Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Daniel Barsky

Fonctions zêta p-adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. nº 16, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A9_0>

FONCTIONS ZETA p-ADIQUES D'UNE CLASSE DE RAYON DES CORPS DE NOMBRES TOTALEMENT RÉELS

par Daniel BARSKY (*)

(Université Paris-VII)

0. Notations et introduction.

Soit p un nombre premier. $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{Z}_p$, $\underset{\sim}{Q}_p$, $\underset{\sim}{C}_p$ ont leur signification habituelle [1] ; $\underset{\sim}{R}_+ = \{x \in \underset{\sim}{R} ; x > 0\}$. La valeur absolue sur $\underset{\sim}{C}_p$ est notée $|.|$, et est normalisée par $|p| = p^{-1}$. Soit F un corps de nombres totalement réel, de degré n sur $\underset{\sim}{Q}$, Soit $\sigma_1 , \ldots , \sigma_n$ ses plongements dans $\underset{\sim}{R}^n$. Soit $\mathfrak{f}$ un idéal entier de F , et $\mathfrak{b}$ un idéal entier de F premier à $\mathfrak{f}$. On définit la fonction zêta partielle de la classe de rayon de $\mathfrak{b}$ modulo $\mathfrak{f}$ (au sens restreint) de la manière suivante :

$$\zeta(\mathfrak{b} , \mathfrak{f} , s) = \sum_{\mathfrak{g}} \frac{1}{N(\mathfrak{g})^s} , \text{ où } s \in \underset{\sim}{C} \text{ et } \Re(s) > 1 ,$$

$N(\mathfrak{g})$ désigne la norme sur $\underset{\sim}{Q}$ de l'idéal entier $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{g}$ parcourt l'ensemble des idéaux entiers de F premiers à $\mathfrak{f}$, tels que $\mathfrak{b}\mathfrak{g}^{-1} = (\mu)$, où μ est un élément totalement positif de F (ce que l'on note $\mu \gg 0$) vérifiant $\mu \equiv 1 \bmod^{x} \mathfrak{f}$ (c'est-à-dire que, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ divisant $\mathfrak{f}$, $v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{f}) \leqslant v_{\mathfrak{P}}((\mu - 1))$, où $v_{\mathfrak{P}}$ est la valuation sur les idéaux de F associée à $\mathfrak{P}$). On sait (cf. HECKE [8], [9]) que $\zeta(\mathfrak{b} , \mathfrak{f} , s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\underset{\sim}{C}$ n'ayant comme seule singularité qu'un pôle simple, pour $s = 1$. On sait, depuis les travaux de KUBOTA et LEOPOLDT [14], que les valeurs aux entiers négatifs des fonctions L de Dirichlet relatives à un caractère multiplicatif mod f , $L(s , \chi) = \sum_{n \in \underset{\sim}{N}} \chi(n)\, n^{-s}$, donnent naissance sur une classe $\bmod(p - 1)$ (resp. mod 2 si $p = 2$) à une fonction méromorphe sur la boule

$$B(1 , \rho_p^-) = \{x \in \underset{\sim}{C}_p ; |x - 1| < \rho_p ; \rho_p = p^{1-(1/(p-1))} \text{ si } p \neq 2 , \rho_2 = 4\} .$$

Plus précisément, ils montrent que l'application

$$n \longrightarrow (1 - \chi(p)\, p^{n-1})\, L(\chi , 1 - n) = L_p(\chi , 1 - n)$$

est, pour $n \equiv i \bmod (p - 1)$ (resp. mod 2), la restriction d'une fonction méromorphe sur $B(1 , \rho_p^-)$, n'ayant qu'un pôle simple au point $s = 1$ $(L_p(\chi , s)$, est analytique, si χ n'est pas le caractère trivial, et si $i \neq 0$). Ces fonctions se sont révélées avoir une grande importance, car elles sont liées à certaines représentations du groupe de Galois de $\underset{\sim}{Z}(p^{\infty})/\underset{\sim}{Q}$ (cf. IWASAWA [10]). Les résul-

---

(*) Visiting Research Associate at Princeton University 1977/78. L'exposé, au groupe d'étude, a été prononcé par Eve HELSMOORTEL.

tats de KLINGEN et SIEGEL [21], en montrant que les valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta partielles des corps de nombres totalement réels sont des nombres rationnels, laissaient espérer que la théorie de KUBOTA et LEOPOLDT pourrait s'étendre aux corps totalement réels. Ceci fut fait dans le cas du degré 2 par COATES et SINNOTT [5], et dans le cas général par SERRE [18] et par DELIGNE-RIBET [6], tous utilisant l'approche de KLINGEN et SIEGEL qui fait apparaitre les valeurs aux entiers négatifs de $\zeta(b\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)$ comme le terme de certaines formes modulaires. SHINTANI [20] a donné une démonstration du résultat de KLINGEN et SIEGEL beaucoup plus élémentaire, en ce sens qu'elle ne fait aucun usage de la théorie des formes modulaires. En outre, la théorie de Shintani fait apparaitre les valeurs aux entiers négatifs de $\zeta(b\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)$ comme une somme finie de termes, chaque terme étant la diagonale du développement en série de Laurent d'une fonction méromorphe à n-variables ($n = [F : \mathbb{Q}]$) au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$, la fonction étant sous une forme très explicite. La théorie de SHINTANI peut être considérée comme une vaste généralisation de la formule bien connue depuis EULER : Soit $\zeta(s)$ la fonction zêta-Riemann, alors

$$\frac{1}{x} + \sum_{n\geq 1}(-\zeta(1 - n))\,\frac{x^{n-1}}{(n - 1)!} = \frac{\exp x}{(\exp x) - 1}\ .$$

La théorie de Shintani repose sur une décomposition de $\mathbb{R}_+^n$ modulo l'action du groupe E_+ des unités totalement positive de F , en cônes. Autrement dit, SHINTANI donne une nouvelle description du domaine fondamental

$$\mathbb{R}_+^n/E_+ = \{\lambda\ \varepsilon_1^{x_1}\ \ldots\ \varepsilon_{n-1}^{x_{n-1}}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}_+\ ,\ \ 0 \leq x_i < 1\}\ ,$$

où $\varepsilon_1\ , \ldots ,\ \varepsilon_{n-1}$ forment un système de générateurs de E_+ .

Soit $a \in \mathbb{C}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note

$$B(a\ ,\ r^-) = \{x \in \mathbb{C}_p\ ;\ \ |x - a| < r\}$$

la boule "ouverte" de centre a et de rayon r dans $\mathbb{C}_p$. AMICE et FRESNEL [2] ont montré comment les propriétés de prolongeabilité à la KRASNER [13] d'une série de Taylor $F(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)\ x^n$ convergeant sur $B(0\ ,\ 1^-)$, en un élément analytique sur $\mathbb{C}_p - B(1\ ,\ 1^-)$ [1], entraine des propriétés de continuité p-adique pour la suite $n \longrightarrow f(n)$. Ce résultat repose en fait sur le théorème de Mittag-Leffler p-adique [1]. En particulier, la formule d'Euler

$$\frac{1}{x} + \sum_{n\geq 1}(-\ \zeta(1 - n))\,\frac{x^{n-1}}{(n - 1)!} = \frac{\exp x}{(\exp x) - 1}$$

permet de montrer par des manipulations formelles que la série

$$\sum_{n\geq 1}(-\ \zeta(1 - n))(1 - p^{n-1})(1 - u^n)\ X^{n-1}\ ,\ \text{où}\ \ u \in 1 + p\mathbb{Z}_p\ ,$$

se prolonge en une fonction analytique au sens de KRASNER [1] sur $\mathbb{C}_p - \mathbb{Z}_p$, ce qui entraine immédiatement grâce à un résultat de [3] que

$$n \longrightarrow -\ \zeta(1 - n)(1 - p^{n-1})(1 - u^n)$$

est, pour $n \equiv i \mod (p - 1)$ (resp. mod 2 si $p - 2$), la restriction d'une fonction de l'algèbre d'Iwasawa ([9], [18]). Il était donc tentant d'essayer d'utiliser les résultats analogues pour les fonctions $\zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, s)$, et de retrouver ainsi, par une voie élémentaire, certains résultats de DELIGNE et RIBET. Ceci fut fait indépendemment, presque en même temps, par Pierrette CASSOU-NOGUÈS dans sa thèse d'état [4] et par l'auteur. Les méthodes suivies par CASSOU-NOGUÈS et l'auteur, bien que proches, sont suffisamment différentes pour que j'expose celle-ci. La méthode de Pierrette CASSOU-NOGUES consiste à appliquer la théorie de SHINTANI à la série de Dirichlet associée à la fonction

$$\psi(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}, s) = \zeta(\mathfrak{bc}, \mathfrak{f}, s)\, N(\mathfrak{bc})^s - \zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, s)\, N(\mathfrak{b})^s\, N(\mathfrak{c}) ,$$

où $\mathfrak{c}$ est un idéal entier de F premier à $\mathfrak{f}$ soumis à certaines restrictions dont la plus importante est : Si $\mathfrak{c} \cap \underset{\sim}{Z} = (c)$, et si O_F est l'anneau des entiers de F, $O_F/\mathfrak{c} \simeq \underset{\sim}{Z}/c\underset{\sim}{Z}$.

La méthode suivie ici consiste en deux étapes. Tout d'abord, on transfère la propriété d'analyticité de $\zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, s)$ sur $\underset{\sim}{C} - \{1\}$ en une propriété du développement de Laurent à l'origine des fonctions à n-variables associées par la théorie de Shintani à $\zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, s)$ (lemme 4). Puis, on étudie comment la décomposition de SHINTANI de $\underset{\sim}{R}_+^n$ en cônes associés à $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{f}$ varie avec $\mathfrak{b}$ et, en particulier, comment elle varie lorsqu'on remplace $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{bc}$ (lemme 5).

Ces deux résultats nous permettent de donner un développement en série d'exponentielles de la fonction à n-variables associée par la théorie de Shintani à la série de Dirichlet de $\psi(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}, s)$, où $\mathfrak{c}$ est premier à $\mathfrak{f}$ (sans autre restriction) (théorème 2). De là, il est très facile de donner deux expressions de la fonction génératrice de $\psi(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}, 1-n)$, $n \in \underset{\sim}{N}$, pour $\mathfrak{f} = \prod_{\mathfrak{P}/p} \mathfrak{P}$, l'une proche de celle donnée dans [3], l'autre proche de celle de KUBOTA et LEOPOLDT [14] et MAZUR [15] (cf. aussi [12]) (lemme 10 et lemme 14). Les résultats de DELIGNE et RIBET découlent alors directement de ces expressions (théorèmes 3, 4, 5).

