GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PAUL BEZIVIN

Idéaux de fonctions analytiques bornées stables par dérivation

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 7, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A6_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 7, 9 p.

13 décembre 1976

IDÉAUX DE FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES STABLES PAR DÉRIVATION

par Jean-Paul BEZIVIN

On note K un corps ultramétrique complet, algébriquement clos. Le disque unité "ouvert" D de K est l'ensemble $D = \{x \in K ; |x| < 1\}$. On note B l'ensemble des fonctions analytiques bornées sur D, qui s'identifie à l'espace des séries $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ avec $\sup|a_n| < +\infty$. On en fait une algèbre de Banach à norme multiplicative en posant $\|f\| = \sup|a_n|$.

1. Rappels.

On rappelle un résultat de [1], généralisation d'un théorème de M. Van der PUT [2], et se démontrant de manière analogue.

PROPOSITION 1. - Soit $f_h \in B$ une suite de fonctions analytiques bornées sur D, telles que $\|f_h\| \to 0$ si $h \to +\infty$. Soit $g \in B$, on suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, $\forall x \in D$, on ait

$$|g(x)| \leq c(\sup_h |f_h(x)|)^2 .$$

Alors il existe une suite t_h d'éléments de B vérifiant

1° $\sup_h \|t_h\| < +\infty$,

2° $g = \sum_{h=0}^{h=+\infty} t_h f_h$.

On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - Soit $f_h \in B$, telles que $\|f_h\| \to 0$ si $h \to +\infty$, et soit J l'idéal de B engendré par les f_h. Alors,

$$J = B \iff \inf_{x\in D} \sup_h |f_h(x)| = \delta > 0 .$$

2. Idéaux stables par dérivation.

On veut étudier les idéaux de B stables par dérivation. On commence par montrer qu'il y en a, et caractériser les $f \in B$ qui peuvent appartenir à de tels idéaux.

PROPOSITION 2. - Soit $f \in B$. Pour qu'il existe un idéal I de B, stable par dérivation, propre et contenant f, il faut et il suffit que l'on ait (*) :

$$\inf_{x\in D} \sup_h |f^{(h)}(x)| = 0 . \tag{*}$$

Preuve. - Soit I un idéal propre, stable par dérivation, contenant f. On a $\|f^{(h)}\| \leq |h\,!|\ \|f\|$, d'où on déduit $\|f^{(h)}\| \to 0$ si $h \to +\infty$.

On peut alors appliquer le corollaire 1 aux $f^{(h)}$. Si (*) n'était pas réalisé, l'idéal $J = (f , f' , \dots , f^{(h)} , \dots)$ serait égal à B ; or il est inclus dans I , d'où une contradiction.

Réciproquement, soit

$$I = \{g \; ; \; \exists \, t_h \in B \, , \; \sup\|t_h\| < +\infty \text{ et } g = \sum t_h f^{(h)}\} \, .$$

Il est clair que I est un idéal, stable par dérivation ; s'il était égal à B , on aurait une égalité

$$1 = \sum t_h f^{(h)} \quad \text{avec} \quad \sup\|t_h\| = A < +\infty \, .$$

D'où

$$1 \leqslant \sup|t_h(x)|\,|f^{(h)}(x)| \leqslant A \sup_h|f^{(h)}(x)| \; ,$$

ce qui constituerait une contradiction avec (*) .

Donnons un autre critère. Soit $\sigma \in |K|$, $0 < \sigma \leqslant \mathrm{Rcv}(e^x)$.

PROPOSITION 3. - Pour que (*) soit vérifiée, il faut et il suffit qu'il existe une suite de disques $D_m = D(X_m , \sigma)$, telle que $\lim_{m\to+\infty} \|f\|_{D_h} = 0$ (où l'on a noté $\|f\|_{D_h} = \sup_{x\in D_h} |f(x)|$).

