GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

MARIE-CLAUDE SARMANT-DURIX

Existence de fonctions croulantes

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. n° 17, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A10_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
5e année, 1977/78, n° 17, 10 p.

5 juin 1977

EXISTENCE DE FONCTIONS CROULANTES

par Marie-Claude SARMANT-DURIX

I. Fonctions s'écroulant pour une seule valeur du spectre

1. Hypothèses.

Nous sommes dans un corps k ultramétriquement valué, complet, algébriquement clos et maximalement complet [2].

Soient R' et R deux réels positifs tels que $R' < R$. Soit $\{b_i\}_{i\in \underset{\sim}{N}}$ une suite d'éléments de k tels que :

(i) $R' < |b_i|_p < R$, $\forall\ i \in \underset{\sim}{N}$,

(ii) $\inf_{b_i \neq b_j} |b_i - b_j|_p = \rho_0 > 0$

(iii) $\Delta = \{x \in k\ ;\ R' < |x|_p < R\ ,\ x \neq b_i\ ,\ \forall\ i \in \underset{\sim}{N}\}$ est quasi connexe.

On pose, pour $\rho \in \underset{\sim}{R}^+$, $\rho < \rho_0$,

$$\Delta_\rho = \{x \in k\ ;\ R' < |x|_p < R\ ,\ |x - b_i|_p > \rho\ ,\ \forall\ i \in \underset{\sim}{N}\} .$$

Rappel. - Soit $f(x)$ une fonction analytique sur Δ telle que $f \in H(\Delta_\rho)$, $\forall\ \rho > 0$. Alors l'équation $f(x) + \alpha = 0$ a un nombre fini de solutions dans Δ_ρ , sauf peut-être au plus pour une valeur α_0 de α . Dans ce cas, $f(x) + \alpha_0$ n'est pas quasi inversible dans Δ_ρ , et

$$\lim_{|x|\to R, x\in\Delta_\rho} f(x) + \alpha_0 = 0 .$$

On dit alors que $f(x) + \alpha_0$ s'écroule pour $|x|_p = R$. Ceci ne peut arriver que si Δ admet un T-filtre croissant $\mathcal{T}$, ce que nous supposerons ici. Δ_ρ admet aussi un T-filtre croissant $\mathcal{T}_\rho$ [1].

2. Valeur d'écroulement d'une fonction croulante simple.

Nous savons [8] que, pour $\{a_i\}_{i\in \underset{\sim}{N}}$, une suite d'éléments de k telle que $a_i - b_i \longrightarrow 0$ quand $i \longrightarrow +\infty$, la fonction

$$f(x) = \prod_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x - a_i}{x - b_i}\right) + \alpha\ ,\ \text{où}\ \ \alpha \in k\ ,$$

s'écroule pour une valeur de α au plus.

Supposons donc que $f(x) = \prod_{i=0}^{\infty}((x - a_i)/(x - b_i)) + \alpha$ s'écroule. Nous allons calculer α .

Posons $T = \{x \in k\ ;\ |x|_p > 1\}$, T est un trou de Δ_ρ .

Nous savons que $f(x) \in H(\Delta_\rho)$ [8]. Il existe donc $f_T(x) \in H(CT)$ tel que $f - f_T$ se prolonge dans T et soit nul à l'infini (C'est la partie singulière de f relative au trou T) [7].

Posons [4] $s(f , T) = \sup_{|x|=R} |f(x)|$, donc $s(f , T) = 0$. Nous savons que $\|f_T\|_{CT} \leqslant s(f , T)$, donc $\|f_T\|_{CT} = 0$, et $f_T(x) = 0$.

D'autre part, $\|f - f_T\|_T \leqslant s(f , T)$, donc $f - f_T = 0$, et $f(x) = 0$ sur T .

Comme $f(x) = 0$ sur T , $\prod_{i=0}^{\infty}((x - a_i)/(x - b_i)) + \alpha \equiv 0$ sur T . Faisons tendre x vers $+ \infty$,

$$\prod_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{x - a_i}{x - b_i}\right) \longrightarrow 1 .$$

Donc $\alpha = - 1$.

