DANIEL BARSKY

Congruences pour les nombres de Schröder

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. n° 2, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A1_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
6e année, 1978/79, n° 2 et 4, 14 p.

23 octobre et 27 novembre 1978

CONGRUENCES POUR LES NOMBRES DE SCHRÖDER

par Daniel BARSKY (*)

[Univ. Paris-7]

Résumé. - On montre que les nombres de Schröder vérifient des congruences entre eux. Ce résultat est obtenu en montrant que la fonction génératrice des nombres de Schröder est, pour tout nombre premier p, un élément analytique p-adique au sens de KRASNER sur un quasi-connexe de $\mathbb{C}_p$. Pour obtenir ce résultat on est amené à étudier la croissance p-adique des coefficients de la réciproque d'une série de Taylor vérifiant certaines hypothèses.

1. Introduction et notations.

Les nombres de Schröder $(s_n)_{n\geq 1}$ [11] comptent le nombre de sous-ensembles $\mathcal{S}$ de $\beta'(N) = \beta(N) - \emptyset$ tels que ($\beta(N)$ est l'ensemble des parties d'un ensemble à N éléments) :

(a) tout sous-ensemble à un élément appartient à $\mathcal{S}$,

(b) l'ensemble tout entier n'appartient pas à $\mathcal{S}$,

(c) si B et B' appartiennent à $\mathcal{S}$, alors : ou bien $B \subset B'$, ou bien $B' \subset B$, ou bien $B \cap B' = \emptyset$.

On démontre [11] que la fonction génératrice de Hurwitz des nombres de Schröder

$$y = \sum_{n\geq 1} s_n \frac{t^n}{n!} \tag{1}$$

satisfait l'équation fonctionnelle

$$e^y - 2y - 1 + t = 0 \ , \quad s_1 = 1 \ . \tag{2}$$

Pour tout nombre premier p, nous définissons la valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$ ([1] ou [14]), notée $|.|_p$, ou $|.|$ si aucune confusion n'est à craindre, et normalisée par $|p|_p = p^{-1}$. On note, si $a \in \mathbb{R}_+$, la partie entière de a par $[a]$, c'est-à-dire, $a - 1 < [a] \leq a$. Nous allons montrer dans la suite de l'exposé que, si $p \neq 2$ (p premier), si c_p est un nombre algébrique tel que $c_p^{p-1} = 2$, alors

$$|s_{n+r(p,h)} c_p^{-n-r(p,h)} - s_n c_p^{-n}|_p \leq p^{-(h/2)} \quad \text{pour} \quad n \geq 2h + 3\frac{\log(h)}{\log(p)} + 9 \ , \tag{3}$$

où $r(p, h) = (p - 1) p^{2h+3(\log(h)/\log(p))+9}$.

Respectivement, si $p = 2$,

$$|s_n|_2 \leq 2^{-n+3} \ . \tag{4}$$

(*) Texte reçu le 1er octobre 1979.

Daniel BARSKY, UER Mathématiques, Tour 55, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75221 PARIS CEDEX 05.

Pour démontrer ces résultats, nous ferons usage du théorème de Lagrange-Bürmann [11] qui permet le calcul des coefficients de Taylor de $Y = F(X)(F(0) = 0)$ en fonction de ceux de $X = G(Y)$ tel que

$$F(G(Y)) = Y \quad \text{et} \quad G(F(X)) = X .$$

Dans le cours de l'exposé les notations suivantes seront utilisées (ce sont celles de [1]). On désigne par p un nombre premier, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{Q}$, $\underset{\sim}{R}$ ont leur signification habituelle, $|\ |_p$ (ou $|\ |$ si aucune confusion n'est à craindre) est la valeur absolue p-adique sur $\underset{\sim}{Q}$, normalisée par $|p|_p = p^{-1}$; $\underset{\sim}{Z}_p$, $\underset{\sim}{Q}_p$ sont les complétés de $\underset{\sim}{Z}$ et de $\underset{\sim}{Q}$ pour la valeur absolue p-adique, $\underset{\sim}{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$. Si $a \in \underset{\sim}{C}_p$ et $\rho \in \underset{\sim}{R}$, $\rho \geq 0$, nous noterons :

$$B(a , \rho)^+ = \{X \in \underset{\sim}{C}_p ; \ |X - a| \leq \rho\} \quad \text{et} \quad B(a , \rho)^- = \{X \in \underset{\sim}{C}_p ; \ |X - a| < \rho\} .$$

Nous utiliserons la notion d'élément analytique au sens de KRASNER sur un quasi-connexe de $\underset{\sim}{C}_p$ (cf. [1], [14] ou [15]). En fait pour démontrer (3) et (4) nous montrerons que $z = \sum_{n\geq 1} s_n t^n$ est prolongeable en un élément analytique sur certains quasi-connexes de $\underset{\sim}{C}_p$. Le lien entre les propriétés de prolongeabilité analytique au sens de KRASNER sur un quasi-connexe de $\underset{\sim}{C}_p$ d'une série de Taylor de $\underset{\sim}{C}_p[[t]]$ et les congruences entre ses coefficients est donné par le théorème de ROBBA [15], qui généralise un résultat antérieur d'Yvette AMICE [2]. Nous nous sommes déjà servi de ce lien dans les articles [3] à [7]. En fait, ce que nous démontrons ici est une version effective du théorème de FUJIWARA [13]. En effet, la série $y = \sum_{n\geq 1} s_n t^n/n!$ vérifie l'équation différentielle algébrique

$$y'(t - 2y + 1) - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(y , y' , t)|_{t=0} = 1 , \tag{5}$$

où $F(y , y' , t)$ désigne le premier membre de (5), donc, d'après le théorème de Fujiwara, la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est périodique $\mathrm{mod}(p^h)$ à partir d'un certain rang (dépendant de h). Ces résultats sont à rapprocher de ceux de CARLITZ [8] à [10].

Cet exposé a bénéficié des conversations que j'ai eues avec P. BARRUCAND que je remercie.

