément Φ de $\mathrm{Mult}_a\, \mathbb{Q}_p[x , Y]$ est associé à un homomorphisme unique χ de $\mathbb{Q}_p[x , Y]$ dans $\mathbb{C}_p$ par

$$\Phi(F(x , Y)) = |\chi(F(x , Y))| = |F(\chi(x) , \chi(Y))| , \quad \forall\ F(x , Y) \in \mathbb{Q}_p[x , Y] .$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit χ_n l'homomorphisme de $\mathbb{Q}_p[x , Y]$ dans $\mathbb{C}_p$ tel que $\Phi_n = |\chi_n|$. Soit $\lambda_n = \chi_n(x)$, et soit $\mu_n = \chi_n(Y)$. On a donc

$$\Phi_n(F(x , Y)) = F(\lambda_n , \mu_n) \quad (\forall\ F \in \mathbb{Q}_p[x , Y]) ,$$

et par suite on voit que $\lim_{r\to\infty}\mu_n = \alpha$. Alors la suite ψ_n de $\mathrm{Mult}_a\, \mathbb{Q}_p[x , Y]$, définie par $\psi_n(F(x , Y)) = F(\lambda_n , \alpha)$, converge, elle aussi vers ψ .

Remarquons d'autre part que, puisque la restriction de ψ à $\mathbb{Q}_p(x)$ est associée à un filtre circulaire large, la suite λ_n est plus fine qu'un filtre circulaire large $\mathcal{H}$.

Soit $M(x , Y) \in \mathbb{Q}_p(x)[Y]$ le polynôme minimal de y sur $\mathbb{Q}_p(x)$. On voit que $\lim_{n\to\infty}\psi_n(M(x , Y)) = 0$ (puisque trivialement $\psi(M(x , Y)) = 0$) et par suite on a

$$\lim_{r\to\infty} M(\lambda_n , \alpha) = 0 .$$

Alors la fraction $h(X) = M(X , \alpha) \in \mathbb{C}_p(X)$, qui vérifie $\lim_{r\to\infty} h(\lambda_n) = 0$, satisfait également $\lim_{\mathcal{H}} |h(\lambda)| = 0$, et comme $\mathcal{H}$ est large, et définit sur $\mathbb{Q}_p(x)$ une valeur absolue, il en résulte que $h = 0$, ce qui entraîne que α est algébrique sur $\mathbb{Q}_p$, et c'est en contradiction avec le lemme 3.

Ainsi on voit que $\mathfrak{F}$ est large.

5. Eléments d'ordre $\leqslant \alpha$.

Soit $x \in \mathbb{C}_p$, transcendant sur $\mathbb{Q}_p$. Nous dirons que x est d'ordre $\leqslant \alpha$ s'il existe une constante $C_x \in \mathbb{R}^+$ telle que, pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{Q}_p[X]$, on ait

$$v(P(x)) \leqslant -\log \|P\| + C_x(\deg P)^{\alpha} .$$

Remarque 1. - Si $\alpha < 1$, il n'existe aucun élément d'ordre $\leqslant \alpha$; il suffit de considérer la suite X^n pour le constater.

Remarque 2. - Un nombre $x \in \mathbb{C}_p$ est d'ordre $\leqslant \alpha$ si, et seulement si, la relation $v(P)(x) \leqslant C_x(\deg P)^{\alpha}$ est vraie pour tous les polynômes P vérifiant $\|P\| = 1$.

Remarque 3. - Si x est d'ordre $\leqslant \alpha$, alors tout polynôme $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ vérifie

$$v(P(x)) \leqslant -\log \|P\| + C_x(\deg P)^{\alpha} .$$

or $\|P\| \geqslant 1/H(P)$, et par suite (en choisissant $C_x \geq 1$) on voit que

$$vP(x) \leq C_x\, t(P)^\alpha ,$$

ce qui montre que $\underset{\sim}{Q}(x)$ a un type de transcendance sur $\underset{\sim}{Q}$ inférieur ou égal à α .

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $x \in \underset{\sim}{C}_p$, <u>transcendant sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$, <u>et soit</u> $y \in \underset{\sim}{C}_p$, <u>transcendant sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>mais algébrique sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p(x)$. <u>Alors, si</u> x <u>est d'ordre</u> $\leqslant \alpha$ <u>sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$, y <u>est également d'ordre</u> $\leq \alpha$ <u>sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$.

<u>Preuve</u>. - Soit $K = \underset{\sim}{Q}_p(x)[y]$, et soit dg_1 (resp. dg_2) la fonction de transcendance de K (resp. de $\underset{\sim}{Q}_p(y)$) associée à (x , y) (resp. à y) .

