YVETTE PERRIN

Fonctions analytiques dans certains corps values au sens de Krull

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. nº 4, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A2_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA),
5e année, 1977/78, n° 4, 13 p.
14 novembre 1977

FONCTIONS ANALYTIQUES
DANS CERTAINS CORPS VALUÉS AU SENS DE KRULL

par Yvette PERRIN

Soit K un corps algébriquement clos muni d'une valeur absolue au sens de Krull dont l'ensemble des valeurs est constitué d'un groupe totalement ordonné Γ que l'on notera multiplicativement et d'un élément absorbant 0 qui minore tous les éléments de Γ. Γ est supposé non archimédien et K complet.

Si $x \in K$, on notera $|x|$ sa valeur absolue. $|\ |$ possède les trois propriétés suivantes :

$$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \ ,$$

$$|xy| = |x|\,|y| \ ,$$

$$|x + y| \leqslant \sup(|x| \ , \ |y|) \ .$$

Si l'on considère sur Γ la relation de préordre

$$\gamma < \gamma' \Longleftrightarrow \exists\, m \in Z \ , \quad \exists\, n \in Z \quad \text{tels que} \quad \gamma'^m \leqslant \gamma \leqslant \gamma'^n \ ,$$

la relation d'équivalence associée à cette relation sera dite relation de comparabilité, et l'ensemble quotient de Γ par cette relation sera appelée charpente de Γ.

Pour que l'on puisse faire dans K de l'analyse non triviale, c'est-à-dire, pour qu'il existe des séries convergentes, non réduites à des sommes finies, il faut et il suffit que la charpente de Γ possède un plus petit élément, ou bien qu'elle contienne une partie cofinale dénombrable. Nous nous placerons dans la 2e hypothèse, la première conduisant à une analyse très proche de l'analyse ultramétrique classique. Si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de l'anneau $\mathfrak{a}$ des entiers de K, l'ensemble des valeurs absolues des éléments de $\mathfrak{P}$ est un ensemble mineur de $\Gamma \cup \{0\}$ (c'est-à-dire un ensemble tel que, si $|x|$ appartient à cet ensemble, $\alpha < |x|$ appartient également à cet ensemble), réunion de classes de comparabilité. Réciproquement, si I est un ensemble mineur de $]0 \ , 1[$, réunion de classes de comparabilité, $\{x \in K \ ; \ |x| \in I\}$ est un idéal premier de $\mathfrak{a}$.

Pour tout idéal $\mathfrak{P}$ premier de $\mathfrak{a}$, on notera $|\mathfrak{P}|$ l'élément du complété de Kurepa de Γ associé à l'ensemble mineur $\{|x| \ ; \ |x| \in \mathfrak{P}\}$. Le fait que Γ possède une suite cofinale dénombrable de classes de comparabilité entraîne l'existence d'une suite $\mathfrak{P}_n$ d'idéaux premiers de $\mathfrak{a}$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} |\mathfrak{P}_n| = 0 \ .$$

R. HOBEIKA a montré que, dans ces conditions, une série de Taylor à coefficients dans K converge partout dans K ou seulement en un point. De même, une série de

Laurent converge nulle part ou bien sur K privé d'un point. Cette situation rend trivial le problème du prolongement analytique de la somme de telles séries, mais incite à regarder ce que devient ici la théorie des fonctions analytiques élaborée par M. KRASNER dans le cas où la valuation est à valeurs réelles.

Définissons, comme en analyse ultramétrique classique, un élément analytique sur une partie D de K comme limite uniforme sur D d'une suite de fractions rationnelles sans pôles dans D.

Le premier problème qui se pose est celui-ci : Les éléments ainsi définis vérifient-ils le principe du prolongement analytique ? Ou, plus précisément, quels sont les ensembles analytiques de K ?

1. Ensembles analytiques.

Définitions. - Une partie D de K est un ensemble analytique au sens faible si tout élément analytique, qui s'annule sur un disque non ponctuel contenu dans D, s'annule sur D tout entier. Elle est un ensemble analytqiue au sens fort si tout élément analytique sur D, dont l'ensemble des zéros admet un point d'accumulation dans D, est identiquement nul sur D.

Notations. - Pour toute la suite de l'exposé, donnons-nous une suite d'idéaux premiers $(\mathfrak{P}_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ de l'anneau $\mathfrak{A}$ des entiers de K telle que, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$,

$$|\mathfrak{P}_{n+1}| < |\mathfrak{P}_n| \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} |\mathfrak{P}_n| = 0 .$$

Notons $A_{\mathfrak{P}_n}$ l'anneau de fractions de $\mathfrak{A}$ défini par $\mathfrak{P}_n$, et $k_{\mathfrak{P}_n}$ son corps résiduel $A_{\mathfrak{P}_n}|\mathfrak{P}_n$.