2. Quelques transformations formelles.

On peut réécrire (2) sous la forme

$$t = 1 - e^y + 2y = 1 - e^y + 2 \log(e^y - 1 + 1) . \tag{6}$$

On peut donc écrire formellement, car $y = \sum_{n\geq 1} s_n t^n/n!$ et $Y = e^y - 1$ sont des paramètres locaux de $\underset{\sim}{C}_p[[t]] = \{\sum_{n\geq 0} c_n t^n ; \ c_n \in \underset{\sim}{C}_p\}$,

$$t = e^y - 1 + 2 \sum_{n\geq 2} (-1)^{n-1} \frac{(e^y - 1)^n}{n} \tag{7}$$

ou encore

$$t = Y + 2 \sum_{n\geq 2} (-1)^{n-1} \frac{Y^n}{n} . \tag{8}$$

Soit p un nombre premier, et soit $c \in \underset{\sim}{C}_p - \{0\}$ un paramètre que nous choisirons ensuite au mieux. Il vient

(9) $$e^{ct} = \exp(c(Y + 2 \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n} Y^n)) \ ;$$

on pose

(10) $$\exp(c(Y + 2 \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n} Y^n)) = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n Y^n \ ,$$

où $b_n = b_n(c) \in \underset{\sim}{C}_p$. On choisira c de telle sorte que la croissance p-adique des b_n (i. e. la croissance lorsque n tend vers l'infini de $|b_n|_p$) soit aussi lente que possible. Pour cela, utilisant une idée de DWORK [12], nous allons chercher à écrire

(11) $$f(Y) = c(T + 2 \sum_{n\geq 2} (-1)^{n-1} \frac{Y^n}{n})$$

sous la forme

(12) $$f(Y) = \sum_{i\geq 1} \log(1 - a_i Y^i) \ ,$$

et nous allons donner une estimation de $|a_i|_p$.

En fait, on a le résultat général suivant.

3. Quelques estimations sur les séries réciproques.

THÉORÈME 1. - Soit

(13) $$f(T) = \exp(c \sum_{n\geq 1} e_n \frac{T^n}{n}) = \prod_{i\geq 1} (1 - a_i T^i) \ ,$$

avec $e_n \in \underset{\sim}{C}_p$, $|e_n|_p \leq 1$ et $e_1 = 1$, $c \in \underset{\sim}{C}_p - \{0\}$.

Si c est tel que $|e_p - c^{p-1}|_p \leq p^{-1}$ et $|c|_p \leq 1$, alors :

(i) $a_1 = c$,

(ii) $|a_n|_p \leq |c|_p$ si $1 \leq n \leq 2p - 1$,

(iii) $|a_n|_p \leq |c|_p . p^{(n/2p-2)-(1/p-1)}$ pour $p \neq 2$ et 3,

$|a_n|_3 \leq |c|_3 . 3^{(2n/7)-1/2}$ pour $p = 3$,

$|a_n|_2 \leq |c|_2 . 2^{(3n/4)-1}$ pour $p = 2$.

Démonstration. - Formellement au moins (i. e. pour la topologie T-adique de $\underset{\sim}{C}_p[[T]]$), il est toujours possible de trouver $a_i \in \underset{\sim}{C}_p$, $i \in \underset{\sim}{N}$, tels que

(15) $$\exp(c \sum_{n\geq 1} e_n n^{-1} T^n) = \prod_{i\geq 1} (1 - a_i T^i) \ .$$

En effet, en dérivant le logarithme des deux membres de (15), on a :

(16) $$c \sum_{n\geq 1} e_n T^{n-1} = \sum_{i\geq 1} \frac{i a_i T^{i-1}}{1 - a_i T^i} \ ;$$

on notera, pour i et $n \in \underset{\sim}{N}$, $i|n$ si, et seulement si, il existe $k \in \underset{\sim}{N}$ tel que $n = ki$, alors :

(17) $$ce_n = \sum_{i|n} i.a_i^{(n/i)} .$$

Donc, puisque $e_1 = 1$,

(18) $$a_1 = c .$$

Supposons maintenant que $|e_n|_p \leq 1$ et que $|c|_p \leq 1$. Il vient

(19) $$a_2 = 2^{-1}(ce_2 - c^2) ;$$

donc, si $p \neq 2$,

(20) $$|a_2|_p \leq |c|_p ,$$

et par récurrence

(21) $$|a_n|_p \leq |c|_p \quad \text{pour} \quad 1 \leq n \leq p-1 .$$

On a

(22) $$a_p = p^{-1}(ce_p - c^p) .$$

Si $|e_p - c^{p-1}|_p \leq p^{-1}$ et $c \neq 0$, alors $|a_p|_p \leq |c|_p$, et par récurrence il est alors clair que

(23) $$|a_n|_p \leq |c|_p \quad \text{pour} \quad p+1 \leq n \leq 2p-1 .$$

Enfin,

(24) $$|a_{2p}|_p \leq p|c|_p \quad \text{si} \quad p \neq 2 \quad \text{et} \quad |a_4|_2 \leq 4|c|_2 \quad \text{si} \quad p = 2 .$$

De (17) et de l'inégalité ultramétrique, on tire

(25) $$|a_n|_p \leq \sup(|ce_n\, n^{-1}|_p\, ,\ \sup_{1 \leq i \leq, i|n} |in^{-1}\, a_i^{(n/i)}|_p) ;$$

Utilisons le fait que, pour $1 \leq i \leq 2p-1$, $|a_i|_p \leq |c|_p$, il vient

$$|a_n|_p \leq \sup(|ce_n\, n^{-1}|_p\, ,\ \sup_{1 \leq i \leq 2p-1, i|n} |n^{-1}\, ic^{(n/i)}|_p\, ,\ \sup_{2p \leq i \leq n, i|n} |n^{-1}\, ia_i^{(n/i)}|_p)$$

(26)

$$\leq \sup(\sup_{1 \leq i \leq n, i|n} |cin^{-1}|_p\, ,\ \sup_{2p \leq i \leq n, i|n} |n^{-1}\, ia_i^{(n/i)}|_p) ,$$

car $|e_n|_p \leq 1$, $|c^{(n/i)}|_p \leq |c|_p$.