3. Fonction croulante ayant une famille de pôles donnée.

La famille des $\{b_i\}_{i\in \underset{\sim}{N}}$ étant définie comme à l'alinéa 1, elle remplit une condition nécessaire pour qu'il existe une fonction croulante ayant les b_i pour zéros. Voyons si c'est une condition suffisante.

Δ_ρ admet, $\forall\ \rho < \rho_0$, un T-filtre croissant.

Soient $d_0 , \dots , d_n , \dots$ les différentes valeurs de $|b_i|_p$

$$0 \leqslant d_0 < d_1 < \dots < d_n < d_{n+1} < \dots < R \quad \text{et} \quad d_n \longrightarrow R \quad \text{si} \quad n \longrightarrow + \infty .$$

Soient $b_n^1 , \dots , b_n^{k_n}$ les b_i de valeur absolue d_n : Il y en a un nombre fini k_n .

La condition "Δ_ρ admet un T-filtre croissant" est équivalente à la condition [5] :

"Il existe des entiers $q_{n,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k_n$, tels que, si l'on pose $q_n = \sum_{i=1}^{k_n} q_{n,i}$, on a $\forall\ i_0$ tel que $1 \leqslant i_0 \leqslant k_n$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{d_n}{\rho}\right)^{q_{n,i_0}} \prod_{i=1,i\neq i_0}^{k_n}\left(\frac{d_n}{|b_n^i - b_n^{i_0}|_p}\right)^{q_{n,i}}\right]\left[\prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{d_j}{d_n}\right)^{q_n}\right] = 0 .$$

k est maximalement complet, nous savons [3] qu'il existe une série de Taylor g de rayon de convergence R qui admet pour seuls zéros les b_n^i , chacun avec l'ordre de multiplicité $q_{n,i}$.

LEMME 1 [5]. - $\lim_{|x|_p\to R, x\in\Delta_\rho} |g(x)|_p = + \infty$.

<u>Démonstration</u>. - Posons $P_j(x) = \prod_{i=1}^{k_j}(1 - (x/b_j^i))$. Alors

$$g(x) = \prod_{j=1}^{n} P_j(x) \times g_n(x) ,$$

où $g_n(x)$ est une série de Taylor qui n'a que des zéros de valeur absolue strictement supérieure à d_n .

Si $|x| \leqslant |b_n^i|_p$,

$$|g(x)|_p = |\prod_{j=1}^{n} P_j(x)|_p \, |g_n(x)|_p = A_0 \, |\prod_{j=1}^{n} P_j(x)|_p ,$$

où A_0 est une constante.

Posons $x = b_n^{i_0} + k$, avec $|h|_p < \rho_0$.

$$|g(b_n^{i_0} + h)|_p = A_0 \, |\prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{k_j} (1 - \frac{b_n^{i_0} + h}{b_j^i})^{q_{j,i}}|_p$$

$$= A_0 \, |\prod_{j=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{k_j} (\frac{b_j^i - b_n^{i_0}}{b_j^i})^{q_{j,i}}|_p \, |\prod_{i=1, i\neq i_0}^{k_n} (\frac{b_n^i - b_n^{i_0}}{b_n^i})^{q_{n,i}}|_p \, |\frac{h}{b_n^{i_0}}|_p^{q_{n,i_0}}$$

$$= A_0 \prod_{j=0}^{n-1} (\frac{d_n}{d_j})^{q_n} \prod_{i=1, i\neq i_0}^{k_n} (\frac{|b_n^i - b_n^{i_0}|_p}{d_n})^{q_{n,i}} (\frac{|h|_p}{d_n})^{q_{n,i_0}} .$$

D'après ce qu'on vient de voir, ceci devient infini avec n . Donc $|g(x)|_p$, qui devient infini pour $|x - b_i|_p = \rho$ lorsque $|b_i|_p \longrightarrow R$, devient infini aussi pour $|x - b_i|_p > \rho$ (puisque sa valeur augmente).