Si la fraction rationnelle $f = (a_0 + a_1 X + \dots + a_q X^q)/(b_0 + b_1 X + \dots + b_p X^p)$ a tous ses coefficients dans l'anneau $A_{\mathfrak{P}_n}$, nous noterons $\bar{f}$ l'élément de $k_{\mathfrak{P}_n}(X)$ $(\bar{a}_0 + \dots + \bar{a}_q X^q)/(\bar{b}_0 + \dots + \bar{b}_p X^p)$, $\bar{a}$ désignant la classe de a modulo $\mathfrak{P}_n$.

Démontrons le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Tout ensemble ouvert de K est un ensemble analytique au sens faible.

LEMME 1. - Soit D un ouvert contenant o. Pour tout élément analytique f sur D, il exsite une suite de fractions rationnelles $(f_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ sans pôles dans D telles que

pour tout $x \in D$, $|f(x) - f_n(x)| < |\mathfrak{P}_n|$,

pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $f_n = P_n/Q_n$, $P_n \in A_{\mathfrak{P}_n}[x]$, $Q_n \in A_{\mathfrak{P}_n}[x]$.

Démonstration. - Puisque $\lim_{n\to\infty} |\mathfrak{P}_n| = 0$, on peut toujours trouver une suite approximante de f $(f_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ telle que $|f(x) - f_n(x)| < |\mathfrak{P}_n|$, pour tout $x \in D$.

Soit $r \in \Gamma$ tel que le disque $d(o , r^+)$ soit contenu dans D. Sur ce disque,

f est borné, donc il existe $M \in \Gamma$ et $n_0 \in \underset{\sim}{N}$ tel que :

pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \in d(o , r^+)$, $|f_n(x)| \leqslant M$,

pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, f_n n'a pas de pôles dans $d(o , r^+)$.

En divisant éventuellement numérateur et dénominateur par une constante, on peut supposer que $f_n = P_n/Q_n$, où $Q_n(o) = 1$. K étant algébriquement clos, Γ est initialement dense, donc les inégalités de Cauchy sont satisfaites, et les zéros d'un polynôme correspondent aux côtés de son polygone de Newton [1].

Sur $d(o , r^+)$, Q_n ne s'annule pas, donc $|Q_n(x)| = 1$, pour tout $x \in d(o,r^+)$, et si

$$Q_n(x) = 1 + b_1^n x + \dots + b_q^n x^q ,$$

$$\sup_{|x|\leqslant r} |Q_n(x)| = \sup_i |b_i^n| r^i = 1 .$$

Soit n_1 tel que $1/r \in A_{\wp_{n_1}}$. Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $Q_n \in A_{\wp_{n_1}}[X]$. D'autre part, si $x \in d(o , r)$, $|f_n(x)| = |P_n(x)|$, donc, pour tout $x \in d(o , r)$ et tout $n \geqslant n_0$, $|P_n(x)| \leqslant M$.

Soit n_2 tel que $M/r \in A_{\wp_{n_2}}$. Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $P_n \in A_{\wp_{n_2}}[X]$, et finalement, si $n \geqslant \sup(n_0 , n_1 , n_2)$, P_n et Q_n appartiennent à $A_{\wp_n}[X]$.

<u>Démonstration du théorème</u> 1. - Soit D un ouvert, et soit f un élément analytique sur D , qui s'annule sur un disque $d(a , r)$ contenu dans D .

Par la translation $x \longrightarrow x - a$, on peut se ramener au cas où D contient le disque $d(o , r)$ et où f s'annule sur ce disque.

Soit f_n une suite approximante de f telle que :

pour tout $x \in D$, $|f(x) - f_n(x)| < |\wp_n|$,

si $f_n = P_n/Q_n$, $\begin{cases} P_n \in A_{\wp_n}[X] \\ Q_n \in A_{\wp_n}[X] , \quad Q_n(o) = 1 \end{cases}$,

pour tout $x \in d(o , r)$, $f(x) = o$ donc $|f_n(x)| < |\wp_n|$, et par conséquent $\overline{f_n(x)} = 0 \mod \wp_n$, donc $\overline{f_n}(\bar{x}) = 0$.

Soit n_0 tel que $|\wp_{n_0}| < r$. Si $n \geqslant n_0$, on a $|\wp_n| < r$. Γ étant initialement dense, il existe une infinité de points x_i de $d(o , r)$ tels que $|\wp_n| < |x_i| < r$, et $|x_i| \neq |x_j|$, $\forall\ i \neq j$. Il en résulte que $\overline{f_n}$ a une infinité de zéros, donc est nulle.

Il existe n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, l'élément de $k_{\wp_n}(X)$, $\overline{f_n}$, est nul. Soit $x \in D$, $x \neq o$, D étant ouvert, il existe $\rho \in \Gamma$ tel que le disque $d(x , \rho)$ soit contenu dans D , et il existe $n_1 \in \underset{\sim}{N}$ tel que $|\wp_{n_1}| < \sup\{|x|^{-1} , \rho\}$.

