Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Daniel Barsky

Majoration du nombre de zéros dans un disque des fonctions L p-adiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. nº 29, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A13_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1979-1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
8e année, 1980/81, n° 29, 10 p.

16 mars 1981

MAJORATION DU NOMBRE DE ZÉROS DANS UN DISQUE DES FONCTIONS L p-ADIQUES

par Daniel BARSKY (*)
[Université Paris-7]

Résumé. - Soit χ un caractère de Dirichlet primitif pair de conducteur f_χ, et soit $L_p(s, \chi)$ la fonction L p-adique associée. Si $f_\chi = mqp^n$ avec $(m, p) = 1$ et n suffisament grand (la borne ne dépendant que de m et p), alors la fonction L_p n'a pas de zéros. On montre aussi que le nombre de zéros, $N_p(\rho, \chi)$, de la fonction $(s-1) L_p(s, \chi)$ dans le disque de centre -1 et de rayon $0 \leq \rho < \rho_p$ avec $\rho_p = p^{1-(1/(p-1))}$ si $p \neq 2$ (resp. $\rho_2 = 2$) est majoré par

$$N_p(\rho, \chi) \leq \frac{(3\varphi(f_\chi p) + 1) \log_p(p f_\chi) + 2\varphi(p f_\chi) \log_p 54}{\log \rho_p - \log \rho},$$

et on indique comment on peut améliorer ce résultat si $f_\chi = mqp^n$ avec n suffisament grand.

1. Notations et rappel.

Toutes les notations non définies sont celles d'AMICE [1] ou IWASAWA [4].

Soit p un nombre premier, $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ (on choisit un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$) ; $\mathbb{C}_p$ est muni d'une valeur absolue p-adique notée $|\ |$, et normalisée par $|p| = p^{-1}$.

Si $a \in \mathbb{C}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note

$$D(a, r)^+ = \{x \in \mathbb{C}_p ; \ |x - a| \leq r\}$$

$$D(a, r)^- = \{x \in \mathbb{C}_p ; \ |x - a| < r\} .$$

Les caractères de Dirichlet sont supposés primitifs et prolongés à $\mathbb{Z}$. On désigne par $\sum'_{a=0}^{N}$ une sommation sur les entiers premiers à p compris entre 0 et N.

Définition 1. - Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur f_χ divisant f $(\neq 0)$. On pose

$$(1) \qquad \sum_{n \geq 0} B_{n,\chi} \frac{X^n}{n!} = \sum_{a=0}^{f-1} \chi(a) \frac{X e^{aX}}{e^{fX} - 1} .$$

(*) Texte reçu le 25 mai 1981.

Daniel BARSKY, UER Mathématiques, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

Si $\chi = \epsilon$ caractère trivial, on pose $B_n = B_{n,\epsilon}$.

PROPOSITION 1. - Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur f_χ divisant f $(\neq 0)$. Alors

$$(2) \qquad B_{n,\chi} = \frac{1}{f} \sum_{a=0}^{f-1} \chi(a) \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m+1} \times \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (a + fk)^n .$$

C'est évident en identifiant les coefficients de X^n dans les 2 membres de (1).

2. Analyse p-adique

On définit par $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p , \mathbb{C}_p)$ l'espace des applications continues de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{C}_p$, par $\mathcal{UC}^1(\mathbb{Z}_p , \mathbb{C}_p)$ l'espace des applications continûment et uniformément différentiables de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{C}_p$, muni de la norme

$$\|g\|_1 = \max\{\sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |g(x)| , \sup_{(x,y) \in \mathbb{Z}_p^2} \left|\frac{g(x) - g(y)}{x - y}\right|\} .$$

Le dual topologique de $\mathcal{UC}^1(\mathbb{Z}_p , \mathbb{C}_p)$, qui est noté $\mathcal{UC}^1(\mathbb{Z}_p , \mathbb{C}_p)$, est appelé l'espace des distributions sur $\mathbb{Z}_p$.