LEMME 2. - $g(x)$ <u>étant défini comme ci-dessus, et</u> c <u>étant une constante non nulle, les zéros</u> $a_i(c)$ <u>de l'équation</u> $g(x) - c = 0$ <u>sont tels que</u>

$$a_i(c) - b_i \longrightarrow 0 \ , \ \underline{\text{quand}} \ \ i \longrightarrow +\infty .$$

<u>Démonstration</u>. - Plaçons-nous dans le cercle $|x - b_i|_p < \rho_0$, et posons $x = b_i + h$. Dans ce cercle, nous pouvons développer $g(x)$ en série de taylor

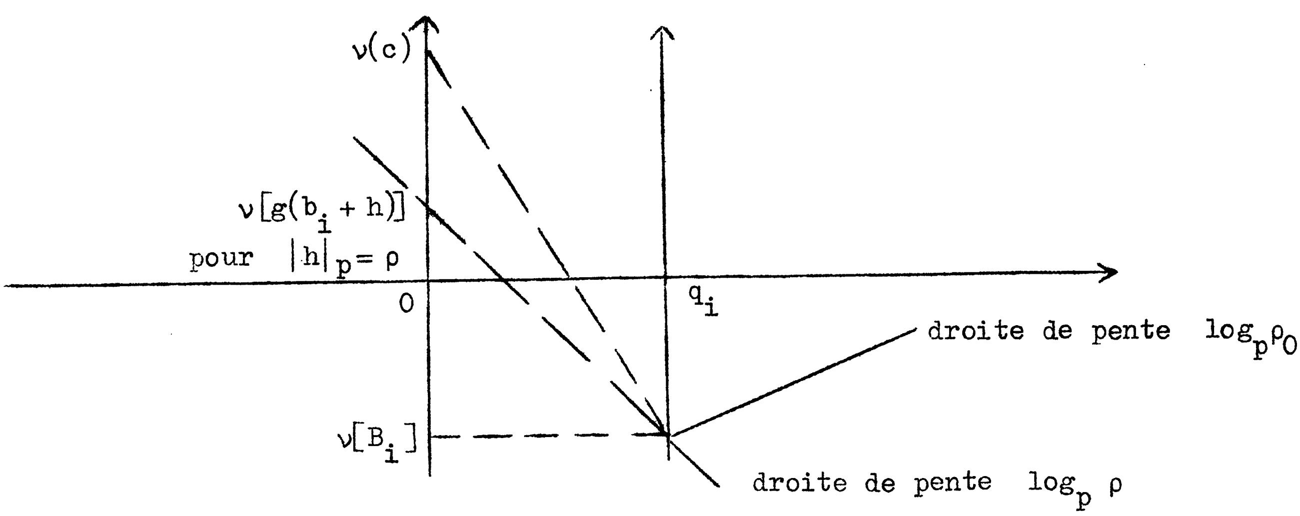
$$g(b_i + h) = B_i \, h^{q_i} + \dots ,$$

et

$$|g(b_i + h)|_p \longrightarrow +\infty \ \text{avec} \ i \ , \ \text{lorsque} \ |h|_p = \rho \ \text{constante} < \rho_0 .$$

Nous étudions les zéros de l'équation $g(b_i + h) = c$.

<u>Polygône de Newton</u> :



Soit $\rho < \rho_0$. Pour $|h|_p = \rho$, $\nu[g(b_i + h)] \longrightarrow -\infty$, quand $i \longrightarrow +\infty$. Donc :
" $\exists\ I_0$ tel que $i > I_0$ " implique " $\nu[g(b_i + h)] < \nu(c)$ "
implique " $f(b_i + h) = c$ a q_i zéros $a_{i,1}(c), \ldots, a_{i,q_i}(c)$ tous de même valeur absolue $< \rho$, les autres zéros possibles étant tous de valeur absolue $\geqslant \rho_0$ ".

Résumons nous :

$$\text{" } \forall\ \rho > 0\ ,\ \exists\ I_0 \text{ tel que } i > I_0 \text{ " implique " } |a_{i,k}(c) - b_i| < \rho \text{ ".}$$

Comme les zéros $a_{i,k}(c)$ de $g(x) = c$ peuvent visiblement être mis en bijection avec ceux de $g(x)$, on pourra introduire le produit infini

$$\prod_0^\infty \frac{(x - a_{i,1}(c))\ldots(x - a_{i,q_i}(c))}{(x - b_i)^{q_i}}$$

qui sera défini pour $x \neq b_i$ $(i \in \underset{\sim}{N})$.