Pour tout $n \geqslant n_1$, $\bar{x}$ classe de x modulo $\wp_n$ n'est pas un pôle de $\overline{f_n}$ car la distance de x à un pôle quelconque de f_n est supérieure à $|\wp_n|$. Donc $\overline{f_n}(\bar{x}) = \overline{f_n(x)}$, et puisque $\overline{f_n} = 0$, $|f_n(x)|$ est inférieure ou égale à $|\wp_n|$.

$$\forall\ n \geqslant n_1 \ , \quad |f_n(x)| < |\wp_n| \Longrightarrow |f(x)| < |\wp_n| \Longrightarrow f(x) = o \ .$$

En analyse ultramétrique classique, tout ensemble analytique au sens faible est un ensemble analytique au sens fort, puisque tout élément analytique sur un ensemble analytique est localement développable en série de Taylor et que l'ensemble des zéros d'une telle série, sur tout disque circonférencié, est fini. Dans notre cas, un élément analytique sur un ouvert quelconque n'est en général développable en série de Taylor au voisinage d'aucun point de son domaine de définition, cependant on a ici encore le même résultat, à savoir le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Tout ouvert est un ensemble analytique au sens fort.

Ce théorème est une conséquence immédiate du résultat suivant.

THÉORÈME 3. - Si f est un élément analytique sur un ouvert, non identiquement nul, f admet, sur tout disque borné contenu dans cet ouvert, un nombre fini de zéros.

Démonstration. - Soit f un élément analytique sur un ouvert D , non identiquement nul. Soit $d(a\ ,\ r)$ un disque contenu dans D . f n'est pas identiquement nul sur ce disque sinon f serait nul sur D , donc il existe $a_0 \in d(a\ ,\ r)$ tel que $f(a_0) \neq o$.

Par la translation $x \longrightarrow x - a_0$, on peut se ramener au cas où l'ouvert D contient le disque $d(o\ ,\ r)$ et où $f(o)$ est non nul. Soit $(f_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite approximante de f sur D telle que, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$ et tout $x \in D$,

$$|f(x) - f_n(x)| < |\wp_n| \ .$$

Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, f_n peut s'écrire

$$f_n(x) = \frac{f_n(o)\ \prod_i (1 - (1/P_{n,i})X)}{\prod_j (1 - (1/Q_{n,j})X)} \ .$$

Puisque $f(o) \neq o$, il existe $\alpha \in \Gamma$ tel qu'à partir d'un certain rang n_0 , f_n n'ait pas de zéros dans le disque $d(o\ ,\ \alpha)$. Soit $n_1 \geqslant n_0$ tel que

$$|\wp_{n_1}| < \inf(\alpha\ ,\ r\ ,\ \frac{1}{|f(o)|}) \ .$$

Alors, pour tout $n > n_1$, $p^{-1}_{n,i}$ et $q^{-1}_{n,j}$ appartiennent à $A_{\wp_n}$ ainsi que $f_n(o)$ et, puisque, pour tout $x \in d(o\ ,\ r)$, $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| < |\wp_n|$, on a, dans $k_{\wp_n}(X)$,

$$\overline{f_n} = \overline{f_{n+1}} \ .$$

Soit

$$\prod_{p_{n,i} \in d(o,r)} (1 - \overline{p_{n,i}^{-1}}\, X) \prod_{p_{n,i} \notin d(o,r)} (1 - \overline{p_{n,i}^{-1}}\, X) \prod_j (1 - \overline{q_{n+1,j}^{-1}}\, X)$$

$$= \prod_{p_{n+1,i} \in d(o,r)} (1 - \overline{p_{n+1,i}^{-1}}) \prod_{p_{n+1,i} \notin d(o,r)} (1 - \overline{p_{n+1,i}^{-1}}\, X) \prod_j (1 - \overline{q_{n,j}^{-1}}\, X) ,$$

et ceci entraine, pour tout $n > n_1$,

$$\prod_{p_{n,i} \in d(o,r)} (1 - \overline{p_{n,i}^{-1}}\, X) = \prod_{p_{n+1,i} \in d(o,r)} (1 - \overline{p_{n+1,i}^{-1}}\, X) .$$

Posons

$$P_n(X) = \prod_{p_{n,i} \in d(o,r)} (1 - p_{n,i}^{-1}\, X) , \quad R_n(X) = \frac{f_n(X)}{P_n(X)} .$$

Dans $k_{\wp_n}(X)$, on a donc $\overline{f_n} = \overline{f_{n+1}}$, $\overline{P_n} = \overline{P_{n+1}}$, et par conséquent $\overline{R_n} = \overline{R_{n+1}}$.

Si $n > n_1$, $\overline{p_{n,i}^{-1}} \neq 0 \mod (\wp_n)$, donc $d^o P_n = {}^o \overline{P_n} = d^o \overline{P_{n+1}}$, ($\overline{P_n}$ et $\overline{P_{n+1}}$ étant dans $k_{\wp_n}[X]$). P_n et P_{n+1} ont même nombre de zéros comptés avec leur ordre de multiplicité, soit k .