L'article se partagera donc de la manière suivante :

Les paragraphes 1 et 3 sont entièrement dus à SHINTANI dans leur principe, la différence avec l'article original de SHINTANI [20] est que, dans le paragraphe 1, on ne spécialise pas à la valeur 1 les nombreux paramètres auxiliaires afin d'établir les résultats du paragraphe 2 qui sont nouveaux. Les paragraphes 4 et 5 sont originaux. On y calcule en fait, de deux manières différentes, la mesure $d\mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{f},i}$ associée à

$$\psi(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{c}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ 1-n) \quad (\mathfrak{f} = \prod_{\mathfrak{P}/p} \mathfrak{P}\ ,\quad n \equiv i \mod (p-1))$$

par la théorie générale de Mazur-Serre-Katz :

$$\int_{\underset{\sim}{Z}_p^x} u^{1-n}\, d\mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{f},i}(u) = \psi(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{c}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ 1-n)\ ,$$

pour $n \equiv i \mod p-1$, où $\underset{\sim}{Z}_p^x = \{x \in \underset{\sim}{Z}_p\ ;\ |x| = 1\}$ ([12] et [15]).

Ce travail a été réalisé lors d'un séjour à l'Université de Princeton. Je tiens à remercier les membres du Département de Mathématiques pour leurs conseils et leurs encouragements.

1. Rappel de la théorie de Shintani.

Le principe des calculs effectués dans ce paragraphe sont dus à SHINTANI. Soit F un corps de nombres totalement réel de degré n sur $\underset{\sim}{Q}$, et soit $\sigma_1\ ,\ \dots\ ,\ \sigma_n$ les n plongements de F dans $\underset{\sim}{R}$. On injecte F dans $\underset{\sim}{R}^n$ par l'application $a \in F \hookrightarrow (\sigma_1(a)\ ,\ \dots\ ,\ \sigma_n(a)) \in \underset{\sim}{R}^n$. On note $\sigma_\ell(a) = a^{(\ell)}$. On note E le groupe des unités de F , E_+ le groupe des unités totalement positives de F et, si $\mathfrak{f}$ est un idéal entier de F , on note $E_+(\mathfrak{f})$ le groupe des unités totalement positives congrues à 1 $\mathrm{mod}^x\ \mathfrak{f}$.

DÉFINITION 1. - Soit $v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_\nu$ des vecteurs de $\underset{\sim}{R}_+^n$, $\underset{\sim}{R}$-linéairement indépendants. Le cône simplicial ouvert de base $v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_\nu$ est, par définition,

$$C(v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_\nu) = \{x \in \underset{\sim}{R}_+^n\ ;\ x = \textstyle\sum_{i=1}^{\nu} t_i\, v_i\ ,\quad t_i \in \underset{\sim}{R}_+\}\ .$$

Le cône sera dit $\underset{\sim}{Q}$-rationnel si $v_i \in (\sigma_1(F)\ ,\ \dots\ ,\ \sigma_n(F))$ pour $1 \leqslant i \leqslant \nu$. La dimension de $C(v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_\nu)$ est ν .

On définit l'action de F sur $\underset{\sim}{R}^n$ de la manière suivante : Si

$$x = (x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n) \in (\sigma_1(F)\ ,\ \dots\ ,\ \sigma_n(F))\ ,$$

et si

$$v = (v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_n) \in \underset{\sim}{R}^n\ ,$$

on pose $xv = (x_1\, v_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n\, v_n)$.

THÉORÈME 1 (SHINTANI [20]). - Il existe un ensemble fini J' de cônes simpliciaux ouverts, $\underset{\sim}{Q}$-rationnels C_j , de dimension $r(j)$ tels que, si

$$u\, C_j = \{x \in \underset{\sim}{R}_+^n\ ;\ x = uy\ ,\ y \in C_j\}\ ,$$

alors

$$\underset{\sim}{R}_+^n = \bigcup_{j \in J'} \bigcup_{u \in E_+} u\, C_j\ ,$$

la réunion étant disjointe (i. e. $u\, C_j \cap u'\, C_{j'} = \emptyset$ sauf si $j = j'$ et $u = u'$).

La démonstration est donnée dans [20], elle est effective pour autant que le groupe des unités E_+ soit connu effectivement. On a alors immédiatement, puisque $E_+(\mathfrak{f})$ est un sous-groupe d'index fini de E_+, le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - *Il existe un ensemble fini* J *de cônes simpliciaux, ouverts,* $\underset{\sim}{Q}$*-rationnels* C_j *de dimension* $r(j)$ *de base*

$$v_{j,k} = (v_{j,k}^{(1)}\ ,\ \dots\ ,\ v_{j,k}^{(\ell)}\ ,\ \dots\ ,\ v_{j,k}^{(n)})\ ,\quad 1 \leqslant k \leqslant r(j)\ ,$$

tels que :

$$\underset{\sim}{R}_+^n = \cup_{j\in J} \cup_{u\in E_+(\mathfrak{f})}\ u\ C_j\ ,$$

la réunion étant disjointe.

Grâce à cette décomposition de $\underset{\sim}{R}_+^n$, SHINTANI donne une expression de $\zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)$, sous forme intégrale, qui fait apparaitre les valeurs aux entiers négatifs de $\zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)$ comme les coefficients du développement en série de Laurent au voisinage de l'origine de certaines fonctions méromorphes sur $\underset{\sim}{R}^{n+1}$. Nous allons reprendre la démonstration de SHINTANI en la modifiant convenablement pour avoir une expression utilisable en vue de l'interpolation p-adique. On a, par définition,

(1) $$\zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s) = N(\mathfrak{b})^{-s} \textstyle\sum'_{\mu} N((\mu))^{-s}\ ,$$

(2) $$\zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s) = N(\mathfrak{b})^{-s} \textstyle\sum'_{\mu} N(\mu)^{-s}\ ,$$

où $N(\mu)$ désigne la norme absolue de $\mu \in F$, $N(\mu) \prod_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell(\mu) \in \underset{\sim}{Q}$, et $\sum'_{\mu}$ désigne une sommation sur les $\mu \in F$, totalement positifs, appartenant à $1 + \mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{f}$ et non associés modulo $E_+(\mathfrak{f})$ (c'est-à-dire $\mu_1\,\mu_2^{-1} \notin E_+(\mathfrak{f})$). Donc, d'après le corollaire 1, on a

(3) $$\zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s) = N(\mathfrak{b})^{-s} \textstyle\sum_{j\in J} \sum'_{\mu\in C_j\cap(1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})} N(\mu)^{-s}\ .$$

On peut toujours supposer, comme le fait remarquer SHINTANI, que la base des cônes C_j est formée de vecteurs appartenant à $(\sigma_1(\mathfrak{f})\ ,\ \dots\ ,\ \sigma_n(\mathfrak{f}))$ (par exemple, en multipliant les vecteurs de la base de C_j par des entiers convenables). *On confondra dorénavant les éléments de* F *avec leur image dans* $\underset{\sim}{R}^n$. Donc, si $\mu \in C_j \cap (1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{f})$ et si $(\alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_{r(j)}) \in \underset{\sim}{N}^{r(j)}$,

$$\mu + \textstyle\sum_{k=1}^{r(j)} \alpha_k\ v_{j,k} \in C_j \cap (1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{f})\ .$$

Autrement dit, tout $\mu \in C_j \cap (1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{f})$ s'écrit de manière unique :

(4) $$\mu = \textstyle\sum_{k=1}^{r(j)} x_{j,i,k}\ v_{j,k} + \sum_{k=1}^{r(j)} z_k\ v_{j,k}\ ,$$

où

(i) $z = (z_1\ ,\ \dots\ ,\ z_{r(j)}) \in \underset{\sim}{N}^{r(j)}$,

(ii) $x_{j,i,k} \in \underset{\sim}{Q}$, $0 < x_i \leqslant 1$, et $\sum_{k=1}^{r(j)} x_{j,i,k}\ v_{j,k} \in 1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{f}$,

c'est-à-dire que $(\sum_{k=1}^{r(j)} x_{j,i,k}\ v_{j,k})_{i\in R(j)}$ forment un système complet de représentants de $(1 + \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f}) \cap (\sum_{k=1}^{r(j)} v_{j,k}\,\underset{\sim}{Q})$ modulo $\sum_{k=1}^{r(j)} v_{j,k}\,\underset{\sim}{Z}$. L'ensemble des $r(j)$-uples $x_{j,i} = (x_{j,i,1}, \ldots, x_{j,i,r(j)})$, satisfaisant les conditions (ii),est est fini car $1 + \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f}$ est contenu dans un idéal fractionnaire de F, on note $R(j, 1 + \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})$ cet ensemble (ou $R(j)$ si aucune confusion n'est à craindre), et on notera aussi $R(j, 1 + \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})$ l'ensemble dans lequel varie l'indice i. Donc

(5) $$\zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, s) = N(\mathfrak{b})^{-s} \sum_j \sum_i \sum_z N\Big(\sum_{k=1}^{r(j)} (x_{j,i,k} + z_k) v_{j,k}\Big)^{-s},$$

où $j \in J$, $i \in R(j, 1 + \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})$, $z = (z_1, \ldots, z_{r(j)}) \in \underset{\sim}{N}^{r(j)}$.

Par un calcul classique [20], on montre que

(6) $$\Gamma(s)^n \zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, s) N(\mathfrak{b})^s$$
$$= \sum_j \sum_i \int_0^\infty dt_1 \ldots \int_0^\infty dt_n \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp((1 - x_{j,ik}) \sum_{\ell=1}^n v_{j,k}^{(\ell)} t_\ell)}{\exp(\sum_{\ell=1}^n v_{j,k}^{(\ell)} t_\ell) - 1} (t_1 \ldots t_n)^s,$$

où $j \in J$ et $i \in R(j, 1 + \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})$, cette intégrale converge pour $\mathcal{R}e(s) > 1$.

(6 bis) Posons

$$L_{j,k}(t) = \sum_{\ell=1}^n v_{j,k}^{(\ell)} t_\ell,$$

et si $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \underset{\sim}{R}_+^n$, notons

$$L_{j,k}(\rho t) = \sum_{\ell=1}^n v_{j,k}^{(\ell)} \rho_\ell t_\ell.$$

LEMME 1. - <u>Soit</u> $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \underset{\sim}{R}_+^n$, <u>tel que</u> $\prod_{\ell=1}^n \rho_\ell = 1$, <u>alors</u>

$$\int_0^\infty dt_1 \ldots \int_0^\infty dt_n \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp(1 - x_{j,i,k}) L_{j,k}(t))}{\exp(L_{j,k}(t)) - 1} (t_1 \ldots t_n)^{s-1}$$
$$= \int_0^\infty dt_1 \ldots \int_0^\infty dt_n \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp((1 - x_{j,i,k}) L_{j,k}(\rho t))}{\exp(L_{j,k}(\rho t)) - 1} (t_1 \ldots t_n)^{s-1},$$

<u>pour tout</u> $j \in J$, <u>et tout</u> $i \in R(j, 1 + \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})$.