LEMME 3. - $(1/g(x)) \in H(\Delta_\rho)$, <u>si</u> $0 < \rho < \rho_0$, <u>et</u> $1/g(x)$ <u>est une fonction croulante</u>.

<u>Remarque</u>. - Pour plus de commodité, nous ferons la démonstration en prenant $g(x)$ avec des pôles simples ; le raisonnement est le même si les b_i sont des pôles multiples, mais les notations sont plus compliquées.

<u>Démonstration</u>. - Choisissons une constante $c \in k$, et posons

$$\varphi(x) = \left(\frac{g(x) - c}{g(x)}\right) \prod_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i(c)}\right) .$$

$\varphi(x)$ est une série de Taylor convergente pour $|x| < R$, sans zéro ni pôle ; elle n'appartient pas à $H(\Delta_\rho)$, si $(1/g(x)) \notin H(\Delta_\rho)$.

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{c}{g(x)}\right) \prod_{i=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{b_i - a_i(c)}{x - a_i(c)}\right) .$$

Soit $c \in \Delta_\rho$.

$$\forall\ \varepsilon\ ,\ \exists\ r_1 \text{ tel que } r_1 < |x| < R \Longrightarrow \left|\frac{c}{g(x)}\right|_p < \varepsilon .$$

$$\exists\ N \text{ tel que } i > N \Longrightarrow \left|\frac{b_i - a_i(c)}{x - a_i(c)}\right|_p < \frac{|b_i - a_i(c)|_p}{\rho} < \varepsilon ,$$

donc

$$r_1 < |x| < R \Longrightarrow \left|\varphi(x) - \prod_{i=0}^N \left(\frac{x - b_i}{x - a_i(c)}\right)\right|_p < \varepsilon .$$

Posons $r_2 = \sup_{i \leqslant N} |a_i(c)|_p$. $\prod_0^N ((x - b_i)/(x - a_i(c)))$ est développable en série de laurent, pour $|x|_p > r_2$,

$$\prod_0^N \left(\frac{x - b_i}{x - a_i(c)}\right) = \prod_0^N \frac{1 - (b_i/x)}{1 - (a_i(c)/x)} = 1 + \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{x^2} + \ldots + \frac{\lambda_j}{x^j} + \ldots$$

$\varphi(x) - \prod_0^N((x - b_i)/(x - a_i(c)))$ est développable en série de Laurent, pour $r_2 < |x|_p < R$, si

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \dots + \varphi_j x^j + \dots ,$$

alors

$$\varphi(x) - \prod_0^N\left(\frac{x - b_i}{x - a_i(c)}\right) = \dots - \frac{\lambda_j}{x^j} \dots + (\varphi_0 - 1) + \varphi_1 x + \dots + \varphi_j x^j + \dots$$

Or :

$$\sup_{r_2<|x|<R} \left|\varphi(x) - \prod_0^N\left(\frac{x - b_i}{x - a_i(c)}\right)\right|_p = \max[\sup_{n\geq 0} |a_n|_p R^n , \sup_{n\leq 0} |a_n|_p r_2^n]$$

ce qui exige $|\varphi(0) - 1|_p < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, donc $\varphi(0) = 1$, et $|\varphi_j|_p r^j < \varepsilon$, $\forall j > 0$.

Lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, $r \longrightarrow R$. Pour que $|\varphi_j|_p r^j$ tende vers 0 à j constant, il faut que $\varphi_j = 0$, $\forall j > 0$: $\varphi(x)$ est une constante.

Donc $\varphi(x) = \varphi(0) = 1$, et

$$1 - \frac{C}{g(x)} = \prod_0^\infty \frac{x - a_i(c)}{x - b_i} .$$

D'où $(1/g(x)) \in H(\Delta_\rho)$, et la fonction

$$\frac{- C}{g(x)} = \prod_0^\infty \frac{x - a_i(c)}{x - b_i} - 1$$

est une fonction croulante.