Donc, pour tout $n > n_1$, P_n a k zéros ; on peut les numéroter de façon que

$$|p_{n,i} - p_{n+1,i}| < |\wp_n| .$$

Pour tout $i \in \{1 , \dots , k\}$, la suite $(p_{n,i})_n$ est une suite de Cauchy. Soit p_i sa limite, et soit P le polynôme $\prod_{i=1}^k (1 - p_i^{-1}\, X)$.

Soit d'autre part R l'élément analytique sur $d(o , r)$, limite de la suite R_n

On a, pour tout $x \in d(o , r)$, $f(x) = P(x)\, R(x)$.

Or, si $x \in d(o , r)$, $R(x)$ est non nul puisque, pour tout $n > n_1$, $|R_n(x)| > |\wp_n|$, donc f a au plus k zéros distincts dans $d(o , r)$.

2. Fonctions analytiques.

Définition. - Une fonction f , définie sur une partie D de K , est une fonction analytique s'il existe une famille enchaînée d'ouverts recouvrant D et telle que la restriction de f à chacun d'eux soit un élément analytique.

Un premier problème se pose : Les fonctions analytiques ainsi définies vérifient-elles le principe du prolongement analytique uniforme ? Les résultats suivants nous permettent de répondre affirmativement à cette question.

PROPOSITION 1. - Soient A et B deux ouverts bornés tels que $A \cap B \neq \emptyset$, $d(A , K \setminus A) \neq 0$, $d(B , K \setminus B) \neq 0$.

Tout élément analytique sur A et sur B est élément analytique sur $A \cup B$.

Ramenons-nous par une translation au cas où $o \in A \cap B$.

LEMME 2. - Si D est un ouvert borné de K contenant o, et tel que la distance de D à son complémentaire $d(D, K \setminus D)$ soit non nulle, si f est un élément analytique sur D, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fractions rationnelles possédant les propriétés énoncées au lemme 1, et satisfaisant à la condition supplémentaire suivante :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{f_n}$ est un élément irréductible de $k_{\wp_n}(X)$.

Démonstration du lemme 2. - Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite approximante de f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$|f(x) - g_n(x)| < |\wp_n|$, pour tout $x \in D$,

$g_n = P_n/Q_n$, P_n et Q_n appartiennent à $A_{\wp_n}[X]$.

Soit $\overline{f_n}$ la fraction de $k_{\wp_n}(X)$ irréductible telle que $\overline{f_n} = \overline{g_n}$, et soit n_0 tel que D soit contenu dans $A_{\wp_{n_0}}$ et $d(D, K \setminus D) > |\wp_{n_0}|$. Alors, pour tout $n > n_0$, la classe modulo $\wp_n$ d'un élément quelconque x de D n'est pas un pôle de $\overline{g_n}$ ni de $\overline{f_n}$. On a donc, pour tout $x \in D$,

$$|f_n(x) - g(x)| < |\wp_n| .$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite approximante de f qui possède les propriétés demandées.

Démonstration de la proposition 1. - Il existe une suite approximante (f_n) de f sur A telle que, pour tout $x \in A$, $|f(x) - f_n(x)| < |\wp_n|$, et telle que l'élément $\overline{f_n}$ de $k_{\wp_n}(X)$ soit irréductible.

De même, il existe une suite approximante (g_n) de f sur B telle que, pour tout $x \in B$, $|f(x) - g_n(x)| < |\wp_n|$ et telle que l'élément $\overline{g_n}$ de $k_{\wp_n}(X)$ soit irréductible.

$A \cap B$ étant ouvert contient un disque $d(o, \rho)$.

$\forall x \in d(o, \rho)$, $|f_n(x) - g_n(x)| < |\wp_n|$.

Soit n_0 tel que $|\wp_{n_0}| < \rho$. Alors, $\forall n \geqslant n_0$, on a, dans $k_{\wp_n}(X)$, $\overline{f_n} = \overline{g_n}$.

Soit d'autre part $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$ tel que $A \cup B \in A_{\wp_{n_1}}$, $|\wp_{n_1}| < d(A, K\setminus A)$, et $|\wp_{n_1}| < d(B, K \setminus B)$, et soit $x \in A \cup B$. Supposons par exemple que $x \in A$. Si $n \geqslant n_1$, la classe de x modulo $\wp_n$ $\bar{x}$ n'est pas un pôle de $\overline{f_n}$ mais, puisque $\overline{f_n} = \overline{g_n}$ et que $\overline{f_n}$ et $\overline{g_n}$ sont irréductibles dans $k_{\wp_n}(X)$, $\bar{x}$ n'est pas non plus un pôle de $\overline{g_n}$.