Définition 2. - Soit

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!} , \quad n \neq 0 \quad (\text{resp. } \binom{x}{0} = 1) .$$

Alors il existe une unique distribution sur $\mathbb{Z}_p$, μ , telle que

$$\forall\, n \geq 0 , \quad \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} d\mu(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} .$$

En effet, il est bien connu [3] que $g \in \mathcal{UC}^1(\mathbb{Z}_p , \mathbb{C}_p) \Longleftrightarrow$ il existe une suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{C}_p$ telle que

$$(i) \qquad \lim_{n \to \infty} n|\lambda_n| = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}_p , \quad g(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n \binom{x}{n} .$$

L'existence et l'unicité de μ sont alors évidents [7].

LEMME 1. - Si $g \in \mathcal{UC}^1(\mathbb{Z}_p , \mathbb{C}_p)$, alors

$$\int g d\mu = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} g(k) = \lim_{h \to \infty} \frac{1}{rp^h} \sum_{a=0}^{rp^h - 1} g(a) .$$

La première égalité est la définition même de $\int g\, d\mu$, car

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n \binom{x}{n} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k) .$$

La deuxième égalité provient de ce que $\sum_{a=0}^{m-1} g(a) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n \binom{m}{n+1}$, donc

$$\frac{1}{rp^h} \sum_{a=0}^{rp^h-1} g(a) = \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda_n}{n+1} \binom{rp^h-1}{n} .$$

Or, par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} n|\lambda_n| = 0$, donc

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\lambda_n}{n+1} \binom{rp^h-1}{n} = \frac{(-1)^n}{n+1} \lambda_n$$

uniformément en n. Donc

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{rp^h} \sum_{a=0}^{rp^h-1} g(a) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \lambda_n .$$

On pose, si $a \in \underset{\sim}{Z}_p$,

$$\omega(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 , \\ \lim_{n\to\infty} a^{p^n} & \text{si } (a) = 1 , \end{cases}$$

ω est le caractère de Teichmüller sur $\underset{\sim}{Z}_p$.

On a, si $|a| = 1$,

$$\omega(a)^{p-1} = 1 \quad \text{et} \quad |\omega(a) - a| < 1 \quad [4] .$$

On pose

$$\rho_p = \begin{cases} p^{1-(1/(p-1))} & \text{si } p \neq 2 , \\ 2 & \text{si } p = 2 . \end{cases}$$

<u>Définition</u> 3 [4]. - On pose, pour $s \in D(1 , \rho_p)^-$,

$$(3) \qquad (s+1)\, L_p(s+2 , \chi) = \frac{1}{pf} \sum_{a=0}^{pf-1}{}' \chi(a) \int_{\underset{\sim}{Z}_p} \left(\frac{\omega(a)}{a+pfu}\right)^{s+1} d\mu(u) ,$$

où χ est un caractère de Dirichlet primitif pair de conducteur f_χ et où $f = rf_\chi$ avec $r \in \underset{\sim}{N}^*$.

Il est évident que dans (3) la valeur de $(s+1)\, L_p(s+2 , \chi)$ ne dépend pas de $r \in \underset{\sim}{N}^*$; par ailleurs, il est facile de voir [4] que si χ est impair, alors $(s+1)\, L_p(s+2 , \chi) \equiv 0$.

Soit $\mathcal{O}_p$ l'anneau des entiers de $\underset{\sim}{C}_p$

$$\mathcal{O}_p = \{x \in \underset{\sim}{C}_p \ ; \ |x| \leq 1\} .$$

Nous allons rappeler un résultat d'IWASAWA.

Soit χ_n un caractère primitif de Dirichlet, de conducteur $f_n = mqp^n$ avec $(m , p) = 1$, $q = p$ si $p \neq 2$, $q = 4$ si $p = 2$, tel que $\chi_n(-1) = 1$.

Soit θ le premier facteur de χ_n (cf. [4], p. 66), c'est-à-dire que l'on décompose $\chi_n = \theta \pi_n$, où θ est un caractère de conducteur m ou mq , et π_n est un caractère d'ordre p^n et de conducteur qp^n .