Pour démontrer (iii), pour $p \neq 2$ et 3, il suffit de montrer (a) et (b) ci-dessous, pour $n \geq 2p$ et $i|n$,

(27) $$\begin{cases} \text{(a)} \quad \dfrac{n}{2p-2} - \dfrac{1}{p-1} \geq [\log(n)/\log(p)] , \\[2ex] \text{(b)} \quad \dfrac{n}{2p-2} - \dfrac{1}{p-1} \geq (n/i)(\dfrac{i}{2p-2} - \dfrac{1}{p-1}) + [\log(n/i)] , \end{cases}$$

ou encore il suffit de montrer, pour $n \geqslant 2p$ et $i|n$,

(28)
$$\begin{cases} \text{(a) comme en (27)} \\ (b') \quad ((n/i) - 1)\,\frac{1}{p-1} - [\frac{\log(n/i)}{\log(p)}] \geqslant 0 \ ; \end{cases}$$

pour $p = 3$, il suffit de montrer que, pour $n \geqslant 6$ et $i|n$,

(28')
$$\begin{cases} (a_3) \quad \frac{2n}{7} - \frac{1}{2} \geqslant [\frac{\log(n)}{\log(3)}] \ , \\ (b_3') \quad ((n/i) - 1)\,\frac{1}{2} - [\frac{\log(n/i)}{\log(3)}] \geqslant 0 \ ; \end{cases}$$

pour $p = 2$, il suffit de montrer, pour $n \geqslant 4$ et $i|n$,

(28")
$$\begin{cases} (a_2) \quad \frac{3n}{4} - 1 \geqslant [\frac{\log(n)}{\log(2)}] \\ (b_2') \quad (n/i) - 1 - [\frac{\log(n/i)}{\log(2)}] \geqslant 0 \ . \end{cases}$$

Etudions, pour $p \neq 2$ et 3 , $x \geqslant 2p$, la fonction

(29)
$$f(x) = \frac{x}{2p-2} - \frac{1}{p-1} - [\frac{\log(x)}{\log(p)}] \ .$$

On a

(30)
$$f(x) \geqslant \frac{x}{2p-2} - \frac{1}{p-1} - \frac{\log(x)}{\log(p)} = g(x) \ .$$

Si $2p \leqslant x \leqslant p^2 - 1$, alors

$$[\frac{\log(x)}{\log(p)}] = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x}{2p-2} - \frac{1}{p-1} - 1 \geqslant 0 \ ,$$

donc (a) est démontré pour $2p \leqslant x \leqslant p^2 - 1$.

Si $x \geqslant p^2$, nous allons montrer que $g(x) \geqslant 0$. En effet, $g'(x) = \frac{1}{2p-2} - \frac{1}{x\log(p)}$, donc

$$g'(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = \frac{2p-2}{\log(p)} \leqslant p^2 \quad \text{si} \quad p \geqslant 3 \ ,$$

et

$$g(p^2) = \frac{p^2}{2p-2} - \frac{1}{p-1} - 2 \geqslant \frac{p+1}{2} - 2 - \frac{1}{p-1} \geqslant 0 \quad \text{si} \quad p \geqslant 5 \ .$$

Donc (a) est démontré pour $p \neq 2$ et 3 .

Démontrons (a_2). On étudie la fonction, pour $x \geqslant 4$,

$$f_2\,(x) = \frac{3}{4}\,x - 1 - [\frac{\log(x)}{\log(2)}] \geqslant \frac{3}{4}\,x - 1 - \frac{\log(x)}{\log(2)} = g_2(x) \ ,$$

on a

$$g_2'(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{x\log(2)} \ , \quad g_2'(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = \frac{4}{3\log(2)} \leqslant 3 \quad \text{et} \quad g_2(4) = 0 \ ,$$

donc (a_2) est démontré.

Démontrons maintenant (a_3).

$$f_3(x) = \frac{2}{7}\,x - \frac{1}{2} - [\frac{\log(x)}{\log(3)}] \geqslant \frac{2}{7}\,x - \frac{1}{2} - \frac{\log(x)}{\log(3)} = g_3(x) \ ,$$

si $6 \leqslant x < 9$, on a $[\frac{\log(x)}{\log(3)}] = 1$, et donc $f_3(x) = \frac{2}{7}x - \frac{1}{2} - 1 > 0$. Si $x \geqslant 9$,
$g_3'(x) = \frac{2}{7} - \frac{1}{x\log(3)}$, $g_3'(x) = 0$ pour $x = \frac{7}{2\log(3)} \leqslant 9$ et $g_3(9) = 3 - \frac{1}{2} - 2 \geqslant 0$.

Donc (a_3) est démontré.

Montrons maintenant (b_1'), (b_2'), (b_3'). Il faut donc montrer que

(31) $$f(x) = \frac{x}{p-1} - \frac{1}{p-1} - \left[\frac{\log(x)}{\log(p)}\right] \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad x \geqslant 2 ,$$

car $n/i \geqslant 2$. Or

(32) $$f(x) \geqslant \frac{x-1}{p-1} - \frac{\log(x)}{\log(p)} = g(x) .$$

On constate que, pour $2 \leqslant x \leqslant p-1$, on a $f(x) \geqslant 0$ et de même, pour $p \leqslant x \leqslant p^2 - 1$, on a $f(x) \geqslant 0$. Si $x \geqslant p^2$, alors

$$g'(x) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{x \log(p)} , \quad g'(x) = 0 \text{ pour } x = \frac{p-1}{\log(p)} \leqslant p^2 \quad \text{et} \quad g(p^2) = \frac{p^2-1}{p-1} - 2 \geqslant 0 .$$

Le théorème est démontré.