Preuve. - Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$, et considérons l'ensemble $E_m(f) = \{x \in D \; ; \sup_h|f^{(h)}(x)| \leqslant 1/m\}$. Si (*) est réalisé, $E_m(f) \neq 0$, $\forall\, m \geqslant 1$. Soit $x_m \in E_m(f)$ et $\alpha \in K$, $|\alpha| \leqslant \sigma$. On a alors

$$f(X_m + \alpha) = \sum_{h\geqslant 0} \frac{\alpha^h}{h\,!} f^{(h)}(X_m) \, .$$

Comme $|\alpha| \leqslant \sigma$, on a $\sup_h \frac{|\alpha|^h}{|h!|} \leqslant 1$, d'où

$$|f(X_m + \alpha)| \leqslant \sup_h\left(\frac{|\alpha|^h}{|h!|} \, |f^{(h)}(x_m)|\right) \leqslant \frac{1}{m} \, .$$

D'où $\|f\|_{D(X_m,\sigma)} \leqslant 1/m$, et le résultat.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$, et $q \in \mathbb{N}$ tel que $\|f^{(p)}\| \leqslant \varepsilon$ pour $p \geqslant q$.

Choisissons k tel que $\|f\|_{D(X_h,\sigma)} \leqslant \varepsilon\sigma^q$. On a

$$\|f^{(s)}\|_{D(X_h,\sigma)} \leqslant \frac{\|f\|}{\sigma^q} D(X_h , \sigma) \, .$$

Si l'on prend alors un élément x_0 quelconque dans $D(X_h , \sigma)$, on a

$$|f^{(s)}(x_0)| \leqslant \varepsilon \quad \text{si} \quad s \geqslant q \; ,$$

$$|f^{(s)}(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon\sigma^q}{\sigma^s} \leqslant \varepsilon \quad \text{si} \quad s \leqslant q \; ,$$

d'où

$$\inf_{x\in D} \sup_{s\in\mathbb{N}}|f^{(s)}(x)| = 0 \, .$$

Ce résultat permet de construire des f vérifiant (*) . Par exemple, soit $x_h \in D$, $x_h \neq 0$, tels qu'il existe une suite $n_h \in \mathbb{N}$, $\lim_{h\to+\infty} n_h = +\infty$, et vérifiant $\prod_{h\geq 0} |X_h|^{n_h} > 0$. On sait alors qu'il existe $f \in B$ vérifiant $f \neq 0$, $f \equiv 0 \ [(X - X_h)^{n_h}]$. Une telle fonction vérifie le critère de la proposition 3 ; en effet, $f = (X - X_h)^{n_h} g_h$, $\forall h$, avec $g_h \in B$, d'où on déduit d'abord $\|f\| = \|g_h\|$, puis

$$\|f\|_{D(X_h,\sigma)} \leq \sigma^{n_h} \|g_h\| .$$

Comme $\sigma < 1$, $\sigma^{n_h} \longrightarrow 0$, d'où le résultat.

On peut aussi se donner, au lieu d'un zéro multiple, d'ordre n_h , n_h zéros distincts situés dans $D(X_h , \sigma)$.

On aura le même résultat. En particulier, il n'est pas besoin que f possède des zéros d'ordre tendant vers $+\infty$ pour que f vérifie (*) .

A partir de maintenant, on se fixe $\sigma \in |K|$, $0 < \sigma \leq \mathrm{Rcv}(e^x)$. La relation $x \mathcal{R} y \iff |x - y| \leq \sigma$ est une relation d'équivalence sur D , on note D_λ , $\lambda \in \Lambda$ les classes d'équivalences, qui sont des disques fermés de rayon σ .

PROPOSITION 4. - Soit I un idéal non réduit à $\{0\}$ et propre de B , stable par dérivation. Alors il existe un filtre $\mathfrak{F}$ sur Λ , tel que

$$f \in I \implies \lim_{\mathfrak{F}} \|f\|_\lambda = 0 ,$$

où l'on a noté $\|f\|_\lambda = \|f\|_{D_\lambda} = \sup_{x\in D_\lambda} |f(u)|$.

Preuve. - Pour $f \in I$, $f \neq 0$, soit $A_\varepsilon(f) = \{\lambda \in \Lambda \ ; \ \|f\|_\lambda < \varepsilon\}$, où ε est un réel strictement positif. D'après la proposition 3, puisque I est stable par dérivation, on a $A_\varepsilon(f) \neq \emptyset$. On va montrer que l'ensemble des intersections finies $A_{\varepsilon_1}(f_1) \cap \ldots \cap A_{\varepsilon_n}(f_n)$ (où les $f_i \in I$ et les $\varepsilon_i > 0$), forment une base de filtre sur Λ . Il suffit clairement de démontrer que chaque intersection finie est non vide ; on voit facilement qu'il suffit de le faire pour $\varepsilon_i = \varepsilon > 0$, $\forall i = 1 , \ldots , n$.