THEOREME A [4]. - Soit χ_n un caractère de Dirichlet primitif pair de conducteur mqp^n , et soit θ et π_n son premier et second facteur. Soit ζ_n la racine primitive p^n-ième de l'unité définie par $\pi_n(1 + mq) = \zeta_n^{-1}$. Soit

$$A_p = \mathcal{O}_p \cap \underset{\sim}{Q}_p[\theta(1) , \theta(2) , \ldots , \theta(mq - 1)] .$$

Alors il existe deux séries

$$f(\theta , T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k \in A_p[[T]]$$

$$g(\theta , T) = \sum_{k \geq 0} b_k T^k \in A_p[[T]] .$$

telle que, pour $|s| < qp^{-1/(p-1)}$,

$$L_p(s , \chi_n) = \frac{f(\theta , \zeta_n(1 + mq)^s - 1)}{g(\theta , \zeta_n(1 + mq)^s - 1)} \tag{4}$$

PROPOSITION 2 ([2] ou [9]. - Pour $s \in D(1 , \rho_p)^-$, on a

$$(s + 1) L_p(s + 2 , \chi) \tag{5}$$

$$= \sum_{k \geq 0} (pf)^{k-1} B_k\binom{-s-1}{k} \sum_{a=0}^{pf-1}{}' \chi(a) \omega(a)^{-k} \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+k+1}$$

Par définition on a

$$(s + 1) L_p(s + 2 , \chi) = \frac{1}{pf} \sum_{a=0}^{pf-1}{}' \chi(a) \int_{\underset{\sim}{Z}_p} \left(\frac{\omega(a)}{a + pfu}\right)^{s+1} d\mu(u)$$

$$= \frac{1}{pf} \sum_{a=0}^{pf-1}{}' \chi(a) \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+1} \int_{\underset{\sim}{Z}_p} \frac{d\mu(u)}{\left(1 + \frac{pfu}{a}\right)^{s+1}}$$

$$= \frac{1}{pf} \sum_{k \geq 0} (pf)^k \binom{-s-1}{k} \sum_{a=0}^{pf-1}{}' \chi(a) \omega(a)^{-k} \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+k+1} \times \int_{\underset{\sim}{Z}_p} u^k d\mu(u) .$$

Or $\int u^k \, d\mu(u) = B_k$

COROLLAIRE 1. - On a, en convenant que $f_\epsilon = p$,

(6) $$\sup_{s \in D(1,\rho_p)^-} |(s+1)\, L_p(s+2\,,\,\chi)| \leq |f_\chi^{-1}| \,.$$

D'après (5), il est clair que

$$\sup_{s \in D(1,\rho_p)^-} |(s+1)\, L_p(s+2\,,\,\chi)| \leq \sup_{s \in D(1,\rho_p)^-} \left| \frac{\sum_{a=0}^{{}'pf-1} \chi(a) \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+1}}{pf_\chi} \right| \,.$$

Or, si $s \in D(1\,,\,\rho_p)^-$,

$$\sum_{a=0}^{{}'pf_\chi-1} \chi(a) \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+1} = \sum_{a=0}^{f_\chi-1} \chi(a) \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{\omega(a+if_\chi)}{a+if_\chi}\right)^{s+1}$$

$$= \sum_{a=0}^{f_\chi-1} \chi(a) \sum_{k\geq 0} \binom{s+1}{k} \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{\omega(a+if_\chi)}{a+if_\chi} - 1\right)^k .$$

Or, d'après la démonstration du lemme 2,

$$\left| \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{\omega(a+if_\chi)}{a+if_\chi} - 1\right)^k \right| \leq p^{-k-1} \,,$$

d'où le résultat.

3. Majoration du nombre de zéros dans un disque des fonctions L p-adiques.

Nous allons tout d'abord étudier le cas où le conducteur de χ est de la forme mqp^n , avec n suffisament grand.