Posons alors

$$\rho_p = p^{(1/(2p-2))} \quad \text{si} \quad p \neq 2 \text{ et } 3 , \quad \rho_3 = 3^{(2/7)} , \quad \rho_2 = 2^{(3/4)} ,$$
$$r_p = p^{-(1/(p-1))} \quad \text{si} \quad p \neq 2 \quad \text{et} \quad r_2 = 2^{-1} .$$

COROLLAIRE 1. - _Soit_

$$\exp(c \textstyle\sum_{n>0} e_n \frac{T^n}{n}) = \prod_{i\geq 1} (1 - a_i T^i) = \sum_{n\geq 0} b_n T^n ,$$

_où_ $e_n \in \mathbb{C}_p$, $|e_n|_p \leqslant 1$, $e_1 = 1$ _et_ $c \in \mathbb{C}_p - \{0\}$ _tel que_ $|c^{p-1} - e_p|_p \leqslant p^{-1}$, _alors_ :

(i) $b_0 = 1$, $b_1 = c$ _et_ $|b_n|_p \leqslant |c|_p$ _si_ $n \leqslant 2p-1$,

(ii) $|b_n|_p \leqslant |c|_p \, \rho_p^n \, r_p$ _pour_ $n \geqslant 2p$.

Démonstration. - En effet,

(33) $$b_n = \sum (-1)^k a_{i(1)} a_{i(2)} \cdots a_{i(k)}$$

la sommation portant sur les k-uples $(i(1) , i(2) , \ldots , i(k)) \in \mathbb{N}^k$ tels que $i(1) + i(2) + \ldots + i(k) = n$, $i(1) > i(2) > \ldots i(k) > 0$, $i \leqslant k \leqslant n$. Donc d'après l'inégalité ultramétrique,

$$|b_n|_p \leqslant \sup(|a_{i(1)}|_p \cdots |a_{i(k)}|_p) \leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant n} (|c^k|_p \, \rho_p^n \, r_p^k) \leqslant |c|_p \, \rho_p^n \, r_p ,$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 2. - _Avec les notations du corollaire_ 1, _les coefficients_ $(c_n)_{n\geq 0}$ _de la série_

(34) $$\textstyle\sum_{n\geq 0} c_n T^n = (\sum_{n\geq 1} b_n T^{n-1})^{-1}$$

vérifient les inégalités :

(i) $c_0 = c^{-1}$,

(ii) $|c_n|_p \leqslant |c|_p^{-1}$ _si_ $1 \leqslant n \leqslant 2p-1$,

(iii) $|c_n|_p \leqslant |c|_p^{-1} \rho_p^n$ <u>pour</u> $n \geqslant 2p$.

(i) et (ii) sont clairs par un calcul direct. Par ailleurs, pour tout $T \in B(0, \rho_p^{-1})^-$, on a $|\sum_{n\geq 1} b_n T^{n-1}|_p = |c|_p$ d'après l'inégalité ultramétrique et les inégalités du corollaire 1. Donc la série $\sum_{n\geq 1} b_n T^{n-1}$ n'a pas de zéros dans le disque $B(0, \rho_p^{-1})^-$ ce qui entraîne que la série de Taylor

$$(\sum_{n\geq 1} b_n T^{n-1})^{-1}$$

converge dans ce disque et, en outre,

$$\sup_{T\in B(0,\rho_p^{-1})^-} |(\sum_{n\geq 1} b_n T^{n-1})^{-1}|_p \leqslant |c|_p^{-1} ,$$

d'où, d'après les inégalités de Cauchy (cf. [1]), les inégalités (iii).

Rappelons maintenant une forme du théorème de Lagrange-Bürmann sur les coefficients de la réciproque d'une série formelle.

THÉORÈME (LAGRANGE-BÜRMANN). - <u>Si</u> $Z(T) = \sum_{n\geq 1} b_n T^n$ <u>et</u> $T(Z) = \sum_{n\geq 1} d_n Z^n$ <u>sont tels que</u> $Z(T(Z)) = Z$ <u>et</u> $T(Z(T)) = T$, <u>alors</u> d_n <u>est le coefficient de</u> T^{n-1} <u>dans la série de Taylor en</u> T <u>de</u> $(\sum_{n\geq 1} b_n T^{n-1})^{-n-1} Z'(T)$, <u>où</u>

$$Z'(T) = \sum_{n\geq 1} nb_n T^{n-1} .$$

<u>Démonstration</u>. - D'après [11], si l'on note $C_{T^n}(g)$ le coefficient de T^n dans la série $g(T) = \sum_{n\geq 0} g_n T^n$, on a

$$C_{Z^n}(T) = n^{-1} C_{T^{n-1}}(T/Z(T))^n .$$

Posons $(T/Z(T))^n = \sum_{m\geq 0} b_m^{(n)} T^m$, donc

$$\sum_{m\geq 0}(m + 1) b_m^{(n)} T^m = \frac{(n + 1)T^n}{Z(T)^n} - \frac{nT^{n+1}}{Z(T)^{n+1}} \frac{dZ(T)}{dT} ,$$

c'est-à-dire

$$nb_{n-1}^{(n)} = (n + 1)b_{n-1}^{(n)} - n C_{T^{n-1}}(T/Z(T))^{n+1} \frac{dZ(T)}{dT} .$$

Donc

$$\frac{1}{n} b_{n-1}^{(n)} = C_{T^{n-1}}(T/Z(T))^{n+1} \frac{dZ(T)}{dT} .$$

COROLLAIRE 3. - <u>Si</u> $Z(T) = \sum_{n\geq 1} b_n T^n \in \underline{C}_p[[T]]$ <u>vérifie les inégalités</u> (i), (ii) <u>du corollaire</u> 1, <u>et si</u> $T(Z) = \sum_{n\geq 1} d_n Z^n$ <u>est la série réciproque de</u> $Z(T)$ (i. e., $T(Z(T)) = T$ <u>et</u> $Z(T(Z)) = Z$) <u>alors</u> :

(i) $d_1 = c^{-1}$,

(ii) $|d_n|_p \leqslant |c|_p^{-n}$ <u>si</u> $n \leqslant 2p - 1$,

(iii) $|d_n|_p \leqslant |c|_p^{-n} \rho_p^{n-1}$ <u>si</u> $n \geqslant 2p$.