Soit $D \in \underset{\sim}{Q}_p[x]$ un dénominateur de y sur $\underset{\sim}{Q}_p[x]$, tel que $\|D\| = 1$. Alors il est clair que, pour tout $i = 2 , \ldots , n$, et pour tout polynôme $F(X) \in \underset{\sim}{Q}_p(X)$, $D^{\deg F} F(y_i)$ est entier algébrique sur $\underset{\sim}{Q}_p[x]$. On voit donc que $D^{n\deg F}\, \gamma(F(y))$ est de la forme $R(x) \in \underset{\sim}{Q}_p[x]$ et alors, comme x est d'ordre $\leq \alpha$, par définition on a

$$v(R(x)) \leq - \log \|R\| + C_x(\deg R)^\alpha .$$

Soit w une valuation de K associée à une valeur absolue qui prolonge la valeur absolue canonique de $\underset{\sim}{Q}_p(x)$. On a donc

$$v(R(x)) \leqslant w(R(x)) + C_x(dg_1\, R(x))^\alpha . \tag{7}$$

Soit $t = dg_1(D)$, et soit $a = - \inf(v(x) , 0)$. Il est clair que $v(D) \geq - at$.

Soit $b = \max_{i=2,\ldots,n}(- \inf v(y_i) , 0))$; on voit que $v(F(y_i)) > - b \deg F$ et par suite, on obtient

$$v(D(x)^{n\deg F}\, \gamma(F(y))) \geqslant v(F(y)) - (n - 1)\, b \deg F - ant \deg F ,$$

et donc a fortiori

$$v(D^{n\deg F}\, \gamma(F(y))) \geq v(F(y)) - n(ta + b) \deg F ,$$

de sorte que, d'après (7), on obtient la relation

$$v(F(y)) \leq n(at + b) + w(D(x)^{n\deg F}\, \gamma(F(y))) + c_x(dg_1(D(x)^{n\deg F}\, \gamma(F(y))))^\alpha . \tag{8}$$

Considérons d'abord $dg_1(D(x)^{n\deg F}\, \gamma(F(y)))$.

D'après le lemme 2, pour tout polynôme $F(y) \in \underset{\sim}{Q}_p[Y]$, on a

$$dg_1(D^{n\deg F}\, \gamma(F(y))) \leq dg_1(D^{n\deg F}) + dg_1(\gamma(F(y))) , \tag{9}$$

et

$$dg_1(D^{n\deg F}) = nt \deg F = nt\, dg_2(F(y)) .$$

D'autre part, d'après le lemme 3, on sait qu'il existe $A \in \underset{\sim}{R}^+$ tel que

$$dg_1(\gamma(F(y))) \leq A\ dg_1(F(y))\ ,\quad \forall\ F \in \underset{\sim}{Q}_p[Y]\ ,$$

et d'autre part, grâce au corollaire du lemme 2, on sait qu'il existe $B \in \underset{\sim}{R}^+$ tel que

$$dg_1\ F(y) \leq B\ dg_2(F(y))\ ,\quad \forall\ F \in \underset{\sim}{Q}_p[Y]\ ,$$

d'où finalement la relation (9) nous donne

$$dg_1(D(x)^{n\deg F}\ \gamma(F(y))) \leq (nt + AB)\ dg_2\ F(y)\ ,$$

c'est-à-dire

(10) $$dg_1(D(x)^{n\deg F}\ \gamma(F(y))) \leq (nt + AB)(\deg(F) + 1)\ .$$

Considérons maintenant $w(D(x)^{n\deg F}\ \gamma(F(y)))$; puisque $\|D\| = 1$, on voit que

(11) $$w(D(x)^{n\deg F}\ \gamma(F(y))) = w(\gamma(F(y)))\ .$$

Maintenant, comme la valeur absolue canonique $\|\cdot\|$ de $\underset{\sim}{Q}_p$ est définie par le filtre circulaire $\mathcal{U}$ de centre 0 , de rayon 1 , on sait, grâce au lemme 9, qu'il existe un filtre circulaire large $\mathcal{F}$, de diamètre T_1 , tel que, pour tout $F \in \underset{\sim}{Q}_p[Y]$, on ait

$$w(F(y)) = \lim_{\mathcal{F}} v(F(\gamma))\ ,$$

et par suite, d'après le lemme 5, on a

$$w(F(y)) \leq -\log \|F\| + T_1 \deg F\ ,$$

de même, pour chaque conjugué y_i $(2 \leq i \leq n)$ de y sur $\underset{\sim}{Q}_p(x)$, il existe $T_i > 0$ tel que $w(F(y_i)) \leq -\log \|F\| + T_i \deg F$, d'où une constante $T > 0$ telle que

$$w(\gamma(F(y))) \leq -n \log \|F\| + T \deg F\ ,$$

et donc, grâce à (11), que tout polynôme $F \in \underset{\sim}{Q}_p[Y]$ vérifiant $\|F\| = 1$ satisfait la relation

$$w(D(x)^{n\deg F}\ \gamma(F(y))) \leq T \deg F\ .$$

Alors d'après (9) et (10), on voit qu'on obtient la relation (12), vraie pour tout polynôme $F \in \underset{\sim}{Q}_p[Y]$ tel que $\|F\| = 1$.