<u>Démonstration.</u> - On effectue le changement de variable

$$t = (t_1, \ldots, t_n) = \rho w = (\rho_1 w_1, \ldots, \rho_n w_n)$$

dans la première intégrale, et on utilise la relation $\prod_{\ell=1}^n \rho_\ell = 1$.

Q. E. D.

Ce lemme permet, dans chacune des intégrales de (6), de remplacer la forme $L_{j,k}(t)$ par une forme

(6 ter) $$L_{j,i,k}(t) = L_{j,k}(u_{j,i}\, t), \text{ où } u_{j,i} \in E_+(f),$$

et ce lemme permet de supposer que les fonctions $(L_{j,i,k}(t))^{-1}$ sont linéairement indépendantes sur $\underset{\sim}{R}$, pour $j \in J$ et $i \in R(j, 1 + \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})$. On notera

$$v_{j,i,k} = (v_{j,i,k}^{(\ell)})_{\ell=1,\ldots,n} = u_{j,i}\, v_{j,k} = (u_{j,i}^{(\ell)} v_{j,k}^{(\ell)})_{\ell=1,\ldots,n}.$$

Avec cette remarque, (6) devient

(7) $\Gamma(s)^n\ \zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)\ N(\mathfrak{b})^s$

$$= \int_0^\infty dt_1 \ldots \int_0^\infty dt_n \sum_i \sum_j \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp((1 - x_{j,i,k})\ L_{j,i,k}(t))}{\exp(L_{j,i,k}(t)) - 1} (t_1 \ldots t_n)^{s-1} .$$

Notons $G(t) = G(t_1\ ,\ \ldots\ ,\ t_n)$ la fonction

$$\sum_j \sum_i \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp(1 - x_{j,i,k})\ L_{j,i,k}(t))}{\exp(L_{j,i,k}(t)) - 1} .$$

Nous allons transformer (7) en modifiant légèrement la technique de SHINTANI afin de pouvoir démontrer le lemme 4 qui est fondamental pour pouvoir appliquer la technique de [3].

Soit $\rho = (\rho_1\ ,\ \ldots\ ,\ \rho_n) \in \underset{\sim}{R}_+^n$. Il vient

(8) $\Gamma(s)^n\ \zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)\ N(\mathfrak{b})^s\ (\rho_1 \ldots \rho_n)^{-s}$

$$= \sum_j \sum_i \int_0^\infty dt_1 \ldots \int_0^\infty dt_n \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp((1 - x_{j,i,k})\ L_{j,i,k}(\rho t)}{\exp(L_{j,i,k}(\rho t)) - 1} (t_1 \ldots t_n)^{s-1} .$$

Soit $D_m = \{t \in \underset{\sim}{R}^n\ ;\ 0 \leqslant t_\ell \leqslant t_m\ ;\ \ell = 1\ ,\ \ldots\ ,\ m-1\ ,\ m+1\ ,\ \ldots\ ,\ n\}$,

(9) $\Gamma(s)\ \zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)\ N(\mathfrak{b})^s\ (\rho_1 \ldots \rho_n)^{-s}$

$$= \sum_j \sum_i \sum_{m=1}^n \int_{D_m} \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp((1 - x_{j,i,k})\ L_{j,i,k}(\rho t))}{\exp(L_{j,i,k}(\rho t)) - 1} (t_1 \ldots t_n)^{s-1}\ dt_1 \ldots dt_n .$$

Dans D_m , faisons le changement de variable suivant :

$t = uy = u(y_1\ ,\ \ldots\ ,\ y_n)$, avec $0 < u$, $0 \leqslant y_\ell \leqslant 1$, pour $\ell \neq m$ et $y_m = 1$.

Posons

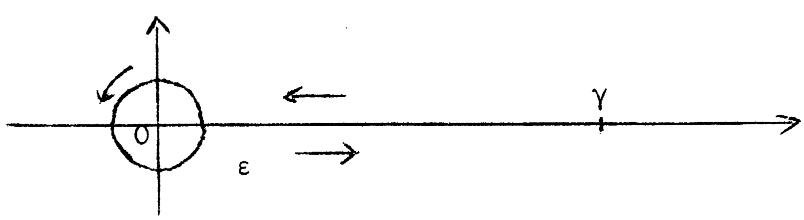
(10) $$g_{j,i,m,1}(u\rho t) = \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp((1 - x_{j,i,k})\ L_{j,i,k}(u\rho t)}{\exp(L_{j,i,k}(u\rho t)) - 1} \Bigg|_{t_m = 1} .$$

Cette notation indique que l'on a spécialisé la variable t_m à la valeur 1 . Il vient, en posant

(11) $$\Phi(s) = \Gamma(s)^n\ N(\mathfrak{b})^s\ \zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)(\rho_1 \ldots \rho_n)^{-s} ,$$

(12) $$\Phi(s) = \sum_j \sum_i \sum_{m=1}^n \int_0^\infty u^{ns-1}\ du \int_0^1 \ldots \int_0^1 g_{j,i,m,1}(u\rho t) \prod_{\ell \neq m} t_\ell^{s-1}\ dt_\ell .$$

Notons $I_\varepsilon(\gamma)$, où $\gamma \in \underset{\sim}{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\varepsilon \in \underset{\sim}{R}_+$, $0 < \varepsilon < \gamma$, le chemin suivant dans le plan complexe : On va de γ à ε sur l'axe réel, on décrit à partir de ε un cercle de centre 0 et de rayon ε dans le sens trigonométrique, et on revient de ε à γ en suivant l'axe réel.



$I_\varepsilon(\gamma)$.

On a, par une transformation classique,

$$(13)\quad ((\exp 2i\pi ms) - 1)\ \Phi(s)$$
$$= \sum_j \sum_i \sum_{m=1}^n \int_{I_\varepsilon(\infty)} u^{ns-1}\, du \int_Q^1 \dots \int_0^1 g_{j,i,m,1}(u\rho t) \prod_{\ell\neq m} t_\ell^{s-1}\, dt_\ell\ .$$

LEMME 2. - Le membre de droite de (13) est défini pour $\Re(s) > 0$.

Démonstration. - Il est clair que $g_{j,i,m,1}(u\rho t)$ est une fonction holomorphe au voisinage de $t_\ell = 0$, $\ell = 1$ à n , $\ell \neq m$. Donc, si $s - 1 > - 1$, le membre de droite de (13) est constitué d'intégrales convergentes.

Q. E. D.

Transformons encore (13)

$$(14)\quad ((\exp 2i\pi ms) - 1)((\exp 2i\pi s) - 1)^{n-1}\ \Phi(s)$$
$$= \sum_j \sum_i \sum_{m=1}^n \int_{I_\varepsilon(+\infty)} u^{ns-1}\, du \int_{I_\varepsilon(1)} \dots \int_{I_\varepsilon(1)} g_{j,i,m,1}(u\rho t) \prod_{\ell\neq m} t_\ell^{s-1}\, dt_\ell\ .$$

LEMME 3. - Le membre de droite de (14) est défini pour tout $s \in \underset{\sim}{C}$.

Démonstration. - C'est clair.

L'expression (13) réalise un prolongement analytique de $\Phi(s)$, pour $\Re(s) > 0$, en une fonction méromorphe ayant des pôles simples pour $s = q/n$, avec $q \in \underset{\sim}{N}$ et $1 \leqslant q \leqslant n$. L'expression (14) réalise un prolongement analytique de $\Phi(s)$, pour $s \in \underset{\sim}{C}$, en une fonction méromorphe ayant des pôles simples pour $s = q/n$, $q \in \underset{\sim}{N}$ et $0 \leqslant q \leqslant n$.

2. Etude de la partie polaire de la fonction génératrice des valeurs aux entiers négatifs de $\zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)$.

Posons $G_{m,1}(u\rho t) = \sum_j \sum_i g_{j,i,m,1}(u\rho t)$, où $j \in J$, et $i \in R(j\ ,\ 1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{f})$.

LEMME 4. - La partie polaire de $G_{m,1}(ut)$ est réduite à $(1/u^n)\ \Phi_{n,m}(t)$, où $\Phi_{n,m}(t)$ est une fraction rationnelle en les variables $(t_\ell)_{\ell\neq m}$ sans singularité au voisinage de $t_\ell = 0$, $\ell = 1$ à n et $\ell \neq m$, à coefficients dans F . Autrement dit, les coefficients des termes en $1/u^{n-1}$, ... , $1/u$, dans le développement en série Laurent de $G_{m,1}(ut)$ au voisinage de l'origine $(u = 0)$, sont identiquement nuls en tant que fonctions de $(t_\ell)_{\ell\neq m}$.

Démonstration. - Nous allons utiliser le résultat bien connu (HECKE [8], [9] ou SIEGEL [21]) que $\Gamma(s)^n\ \zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\underset{\sim}{C}$ n'ayant que les 2 pôles simples $s = 0$ et $s = 1$. Donc, si $s = q/n$, $q \in \underset{\sim}{N}$, $1 \leqslant q \leqslant n - 1$, l'intégrale

$$(15)\qquad \sum_{m=1}^n \int_{I_\varepsilon(+\infty)} u^{q-1}\, du \int_0^1 \dots \int_0^1 G_{m,1}(u\rho t) \prod_{\ell\neq m} t_\ell^{(q/n)-1}\, dt_\ell$$

doit être identiquement nulle, pour tout $\rho = (\rho_1\ , \dots ,\ \rho_n) \in \underset{\sim}{R}_+^n$. Notons $h_{q,m,1}(\rho t)$ le coefficient de u^{-q} $(1 \leqslant q \leqslant n)$ dans le développement en série de

Laurent à l'origine de $G_{m,1}(u\rho t)$. Remarquons que $G_{m,1}(u\rho t)$ se déduit de $G(\rho t)$ par le changement de variable

(16) $$(t_1 , \dots , t_n) = (uy_1 , \dots , uy_{m-1} , u , uy_{m+1} , \dots , uy_n)$$

dont le jacobien $D(t_1 , \dots , t_n)/D(u , y_1 , \dots , y_n)$ vaut u^{n-1} . Donc $G_{m,1}(u\rho t)$ se déduit de $G_{m',1}(u\rho t)$ par le changement de variables

$$(ut_1 , \dots , ut_{m-1} , u , ut_{m+1} , \dots , ut_n) = (vy_1 , \dots , vy_{m'-1} , v , vy_{m'+1} , \dots , vy_n)$$

dont le jacobien vaut

(17) $$\frac{D(v , y_1 , \dots , y_n)}{D(u , t_1 , \dots , t_n)} = \left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} .$$