Démonstration. - Posons $(\sum_{m\geq 1} b_m T^{m-1})^{-n} = \sum_{m\geq 0} b_m^{(n)} T^m$, d'après le corollaire 2 on a

$$|b_m^{(n)}|_p \leq |c|_p^{-n} \rho_p^m \quad \text{si} \quad m \geq 2p \ , \quad |b_m^{(n)}|_p \leq |c|_p^{-n} \quad \text{si} \quad 1 \leq m \leq 2p-1$$

et

$$|b_0^{(n)}|_p = |c|_p^{-n} \ .$$

Donc si

$$(\sum_{m\geq 1} b_m T^{m-1})^{-n-1} (\sum_{m\geq 1} m b_m T^{m-1}) = \sum_{m\geq 0} g_m^{(n+1)} T^m \ ,$$

on a

$$|g_m^{(n+1)}|_p \leq |c|_p^{-n} \rho_p^m \quad \text{si} \quad m \geq 2p \ , \quad |g_m^{(n+1)}|_p \leq |c|_p^{-n} \quad \text{si} \quad 1 \leq m \leq 2p-1 \ .$$

Or, d'après le théorème de Lagrange-Bürmann, $d_n = g_{n-1}^{(n+1)}$, on a donc :

$$|d_n|_p \leq |c|_p^{-n} \rho_p^{n-1} \quad \text{si} \quad n \geq 2p \quad \text{et} \quad |d_n|_p \leq |c|_p^{-n} \quad \text{si} \quad n \leq 2p-1 \ .$$

THÉORÈME 2. - *Soit* $Y = \sum_{n\geq 1} a_n T^n/n! \in \underset{\sim}{C}_p[[T]]$ *telle que sa série réciproque* $T = \sum_{n\geq 1} e_n Y^n/n$ *satisfasse* $e_1 = 1$, *et* $|e_n|_p \leq 1$.

Soit $c \in \underset{\sim}{C}_p$ *tel que* $|c^{p-1} - e_p|_p \leq p^{-1}$, *alors* $Y = \sum_{n\geq 1} b_n (e^{cT} - 1)^n$ *avec* :

(i) $b_1 = c^{-1}$,

(ii) $|b_n|_p \leq |c|_p^{-n}$ *si* $1 \leq n \leq 2p-1$,

(iii) $|b_n|_p \leq |c|_p^{-n} \rho_p^{n-1}$ *si* $n \geq 2p$,

où $\rho_p = p^{1/(2p-2)}$ *si* $p \neq 2$ *et* 3 , $\rho_3 = 3^{2/7}$ *et* $\rho_2 = 2^{3/4}$.

Démonstration. - En effet on a, si $c \in \underset{\sim}{C}_p$:

(35) $$e^{cT} = \exp(c \sum_{n\geq 1} e_n \frac{Y^n}{n}) = 1 + \sum_{n\geq 1} \beta_n Y^n$$

et, si $|c^{p-1} - e_p|_p \leq p^{-1}$, alors β_n satisfait les inégalités du corollaire 1. Le corollaire 3 permet alors d'écrire $Y = \sum_{n\geq 1} b_n (e^{cT} - 1)^n$, où les b_n satisfont les inégalités (i), (ii) et (iii) du corollaire 3. D'où le théorème.

LEMME 1. - *Soit* $e_p \in \underset{\sim}{C}_p$, $|e_p|_p \leq 1$, *si* $c \in \underset{\sim}{C}_p$ *vérifie* $|c^{p-1} - e_p|_p \leq p^{-1}$, *alors* :

(i) *ou bien* $|e_p|_p > p^{-1}$ *et* $|c - e_p^{1/(p-1)}|_p \leq p^{-1} |e_p|_p^{-p+1}$, $|c|_p = |e_p|_p^{1/(p-1)}$

(ii) *ou bien* $|e_p|_p \leq p^{-1}$ *et* $|c|_p \leq p^{-1/(p-1)}$.

La démonstration est évidente.

Dans le cas (ii), on peut, si on le désire, choisir $c = p^{1/(p-1)}$.

THÉORÈME 3. - *Avec les hypothèses et les notations du théorème 2, la fonction* $z = \sum_{n\geq 1} a_n T^n$ *est un élément analytique au sens de KRASNER* ([14] ou [15]) *sur* l'ensemble

$$\mathcal{C}_p = B(0\ ,\ p^{1/(p-1)}\ \rho_p^{-1}|c|_p^{-1})^- - \bigcup_{i=1}^{p-1} B(i^{-1}\ c^{-1}\ ,\ p^{-p/(p-1)}\ \rho_p^p|c|_p)^+\ ,$$

avec la convention $c = p^{1/(p-1)}$ si $|e_p|_p \leqslant p^{-1}$.

Démonstration. - Considérons la transformation de Laplace formelle $\mathcal{L}$ de $\mathbb{C}_p[[T]]$, définie par $\mathcal{L}(T^n/n!) = T^n$, et prolongée par linéarité infinie sur $\mathbb{C}_p[[T]]$ (cf. [3]-[7]). On a $\mathcal{L}(e^{aT}) = (1 - aT)^{-1}$ pour tout $a \in \mathbb{C}_p$. Donc

$$z = \mathcal{L}(Y) = \sum_{n\geq 1} b_n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}(1 - kcT)^{-1}$$

$$= \sum_{n\geq 1} b_n \frac{(n!)c^n\ T^n}{(1 - cT)(1 - 2cT)\ \ldots\ (1 - ncT)}$$

où les b_n vérifient les inégalités (i), (ii), (iii) du théorème 2. Or si l'on pose

$$\left[c\ ,\ \overset{n}{0}\ ,\ T\right] = \frac{(n!)c^n\ T^n}{(1 - cT)(1 - 2cT)\ \ldots\ (1 - ncT)}\ ,$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{T\in\mathcal{C}_p} \left|\left[c\ ,\ \overset{n}{0}\ ,\ T\right]b_n\right|_p = 0\ .$$

D'où le résultat.