Donc $\overline{f_n}(\bar{x}) = \overline{g_n}(\bar{x})$, d'où il résulte

$$|f_n(x) - g_n(x)| < |\wp_n| .$$

Ceci montre que g_n est une suite approximante de f sur A, donc sur $A \cup B$.

PROPOSITION 2. - Soit A un ouvert. Il existe une suite croissante d'ouverts bornés $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$,

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(A_n , K \setminus A_n) > |\wp_n|$.

Démonstration. - Notons

B_n l'ensemble des $y \in K \setminus A$ tels que $d(y , A) < |\wp_n|$,

B'_n l'ensemble $\bigcup_{y\in B_n} (y , |\wp_n|)$,

A'_n l'ensemble $A \setminus B'_n$.

On a de toute évidence $B_{n+1} \subset B_n$, $B'_{n+1} \subset B'_n$, donc $A'_n \subset A'_{n+1}$.

Montrons que $d(A'_n , K \setminus A'_n) > |\wp_n|$. Soient $x \in A'_n$ et $y \in K \setminus A'_n$. Supposons que $d(x , y) < |\wp_n|$.

$$x \in A'_n \Longrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{et} \\ x \notin B'_n \end{cases} , \quad y \in K \setminus A'_n \Longrightarrow \begin{cases} y \notin A \\ \text{ou} \\ y \in A \text{ et } y \in B'_n \end{cases} .$$

Supposons que $y \notin A$,

$$\left.\begin{array}{l} y \in K \setminus A \\ d(x , y) < |\wp_n| \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow y \in B_n \Longrightarrow x \in B'_n .$$

Supposons que $y \in A$ et $y \in B'_n$, alors il existe $z \in B_n$ tel que $|y - z| < |\wp_n|$. Mais puisque $|x - y| < |\wp_n|$, $|x - z| < |\wp_n|$, donc $x \in B'_n$.

D'autre part, A'_n est un ouvert puisque $d(A'_n , K \setminus A'_n) > |\wp_n|$. Soit $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que le disque $d(x , |\wp_n|)$ soit contenu dans A , il en résulte que x n'appartient pas à B'_n , donc $x \in A'_n$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n$. Pour avoir une suite d'ouverts bornés vérifiant les hypothèses de la proposition 2, il suffit de prendre la famille A_n définie par $A_n = A'_n \cap A_{\wp_n}$.

PROPOSITION 3. - Soit $(A_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ une famille enchaînée d'ouverts recouvrant l'ouvert A . Pour tout $\alpha \in \Lambda$, soit $(A_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la famille d'ouverts non vides associée à A_α par la proposition 2.

Alors la famille $(A_{\alpha,n})_{\alpha\in\Lambda, n\in\mathbb{N}}$ est une famille enchaînée d'ouverts qui recouvre A .

La démonstration est facile.

Il résulte de ces trois propositions les théorèmes suivants.

THÉORÈME 4. - Si A est un ouvert borné tel que $d(A , K \setminus A)$ soit non nulle, toute fonction analytique sur A est un élément analytique sur A .

COROLLAIRE 1. - Toute fonction analytique sur un ouvert vérifie le principe du prolongement analytique uniforme.

Démonstration du théorème 4. - Ramenons-nous au cas où $o \in A$ et où f est une fonction analytique sur A. Il existe un disque $d(o, \rho) \subset A$ sur lequel f est élément analytique, et d'après le lemme 2 il existe une suite (f_n) de fractions rationnelles telles que

pour tout $x \in d(o, \rho)$, $|f(x) - f_n(x)| < |\wp_n|$,

$f_n \in A_{\wp_n}(X)$, l'élément de $k_{\wp_n}(X)$, $\overline{f_n}$, est irréductible.

Dans $k_{\wp_n}(X)$, on a, pour tout $x \in d(o, \rho)$, $\overline{f_n}(\bar{x}) - \overline{f_{n+1}}(\bar{x}) = 0$ donc, si n vérifie $|\wp_n| < \rho$, $\overline{f_n} = \overline{f_{n+1}}$ dans $k_{\wp_n}(X)$ et, pour tout $x \in A$ tel que la classe $\bar{x}$ de x modulo $\wp_n$ ne soit pas un pôle de $\overline{f_n}$ ni de $\overline{f_{n+1}}$, on a

$$\overline{f_n}(\bar{x}) = \overline{f_{n+1}}(\bar{x}) \text{, donc } |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < |\wp_n| .$$

Montrons que si $x \in A$, sa classe $\bar{x}$ modulo $\wp_n$ n'est pas un pôle de $\overline{f_n}$ ni $\overline{f_{n+1}}$.

D'après les propositions 2 et 3, il existe une chaine finie $A_{\alpha,i}$ d'ouverts reliant 0 à x tels que $d(A_{\alpha,i}, K \setminus A_{\alpha,i})$ soit non nulle et, d'après la proposition 1, sur chacun de ces ouverts, (f_n) est une suite approximante de f en particulier au point x. Donc x n'est pôle d'aucune fraction f_n.