(12) $$v(F(y)) \leq n((at + b) + T)(\deg(F) + 1) + C_x(nt + AB)^{\alpha}\ (\deg(F) + 1)^{\alpha}\ ,$$

et comme $\alpha \geq 1$, on voit que (12) donne a fortiori

$$v(F(y)) \leq C_y(\deg F)^{\alpha}\ ,$$

en posant

$$C_y = 2[n(at + b + T) + C_x(nt + AB)^{\alpha}]\ ,$$

pour tout polynôme $F(Y)$ tel que $\|F\| = 1$ et $\deg F \geqslant 1$, et comme le cas $\deg F = 0$ est trivial, cette relation est vraie quel que soit $\deg F$, ce qui achève la démonstration du théorème 1 grâce à la remarque 1 qui précède le théorème 1.

Le théorème 1 permet de définir la notion d'ordre de transcendance $\leqslant \alpha$ pour une extension de $\underset{\sim}{Q}_p$ de degré de transcendance égal à 1 .

Nous dirons qu'une <u>extension transcendante</u> K <u>de</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>de degré de transcendance 1 sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>a un ordre</u> $\leqslant \alpha$ <u>si ses éléments transcendants sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>ont un ordre de transcendance</u> $\leqslant \alpha$.

COROLLAIRE. - <u>Une extension transcendante</u> E <u>de</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>de degré de transcendance 1 sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>est d'ordre</u> $\leqslant \alpha$ <u>si, et seulement si, l'un au moins de ses éléments est d'ordre</u> $\leqslant \alpha$.

6. Existence d'éléments d'ordre $\leqslant \alpha$

Nous avons remarqué que si $\alpha < 1$, il n'existe aucun élément d'ordre $\leqslant \alpha$. Nous allons montrer que, par contre, si $\alpha > 1$, il existe des éléments d'ordre $\leqslant \alpha$.

THÉORÈME 2. - <u>Pour tout</u> $\alpha > 1$, <u>il existe des nombres de</u> $\underset{\sim}{C}_p$ <u>transcendants sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$, <u>d'ordre</u> $\leqslant \alpha$.

<u>Preuve</u>. - En pratique, on va établir la proposition suivante.

PROPOSITION. - <u>Soit</u> $\epsilon > 0$, <u>soit</u> $r_n = u_n/v_n$ <u>une suite de</u> $\underset{\sim}{Q}$, <u>et soit</u> a_n <u>une suite de</u> $\underset{\sim}{C}_p$ <u>telles que</u> :

(i) $r_n \longrightarrow \infty$ <u>quand</u> $n \longrightarrow \infty$,

(ii) $r_n < n^{\epsilon}$,

(iii) a_n <u>est une racine</u> v_n<u>-ième de</u> p^{u_n} ,

(iv) <u>Pour tout</u> $n \in \underset{\sim}{N}$, <u>pour tout</u> $m = 1 , \ldots , n$, mr_n <u>n'appartient pas au groupe de valuation du corps</u> $X_{n-1} = \underset{\sim}{Q}(a_1 , \ldots , a_{n-1})$.

<u>Alors</u> $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>est transcendant sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>et d'ordre</u> $\leqslant 1 + \epsilon$.

En effet, dans [3], nous avons montré que $\underset{\sim}{Q}(x)$ a un type de transcendance $\leqslant 1 + \epsilon$. Mais en fait, pour établir ce résultat, on a montré plus précisement que x vérifie $v(P(x)) \leqslant (\deg P)^{1+\epsilon}$, $P(x) \in \underset{\sim}{Z}[X]$ tel que $\|P\| = 1$, pour tout polynôme, donc aussi bien pour tout $P(X) \in \underset{\sim}{Z}_p[X]$ tel que $\|P\| = 1$, ce qui prouve bien que x est d'ordre $\leqslant 1 + \epsilon$.

<u>Remarque</u>. - La question de savoir s'il existe des éléments d'ordre $\leqslant 1$ reste ouverte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 14).

[2] ESCASSUT (Alain). - Eléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe, Annali di Mat. pura ed apl., Bologna, t. 110, 1976, p. 335-352.

[3] ESCASSUT (Alain). - Type de transcendance p-adique, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 5e année, 1977/78, n° 8, 10 p.

[4] GARANDEL (Gérard). - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, Indagationes Mathematicae, t. 37, 1975, p. 327-341.

[5] GUENNEBAUD (Bernard). - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques, Thèse d'Etat de l'Université de Poitiers-I, 1973.

[6] WALDSCHMIDT (Michel). - Nombres transcendants. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 402).