COROLLAIRE 4. - Avec les notations et les hypothèses du théorème 2, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est presque-périodique au sens de ROBBA, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_ε et T_ε tels que : $n \geqslant n_\varepsilon$ entraîne $|a_n - a_{n+T_\varepsilon}|_p \leqslant \varepsilon$.

C'est une application du théorème de Mittag-Leffler p-adique (cf. [1], [15] ou [3]-[7]).

4. Conséquences pour les nombres de Schröder.

On va appliquer les résultats précédents au cas des nombres de Schröder.

THÉORÈME 4. - Soit $t = 1 - e^y + 2y$ avec $y = \sum_{n\geq 1} s_n\ t^n/n!$. Soit p un nombre premier. Soit $c_p \in \mathbb{C}_p$ tel que $|c_p^{p-1} - 2|_p \leqslant p^{-1}$. Alors

$$y = \sum_{n\geq 1} h_{n,p}(\exp(c_p\ t) - 1)^n$$

avec

(i) $h_{1,p} = c^{-1}$,

(ii) $|h_{n,p}|_p \leqslant \rho_p^{n-1} p^{[\log(n)/\log(p)]} |c_p|_p^{-n}$ pour $n \geqslant 2p$,

(iii) $|h_{n,p}|_p \leqslant |c_p|_p^{-n} p^{[\log(n)/\log(p)]}$ pour $1 \leqslant n \leqslant 2p - 1$.

Démonstration. - Posons $e^y - 1 = Y$, alors, d'après (8),

$$t = Y + 2 \sum_{n\geq 2}(-1)^{n-1} \frac{Y^n}{n}\ .$$

Donc, si $c_p = 2^{1/(p-1)}$, on a, d'après le théorème 2,

$$Y = \sum_{n\geq 1} b_{n,p}(\exp(c_p\ t) - 1)^n ,$$

où les $b_{n,p}$ vérifient les inégalités (i), (ii) et (iii) du théorème 2 ; donc

$$e^y - 1 = \sum_{n\geq 1} b_{n,p}(\exp(c_p\ t) - 1)^n ,$$

ou encore

$$y = \log(1 + \sum_{n\geq 1} b_{n,p}(\exp(c_p\ t) - 1)^n) ,$$

ou encore en développant formellement

$$y = \sum_{n\geq 1} h_{n,p}(\exp(c_p\ t) - 1)^n$$

avec $|h_{n,p}|_p \leqslant \sup|k^{-1}\ b_{i(1),p}b_{i(2),p} \cdots b_{i(k),p}|_p$ où le sup porte sur les k-uples $(i(1)\ ,\ i(2)\ ,\ \ldots\ ,\ i(k)) \in \underset{\sim}{N}^k$ avec $i(1) + i(2) + \ldots + i(k) = n$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$. D'où les inégalités (i), (ii) et (iii).

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> $z = \sum_{n\geq 1} s_n\ t^n$ <u>la transformée de Laplace formelle de la fonction génératrice de Hurwitz des nombres de Schröder</u>. <u>On a</u>, <u>pour tout nombre premier</u> p ,

(a) $z = \sum_{n\geq 1} h_{n,p} \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(1 - kc_p\ t)^{-1}$, <u>où</u> $c_p = 2^{1/(p-1)}$ <u>et où les</u> $h_{n,p}$ <u>vérifient les inégalités</u> (i), (ii) <u>et</u> (iii) <u>du théorème</u> 4.

(b) $z(t)$ <u>est une fonction analytique</u> p-<u>adique au sens de KRASNER</u> ([14] ou [15]) <u>sur l'ensemble</u>

$$\mathcal{C}_p(\alpha_p) = B(0\ ,\ \rho_p^{\alpha_p})^- - \bigcup_{i=1}^{p-1} B(i^{-1}\ c_p^{-1}\ ,\ \rho_p^{-\alpha_p})^+$$

<u>avec</u> $\alpha_p = p$ <u>si</u> $p \neq 2$ <u>et</u> 3 , $\alpha_3 = 9/4$, $\alpha_2 = 4/3$.

(c) $z(t)$ <u>est un élément analytique</u> p-<u>adique au sens de KRASNER sur le quasi-connexe</u> ([14] ou [15]) :

$$\mathcal{C}_p = B(0\ ,\ \rho_p^{1/2})^+ - \bigcup_{i=1}^{p-1} B(i^{-1}\ c_p^{-1}\ ,\ \rho_p^{-1/2})^+ \quad \text{pour} \quad p \neq 2 ,$$

<u>respectivement</u>, $\mathcal{C}_2 = B(0\ ,\ 2)^+ - B(2^{-1}\ ,\ 2^{-1})^+$, <u>borné en norme par</u> p^6 <u>sur</u> $\mathcal{C}_p$, <u>pour</u> $p \neq 3$ <u>et</u> 2 , <u>respectivement par</u> 3^5 <u>sur</u> $\mathcal{C}_3$, <u>et par</u> 2^3 <u>sur</u> $B(0\ ,\ 2)^-$.

<u>Démonstration</u>. - On a, d'après le théorème 4,

$$y = \sum_{n\geq 1} s_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} h_{n,p}(\exp(c_p\ t) - 1)^n ,$$

où les $h_{n,p}$ vérifient les inégalités (i), (ii) et (iii) du théorème 4.