Les pôles de f_n sont donc dans $K \setminus A$.

Soit $n_0 \in \underset{\sim}{N}$ tel que $|\wp_{n_0}| < d(A, K \setminus A)$. Alors, si $n \geqslant n_0$, pour tout $x \in A$, $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| < |\wp_n|$.

La suite f_n converge donc uniformément sur A vers un élément analytique qui coïncide avec f sur $d(o, \rho)$ donc sur A tout entier puisque f vérifie le principe du prolongement analytique.

Démonstration du corollaire 1. - Soit f une fonction analytique sur un ouvert A. D'après la proposition 3, on peut supposer f définie par une famille f_α d'éléments analytiques vérifiant les propriétés suivantes :

f_α est élément analytique sur l'ouvert A_α,

$d(A_\alpha, K \setminus A_\alpha) \neq 0$, A_α est borné,

la famille A_α est enchaînée.

Supposons qu'il existe une chaîne finie $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_p}$ telle que

$$A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_p} \neq \emptyset .$$

Soit $B = \bigcup_{i=1}^{p} A_{\alpha_i}$, B est un ouvert borné $d(B, K \setminus B) \neq 0$ donc la restriction de f à B est un élément analytique g.

g coïncide avec f_{α_1} sur A_{α_1}

g coïncide avec f_{α_p} sur A_{α_p} ,

donc f_{α_1} et f_{α_p} coïncident sur $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_p}$.

COROLLAIRE 2. - Soit A un ouvert, il existe une suite croissante d'ouverts A_n tels que :

$A = \bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} A_n$,

si f est une fonction analytique sur A , la restriction de f à A_n est un élément analytique.

On prend pour $(A_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ la suite définie à partir de A par la proposition 2. Le résultat énoncé est alors une conséquence immédiate du théorème 4.

Ce corollaire 2 va nous permettre de montrer que l'analycité est conservée par les opérations rationnelles, la convergence uniforme, la substitution, la dérivation.

PROPOSITION 4. - Si f et g sont deux fonctions analytiques sur un ouvert A , $f + g$ est une fonction analytique sur A .

En effet, d'après le corollaire 2 du théorème 4, il existe une suite croissante A_n d'ouverts tels que

$$A = \bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} A_n .$$

Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $f_{|A_n}$ est un élément analytique sur A_n .

Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $g_{|A_n}$ est un élément analytique sur A_n .

Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $(f + g)_{|A_n}$ est donc un élément analytique sur A_n , et par conséquent $f + g$ est une fonction analytique sur A .

PROPOSITION 5. - Si f et g sont deux fonctions analytiques sur un ouvert A , fg est une fonction analytique sur A .

Considérons les ouverts A_n définis par la proposition 2.

Chaque ouvert A_n est borné ($A_n \subset A_{\wp_n}$) et vérifie $d(A_n , K \setminus A_n) > |\wp_n|$. Sur chacun de ces ouverts un élément analytique quelconque est borné. Donc sur chaque A_n , $f.g$ est un élément analytique ce qui prouve que fg est une fonction analytique sur A .

PROPOSITION 6. - Si f est un élément analytique sur un ouvert A , si $Z(f)$ est l'ensemble des zéros de f sur A , $1/f$ est une fonction analytique sur l'ouvert $A \setminus Z(f)$.

Si f est une fonction analytique sur A , si $Z(f)$ est l'ensemble de ses zéros sur A , $1/f$ est une fonction analytique sur $A \setminus Z(f)$.

Soit f un élément analytique sur A non identiquement nul, et soit $(f_p)_{p\in\underset{\sim}{N}}$ une suite approximante de f sur A.

Soit $(\alpha_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite de points de Γ vérifiant :

pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$,

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, l'ensemble $0_n = |f|^{-1}\ ()\alpha_n\ , \longrightarrow()$ est un ouvert de A, car l'application $|f|$ de A dans $\Gamma \cup \{0\}$ muni de la topologie de l'ordre est continue.

La famille $(0_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ est enchaînée, car croissante, et recouvre $A \setminus Z(f)$. Sur 0_n, $|f|$ est minoré par α_n non nul, donc $1/f$ y est élément analytique, limite uniforme de la suite $(1/f_p)_{p\in\underset{\sim}{N}}$.

Supposons maintenant que f est une fonction analytique non identiquement nulle sur A. Il existe une suite croissante $(A_p)_{p\in\underset{\sim}{N}}$ d'ouverts recouvrant A tels que la restriction de f à chacun d'eux y soit un élément analytique.