<u>Remarque</u> : <u>Autres fonctions croulantes</u>.

(a) Soit $g(x)$ une série de Taylor ayant pour seuls zéros les b_i , et soit $h(x)$ une série de Taylor telle que

$$\frac{g - h}{g} \in H(\Delta_\rho) , \quad \forall \rho > 0 \quad \text{et} \quad \frac{g - h}{g} \longrightarrow 1 , \text{ si } |x| \longrightarrow R , \quad x \in \Delta_\rho$$

(i. e. $(h/g) \longrightarrow 0$, si $|x| \longrightarrow R$, $x \in \Delta\rho$).

Alors $((g - h)/g) - 1$ est une fonction croulante, et on peut mettre $(g - h)/g$ sous la forme : $\prod_{i=0}^\infty((x - a_i)/(x - b_i))$.

(b) Réciproquement, si la fonction $\prod_{i=0}^\infty((x - a_i)/(x - b_i)) - 1$ s'écroule, posons $g(x)[\prod_{i=0}^\infty(x - a_i)/(x - b_i)) - 1] = - h(x)$. Alors

$$\frac{g(x) - h(x)}{g(x)} = \prod_{i=0}^\infty \frac{x - a_i}{x - b_i} ,$$

et

$$\frac{g(x) - h(x)}{g(x)} \longrightarrow 1 , \text{ si } |x| \longrightarrow R , \quad x \in \Delta_\rho .$$

On ne peut a priori rien dire de plus : On voit que $h(x)$ n'a pas besoin d'être une constante, et que $\prod_0^\infty((x - a_i)/(x - b_i)) - 1$ peut s'annuler sur Δ (et même une infinité de fois).

II. Fonctions s'écroulant pour plusieurs valeurs du spectre

1. Hypothèses.

Soient R_1 , $R_2 \in \underset{\sim}{R}^+$. On pose

$$\Delta = \{x \in k \ ; \ R_1 < |x| < R_2\} .$$

Soit $\{b_i\}_{i \in \underset{\sim}{Z}}$ une suite d'éléments de Δ tels que :

1° $\inf_{i \neq j} |b_i - b_j| = \rho_0 > 0$,

2° $\Delta_\rho = \Delta - \bigcup_{i \in I} C(b_i , \rho)$ $(\rho < \rho_0)$ est quasi connexe avec exactement deux T-filtres $\mathcal{C}_1^\rho$ et $\mathcal{C}_2^\rho$, l'un croissant $(\mathcal{C}_2^\rho)$, l'autre décroissant $(\mathcal{C}_1^\rho)$.

2. Fonctions s'écroulant vers 0 pour deux limites de $|x|_p$.

Soit $g(x)$ une série de Laurent ayant pour zéros les b_i .

Soit $R \in \underset{\sim}{R}^+$ tel que $R_1 < R < R_2$.

Posons :

$$\Delta'_\rho = \{x \in \Delta_\rho \ ; \ R_1 < |x| \leqslant R\} , \quad \Delta' = \{x \ ; \ R_1 < |x| \leqslant R\} ,$$
$$\Delta''_\rho = \{x \in \Delta_\rho \ ; \ R \leqslant |x| < R_2\} , \quad \Delta'' = \{x \ ; \ R \leqslant |x| < R_2\} .$$

On peut considérer g comme le produit de 2 fonctions g_1 et g_2 ,

g_1 ayant pour seuls zéros les b_i pour $|b_i| < R$,

g_2 ayant pour seuls zéros les b_i pour $|b_i| \geqslant R$

(C'est-à-dire qu'on prend pour g_2 une série de Taylor, convergente pour $|x| < R_2$, et pour g_1 une série de Laurent, convergente pour $|x| > R_1$).

Quand $|x|_p \longrightarrow R_2$, $x \in \Delta''_\rho$, alors

$$\begin{cases} |g_2(x)|_p \longrightarrow +\infty \\ |g_1(x)|_p \text{ reste fini, mais } \neq 0 \end{cases} ,$$

donc $|g(x)| \longrightarrow +\infty$.