THEOREME 1. - Soit m un entier premier à p fixé. Soit $n \geq 0$, et χ_n un caractère de Dirichlet primitif pair de conducteur mqp^n . Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, la fonction L p-adique $L_p(s\,,\,\chi_n)$ soit sans zéro dans le disque $D(1\,,\,\rho_p)$.

D'après le théorème A ci-dessus, $L_p(s\,,\,\chi_n)$ a un zéro seulement si $f(\theta\,,\,\zeta_n(1+mq)^s - 1)$ a un zéro.

Or on peut écrire [1]

$$f(\theta\,,\,T) = p^\mu(b_0 + b_1 T + \dots + b_{\lambda-1} T^{\lambda-1} + T^\lambda) \times h(\theta\,,\,T) \,,$$

où $|b_i| < 1$ pour $0 \leq i < \lambda$ et $h(\theta\,,\,T) \in A_p[[T]]$ et est inversible dans $A_p[[T]]$.

Soit $\alpha_1 , \dots , \alpha_\lambda$ les racines dans $\underset{\sim}{C}_p$ du polynôme $b_0 + b_1 T + \dots + T^\lambda$. Il est clair que $|\alpha_i| < 1$ pour $1 \leq i \leq \lambda$.

Remarquons maintenant que :

$$L_p(s , \chi_n) = 0 \Longleftrightarrow \exists\ i , \ 1 \leq i \leq \lambda , \text{ tel que } \zeta_n(1 + mq)^s - 1 = \alpha_i ,$$

donc $(1 + mq)^s = (1 + \alpha_i)\ \zeta_n$.

Montrons que cette égalité (avec i fixé) n'a, au plus, qu'un couple (s , n) de solutions. En effet, si

$$(1 + mq)^s = (1 + \alpha_i)\ \zeta_n$$

$$(1 + mq)^{s'} = (1 + \alpha_i)\ \zeta_{n'}$$

alors $(1 + mq)^{s-s'} = \zeta_n/\zeta_{n'}$, donc il existe un entier N tel que

$$(1 = mq)^{N(s-s')} = 1 ;$$

ce qui impose $s = s'$ et donc $\zeta_n = \zeta_{n'}$. Donc le cardinal de l'ensemble des s , tels que $L_p(s , \chi_n) = 0$ pour un certain n , est inférieur ou égal à λ , et donc $L_p(s , \chi_n) \neq 0$ si n assez grand.

Afin de compléter ce résultat, nous allons donner une majoration du nombre de zéros de $(s + 1)\ L_p(s + 2 , \chi)$ dans un disque strictement contenu dans le disque de convergence.

On notera par $\varphi(f)$ le nombre d'entiers inférieurs ou égaux à f et premiers à f .

LEMME 2. - <u>Soit</u> χ <u>un caractère de Dirichlet primitif pair, de conducteur</u> f_χ , <u>soit</u> n <u>un entier pair</u> > 0 , <u>alors</u>

$$(7) \qquad |B_{n,\chi}| \geq \frac{1}{|f_\chi|} \frac{1}{(2^n\ f^{n+1}(n + 1)^{2(n+1)})}\ \varphi(f) .$$

On a

$$(8) \qquad f_\chi\ B_{n,\chi} = \sum_{a=0}^{f_\chi - 1} \chi(a) \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m + 1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (a + kf_\chi)^n .$$

On pose, par convention, que $f_\varepsilon = p$.

Il est clair que, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\underset{\sim}{Q})$, où

$$K = \underset{\sim}{Q}(\chi(1) , \chi(2) , \dots , \chi(f_\chi - 1)) ,$$

χ^σ est un caractère primitif pair.