Donc les intégrales

(18) $$\int_{I_\varepsilon(+\infty)} u^{q-1}\, du \int_0^1 \dots \int_0^1 G_{m,1}(u\rho t) \prod_{\ell\neq m} t_\ell^{(q/n)-1}\, dt_\ell$$

sont toutes égales entre elles, pour $m = 1 , \dots , n$. Donc

(19) $$\int_0^1 \dots \int_0^1 h_{q,m,1}(\rho t) \prod_{\ell\neq m} t_\ell^{(q/n)-1}\, dt_\ell = 0 ,$$

pour $m = 1 , \dots , n$. En effet, les intégrales (19) sont égales entre elles d'après (18), et leur somme est nulle d'après (15). Dans chacune des intégrales (19), effectuons le changement de variable

(20) $$(\rho_1 t_1 , \dots , \rho_{m-1} t_{m-1} , \rho_m , \rho_{m+1} t_{m+1} , \dots , \rho_n t_n) = (v_1 , \dots , v_{m-1} , \rho_m , v_{m+1} , \dots , v_n) = v .$$

On notera que, d'après le changement de variable (20), la valeur de $h_{q,m,1}(\rho t)$ est $h_{q,m,\rho_m}(v)$. Donc il vient, après multiplication par $\prod_{\ell\neq m} \rho_\ell^{q/n}$,

(21) $$\int_0^{\rho_1} \dots \int_0^{\rho_n} h_{q,m,\rho_m}(v) \prod_{\ell\neq m} v_\ell^{q/n-1}\, dv_\ell = 0 , \text{ pour } m = 1 , \dots , n .$$

Dérivons les 2 membres de (21) par rapport à $\partial^{n-1}/(\prod_{\ell\neq m} \partial_{\rho_\ell})$, et il vient

(22) $$h_{q,m,\rho_m}(\rho t) = 0 , \text{ pour } t_\ell = 1 , \ \ell \neq m , \text{ et } m = 1 , \dots , n .$$

On pose alors $\rho_\ell = t_\ell$, pour $\ell \neq m$ et $\rho_m = 1$, et il vient

(23) $$h_{q,m,1}(t) = 0 , \text{ pour } t \in \underset{\sim}{R}_+^n \text{ et } m = 1 , \dots , n .$$

Nous allons maintenant étudier le coefficient de $1/u^n$. Pour cela, nous étudierons les rapports qui existent entre les fonctions génératrices des valeurs aux entiers négatifs de $\zeta(\mathfrak{b}\mathfrak{c} , \mathfrak{f} , s)$ et $\zeta(\mathfrak{b} , \mathfrak{f} , s)$ où $\mathfrak{c}$ est un idéal entier de F premier à $\mathfrak{f}$. On associe à $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ des $r(j)$-uples de nombres rationnels $y_{j,i'} = (y_{j,i',1} , \dots , y_{j,i',r(j)})$ tels que

(i) $0 < y_{j,i',k} \leqslant 1$,

(ii) $\sum_{k=1}^{r(j)} y_{j,i',k} v_{j,k} \in 1+\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f}$.

On note $R(j , 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{f})$ l'ensemble des $r(j)$-uples satisfaisant (i) et (ii), et on note de la même manière l'ensemble dans lequel varie l'indice i' .

Nous allons relier les systèmes de $r(j)$-uples, $y_{j,i'}$, associés à l'idéal $\mathfrak{bc}$, aux systèmes de $r(j)$-uples, $x_{j,i}$, associés à l'idéal $\mathfrak{b}$. On définit l'addition des $r(j)$-uples composante par composante.

LEMME 5. - Soit $r \in \underset{\sim}{N}$ tel que

1° $r(\mathfrak{c}^{-1}) \subset O_F$,

2° $r \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$,

3° $(r-1)\, x_{j,i} \in \underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}$, pour tout nombre premier p non premier à $\mathfrak{f}$, pour tout $j \in J$, et tout $i \in R(j , 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})$.

Alors :

(i) Pour tout $r(j)$-uple $y_{j,i'} \in R(j , 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{f})$, il existe un $r(j)$-uple $x_{j,i} \in R(j , 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})$ et un $r(j)$-uple $z_{j,i'} = z_{j,i',1} , \ldots , z_{j,i',r(j)}) \in N^{r(j)}$ avec $0 \leqslant z_{j,i',k} \leqslant r-1$ tels que :

$$y_{j,i'} = \frac{x_{j,i} + z_{j,i'}}{r} .$$

(ii) Si $r(j) = n$, le nombre de n-uples $z_{j,i'}$ solutions de l'équation

$$\frac{x_{j,i} + z_{j,i'}}{r} \in R(j , 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{f}) \text{ , où } x_{j,i} \text{ est donné,}$$

est $N(\mathfrak{c})$.

Démonstration. - Il est toujours possible de trouver $r \in \underset{\sim}{N}$, satisfaisant 1°, 2° et 3°, car $(\mathfrak{f} , \mathfrak{c}) = O_F$, J ainsi que $R(j , 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})$ sont finis. La condition 3° n'est pas utile pour le lemme 5 mais sera utilisée à partir du théorème 2. Si $y_{j,i'} \in R(j , 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{f})$, alors, par définition,

$$\sum_{k=1}^{r(j)} y_{j,i',k}\, v_{j,k} \in 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{f}$$

et donc

$$r \sum_{k=1}^{r(j)} y_{j,i',k}\, v_{j,k} \in 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f} . \tag{24}$$

Donc, par définition de $R(j , 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})$, il existe $x_{j,i} \in R(j , 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})$ et $z_{j,i'} \in \underset{\sim}{N}^{r(j)}$ tels que

$$\sum_k y_{j,i',k}\, v_{j,k} = \sum_k (x_{j,i,k} + z_{j,i',k})\, v_{j,k} , \tag{25}$$

où $z_{j,i,k} \in \underset{\sim}{N}$. Or, par définition, $0 < y_{j,i',k} \leqslant 1$ et $0 < x_{j,i,k} \leqslant 1$, donc nécessairement $0 \leqslant z_{j,i',k} \leqslant r-1$, et (i) est démontré.

Supposons maintenant que $r(j) = n$. Pour que $z = (z_1 , \ldots , z_n) \in [0 , r-1]^n$ soit une solution de

$$\frac{x_{j,i} + z}{r} \in R(j , 1+\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{f}) ,$$

il faut et il suffit que

(26) $$\sum_k \frac{(x_{j,i,k} + z_k)}{r} v_{j,k} \in 1 + \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f} ,$$

car on a automatiquement $0 < (x_{j,i,k} + z_k)/r \leq 1$. Nous sommes donc conduit à étudier l'application $\underset{\sim}{Z}$-linéaire, entre les $\underset{\sim}{Z}$-modules $\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f}$ et $\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{f}$, définie par

$$w \in \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f} \longmapsto rw \in \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{f} .$$

En fait, on ne considère que $\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f}$ et $\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{f}$ modulo le $\underset{\sim}{Z}$-module libre de rang n engendré par les vecteurs $(v_{j,k})_{k=1,\dots,n}$. Notons S_j ce $\underset{\sim}{Z}$-module (il est clair que $F = S_j \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \underset{\sim}{Q}$). L'application f de $(\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f})/S_j$ dans $(\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f})/S_j$ définie par $f : w \longmapsto rw$, est $\underset{\sim}{Z}$-linéaire (évident) et surjective. En effet, le nombre de n-uples $z = (z_1 , \dots , z_n) \in [0 , r - 1]^n$ est r^n , et $\sum_k r^{-1} z_k v_{j,k}$ $(0 \leq z_k \leq r - 1)$ forme un système complet de représentants de $(r^{-1} S_j)/S_j$. Si $w \in \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{f}$, alors

$$((wr^{-1} \in (r^{-1} \mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1}))/S_j) \supset ((\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f})/S_j) \supset ((r^{-1} S_j)/S_j) ,$$

donc il existe sûrement un n-uple $z = (z_1 , \dots , z_n)$ tel que

(27) $$\frac{w}{r} + \sum_{k=1}^n r^{-1} z_k v_{j,k} \in (\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f})/S_j ,$$

et donc

(28) $$r(wr^{-1} + \sum_{k=1}^n z_k r^{-1} v_{j,k}) = w \mod S_j .$$

Remarquons que l'index de $(\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{f})/S_j$ dans $(\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f})/S_j$ est $N(\mathfrak{c})$. Par défition, les n-uples $x_{j,i} \in R(j , 1 + \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{f})$ (resp. $y_{j,i'} \in R(j , 1 + \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f})$) forment un système complet de représentants de $(\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{f})/S_j$ (resp. $(\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f})/S_j$). Le nombre d'élément dans le noyau de f est $N(\mathfrak{c})$. Donc, le nombre de solutions de l'équation

$$\sum_k \frac{x_{j,i,k} + z_k}{r} v_{j,k} \in 1 + \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{f} ,$$

avec $z_k \in \underset{\sim}{N}$ et $0 \leq z_k \leq r - 1$, est $N(\mathfrak{c})$.

Q. E. D.

3. Valeurs de la fonction $\zeta(\mathfrak{b} , \mathfrak{f} , s)$ aux entiers négatifs.

Reprenons la formule (14). On a, en spécialisant $\rho_1 = \dots = \rho_n = 1$,

(29) $$N(\mathfrak{b})^s \Gamma(s)^n((\exp 2i\pi ns) - 1)((\exp 2i\pi s) - 1)^{n-1} \zeta(\mathfrak{b} , \mathfrak{f} , s)$$
$$= \sum_j \sum_i \sum_{m=1}^n \int_{I_\varepsilon(\infty)} u^{ns-1} du \int_{I_\varepsilon(1)} \dots \int_{I_\varepsilon(1)} g_{j,i,m,1}(ut) \prod_{\ell\neq m} t_\ell^{s-1} dt_\ell .$$

Notons $B_{m,N}$ le coefficient de $u^{nN} \prod_{\ell\neq m} t_\ell^N$ dans le développement en série de Laurent au voisinage de $u = 0$, $t_\ell = 0$ $(\ell \neq m)$, de $\sum_j \sum_i g_{j,i,m,1}(ut)$.