D'autre part,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{g_1} \in H(\Delta''_\rho) \\ \dfrac{1}{g_2} \in H(\Delta''_\rho) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{g} \in H(\Delta''_\rho) \quad .$$

On obtient des résultats analogues sur Δ'_ρ :

$$\lim_{|x|_p \to R_1, x \in \Delta'_\rho} \frac{1}{g(x)} = 0 \ , \quad \frac{1}{g} \in H(\Delta'_\rho) \ .$$

Soit $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$. L'équation $(1/g) - \alpha = 0$ a une infinité de zéros dans Δ'' , dont seulement un nombre fini dans Δ''_ρ , et une infinité de zéros dans Δ' , dont seulement un nombre fini dans Δ'_ρ .

A partir du rang I_2 $(i \geqslant I_2)$, les zéros de $(1/g) - \alpha = 0$ sont dans les cercles $C(b_i\ ,\ \rho)$. Pour $i \leqslant I_1$, les zéros de $(1/g) - \alpha$ sont dans les cercles $C(b_i\ ,\ \rho)$. On peut les indicier avec les indices i des b_i . Soient a_i ces zéros.

La fonction :

$$\left(\frac{1}{g} - \alpha\right) \times \prod_{i \leqslant I_1} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right) \prod_{i \geqslant I_2} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right)$$

est analytique sur Δ avec un nombre fini de zéros et de pôles.

Quand $|x| \longrightarrow R_1$ ou R_2 , $1/g \longrightarrow 0$ et

$$\left|\prod_{i \leqslant I_1} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right) \prod_{i \geqslant I_2} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right)\right|_p = 1 \ , \quad \text{pour} \quad x \in \Delta_\rho \ .$$

Le nombre de zéros de la fonction ci-dessus est donc égal au nombre de pôles : Si les a_i sont les zéros de $(1/g) - \alpha$ dans Δ , alors :

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{g} - \alpha\right) \prod_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right)$$

est une fonction analytique sans zéro ni pôle dans Δ .

En développant, comme précédemment, $\varphi(x)$ en série de Laurent :

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i \, x^i \ , \ \text{pour} \quad r_2 < |x| < R_2 \ ,$$

avec r_2 suffisamment proche de R_2 , on obtient

$$\left|\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i \, x^i + \alpha \prod_{-N}^{+N} \left(1 - \left(\frac{a_i - b_i}{x - b_i}\right)\right)\right|_p < \varepsilon \ ,$$

ce qui entraine $\varphi(0) = -\alpha$, puis $\varphi_i = 0$ pour $i > 0$, et en faisant de même dans un domaine $R_1 < |x| < r_1$, $\varphi_i = 0$ pour $i < 0$.

D'où

$$\frac{1}{g} - \alpha = -\alpha \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - a_i}{x - b_i}\right) \ .$$

Lorsque $|x| \longrightarrow R_1$ ou R_2 , $x \in \Delta_\rho$, on a donc

$$\prod_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - a_i}{x - b_i}\right) \longrightarrow 1 \ .$$

3. Fonctions s'écroulant vers des valeurs distinctes pour deux limites de $|x|$.

(a) Existence.

L'intersection des plages des deux T-filtres $\mathcal{T}_1^\rho$ et $\mathcal{T}_2^\rho$ est vide. Soit

$\mathfrak{J}_1$ l'idéal des éléments annulés par $\mathcal{T}_1^\rho$,

$\mathfrak{J}_2$ l'idéal des éléments annulés par $\mathcal{T}_2^\rho$.

Il n'existe aucun idéal maximal [1] contenant $\mathfrak{J}_1$ et $\mathfrak{J}_2$: $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = H(\Delta_\rho)$.

Donc, il existe $f_1 \in \mathfrak{J}_1^\rho$, $f_2 \in \mathfrak{J}_2^\rho$ tels que $1 = f_1 + f_2$. Et comme

$\lim_{\mathcal{C}_2} f_2(x) = 0$ et $\lim_{\mathcal{C}_1} f_1(x) = 0$, on a aussi

$$\lim_{\mathcal{C}_1} f_2(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\mathcal{C}_2} f_1(x) = 1 .$$

Cherchons donc des f_1 et f_2 possibles.