On a donc, par transformation de Laplace formelle :

$$z(t) = \sum_{n\geq 1} s_n\ t^n = \sum_{n\geq 1} h_{n,p} \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(1 - kc_p\ t)^{-1} , \text{ d'où (a).}$$

Considérons chaque terme

$$(37)\quad h_{n,p} \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{(1-kc_p\ t)} = h_{n,p}\frac{(n!)t^n}{(1-c_p\ t)\ldots(1-nc_p\ t)}\cdot c_p^n = h_{n,p}[c_p,0,t]^n .$$

On veut déterminer $\alpha_p \in \mathbb{R}_+$, $p > \rho_p^{\alpha_p} > 1$, tel que

(38) $$\lim_{n\to\infty} |h_{n,p}[c_p \overset{n}{,0} , t]|_p = 0 \quad \text{pour} \quad t \in \mathcal{C}_p(\alpha_p) .$$

Il suffit donc de réaliser, pour

(39) $$\frac{1}{(2p-2)p}\alpha_p - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2p-2} < 0 \quad \text{pour} \quad p \neq 2 \text{ et } 3 ,$$

(39) $$-1/2 + \frac{2}{21}\alpha_3 + 2/7 < 0 \quad \text{pour} \quad p = 3 ,$$

(39) $$-2 + \frac{3}{8}\alpha_2 + 4/3 < 0 \quad \text{pour} \quad p = 2 .$$

On obtient donc :

$$\alpha_p < p \quad \text{pour} \quad p \neq 2 \text{ et } 3 , \quad \alpha_3 < 9/4 \quad \text{et} \quad \alpha_2 < 4/3$$

car on a imposé $\rho_2^{\alpha_2} \leqslant 2$. En outre, si $0 < \beta_p < \alpha_p$, la limite (38) est uniforme sur $\mathcal{C}_p(\beta_p)$ (respectivement sur $\mathcal{C}_2$). Autrement dit, pour $0 < \beta_p < \alpha_p$, $z(t)$ est par définition un élément analytique à la Krasner sur $\mathcal{C}_p(\beta_p)$ (resp. $\mathcal{C}_2$) , donc par définition c'est une fonction analytique à la Krasner sur $\mathcal{C}_p(\alpha_p)$ (resp. $\mathcal{C}_2$) , d'où (b).

Prenons alors β_p tel que $\rho_p^{\beta_p} = p^{1/2}$ pour $p \neq 2$ (i. e. $\beta_p = p - 1$ pour $p \neq 3$ et $\beta_3 = 7/4$). Un calcul simple de maxima montre que

(40) $$\sup_{t\in\mathcal{C}_p(p-1)} \sup_{n\geq 1} |h_{n,p}[c_p \overset{n}{,0} , t]|_p \leqslant p^6 \quad \text{pour} \quad p \neq 2 \text{ et } 3 ,$$

(41) $$\sup_{t\in\mathcal{C}_3(7/4)} \sup_{n\geq 1} |h_{n,3}[c_3 \overset{n}{,0} , t]|_3 \leqslant 3^5 ,$$

(42) $$\sup_{t\in\mathcal{C}_2} \sup_{n\geq 1} |h_{n,2}[c_2 \overset{n}{,0} , t]|_2 \leqslant 2^3 ,$$

d'où (c).

THÉORÈME 6. - <u>Les nombres de Schröder satisfont les congruences suivantes</u> :

(i) <u>Pour</u> $p \neq 2$ <u>et</u> 3 , <u>posons</u> $r(h) = (p-1)p^{2h+6(\log(h)/\log(p))+9}$, <u>alors</u>, <u>pour</u> $n \geqslant 2h + 6\frac{\log(h)}{\log(p)} + 9$,

$$|s_n c_p^{-n} - s_{n+r(h)} c_p^{-n-r(h)}|_p \leqslant p^{-h} .$$

(ii) <u>Pour</u> $p = 3$, <u>posons</u> $r(h) = 2.3^{3h+6(\log(h)/\log(3))+9}$, <u>alors</u>, <u>pour</u> $n \geqslant 3h + 6(\log(h)/\log(3)) + 9$,

$$|s_n c_3^{-n} - s_{n+r(h)} c_3^{-n-r(h)}|_3 \leqslant 3^{-h} .$$

(iii) <u>Pour</u> $p = 2$, $|s_n|_2 \leqslant 2^{-n+3}$.

On part de l'expression

$$\sum_{n\geq 1} s_n t^n = \sum_{n\geq 1} h_{n,p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}(1-kc_p t)^{-1} .$$

Si $p \neq 2$,

(43) $$\sup_{t\in B(0,1)^-} \left|\sum_{n\geq 1} s_n\, t^n - \sum_{n=1}^{n_0(h)} h_{n,p}[c_p^n, 0, t]\right|_p$$

$$\leq \sup_{n>n_0(h)} p^{-n/(p-1)}\, p^{2\log(n)/\log(p)}\, \rho_p^{n-1} ,$$

si l'on désire que le premier membre de (43) soit inférieur à p^{-h} il suffit que le second le soit, et par conséquent il suffit de réaliser

$$-\frac{n_0(h)}{2p-2} + 2\,\frac{\log(n_0(h))}{\log(p)} - \frac{1}{2p-2} \leq -h ,$$

il suffit de prendre

(44) $$n_0(h) = (2p-2)\left(h + 3\,\frac{\log(h)}{\log(p)} + 9\right) .$$

D'après le petit théorème de Fermat, si k est premier à p ,

$$|k^{(p-1)p^{m-1}} - 1|_p \leq p^{-m}$$

et, si p divise k , $|k^n|_p \leq p^{-n}$. Donc, si l'on pose,

$$\sum_{n=1}^{n_0(h)} h_{n,p}[c_p^n, 0, t] = \sum_{n\geq 1} s_{n,h}\, t^n ,$$

on a, pour $n \geq n_1(h) = 2h + 6\,\frac{\log(h)}{\log(p)} + 9$,

$$|s_{n,h}\, c^{-n} - s_{n+r(h)}\, c_p^{-n-r(h)}|_p \leq p^{-h} .$$

Le cas $p = 3$ se règle de même en remplaçant ρ_p par ρ_3 . Il vient $n_0(h) = \frac{14}{3}\left(h + 3\,\frac{\log(h)}{\log(p)} + 9\right)$, le reste des calculs est identique au cas $p > 3$. Le cas $p = 2$ est un peu différent. On utilise les inégalités de Cauchy sur $B(0\,,\,2)^-$ (cf. [1]), et il vient $|s_n|_2 \leq 2^3\, 2^{-n}$, d'après le théorème 5.

Remarque 1. - Les constantes ne sont pas les meilleures possibles. En outre, on n'a pas utilisé toutes les informations contenues dans le théorème 5.

Remarque 2. - Les résultats obtenus au théorème 6 sont en fait des congruences pour les s_n car se sont des entiers naturels.