LEMME 6 (SHINTANI). - Si $N \in \underset{\sim}{N}^*$, on a

(30) $$N(\mathfrak{b})^{1-N}\,\zeta(\mathfrak{b}\,,\,\mathfrak{f}\,,\,1-N) = (-1)^{n(N-1)}\,\frac{\Gamma(N)^n}{n}\,\sum_{m=1}^n B_{m,N-1}\ .$$

Démonstration. - Utilisons la formule $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$. La formule (29) donne

(29 bis) $$N(\mathfrak{b})^s(\exp i\pi s(n-1))(\exp i\pi ms)\frac{\sin \pi sn}{\sin \pi s}(2i\pi)^n\,(\Gamma(1-s))^{-n}\,\zeta(\mathfrak{b}\,,\,\mathfrak{f}\,,\,s)$$

$$= \sum_j \sum_i \sum_{m=1}^n \int_{I_\varepsilon(\infty)} u^{ns-1}\,du \int_{I_\varepsilon(1)}\cdots\int_{I_\varepsilon(1)} g_{j,i,m,1}(ut)\prod_{\ell\neq m} t_\ell^{s-1}\,dt_\ell\ .$$

Spécialisons $s = 1-N$, où $N \in \mathbb{N}^*$. Il vient, d'après le théorème des résidus,

(31) $$N(\mathfrak{b})^{1-N}\,(-1)^{n(N-1)}\,n\Gamma(N)^{-n}\,\zeta(\mathfrak{b}\,,\,\mathfrak{f}\,,\,1-N) = \sum_{m=1}^n B_{m,N-1}\ .$$

Q. E. D.

4. Première démonstration de l'existence d'une fonction zêta partielle p-adique.

Nous allons introduire maintenant la transformation de Laplace formelle à n-variables (cf. [7] et [3]) et la prise de la diagonale d'une série Taylor à n-variables.

DÉFINITION 2. - *Soit*

$$\tilde{F}(t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n) = \sum a_{m_1,\ldots,m_n}\,t_1^{m_1}\ldots t_n^{m_n} \in \mathbb{C}_p[[t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n]]\ ,$$

où $(m_1\,,\,\ldots\,,\,m_n) \in \mathbb{N}^n$. *La transformée de Laplace formelle* $F(t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n)$ *de* $\tilde{F}$ *est*

$$\mathcal{L}(\tilde{F}(t_1,\ldots,t_n)) = F(t_1,\ldots,t_n) = \sum a_{m_1,\ldots,m_n}(m_1!)\ldots(m_n!)\,t_1^{m_1}\ldots t_n^{m_n}\ .$$

LEMME 7.

$$\mathcal{L}(\exp(\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell\,t_\ell)) = \prod_{\ell=1}^n \frac{1}{1-\alpha_\ell\,t_\ell}\ .$$

L'application $\mathcal{L}$ *est continue pour la topologie* $(t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n)$*-adique sur* $\mathbb{C}_p[[t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n]]$.

Démonstration. - C'est immédiat.

Q. E. D.

DÉFINITION 3. - *Soit*

$$F(t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n) = \sum a_{m_1,\ldots,m_n}\,t_1^{m_1}\ldots t_n^{m_n} \in \mathbb{C}_p[[t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n]]\ .$$

On définit la diagonale de $F(t_1\,,\,\ldots\,,\,t_n)$ *par*

$$(\Delta F)(X) = \sum_{m\geq 0} a_{m,\ldots,m}\,X^m\ .$$

LEMME 8. - *On a*

$$\Delta(\prod_{\ell=1}^n \frac{1}{1-\alpha_\ell\,t_\ell}) = \frac{1}{(1-X\prod_{\ell=1}^n \alpha_\ell)}\ .$$

Démonstration. - C'est clair.

Q. E. D.

Nous sommes en mesure maintenant de construire, grâce aux résultats des paragraphes précédents, une série de Taylor à n-variables dont la diagonale de la transformée de Laplace sera la fonction génératrice des valeurs aux entiers négatifs de la fonction :

$$(32) \qquad \psi(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{c}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s) = N(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^s\ \zeta(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s) - N(\mathfrak{c})\ N(\mathfrak{b})^s\ \zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)\ .$$

De là, par un choix convenable de $\mathfrak{f}$, il sera facile de voir que ces valeurs sont dans $\mathbb{Z}_p$ et peuvent être interpolées p-adiquement en une fonction de l'algèbre d'Iwasawa. Tout d'abord, nous allons effectuer quelques manipulations formelles sur les fonctions que nous avons obtenues dans les paragraphes précédents. Posons

$$(33) \quad g_{j,i',m,1}(ut) = \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp((1-y_{j,k,i'})\ u \sum_{\ell=1}^{n} v_{j,i',k}^{(\ell)}\ t_\ell)}{\exp(u \sum_{\ell=1}^{n} v_{j,i',k}^{(\ell)}\ t_\ell) - 1} \Bigg|_{t_m = 1} ,$$

où $v_{j,i',k} = u_{j,i'}\ v_{j,k}$ avec $u_{j,i'} \in E_+(\mathfrak{f})$, $j \in J$, et $i' \in R(j\ ,\ 1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{f})$,

$$(34) \qquad L_{j,i',k}(t) = \sum_{\ell=1}^{n} v_{j,i',k}^{(\ell)}\ t_\ell\ .$$

La possibilité de varier $L_{j,i',k}(t)$, avec $i' \in R(j\ ,\ 1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{c}^{-1}\ \mathfrak{f})$, est garantie par le lemme 1. Posons $L_{j,i,k}(t) = \sum_{\ell=1}^{n} v_{j,i,k}^{(\ell)}\ t_\ell$ et $g_{j,i,m,1}(ut)$ comme à la formule (10), où $v_{j,i,k} = u_{j,i}\ v_{j,k}$ avec $u_{j,i} \in E_+(\mathfrak{f})$.

Nous ferons la convention importante suivante, qui sera valable dans tout le reste de l'article : Soit $i' \in R(j\ ,\ 1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{c}^{-1}\ \mathfrak{f})$ et $i \in R(j\ ,\ 1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{f})$ deux indices associés par le lemme 5, alors nous prendrons

$$u_{j,i} = u_{j,i'} \Longleftrightarrow L_{j,i,k}(t) = L_{j,i',k}(t)\ .$$

Soit

$$(35) \qquad \tilde{G}_m(u\ ,\ t) = \sum_j \sum_{i'} g_{j,i',m,1}(ut) - N(\mathfrak{c}) \sum_j \sum_i g_{j,i,m,1}(ut)\ ,$$

où $j \in J$, $i' \in R(j\ ,\ 1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{c}^{-1}\ \mathfrak{f})$ et $i \in R(j\ ,\ 1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{f})$.

LEMME 9. - La fonction $\tilde{G}_m(u\ ,\ t)$ est développable en série de Taylor au voisinage de $u = 0$, $t_\ell = 0$ $(\ell \neq m)$.

Démonstration. - D'après le lemme 4, la partie polaire de $\tilde{G}_m(u\ ,\ t)$ est réduite au seul terme $u^{-n}\ h_{n,m,1}(t)$, où $h_{n,m,1}(t)$ est une fraction rationnelle en t_ℓ $(\ell \neq m)$ développable en série de Taylor au voisinage de $t_\ell = 0$, $\ell \neq m$. Mais, d'après le lemme 5, $h_{n,m,1}(t)$ est identiquement nul. En effet,

$$(36)\ h_{n,m,1}(t) = \sum_j \sum_{i'} \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{n} v_{j,i,k}^{(\ell)}\ t_\ell} \Bigg|_{t_m=1} - N(\mathfrak{c}) \sum_j \sum_i \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{n} v_{j,i,k}^{(\ell)}\ t_\ell} \Bigg|_{t_m = 1} ,$$

où $j \in J$ avec $r(j) = n$, $i' \in R(j\ ,\ 1 + \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{c}^{-1}\ \mathfrak{f})$ et $i \in R(j\ ,\ 1+ \mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{f})$.

Mais, d'après le lemme 5, le nombre d'éléments de $R(j\ ,\ 1 + b^{-1}\ c^{-1}\ \mathfrak{f})$ est $N(c)$-fois le nombre d'éléments dans $R(j\ ,\ 1 + b^{-1}\ \mathfrak{f})$, si $r(j) = n$. La convention faite plus haut assure alors que $h_{n,m,1}(t) = 0$.

Q. E. D.

Nous allons maintenant donner une expression de $\tilde{G}_m(u\ ,\ t)$ en série d'exponentielle, qui nous conduira aux résultats sur l'interpolation p-adique de la fonction $\psi(b\ ,\ c\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ s)$ aux entiers négatifs.

THÉORÈME 2. - Pour $m = 1\ ,\ \dots\ ,\ n$, la fonction $\tilde{G}_m(u\ ,\ t)$ admet le développement suivant

(37) $$\tilde{G}_m(u\ ,\ t) = \sum_j \sum_i \sum_{n_1,\dots,n_{r(j)}} a_{j,i}(n_1\ ,\ \dots\ ,\ n_k\ ,\ \dots\ ,\ n_{r(j)}) \times \prod_{k=1}^{r(j)} \exp((1 - x_{j,i,k})\ L_{j,i,k}(u\ ,\ t))(\exp(L_{j,i,k}(ut)) - 1)^{n_k} \Big|_{t_m = 1} ,$$

où $j \in J$, $i \in R(j\ ,\ 1 + b^{-1}\ \mathfrak{f})$, et $(n_1\ ,\ \dots\ ,\ n_{r(j)}) \in \underset{\sim}{N}^{r(j)}$;

(38) $a_{j,i}(n_1\ ,\ \dots\ ,\ n_{r(j)}) \in \underset{\sim}{Z}_p \cap \underset{\sim}{Q}$, pour tout p non premier à $\mathfrak{f}$, et ne dépend pas de m .

Démonstration. - Soit r comme au lemme 5. Pour tout $y_{j,i'} \in R(j,\ 1 + b^{-1}\ c^{-1}\ \mathfrak{f})$, il existe un $r(j)$-uple $z_{j,i'} \in \underset{\sim}{N}^{r(j)}$, avec $0 \leq z_{j,i',k} \leq r - 1$ et $x_{j,i} \in R(j\ ,\ 1 + b^{-1}\ \mathfrak{f})$, tel que

(39) $$y_{j,i'} = x_{j,i} + x_{j,i}\ (\frac{1}{r} - 1) + \frac{z_{j,i'}}{r} .$$

Rappelons l'identité formelle, $\alpha \in \underset{\sim}{C}_p$,

(40) $$\exp \alpha x = ((\exp x) - 1 + 1)^{\alpha} = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n}((\exp x) - 1)^n ,$$

où $\binom{\alpha}{n} = (\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1))/n! \in \underset{\sim}{Z}_p$, si $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_p$. On peut donc écrire, en utilisant la convention faite avant le lemme 9 :

(41) $$\tilde{G}_m(u,t) = \sum_j \sum_i \sum_{i'} \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp((1-x_{j,i,k}) + x_{j,i,k}(1 - \frac{1}{r}) + \frac{z_{j,i',k}}{r})\ L_{j,i,k}(ut)}{\exp(L_{j,i,k}(ut)) - 1} - N(c) \sum_j \sum_i \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp(1 - x_{j,i,k})\ L_{j,i,k}(ut)}{\exp(L_{j,i,k}(ut)) - 1} \Big|_{t_m = 1} .$$

Nous ne rappellerons plus que $t_m = 1$ dans la suite de la démonstration. Les conditions 1°, 2° et 3° du lemme 5 entrainent $r^{-1}\ z_{j,i',k} \in \underset{\sim}{Z}_p$, et $((1/r) - 1)x_{j,i,k} \in \underset{\sim}{Z}_p$, pour p non premier à $\mathfrak{f}$.