(b) Mise en évidence.

Reprenons la fonction $g(x)$ du § II.1.

Posons

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n x^n , \quad h(x) = \sum_0^{\infty} u_n x^n , \quad \varphi(x) = \frac{h(x)}{g(x)} .$$

1° Démontrons que $\varphi(x) \in H(\Delta_\rho)$. - Posons $g(x) = h(x) + k(x)$. Soit R tel que

$$x \in \Delta_\rho , \quad R \leqslant |x| < R_2 \Longrightarrow \left|\frac{k(x)}{h(x)}\right|_p < 1 .$$

Posons $\Delta''_\rho = \{x \in \Delta_\rho ; R \leqslant |x| < R_2\}$, $1/g \in H(\Delta''_\rho)$.

Pour $x \in \Delta''_\rho$, on a $\varphi(x) = 1/((k(x)/h(x)) + 1)$.

$$k(x) \in H(\Delta''_\rho) , \quad \frac{1}{h(x)} \in H(\Delta''_\rho) \Longrightarrow \frac{k(x)}{h(x)} + 1 \in H(\Delta''_\rho) .$$

$|(k(x)/h(x)) + 1|_p = 1$ sur Δ''_ρ , donc $(k/h) + 1$ est inversible sur Δ''_ρ , et $\varphi = 1/((k/h) + 1) \in H(\Delta''_\rho)$. Posons $\Delta'_\rho = \{x \in \Delta_\rho ; R_1 < |x| \leqslant R\}$. Alors

$$h(x) \in H(\Delta'_\rho) , \quad 1/g(x) \in H(\Delta'_\rho) \Longrightarrow \varphi(x) \in H(\Delta'_\rho) .$$

$$\varphi(x) \in H(\Delta'_\rho) , \quad \varphi(x) \in H(\Delta''_\rho) \Longrightarrow \varphi(x) \in H(\Delta_\rho) .$$

2° Limites de $\varphi(x)$. - Si $|x|_p \longrightarrow R_1$, $x \in \Delta\rho$ alors $|h(x)|_p$ est constant $\neq 0$ et $|g(x)|_p \longrightarrow +\infty$, donc $\varphi(x) \longrightarrow 0$.

Si $|x|_p \longrightarrow R_2$, $x \in \Delta_\rho$ alors $|h(x)|_p \longrightarrow +\infty$ et $|k(x)|_p$ est constant $\neq 0$, donc $(k(x)/h(x)) \longrightarrow 0$, et

$$\varphi(x) = \frac{1}{(k(x)/h(x)) + 1} \longrightarrow 1 .$$

3° Développement en produit. - Soit $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

Sur $\Delta'' = \{x ; R \leqslant |x| < R_2\}$, $\varphi(x) - \alpha$ a une infinité de zéros a_i qui, pour $i > I_2$, sont dans les cercles $C(b_i , \rho)$.

Sur $\Delta' = \{x ; R_1 < |x| \leqslant R\}$, $\varphi(x) - \alpha$ a une infinité de zéros a_i qui, pour $i < I_1$, sont dans les cercles $C(b_i , \rho)$.

La fonction :

$$(\varphi(x) - \alpha) \prod_{-\infty}^{I_1} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right) \prod_{I_2}^{+\infty} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right)$$

est une fonction analytique munie d'un nombre fini de zéros et de pôles dans Δ .

Si $|x|_p \longrightarrow R_2$,

$$\varphi(x) - \alpha \longrightarrow 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \left|\prod_{-\infty}^{I_1} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right) \prod_{I_2}^{+\infty} \left(\frac{x - b_i}{x - a_i}\right)\right|_p = 1 ,$$

pour $|x|_p$ asez proche de R_2 .

De même, si $|x|_p \longrightarrow R_1$,

$$\varphi(x) - \alpha \longrightarrow - \alpha \quad \text{et} \quad |\prod_{-\infty}^{I_1}(\frac{x - b_i}{x - a_i}) \prod_{I_2}^{+\infty}(\frac{x - b_i}{x - a_i})|_p = 1 ,$$

pour $|x|_p$ assez proche de R_1 .