Soit $(\alpha_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite décroissante d'éléments de Γ tendant vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$.

f n'est identiquement nulle sur aucun A_p, donc il existe $n_0 \in \underset{\sim}{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $p \in \underset{\sim}{N}$,

$$0_n^p = A_p \cap |f|^{-1}()\alpha_n\ , \longrightarrow() \text{ n'est pas vide.}$$

Cette famille d'ouverts est enchaînée car filtrante, et

$$\bigcup_{p\in\underset{\sim}{N},n\geqslant n_0} 0_n^p = A \setminus Z(f) .$$

Sur chaque 0_n^p, $1/f$ est élément analytique, donc $1/f$ est fonction analytique sur $A \setminus Z(f)$.

PROPOSITION 7. - <u>La limite uniforme d'une suite de fonctions analytiques sur un ouvert</u> A <u>est une fonction analytique sur</u> A.

Soit $(f_p)_{p\in\underset{\sim}{N}}$ une suite de fonctions analytiques sur A convergeant uniformément sur A vers une fonction f.

Soit $(A_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ la suite d'ouverts associée à A par la proposition 2. Sur A_n, chaque f_p est un élément analytique. Donc f, limite uniforme sur A_n d'une suite d'éléments analytiques, est un élément analytique sur A_n.

PROPOSITION 8. - <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont deux fonctions analytiques respectivement sur les ouverts</u> A <u>et</u> B, <u>si</u> $g(B) \subset A$, <u>alors</u> $f \circ g$ <u>est une fonction analytique sur</u> B.

Soit $(A_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite croissante d'ouverts tels que la restriction de f à A_n soit un élément analytique. La famille $g^{-1}(A_n)$ est une suite croissante d'ouverts recouvrant B. Sur chacun de ces ouverts $f \circ g$ est une fonction analytique.

En effet, soit $g^{-1}(A_i)$ un tel ouvert, et soit (f_n) une suite approximante de f sur A_i.

Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $f_n \circ g = (P_n \circ g)/(Q_n \circ g)$ est une fonction analytique puisque les opérations rationnelles conservent l'analycité, et que $Q_n \circ g$ ne s'annule pas sur B. La suite $f_n \circ g$ converge uniformément sur $g^{-1}(A_i)$ vers $f \circ g$. $f \circ g$ est donc une fonction analytique.

PROPOSITION 9. - Si f est un élément analytique sur un ouvert, f est dérivable en chaque point de cet ouvert.

Démontrons les résultats préliminaires suivants.

LEMME 3. - Soit $f = P/Q$ une fraction rationnelle telle que :

$Q(o) = 1$, $P \in A_{\wp}[X]$, $Q \in A_{\wp}[X]$, $\wp$ étant un idéal premier de A,

$|Q(h)| = 1$, pour tout $h \in \wp$.

Alors, si $0 < |h| < |\wp|$

$$\left|\frac{1}{h}\left[\frac{P(h)}{Q(h)} - \frac{P(o)}{Q(o)}\right] - \frac{Q(o)\,P'(o) - P(o)\,Q'(o)}{Q^2(o)}\right| < |\wp| .$$

Démonstration. - Posons

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n , \quad P'(o) = a_1$$

$$Q(x) = 1 + b_1 x + \dots + b_p x^p , \quad Q'(o) = b_1$$

$$\frac{1}{h}\left[\frac{P(h) - P(o)\,Q(h)}{Q(h)}\right] - \frac{a_1 - a_0 b_1}{1}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{a_1 h + \dots + a_n h^n - a_0(b_1 h + \dots + b_p h^p)}{1 + b_1 h + \dots + b_p h^p}\right] - \frac{a_1 - a_0 b_1}{1}$$

$$= \frac{h(a_2 + \dots + a_n h^{n-2} - a_0(b_2 + \dots + b_p h^{p-2}) - (a_1 - a_0 b_1)(b_1 + \dots + b_p h^{p-1})}{1 + b_1 h + \dots b_p h^p} = \frac{h\,R(h)}{Q(h)}$$

$R \in A[X]$; si $|h| < |\wp|$, $|Q(h)| = 1$. Donc $Q(h) \notin \wp$ et $R(h) \in A_{\wp}$.

Donc

$$|h| < |\wp| \Longrightarrow h\,\frac{R(h)}{Q(h)} \in \wp .$$

LEMME 4. - Si f est un élément analytique sur un disque non ponctuel $d(o, \rho)$, f est dérivable au point o.

Démonstration. - Soit (f_n) une suite approximante de f telle que, si $f_n = P_n/Q_n \in K(X)$,

$P_n \in A_{\wp_n}[X]$, $Q_n \in A_{\wp_n}[X]$,

$Q_n(o) = 1$,

$\forall\ x \in d(o\ ,\ \rho)$, $|f(x) - f_n(x)| < |\wp_n|$.

$Q_n(o) = 1 \Longrightarrow |Q_n(h)| = 1$, $\forall\ h$, tel que $|h| < \rho$. Soit n_0 tel que $|\wp_{n_0}| < \rho$.
Montrons que

1° $\lim_{n\to\infty} f'_n(o)$ existe

2° $\lim_{n\to\infty} f'_n(o) = f'(o)$.