(42) $$\tilde{G}_m(u\ ,\ t) = \sum_j \sum_i \prod_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp((1 - x_{j,i,k})\ L_{j,i,k}(ut))}{\exp(L_{j,i,k}(ut)) - 1} \times \{[\sum_{i'} \prod_{k=1}^{r(j)} \exp((x_{j,i,k}(\frac{1}{r} - 1) + r^{-1}\ z_{j,i',k})\ L_{j,i,k}(ut))] - N(c)\} .$$

Utilisons l'identité formelle (40), avec

$$\alpha = x_{j,i,k}(\frac{1}{r} - 1) + z_{j,i',k}\, r^{-1} ,$$

(43) $$\tilde{G}_m(u , t) = \sum_j \sum_i \sum_{k=1}^{r(j)} \frac{\exp((1 - x_{j,i,k})\, L_{j,i,k}(ut))}{\exp(L_{j,i,k}(ut)) - 1}$$

$$\times \{\sum_{n_1,\ldots,n_{r(j)}} d_{j,i}(n_1 , \ldots , n_{r(j)}) \prod_{k=1}^{r(j)} (\exp(L_{j,i,k}(ut)) - 1)^{n_k}\} ,$$

où $d_{j,i}(0 , \ldots , 0) = (\sum_{i'} 1) - N(c)$, et $d_{j,i}(n_1 , \ldots , n_{r(j)}) \in \underset{\sim}{Z}_p \cap \underset{\sim}{Q}$, pour tout p non premier à $\mathfrak{f}$. Donc,

(44) $$\tilde{G}_m(u , t) = \sum_j \sum_i \sum_{k=1}^{r(j)} \exp((1 - x_{j,i,k})\, L_{j,i,k}(ut))$$

$$\times \{\sum_{n_1,\ldots,n_{r(j)}\geqslant 0} a_{j,i}(n_1,\ldots,n_{r(j)}) \prod_{k=1}^{r(j)} (\exp(L_{j,i,k}(ut))-1)^{n_k}\} + \Phi_m(u,t) ,$$

où

(45) $$\Phi_m(ut) = \sum_j \sum_i \sum_{k=1}^{r(j)} \exp((1 - x_{j,i,k})\, L_{j,i,k}(ut))$$

$$\times \{\sum a_{j,i}(n_1 , \ldots , n_{r(j)})(\exp(L_{j,i,k}(ut)) - 1)^{n_k}\} ,$$

où la dernière sommation porte sur

$$n_1 , \ldots , n_{r(j)} \geqslant -1 ; \quad -n \leqslant n_1 + \ldots + n_{r(j)} < 0 ,$$

et où $a_{j,i}(n_1 , \ldots , n_{r(j)}) = d_{j,i}(n_1 + 1 , \ldots , n_{r(j)} + 1)$.

Pour démontrer le théorème 2, il suffit de montrer le lemme suivant.

LEMME 10. - $\Phi_m(ut)$ <u>est une fonction identiquement nulle</u>.

<u>Démonstration</u>. - La fonction $\Phi_m(ut)$ peut se décomposer de la manière suivante :

(46) $$\Phi_m(ut) = \sum_j \sum_i \Phi_{m,j,i}(ut) ,$$

(47) $$\Phi_{m,j,i}(ut) = \prod_{k=1}^{r(j)} \exp((1 - x_{j,i,k})\, L_{j,i,k}(ut))$$

$$\times \{\sum_{n_1,\ldots,n_k} a_{j,i}(n_1 , \ldots , n_{r(j)}) \prod_{k=1}^{r(j)} (\exp(L_{j,i,k}(ut)) - 1)^{n_k}\} .$$

Remarquons que, grâce au lemme 1, on peut supposer que les fonctions $(L_{j,i,k}(ut))^{-1}$ sont linéairement indépendantes sur $\underset{\sim}{R}$, pour $j \in J$ et $i \in R(J , 1 + b^{-1}\mathfrak{f})$. On sait (lemme 9) que la partie polaire de $\Phi_m(ut)$ est identiquement nulle. La remarque précédente entraine que la partie polaire de chacune des fonctions $\Phi_{m,j,i}(ut)$ est identiquement nulle. Par ailleurs, comme les vecteurs $(v_{j,i,k})_{k=1,\ldots,r(j)}$ sont $\underset{\sim}{R}$-linéairement indépendants par construction, la partie polaire de $\Phi_{m,j,i}(ut)$ ne peut être identiquement nulle que si chacun des coefficients $a_{j,i}(n_1 , \ldots , n_{r(j)})$ est nul, pour $n_1 , \ldots , n_{r(j)} \geqslant -1$ et $-n \leqslant n_1 + \ldots + n_{r(j)} < 0$.

Le lemme 10 est donc démontré et, par conséquent, le théorème 1 aussi.

Q. E. D.

Comme $\tilde{G}_m(u , t)$ est développable en série de Taylor au voisinage de $u = 0$,

$t_\ell = 0$ $(\ell \neq m)$, on peut effectuer le changement de variable

$$(ut_1 , \dots , ut_{m-1} , u , ut_{m+1} , \dots , ut_n) \longrightarrow (t_1 , \dots , t_m , \dots , t_n) .$$

Avec ce changement de variable, les fonctions $\tilde{G}_m(t)$ sont toutes égales, et nous noterons

(48) $$\tilde{F}_{\mathfrak{b}, c, \mathfrak{f}}(t_1 , \dots , t_n) \text{ ou } \tilde{F}_{\mathfrak{b}, c, \mathfrak{f}}(t)$$

leur valeur commune.

LEMME 11. - <u>La fonction</u>

(49) $$F_{\mathfrak{b}, c, \mathfrak{f}}(x) = \sum_{N\geq 0}(-1)^{nN} \psi(\mathfrak{b} , c , \mathfrak{f} , -N) x^N$$

<u>est égale à la diagonale de la transformée de Laplace formelle à n-variables de</u> $\tilde{F}_{\mathfrak{b}, c, \mathfrak{f}}(t_1 , \dots , t_n)$.

<u>Démonstration</u>. - C'est immédiat d'après le lemme 6, les définitions de la prise de la diagonale et de la transformation de Laplace formelle.

Q. E. D.

LEMME 12. - <u>On a</u>

(50) $$F_{\mathfrak{b}, c, \mathfrak{f}}(x) = \sum_j \sum_i \sum_{n_1,\dots,n_{r(j)}} a_{j,i}(n_1 , \dots , n_{r(j)}) \times \sum_{i_1,\dots,i_{r(j)}} \left(\prod_{k=1}^{r(j)} (-1)^{n_k - i_k - 1} \binom{n_k}{i_k - 1}\right) \frac{1}{1 - x \prod_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{r(j)} v_{j,i,k}^{(\ell)}(-x_{j,i,k} + i_k)\right)} ,$$

<u>où</u> $n_1 , \dots , n_{r(j)} \geq 0$ <u>et</u> $i_1 , \dots , i_{r(j)} \geq 1$, $a_{j,i}(n_1 , \dots , n_{r(j)}) \in \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$, <u>pour tout</u> p <u>non premier à</u> $\mathfrak{f}$.

<u>Démonstration</u>. - On sait, d'après le lemme 11, que

(51) $$F_{\mathfrak{b}, c, \mathfrak{f}}(x) = \Delta\, \mathfrak{L}(\tilde{F}_{\mathfrak{b}, c, \mathfrak{f}}(t_1 , \dots , t_n)) .$$

D'après le théorème 1, on a

(52) $$\tilde{F}_{\mathfrak{b}, c, \mathfrak{f}}(t_1 , \dots , t_n) = \sum_j \sum_i \sum_{n_1,\dots,n_{r(j)}} a_{j,i}(n_1 , \dots , n_{r(j)}) \times \prod_{k=1}^{r(j)} \exp((1 - x_{j,i,k}) L_{j,i,k}(t))(\exp(L_{j,i,k}(t)) - 1)^{n_k} ,$$

où $a_{j,i}(n_1 , \dots , n_{r(j)}) \in \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$, pour tout p non premier à $\mathfrak{f}$. Il vient, en développant,

(53) $$\tilde{F}_{\mathfrak{b}, c, \mathfrak{f}}(t_1 , \dots , t_n) = \sum_j \sum_i \sum_{n_1,\dots,n_{r(j)}} a_{j,i}(n_1 , \dots , n_{r(j)}) \times \sum_{i_1,\dots,i_{r(j)}} \prod_{k=1}^{r(j)}(-1)^{n_k - i_k - 1} \binom{n_k}{i_k - 1} \exp((-x_{j,i,k} + i_k) L_{j,i,k}(t)) ,$$

où $i_1 , \dots , i_{r(j)} \geq 1$.

En appliquant $\mathfrak{L}$ aux deux membres de (53), il vient

(54) $$F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(t_1 , \dots , t_n) = \sum_j \sum_i \sum a_{j,i}(n_1 , \dots , n_{r(j)})$$

$$\times \sum_{i_1,\dots,i_{r(j)}} \left(\prod_{k=1}^{r(j)} (-1)^{n_k - i_k - 1} \binom{n_k}{i_k - 1} \right) \prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{1 - t_\ell \sum_{k=1}^{r(j)} v_{j,i,k}^{(\ell)}(-x_{j,i,k} + i_k)} .$$

Appliquons Δ aux deux membres de (54), il vient

(55) $$F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(x) = \sum_j \sum_i \sum a_{j,i} (n_1 , \dots , n_{r(j)})$$

$$\times \sum \left(\prod_{k=1}^{r(j)} (-1)^{n_k - i_k - 1} \binom{n_k}{i_k - 1} \right) \frac{1}{1 - x \prod_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{r(j)} v_{j,i,k}^{(\ell)}(-x_{j,i,k} + i_k) \right)}$$

Q. E. D.

Définissons alors, pour tout $j \in J$, et tout $i \in R(j , 1 + \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{f})$, une mesure $d\mu_{j,i}(t_1 , \dots , t_{r(j)})$ sur $\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}$, pour les p non premiers à $\mathfrak{f}$, par :

(56) $$\int_{\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}} \binom{t_1}{n_1} \cdots \binom{t_{r(j)}}{n_{r(j)}} d\mu_{j,i}(t_1 , \dots , t_{r(j)}) = a_{j,i}(n_1 , \dots , n_{r(j)}) ,$$

avec $n_1 \geqslant 0 , \dots , n_{r(j)} \geqslant 0$.

