PHILIPPE ROBBA

Clôture algébrique relative de certains anneaux de séries entières

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. nº 21, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A15_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
6e année, 1978/79, n° 21, 2 p.
21 mai 1979

CLÔTURE ALGÉBRIQUE RELATIVE DE CERTAINS ANNEAUX DE SÉRIES ENTIÈRES

(d'après un travail en commun avec B. DWORK)

par Philippe ROBBA (*)
[Univ. Paris-Sud, Orsay]

Soit K un corps complet pour une valuation ultramétrique de caractéristique 0.

Soit $K\{X\} = K\{X_1, \ldots, X_n\}$ l'anneau des séries entières à n variables, à coefficients dans K, convergeant dans une boule de rayon > 1, c'est-à-dire des séries $\sum_{\nu \in \underset{\sim}{Z}^n} a_\nu X^\nu$ telles qu'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel

$$|a_\nu|(1 + \varepsilon)^{|\nu|} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |\nu| \longrightarrow + \infty .$$

Soit $K\langle\langle X\rangle\rangle$ l'anneau des séries $\sum_{\nu \in \underset{\sim}{Z}^n} a_\nu X^\nu$ telles que $|a_\nu| \longrightarrow 0$ quand $|\nu| \longrightarrow + \infty$. $K\langle\langle X\rangle\rangle$ est le complété de $K\{X\}$ pour la norme de Gauss.

Nous avons montré le résultat suivant.

THÉORÈME. - $K\{X\}$ <u>est algébriquement clos dans</u> $K\langle\langle X\rangle\rangle$.

La démonstration complète paraîtra ultérieurement. Nous nous contenterons d'esquisser la démonstration.

<u>Schéma de la démonstration</u>. - Pour $g(X) = \sum a_\nu X^\nu$, $\lim |a_\nu| = 0$, on pose

$$|g| = \sup_\nu |a_\nu| .$$

Soit alors $f \in K\{X\}[Y]$, et soit $u \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ tel que $f(u) = 0$. Comme K est de caractéristique 0 on peut se ramener au cas où $f'(u) \neq 0$. Soit $\omega = |f'(u)|$.

On montre d'abord que u, élément analytique sur la boule unité $B(0, 1^+)$, se prolonge analytiquement en dehors de $B(0, 1^+)$, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble (analytique) A non contenu dans $B(0, 1^+)$, avec $A \cap B(0, 1^+) \neq \emptyset$, et un élément analytique $\tilde{u}$ sur A tel que $u = \tilde{u}$ sur $A \cap B(0, 1^+)$.

Pour cela, on considère une approximation suffisamment bonne de u par un polynôme $\eta \in K[X]$. En appliquant la méthode des approximations successives (ou encore un lemme de Newton), on montre l'existence d'un couple A, $\tilde{u}$, où A est de la forme

$$A = \{X \in K^n ; \ |f'(\eta(X))| \geq \sigma \ \text{ et } \ |X| = \max |X_i| \leq R\}$$

où σ et R vérifient les conditions

$$(*) \qquad \sigma < \omega \ \text{ et } \ R > 1 .$$

(*) Texte reçu le 4 juillet 1979.
Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS.

Soit $P(X)$ la partie dominante de $f'(\eta(X))$, c'est-à-dire que si

$$f'(\eta(X)) = \sum_\nu a_\nu X^\nu ,$$

on pose $P(X) = \sum a_\nu X^\nu$ la sommation étant étendue aux multi-indices ν tels que $|a_\nu| = \sup_\mu |a_\mu| = |f'(\eta)| = \omega$. Il est clair que P est un polynôme et que, quitte à augmenter σ et diminuer R , mais toujours en vérifiant la condition $(*)$, on aura

$$A = \{X \in R^n \ ; \ |P(X)| \geqslant \sigma \ \text{ et } \ |X| \leqslant R\} .$$

On montre facilement que par une rotation des axes (c'est-à-dire un changement de variable $Y = UX$ où U est une matrice inversible de $Gl_n(\mathcal{O}_K)$; une telle transformation envoie la boule $B(0 , r)$ sur elle-même), on peut se ramener au cas où P vérifie de plus la condition

$$|a_{\nu(i)}| = \omega = |P| \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \ , \ \text{où} \quad \nu(i) = (m\delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant n} \ , \quad m = \deg P .$$

Ceci signifie que A contient les polycouronnes

$$\Delta_i = \{X \in K^n \ ; \ 1 < |X_i| < R \ \text{ et } \ |X_j| < 1 \ \text{ pour } \ j \neq i\} \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

Soit $\hat{u}$ la fonction égale à u dans $B(0 , 1^+)$, et à $\tilde{u}$ dans A . Soit D_i le polydisque

$$D_i = \{X \in K^n \ ; \ |X_i| < R \ \text{ et } \ |X_j| < 1 \ \text{ pour } \ j \neq i\} .$$

On montre alors que $\hat{u}$ est séparément développable en série entière dans D_i , et donc globalement développable en série entière dans D_i (Il est évident que $\hat{u}$ est développable en série entière par rapport aux X_j pour $j \neq i$ compte tenu du fait que $\hat{u}$ est un élément analytique dans $B(0 , 1^+)$, resp. Δ_i , donc globalement développable en série entière dans $B(0 , 1^+)$, resp. globalement développable en série de Laurent dans Δ_i , seuls les X_i peuvent avoir des exposants négatifs. Le fait que $\hat{u}$ est également développable en série entière par rapport à X_i résulte des propriétés des éléments analytiques d'une variable).

Ce résultat est vrai pour tous les D_i , $1 \leqslant i \leqslant n$. Comme le domaine de convergence d'une série entière est multiplicativement convexe (**), le domaine de convergence de la série de Taylor de $\hat{u}$ en 0 , qui coïncide avec la série de Taylor de u , est l'enveloppe multiplicativement convexe des D_i , donc contient la boule $B(0 , R_1^+)$ avec $R_1 = R^{1/n}$.

(**) Ceci signifie que si X et Y appartiennent au domaine de convergence, pour tous λ et μ réels avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ et $\lambda + \mu = 1$, $X^\mu Y^\lambda = (X_i^\mu Y_i^\lambda)$ appartient au domaine de convergence.