5. Généralisation.

En fait, les résultats du paragraphe 3 sont une manifestation de la généralisation suivante des résultats du paragraphe 2. On note $\underset{\sim}{A}_p$ l'anneau des entiers de $\underset{\sim}{C}_p$.

THÉORÈME 7. - *Soit* p *un nombre premier. Soit* $t = f(y) \in y\underset{\sim}{C}_p[[y]]$. *Supposons qu'il existe* $g(y) \in y\underset{\sim}{C}_p[[y]]$ *tel que :*

$$t = \sum_{n\geq 1} a_n\, \frac{(g(y))^n}{n} \quad \underline{\text{avec}} \quad a_1 = 1 \quad \underline{\text{et}} \quad |a_n|_p \leq 1 ,$$

et si $g(y) = T$, *alors*

$$y = \sum_{n\geq 1} b_n\, T^n \quad \underline{\text{avec}} \quad \lim_{n\to\infty} |b_n\, c^{-n}(n!)|_p\, \rho_p^n = 0 ,$$

<u>où</u> c <u>est défini par la condition</u> $c = a^{1/(p-1)}$ <u>si</u> $|a_p|_p > p^{-1}$, <u>et</u> $c = p^{1/(p-1)}$ <u>si</u> $|a_p|_p \leqslant p^{-1}$. <u>Sous ces hypothèses</u>, <u>on peut écrire</u> $y = \sum_{n\geq 1} s_n\, t^n/n!$, <u>et</u> $z = \sum_{n\geq 1} s_n\, t^n$ <u>est un élément analytique au sens de KRASNER sur</u> $B(0, |c|^{-1} \subset \underset{\sim}{C}_p$.

<u>Démonstration</u>. - On écrit $t = \sum_{n\geq 1} a_n\, T^n/n$, donc, d'après le théorème 2, si c est défini comme ci-dessus, on peut écrire

$$T = \sum_{n\geq 1} f_n(e^{ct} - 1)^n \quad \text{avec} \quad f_n \in \underset{\sim}{C}_p \quad \text{et} \quad |f_n|_p \leqslant |c|_p^{-n}\, \rho_p^{n-1} .$$

Donc

$$g(y) = \sum_{n\geq 1} f_n(e^{ct} - 1)^n ,$$

et par conséquent

$$y = \sum_{m\geq 1} b_m\Big(\sum_{n\geq 1} f_n(e^{ct} - 1)^n\Big)^m = \sum_{m\geq 1} d_m(e^{ct} - 1)^m$$

avec $|d_m|_p \leqslant \sup |b_n\, f_{l(1)}^{n(1)}\, f_{l(2)}^{n(2)} \ldots f_{l(k)}^{n(k)}|_p$, le sup portant sur

$$n + l(1)\, n(1) + \ldots + l(k)\, n(k) = m , \qquad 1 \leqslant k \leqslant m .$$

Il vient donc $|d_m|_p \leqslant |b_n|_p\, |c|_p^{-n}\, \rho_p^{n-1}$. Après transformation de Laplace formelle, il vient

$$z = \sum_{m\geq 1} d_m \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (1 - kct)^{-1} = \sum_{m\geq 1} d_m[c , \overset{m}{0} , t] .$$

Le résultat est immédiat car

$$\sup_{t\in B(0,|c|_p^{-1})^-} |d_m[c , \overset{m}{0} , t]|_p \leqslant |b_n\, c^{-n}\, n!|\, \rho_p^{n-1} .$$

D'après le critère de Robba [15] ou, si l'on préfère, d'après le théorème de Mittag-Leffler p-adique ([1] ou [15]), le théorème précédent entraîne que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est presque périodique au sens de Robba [15], c'est-à-dire que, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$, $\exists\ T$, tels que, $\forall\ n \geqslant n_0$, $|s_{n+T} - s_n|_p \leqslant \varepsilon$. Si les s_n appartiennent à $\underset{\sim}{Q}$, l'inégalité précédente est équivalente à des congruences entre les s_n (simplement en revenant à la définition de la norme p-adique).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection Sup, "Le Mathématicien", 14).

[2] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonction zéta p-adique des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm., t. 20, 1972, p. 353-384.

[3] BARSKY (D.). - Analyse p-adique et nombres de Bell, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 282, 1976, p. 1257-1259.

[4] BARSKY (D.). - Analyse p-adique et nombres de Bernoulli, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 283, 1976, p. 1069-1072.

[5] BARSKY (D.). - Analyse p-adique et nombres de Bernoulli-Hurwitz, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 284, 1977, p. 137-140.

[6] BARSKY (D.). - Différentielle et congruences, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique (Amice-Barsky-Robba), 4e année, 1976/77, exposé n° 12, 10 p.

[7] BARSKY (D.). - Transformation de Cauchy p-adique et algèbre d'Iwasawa, Math. Annalen, t. 232, 1978, p. 255-266.

[8] CARLITZ (L.). - Congruences for the coefficients of the Jacobi elliptic functions, Duke math. J., t. 16, 1949, p. 297-302.

[9] CARLITZ (L.). - Congruences for the coefficient of hyperelliptic and related functions, Duke math. J., t. 19, 1952, p. 329-337.

[10] CARLITZ (L.). - Congruences for generalized Bell and Stirling numbers, Duke math. J., t. 22, 1955, p. 193-205.

[11] COMTET (L.). - Analyse combinatoire, Tomes 1 et 2. - Paris, Presses universitaires de France, 1970 (Collection Sup, "Le Mathématicien", 4 et 5).

[12] DWORK (B.). - Norm residue symbol in local number fields, Abh. math. Sem. Hamburg, t. 22, 1958, p. 180-190.

[13] FUJIWARA (.). - Über die Periodizität der Entwicklungs coefficienten, einer analytischen Funktion nach dem modul m , Tôhoku math. J., t. 2, 1912, p. 57-73.

[14] KRASNER (M.). - Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la méthode des éléments quasi-connexes, Table ronde d'analyse non archimédienne, 1972, Paris, Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 39-40, 1974, p. 131-254.

[15] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués complets ultramétriques, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.