Rappelons qu'une mesure sur $\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}$ est élément du dual topologique de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)} , \underset{\sim}{C}_p)$ (cf. [3], [11], [14]). Il est bien connu que les polynômes $\prod_{k=1}^{r(j)} \binom{t_k}{n_k}$ forment une base normale de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)} , \underset{\sim}{C}_p)$, donc (cf. [19]) les conditions (56) définissent une mesure de manière unique, car

(57) $$|a_{j,i}(n_1 , \dots , n_{r(j)})| \leqslant 1 .$$

LEMME 13. - <u>On a</u>

(58) $$F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(x) = \sum_j \sum_i \int_{\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}} \frac{d\mu_{j,i}(t_1 , \dots , t_{r(j)})}{1 - x \prod_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{r(j)} v_{j,i,k}^{(\ell)}(-x_{j,i,k} + t_k)} ,$$

<u>où</u> $d\mu_{j,i}(t_1 , \dots , t_{r(j)})$ <u>est une mesure sur</u> $\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}$ <u>à valeurs dans</u> $\underset{\sim}{Z}_p$, <u>pour</u> p <u>non premier à</u> $\mathfrak{f}$.

<u>Démonstration</u>. - Tout d'abord rappelons ([3], [11]) que l'on dit que $d\mu_{j,i}$ est une mesure sur $\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}$ à valeurs dans $\underset{\sim}{Z}_p$ si, pour toute fonction caractéristique de boule de $\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}$, ψ, on a

(59) $$\int_{\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}} \psi \, d\mu_{j,i} \in \underset{\sim}{Z}_p .$$

On sait que (58) est équivalent à

(60) $$\int_{\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}} \prod_{k=1}^{r(j)} \binom{t_k}{n_k} d\mu_{j,i} \in \underset{\sim}{Z}_p , \text{ pour tout } n_1 \geqslant 0 , \dots , n_{r(j)} \geqslant 0 .$$

Les relations (56) et (57) entrainent que $d\mu_{j,i}$ est une mesure sur $\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}$ à valeurs dans $\underset{\sim}{Z}_p$. Le lemme 13 est alors juste une reformulation du lemme 12 si l'on remarque que

$$(61) \qquad \sum_{i_1,\dots,i_{r(j)}} \prod_{k=1}^{r(j)} (-1)^{n_k-i_k-1} \binom{n_k}{i_k-1} \frac{1}{1-x\prod_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{r(j)} v_{j,i,k}^{(\ell)}(-x_{j,i,k}+i_k)} ,$$

où $i_1 \geqslant 1$, ... , $i_{r(j)} \geqslant 1$ est le coefficient de $\binom{t_1}{n_1} \dots \binom{t_{r(j)}}{n_{r(j)}}$ dans le développement de Mahler de la fonction continue de $\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}$ dans $\underset{\sim}{C}_p(X)$

$$(62) \quad f_{j,i} : (t_1 , \dots , t_{r(j)}) \longrightarrow \frac{1}{1-x\prod_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{r(j)} v_{j,i,k}^{(\ell)}(-x_{j,i,k}+t_k)} .$$

THÉORÈME 3 (DELIGNE-RIBET). - Soit p un nombre premier. Si $\mathfrak{f} = \prod_{\mathfrak{P}/p} \mathfrak{P}$, l'application $m \longrightarrow \psi(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}, 1-m)$, $m \in \underset{\sim}{N}^*$, est la restriction à $\underset{\sim}{N}^*$ (m mod 2 si $p = 2$) d'une unique fonction de l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda_p(\underset{\sim}{Q})$. Ou encore, si m parcourt une classe mod $(p-1)$ (resp. mod 2 si $p = 2$) de $\underset{\sim}{N}^*$, l'application

$$m \longrightarrow \zeta_{\mathfrak{c}}^*(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, 1-m) = \zeta(\mathfrak{bc}, \mathfrak{f}, 1-m) - N(\mathfrak{c})^m \zeta(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}, 1-m)$$

est la restriction d'une unique fonction de l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda_p(\underset{\sim}{Q})$.

Démonstration. - Rappelons que $\Lambda_p(\underset{\sim}{Q})$ est l'adhérence pour la topologie de la convergence uniforme sur $\underset{\sim}{Z}_p$ des combinaisons linéaires finies à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$ de fonction $f_u : s \longrightarrow u^s$, où $s \in \underset{\sim}{Z}_p$, et $u \in 1 + p\underset{\sim}{Z}_p$ (cf. [10], [15], [18]).

Le choix de $\mathfrak{f}$ implique que les mesures $d\mu_{j,i}$ sont des mesures sur $\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}$ à valeurs dans $\underset{\sim}{Z}_p$. Ce choix entraine aussi

$$(63) \quad \prod_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{r(j)} v_{j,i,k}^{(\ell)}(-x_{j,i,k}+t_k) \in 1+p\,\underset{\sim}{Z}_p , \text{ si } t_k \in \underset{\sim}{Z}_p , \quad k = 1, \dots, r(j) .$$

En effet, (63) est vérifié si $t_k \in \underset{\sim}{Z}$, pour $k = 1$, ... , $r(j)$, et on conclut par continuité.

Nous allons utiliser le résultat de [3] pour montrer ce théorème. Pour cela, nous allons montrer :

(i) $F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(X)$ est un élément analytique [1] sur $v_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p)$, pour tout $\varepsilon > 0$, où

$$(64) \qquad v_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p) = \{x \in \underset{\sim}{C}_p \; ; \; |x-y| \geqslant \varepsilon \text{ , pour tout } y \in \underset{\sim}{Z}_p\} .$$

(ii) $\sup_{x\in v_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p)} |F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(x)| \leqslant 1/\varepsilon$.

(iii) Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\underset{\sim}{C}_p/\underset{\sim}{Z}_p)$, $F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(\sigma(x)) = \sigma(F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(x))$, pour tout $x \in v_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p)$.

La démonstration de (i), (ii), (iii) suit de près la démonstration du théorème 1 de [3].

Soit $\eta > 0$, on peut réaliser un recouvrement de $\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}$ par $n_j(\eta)$ boules de $\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}$, de rayon η , de centre $i_m(\eta)$ $(1 \leqslant m \leqslant n_j(\eta))$, et de fonction caractéristique $\varphi_{m,\eta}(t_1 , \dots , t_{r(j)})$. On pose

(65) $$\int_{\underset{\sim}{Z}_p^{r(j)}} \varphi_{m,\eta}\, d\mu_{j,i} = \gamma_{j,i,m,\eta} \in \underset{\sim}{Z}_p \ .$$

On a

(66) $$\sup_{x\in v_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p)} \left| F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(x) - \sum_m \frac{\gamma_{j,i,m,\eta}}{1 - x\prod_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{r(j)} v_{j,i,k}^{(\ell)}(-x_{j,i,k} + i_{m,k}(\eta))} \right| < \eta/\varepsilon^2 .$$

De (66), on déduit que $F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(x)$ est un élément analytique sur $v_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p)$. Appelons $R_{j,i,\eta}(x)$ la fraction rationnelle qui figure dans (66).

Il est clair, sur l'expression de $R_{j,i,\eta}(x)$, que

(67) $$\sup_{x\in v_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p)} |R_{j,i,\eta}(x)| \leqslant 1/\varepsilon .$$

Il en est donc de même pour $F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(x)$ en prenant η sufisamment petit. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\underset{\sim}{C}_p/\underset{\sim}{Z}_p)$, on a

(68) $$\sigma(R_{j,i,\eta}(x)) = R_{j,i,\eta}(\sigma(x)) \ , \text{ pour tout } x \in v_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p) \ ,$$

car $\gamma_{j,i,m,\eta} \in \underset{\sim}{Z}_p$ et (63).

En faisant tendre η vers 0 , on a de même

(69) $$\sigma(F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(x)) = F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(\sigma(x)) \ , \text{ pour tout } x \in v_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p) \ ,$$

car σ est continue pour la topologie de $\underset{\sim}{C}_p$. On a donc démontré (i), (ii), (iii). On applique le corollaire 3 du théorème 2 de [3], et le théorème est démontré.

Q. E. D.

THÉORÈME 4 (DELIGNE-RIBET). - <u>Soit</u> p <u>un nombre premier, soit</u> ζ_F <u>la fonction zêta de Dedekind du corps de nombres</u> F . <u>Soit</u> $\mathfrak{c}$ <u>un idéal de</u> F <u>premier à</u> p . <u>Si</u> m <u>parcourt une classe de</u> $\underset{\approx}{N}^*$ mod $(p-1)$ (<u>resp.</u> mod 2 <u>si</u> $p = 2$), <u>l'application</u>

$$m \longrightarrow \left(\prod_{\mathfrak{P}/p}(1 - N(\mathfrak{P})^{m-1})\right)(1 - N(\mathfrak{c})^m)\, \zeta_F(1-m) \ ,$$

<u>est la restriction d'une unique fonction de l'algèbre d'Iwasawa</u> $\Lambda_p(\underset{\approx}{Q})$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $\mathfrak{f} = \prod_{\mathfrak{P}/p} \mathfrak{P}$. On a

(70) $$\sum_{\mathfrak{b}} \zeta(\mathfrak{b}\,,\,\mathfrak{f}\,,\,s) = \left(\prod_{\mathfrak{P}/p}(1 - N(\mathfrak{P})^{-s})\right) \zeta_F(s) \ ,$$

où $\mathfrak{b}$ parcourt les classes de F au sens restreint.

(71) $$\sum_{\mathfrak{b}} \zeta(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,,\,\mathfrak{f}\,,\,s) = N(\mathfrak{c})^{-s} \left(\prod_{\mathfrak{P}/p}(1 - N(\mathfrak{P})^{-s})\right) \zeta_F(s) \ .$$

Le théorème est alors un simple corollaire du théorème 3.