Il est clair, d'après (8), que $f_\chi B_{n,\chi}$ est un entier algébrique de $\bar{\mathbb{Q}}$.
Donc, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$,

$$|f_\chi B_{n,\chi}| \leq 1 ,$$

donc

$$|B_{n,\chi}| \geq (\prod_{\sigma\neq id} |f_\chi B_{n,\chi^\sigma}|)|B_{n,\chi}| , \quad |B_{n,\chi}| \geq (\prod_{\sigma\neq id} |f_\chi|)\,|N_{K/\mathbb{Q}}(B_{n,\chi})| .$$

Or $N_{K/\mathbb{Q}}(B_{n,\chi}) \in \mathbb{Q}$. On pose donc

$$N_{K/\mathbb{Q}}(B_{n,\chi}) = \frac{N_n}{D_n} \quad \text{avec } N_n \text{ et } D_n \in \mathbb{Z} .$$

En utilisant (7), il est facile de montrer, en notant $|\ |_\infty$ la norme archimédienne sur $\mathbb{Q}$, que

$$(9) \qquad |N_n|_\infty \leq 2^n\,(f_\chi(n+1))^n\,(n+1)!\,f_\chi\,n)^{\varphi(f)} ,$$

car $\varphi(f) \geq \#\,\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Pour obtenir (9), on a majoré trivialement dans (8), $(a + k\,f_\chi)^n$ par $(f(n+1))^n$ et $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}$ par 2^n.

On a aussi, de manière immédiate,

$$|D_n|_\infty = \left(\frac{1}{f(n+1)!}\right)^{\varphi(f)} ,$$

et en utilisant le fait bien connu que si $N_n \in \mathbb{Z}$ et si $|N_n|_\infty \leq A$ avec $A \in \mathbb{N}$, alors $|N_n| \geq \frac{1}{A}$. Donc

$$|B_{n,\chi}| \geq |f_\chi|^{-1} \frac{1}{(2^n\,f_\chi^{n+1}\,(n+1)^{2(n+1)})^{\varphi(f)}}$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 2. - <u>Si</u> χ <u>est un caractère primitif pair, de conducteur</u> f_χ, <u>alors</u>

$$(10) \qquad |L_p(-1\,,\,\chi)| \geq \frac{1}{|p\,f_\chi|}\,\frac{1}{((pf_\chi)^3\,2^2\,3^6)^{\varphi(f_\chi p)}} .$$

D'après [4], on sait que l'on a

$$-\,n\,L_p(1-n\,,\,\chi) = (1 - \chi\,\omega^n(p)\,p^{n-1})\,B_{n,\chi\omega^n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} .$$

Donc, si $n = 2$, $|L_p(-1\,,\,\chi)| = |B_{2,\chi\omega^2}|$; on applique alors (7) avec $n = 2$ et f_χ remplacé par $p\,f_\chi$, il vient

$$|B_{2,\chi\omega^2}| \geq \frac{1}{((p\,f_\chi)^3\,2^2\,3^6)^{\varphi(pf_\chi)}} \times \frac{1}{|p\,f_\chi|},$$

d'où le résultat.

THEOREME 2. - Soit χ un caractère de Dirichlet primitif pair, de conducteur f_χ. Soit $N_p(\rho\,,\,\chi)$ le nombre de zéros de la fonction $(s-1)\,L_p(s\,,\,\chi)$ dans le disque $D(-1\,,\,\rho)^+$ avec $0 \leq \rho < \rho_p$. On a

$$N_p(\rho\,,\,\chi) \leq \left[\frac{(3\varphi(p\,f_\chi)+1)\log(p\,f_\chi) + 2\varphi(p\,f_\chi)\log_p 54}{\log\rho_p - \log\rho}\right] \tag{11}$$

(où [ ] désigne la partie entière).

Soit $h \in \underset{\sim}{N}^*$ tel que

$$p^{-h} \leq \frac{1}{((p\,f_\chi)^3\,3^6\,2^2)^{\varphi(f_\chi p)}} \times \frac{1}{|p\,f_\chi|}.$$

Remarquons que

$$\frac{d^k}{d\,s^k}\left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+1} = \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+1}\log^k\frac{\omega(a)}{a}$$

et que

$$\left|\log\frac{\omega(a)}{a}\right| \leq p^{-1}$$

(ici le log est le log p-adique [4]).