La fonction ci-dessus a donc autant de zéros (a_i) que de pôles (b_i) . Etudions la fonction

$$\psi(x) = (\varphi(x) - \alpha) \prod_{-\infty}^{+\infty}(\frac{x - b_i}{x - a_i}) .$$

C'est une fonction analytique sans zéro ni pôle dans Δ .

Si $|x|_p \longrightarrow R_2$, $|\psi(x)|_p \longrightarrow |1 - \alpha|_p$.

Si $|x|_p \longrightarrow R_1$, $|\psi(x)|_p \longrightarrow |- \alpha|_p \, |\prod_{-\infty}^{+\infty}(\frac{b_i}{a_i})|_p$.

Développons $\psi(x)$ en série comme au § II.1 : $\forall \ \varepsilon > 0$, $\exists \ r_2$ tel que

$$r_2 < |x| < R_2 \Longrightarrow |1 - \varphi(x)| < \varepsilon , \quad \forall \ x \in \Delta_\rho ,$$

$\exists$ N tel que

$$|\prod_{-\infty}^{+\infty}(\frac{x - b_i}{x - a_i}) - \prod_{-N}^{+N}(\frac{x - b_i}{x - a_i})|_p < \varepsilon , \quad \forall \ x \in \Delta_\rho .$$

Alors

$$r_2 < |x| < R_2 , \quad x \in \Delta_\rho \Longrightarrow |\psi(x) - (1 - \alpha) \prod_{-N}^{+N}(\frac{x - b_i}{x - a_i})|_p < \varepsilon ,$$

et par un développement en série de Laurent pour $|x|_p > |b_N|_p$, on obtient

$$\psi(0) = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \psi_i = 0 , \text{ pour } i > 0 .$$

De même $\forall \ \varepsilon > 0$, $\exists \ r_1$ tel que

$$R_1 < |x| < r_1 \Longrightarrow |\varphi(x)|_p < \varepsilon .$$

Alors

$$R_1 < |x| < r_1 , \quad x \in \Delta_\rho \Longrightarrow |\psi(x) + \alpha \prod_{-N}^{+N}(\frac{x - b_i}{x - a_i})|_p < \varepsilon .$$

$$|\psi(x) + \alpha \prod_{-N}^{+N}(\frac{b_i}{a_i})(\frac{1 - (x/b_i)}{1 - (x/a_i)})|_p < \varepsilon .$$

Et on développe $\prod_{-N}^{+N}((x - b_i)/(x - a_i))$, pour $|x|_p < |b_N|_p$, en série de Taylor cette fois, ce qui permet de conclure

$$\psi(0) = - \alpha \prod_{-\infty}^{+\infty}(\frac{b_i}{a_i}) \quad \text{et} \quad \psi_i = 0 , \text{ pour } i < 0 .$$

On doit donc avoir :

$$1 - \alpha = - \alpha \prod_{-\infty}^{+\infty}(\frac{b_i}{a_i}) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (A.). - T-filtres, ensembles analytiques et transformations de Fourier p-adique, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, fasc. 2, p. 45-80.

[2] KRASNER (M.). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, "Colloque international du CNRS, 143 : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres" [1964, Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

[3] LAZARD (M.). - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publication mathématique, 14, p. 47-76).

[4] MOTZKIN (E.). - Une classe d'ensembles analytiques p-adiques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 2, 8 p.

[5] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Prolongement analytique en analyse p-adique, Séminaire de Théorie des nombres, Univ. Bordeaux-I (J. Lesca), 1968/69, n° 3.

[6] MOTZKIN (E.). - Décomposition d'un élément analytique en facteurs singuliers, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 27, 1977, fasc. 1, p. 67-82.

[7] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.

[8] SARMANT (M.-C.). - Répartition des zéros et des pôles d'une fonction analytique, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 6, 8 p.

(Texte reçu le 3 juillet 1978)

Mme Marie-Claude SARMANT-DURIX
16 boulevard Jourdan
75014 PARIS