Q. E. D.

THÉORÈME 5 (DELIGNE-RIBET). - <u>Soit</u> M <u>une extension abélienne finie de</u> F , <u>soit</u> χ <u>un caractère de dimension</u> 1 <u>de</u> $\mathrm{Gal}(M/F)$ (<u>à valeurs dans</u> $\underset{\approx}{C}$). <u>Soit</u>

$$L(\chi\,,\,s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} \ .$$

Soit p *un nombre premier. Si* m *parcourt la classe de zéro* mod $(p-1)$ (*resp.* mod 2 *si* $p = 2$), *l'application*

$$m \longrightarrow L(\chi\ ,\ 1-m)\ \prod_{\mathfrak{P}/p}(1-\chi(\mathfrak{P})\ N(\mathfrak{P})^{m-1})\ ,\quad m \in \mathbb{N}^*\ ,$$

est la restriction d'une unique fonction de l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda_p(\mathbb{Q}[\chi(\mathfrak{a})])$, *où* $\mathfrak{a}$ *parcourt les idéaux entiers de* F .

Démonstration. - Soit $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}'\ \prod_{\mathfrak{P}/p}\mathfrak{P}$, où $\mathfrak{f}'$ est le conducteur de χ , et où $\mathfrak{c}$ un idéal premier à $\mathfrak{f}$, alors

$$\begin{aligned}(72)\quad & \sum_{\mathfrak{b}} \chi(\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\zeta(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ 1-m) - N(\mathfrak{c})^m\ \zeta(\mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{f}\ ,\ 1-m)) \\ & = L(\chi\ ,\ 1-m)(1-\chi(\mathfrak{c})\ N(\mathfrak{c})^m)\ \prod_{\mathfrak{P}/p}(1-\chi(\mathfrak{P})\ N(\mathfrak{P})^{m-1})\ .\end{aligned}$$

On choisit $\mathfrak{c}$ de telle sorte que

$$m \longrightarrow \frac{1}{1-\chi(\mathfrak{c})\ N(\mathfrak{c})^m}$$

soit la restriction pour $m \equiv 0 \mod (p-1)$ (resp. $m \equiv 0 \mod 2$) d'une fonction de l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda_p(\mathbb{Q}[\chi(\mathfrak{a})])$, et on applique le théorème 3. Il suffit de choisir $\mathfrak{c}$ tel que $|\chi(\mathfrak{c}) - N(\mathfrak{c})| = 1$, car

$$\begin{aligned}(73)\qquad & (1-\chi(c)\ N(\mathfrak{c})^{k(p-1)})^{-1} \\ & = (1-\frac{\chi(\mathfrak{c})}{N(\mathfrak{c})})\ \sum_{m\geq 0}\ (\frac{\chi(\mathfrak{c})}{N(\mathfrak{c})-\chi(\mathfrak{c})})^m\ (N(\mathfrak{c})^{k(p-1)}-1)^m\ .\end{aligned}$$

Q. E. D.

5. Deuxième démonstration de l'existence d'une fonction zêta partielle p-adique.

A partir du théorème 1, nous allons donner une deuxième démonstration du théorème 3, en utilisant une autre expression de $F_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f}}(x)$. Cette méthode est très proche de la méthode originelle de KUBOTA-LEOPOLDT avec ses améliorations par MAZUR. Elle se réduit d'ailleurs à cette dernière si $F = \mathbb{Q}$.

LEMME 14. - *Soit* p *un nombre premier non premier à* $\mathfrak{f}$ *: Soit* $(C_j)_{j\in J}$ *un cône* $\mathbb{Q}$*-rationnel. Soit* $(v_{j,k})_{k=1,\dots,r(j)}$ *une base de ce cône. Alors,*

$$v_{j,k}(h) = (p^h\ v_{j,k})_{k=1,\dots,r(j)}\ ,$$

est aussi une base de C_j . *Si* $R_h(j\ ,\ 1+\mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{f})$ *est l'ensemble des* $r(j)$*-uples de nombres rationnels* $y_{j,i,k}(h)$ *tels que*

(i) $0 < y_{j,i,k}(h) \leq 1$

(ii) $\sum_{k=1}^{r(j)} y_{j,i,k}(h)(p^h\ v_{j,k}) \in 1+\mathfrak{b}^{-1}\ \mathfrak{f}$,

alors

$$(74)\qquad y_{j,i,k}(h) = p^{-h}(y_{j,i,k}(0)+a)\ ,\ \text{où}\ \ a \in \mathbb{N}\ ,\quad 0 \leq a < p^h\ .$$

Démonstration. - C'est immédiat en se reportant à la définition des $y_{j,i}(0)$.

Q. E. D.

LEMME 15. - Soit $F_{b,c,\mathfrak{f}}(t)$ comme en (48) ; $t = (t_1 , \ldots , t_n)$. Alors

(75) $$\tilde{F}_{b,c,\mathfrak{f}}(t) = \lim_{h\to\infty} \sum_j \sum_i \sum_{a_1,\ldots,a_{r(j)}} \times \prod_{k=1}^{r(j)} (\sum_{i'} (y_{j,i',k}(0) - x_{y,i,k}(0)) \exp((- x_{j,i,k}(0) + a_k) L_{j,i,k,0}(t)) ,$$

où la limite est au sens de la convergence uniforme dans un voisinage de zéro, où $j \in J$, $i \in R_0(j , 1 + b^{-1} \mathfrak{f})$, $i' \in R_0(j , 1 + b^{-1} c^{-1} \mathfrak{f})$, $L_{j,i,k,0}(t)$ comme en (6 ter), $(a_1 , \ldots , a_{r(j)}) \in \underset{\sim}{N}^{r(j)}$, $1 \leqslant a_k \leqslant p^h$, $y_{j,i'}(0)$ et $x_{j,i}(0)$ sont associés comme au lemme 5.

Démonstration. - On part de (37) en utilisant les vecteurs $p^h v_{j,i,k}$ au lieu de $v_{j,i,k}$. On pose

(76) $$L_{j,i,k,h}(t) = \sum_{\ell=1}^n p^h v_{j,i,k}^{(\ell)} t_\ell .$$

Remarquons que, si $n \geqslant 1$,

$$(\exp(L_{j,i,k,h}(t)) - 1)^n = \sum e_{h,m_1,\ldots,m_n} \frac{t_1^{m_1} \ldots t_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} ,$$

où $e_{h,m_1,\ldots,m_n} \in p^h \underset{\sim}{Z}$.

On utilise alors le lemme 14 et l'expression de $a_{j,i}(0 , \ldots , 0)$ qui est donnée par (42).

Q. E. D.

LEMME 16. - Soit $F_{b,c,\mathfrak{f}}(x)$ comme en (49). Alors

(77) $$F_{b,c,\mathfrak{f}}(x) = \lim_{h\to\infty} \sum_j \sum_i \sum_{a_1,\ldots,a_{r(j)}} \frac{\prod_{k=1}^{r(j)} \sum_{i'} (y_{j,i',k}(0) - x_{j,i,k}(0))}{1 - x \prod_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^{r(j)} (-x_{j,i,k} + a_k) v_{j,i,k}^{(\ell)}} .$$

Les notations sont celles du lemme précédent.

Démonstration. - On applique $\mathfrak{L}$ et Δ aux deux membres de (75), et le résultat suit.

Q. E. D.

De (77) il est facile de redémontrer le théorème 3. En effet, on voit immédiatement sur (77) que la limite est uniforme sur $\mathcal{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p)$, chacune des fractions rationnelles de (77) vérifie l'inégalité $\sup_{x\in \mathcal{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p)} |\ | \leqslant 1/\varepsilon$, et elles sont clairement $\mathrm{Gal}(\underset{\sim}{C}_p/\underset{\sim}{Z}_p)$-équivariantes.

Conclusion. - On a redémontré certains des résultats de DELIGNE-RIBET par la méthode de SHINTANI. Dans le cas $p = 2$, leurs résultats sont, semble-t-il meilleurs que ceux qui sont donnés ici.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Nombres p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection Sup ; "Le Mathématicien", 14).

[2] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm., Warsawa, t. 20, 1972, p. 353-384.

[3] BARSKY (D.). - Transformation de Cauchy p-adique et algèbre d'Iwasawa, Math. Annalen, t. 266, 1978, p. 255-266.

[4] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Valeurs sur les entiers des fonctions zêta des corps de nombres et des fonctions L des courbes elliptiques, Thèse d'état, Math., Univ. Bordeaux, 1978.

[5] COATES (J.) and SINNOTT (W.). - On p-adic L-functions over quadratic fields, Invent. Math., Berlin, t. 25, 1974, p. 253-279.

[6] DELIGNE (P.) and RIBET (K.). - Value of abelian L function at negative integers (à paraître).

[7] DIAMOND (J.). - On the value of p-adic L-functions at positive integers (à paraître).

[8] HECKE (E.). - Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper, Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl., 1917, p. 77-89 ; "Mathematische Werke", p. 159-171. - Göttingen, Vandenboek und Ruprecht, 1959.

[9] HECKE (E.). - Eine neue Art von Zetafunktion und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, math. Z., t. 1, 1918, p. 357-376 ; " Mathematische Werke", p. 215-234. - Göttingen, Vandenboek und Ruprecht, 1959.

[10] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L-functions. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 74).

[11] KOBLITZ (N.). - Interpretation of the p-adic log Γ function and Euler constant using Bernoulli measures, Harvard, 1977 (Preprint).

[12] KOBLITZ (N.). - p-adic numbers, p-adic analysis and zeta functions. - Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Graduate Texts in Mathematics, 58).

[13] KRASNER (M.). - Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la méthode des éléments analytiques quasi-connexes, "Table ronde d'analyse non archimedienne" [1972. Paris], p. 131-254, Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974.

[14] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zeta-werte, J. für die reine und angew. Math., t. 214-215, 1964, p. 328-329.

[15] MAZUR (B.) and SWINNERTON-DYER (P.). - Arithmetic of Weil curves, Invent. Math., Berlin, t. 25, 1974, p. 1-61.

[16] QUEEN (C.). - On the existence of p-adic abelian L-functions, Thesis Univ. Berkeley, 1974.

[17] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, 1973, n° 10, p. 109-218.

[18] SERRE (J. P.). - Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, "Modular functions of one variable, III" [1972, Antwerpen], p. 191-268. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[19] SERRE (J. P.). - Endomorphismes complétement continus d'espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 12 , p. 69-85).

[20] SHINTANI (T.). - On the evaluation of totally real algebraic fields at non positive integers, J. of the Fac. of Sc., Univ. of Tokyo, Section I, t. 23, 1976, p. 393-417.

[21] SIEGEL (C. L.). - Über die Fouriersche Koeffizienten von Modulformen, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., t. 2, 1970, p. 15-56.

(Texte reçu le 19 juin 1978)

Daniel BARSKY
Mathématiques, Tour 55
Université Paris-7
2 place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05