Donc, d'après les estimations précédentes et la proposition 2, on a

$$\left|\frac{d^k}{d\,s^k}\{(s+1)\,L_p(s+2\,,\,\chi)\}\right| \leq |(f_\chi\,p)^{-1}|\;p^{-k},$$

et par conséquent,

$$\left|\frac{1}{k\,!}\times\frac{d^k}{d\,s^k}\{(s+1)\,L_p(s+2\,,\,\chi)\}\right| \leq |(f\,p^{-1}|\;\rho_p^{-k}. \tag{12}$$

Donc, si l'on pose $(s-1)\,L_p(s\,,\,\chi) = \sum_{k\geq 0} a_k\,(s+1)^k$,

$$\begin{cases} |a_0| \text{ vérifie la minoration (10) du corollaire 2 ,} \\ |a_k| \text{ , pour } k \geq 1 \text{ , vérifie la majoration (12) .} \end{cases} \tag{13}$$

Nous noterons $\log_p$ le logarithme réel en base p.

De (13), on déduit immédiatement que le polynôme de Newton [1] de $(s-1)\,L_p(s,\chi)$

ne peut pas avoir de côté de pente strictement inférieure à

$$1 - \frac{1}{p-1} - \log_p(|p\, f_\chi|^{-1}) - h - 1 ,$$

et plus généralement le côté de pente $(k\,\rho_p - \log_p(|p\, f_\chi|^{-1}) - h)\, 1/k$ est au plus de longueur k. Donc, d'après la théorie du polynôme de Newton, le nombre de zéros de $(s-1)\, L_p(s, \chi)$, dont la valuation p-adique est inférieure ou égale à $-\log_p \rho$, est au plus de $(h + \log_p |f_\chi\, p|^{-1})/(\log_p \rho_p - \log_p \rho)$.

Donc

$$N_p(\rho, \chi) \leq \frac{h + \log_p |f_\chi\, p|^{-1}}{\log_p \rho_p - \log_p \rho} .$$

Or on peut prendre

$$h = 3\varphi(p\, f_\chi) \log p\, f_\chi + 2\varphi(p\, f_\chi) \log_p(54) ,$$

et on remarque que $\log |p\, f_\chi|^{-1} \leq \log_p(p\, f_\chi)$. D'où le résultat.

Remarque 1. - Ce résultat peut être amélioré dans le cas $p = 2$ ou $p = 3$ sous la forme :

$$N_p(\rho, \chi) \leq A(p\, f_\chi) + \frac{B \log(p\, f_\chi) + C}{\log \rho_p - \log \rho} , \tag{14}$$

où A, B, C ne dépendent pas de χ, mais il faut alors utiliser un théorème sur les zéros des polynômes exponentiels dû à VAN DER POORTEN - ROBBA ([6] ou [8]).

Remarque 2. - Si l'on suppose que $f_\chi = m\, q\, p^n$ avec n assez grand, on peut aussi améliorer le théorème 2 et obtenir une formule de type (14), en tenant compte de ce qu'il y a un certain nombre de $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ qui se prolongent en des isométries de $\mathbb{C}_p$. Mais, en fait, à cause du théorème 1, cette amélioration est probablement illusoire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).

[2] DIAMOND (Jack). - On the value of p-adic L functions at positive integers, Acta Arithm., Warszawa, t. 35, 1979, p. 223-237.

[3] HELSMOORTEL (Eve). - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, série A, p. 546-548.

[4] IWASAWA (Kenkichi). - p-adic L functions. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 74).

[5] MAHLER (K.). - An interpolation serie for continuous functions of a p-adic variable, J. für reine und angew. Math., t. 199, 1958, p. 23-34.

[6] ROBBA (Philippe). - Nombre de zéros de fonctions exponentielles polynômes, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 9, 3 p.

[7] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

[8] VAN DER POORTEN (A. J.). - Hermite interpolation and p-adic exponential polynomials, J. Australian math. Soc., t. 22, 1976, p. 12-26.

[9] WASHINGTON (L. C.). - A note on p-adic L functions, J. of Number Theory, t. 8, 1976, p. 245-250.