1° $\lim_{n\to\infty} f'_n(o)$ <u>existe</u>. - Pour tout x non nul,

$$f'_{n+1}(o) - f'_n(o) = f'_{n+1}(o) - \frac{f_{n+1}(x) - f_{n+1}(o)}{x} + \frac{f_{n+1}(x) - f_{n+1}(o)}{x} - \frac{f_n(x) - f_n(o)}{x} + \frac{f_n(x) - f_n(o)}{x} - f'_n(o) ,$$

d'après le lemme précédent.

Si $n > n_0$ et si x est tel que $|x| < |\wp_{n-1}|$, alors on a :

$$\left|f'_{n+1}(o) - \frac{f_{n+1}(x) - f_{n+1}(o)}{x}\right| < |\wp_{n-1}| ,$$

$$\left|f'_n(o) - \frac{f_n(x) - f_n(o)}{x}\right| < |\wp_{n-1}| .$$

Si x est tel que $|\wp_n| < |x| < |\wp_{n-1}|$, $1/x \in A_{\wp_n}$, donc

$$\left|\frac{f_{n+1}(x) - f_n(o)}{x}\right| < |\wp_n| ,$$

puisque $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| < |\wp_n|$, de même

$$\left|\frac{f_{n+1}(o) - f_n(o)}{x}\right| < |\wp_n| .$$

Finalement pour $n \geqslant n_0$, $|f'_{n+1}(o) - f_n(o)| < |\wp_{n-1}|$, et la suite $f'_n(o)$ est une suite de Cauchy. Soit $g(o)$ sa limite.

2° $\lim_{n\to\infty} f'_n(o) = f'(o)$.

$$\frac{f(x) - f(o)}{x} - g(o)$$

$$= \left[\frac{f(x) - f(o)}{x} - \frac{f_n(x) - f_n(o)}{x}\right] + \left[\frac{f_n(x) - f_n(o)}{x} - f'_n(o)\right] + [f'_n(o) - g(o)] .$$

Soit x tel que $o < |x| < |\wp_q|$. Il existe $m \in N$ tel que

$$|\wp_{m+1}| < |x| < |\wp_m| \leqslant |\wp_q| .$$

Soit $n > m + 1 > q$

$$\left.\begin{array}{c}|f(x) - f_n(x)| < |\wp_n| < |\wp_{m+1}| \\ \text{et} \\ |x| > |\wp_{m+1}|\end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\frac{f(x) - f_n(x)}{x}\right| < |\wp_{m+1}| ,$$

de même

$$\left|\frac{f(o) - f_n(o)}{x}\right| < |\wp_{m+1}| .$$

D'après le lemme 3,

$$\left|\frac{f_n(x) - f_n(o)}{x} - f_n'(o)\right| < |\wp_m| ,$$

et l'on vient de voir que, pour $n \geqslant n_0$, $|f_{n+1}'(o) - f_n'(o)| < |\wp_{n-1}|$, donc

$$|f_n'(o) - g(o)| < |\wp_{n-1}| < |\wp_q| .$$

Finalement, si $o < |x| < |\wp_q|$,

$$\left|\frac{f(x) - f(o)}{x} - g(o)\right| < |\wp_q| ,$$

donc $\lim_{n\to\infty} f_n'(o) = f'(o)$.

<u>Démonstration de la proposition</u> 9. - C'est une conséquence immédiate du lemme 4 et du fait que toute translation permet de ramener l'étude de la dérivabilité au point o .

On démontre alors facilement la proposition suivante.

PROPOSITION 10. - <u>Si</u> f <u>est un élément analytique sur un ouvert borné</u> A <u>tel que</u> $d(A , K \setminus A)$ <u>soit non nulle,</u> f' <u>est un élément analytique sur</u> A .

<u>Si</u> f <u>est un élément analytique sur un ouvert</u> A , f' <u>est une fonction analytique sur</u> A .

<u>Si</u> f <u>est une fonction analytique sur un ouvert</u> A , f' <u>est une fonction analytique sur</u> A .

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOBEIKA (R.). - Séries de Taylor et séries de Laurent dans certains corps valués au sens de Krull, Thèse 3e cycle, Univ. Paris-VI, 1976.

[2] KRASNER (M.). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, "Colloque international du CNRS : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres" [143. 1964, Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1966.

[3] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, "Prolongement analytique et algèbre de Banach ultramétriques", Astérisque, 1973, n° 10, p. 109-218.

[4] RIBENBOIM (P.). - Théorie des valuations. - Montréal, les Presses de l'Université de Montréal, 1964 (Séminaire de Mathématiques supérieures, Eté 1964, 9).

(Texte reçu le 13 février 1978)

Mme Yvette PERRIN, Mathématiques pures, Université de Clermont-Ferrand,
Complexe des Cézeaux, Boîte postale 45, 63170 AUBIÈRE.