Considérons les $f_i^{(h)}$, $i = 1 , \ldots , n$, $h \in \underset{\sim}{N}$. Cet ensemble forme visiblement une suite g_m d'éléments de B tels que $\|g_m\| \longrightarrow 0$ si $m \longrightarrow +\infty$.

On peut alors leur appliquer le corollaire de la proposition 1, d'où, $\forall \varepsilon > 0$,

$$E_\varepsilon = \{x \in D \ ; \ \sup_{i,h} |f_i^{(h)}(x)| \leq \varepsilon\}$$

est non vide. Soit $x_0 \in E_\varepsilon$; on voit facilement que l'on a, $\forall i$, $\|f_i\|_{D(x_0,\sigma)} \leq \varepsilon$. Si D_λ est la classe de x_0 , on aura donc $\lambda \in A_\varepsilon(f_1) \cap \ldots \cap A_\varepsilon(f_n)$, d'où le résultat.

Soit $\mathfrak{F}$ le filtre sur Λ , engendré par cette base de filtre. Il est clair que, $\forall f \in I$, $\lim_{\mathfrak{F}} \|f\|_\lambda = 0$, ce qui termine la démonstration.

3. Idéaux premiers fermés stables par dérivation.

PROPOSITION 5.

(a) Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur Λ, alors si l'on note $\varphi_{\mathcal{U}}$ l'application $f \in B \longrightarrow \varphi_{\mathcal{U}}(f) = \lim_{\mathcal{U}} \|f\|_{\lambda}$, $\varphi_{\mathcal{U}}$ est une semi-norme multiplicative continue, dont le noyau $\operatorname{Ker} \varphi_{\mathcal{U}}$ $\{f ; \varphi_{\mathcal{U}}(f) = 0\}$ est un idéal premier fermé, stable par dérivation de B (éventuellement réduit à $\{0\}$).

(b) Pour tout idéal propre I, et stable par dérivation, il existe un idéal du type $\operatorname{Ker} \varphi_{\mathcal{U}}$ tel que $I \subset \operatorname{Ker} \varphi_{\mathcal{U}}$.

Preuve.

(a) $\varphi_{\mathcal{U}}$ est clairement une semi-norme multiplicative et continue, et l'on voit facilement que l'on a

$$\forall f \in B, \quad \varphi_{\mathcal{U}}(f') \leqslant \frac{1}{\sigma} \varphi_{\mathcal{U}}(f),$$

d'où la stabilité par dérivation.

(b) La proposition 4 fournit un filtre $\mathfrak{F}$ sur Λ tel que $f \in I \Rightarrow \lim_{\mathfrak{F}} \|f\|_{\lambda} = 0$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que $\mathfrak{F}$, il est clair qu'alors on a $I \subset \operatorname{Ker} \varphi_{\mathcal{U}}$, qui est premier, fermé, stable par dérivation d'après (a).

Soit $\mathcal{P}$ un idéal du type $\operatorname{Ker} \varphi_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}$ ultrafiltre sur Λ (qui correspond toujours au $\sigma \in |K|$ tel que $0 < \sigma \leqslant \operatorname{Rcv}(\exp(x))$). La présence du rayon de convergence de l'exponentielle peut sembler surprenante, la proposition suivante montre qu'elle est artificielle.

PROPOSITION 6. - On note Λ_σ les classes d'équivalence de D pour la relation $x \mathcal{R} y \iff |x - y| \leqslant \sigma$, et Λ_r celles relatives à la relation $|x - y| \leqslant r$, où r est dans $[\sigma , 1[$. Soit $\mathcal{U}_\sigma$ un ultrafiltre sur Λ_σ, et $\mathcal{P} = \operatorname{Ker} \varphi_{\mathcal{U}_\sigma}$. Alors il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}_r$ sur Λ_r tel que

$$\mathcal{P} = \operatorname{Ker} \varphi_{\mathcal{U}_\sigma} = \operatorname{Ker} \varphi_{\mathcal{U}_r}.$$

Preuve. - Soit $a \in D$, r et $R \in]0 , 1[$. On a, en désignant par

$$N_a(f , r) = \operatorname{Card}[\text{Zéros de } f \text{ dans } D(a , r^+)],$$

$$n_a(f , r) = \operatorname{Card}[\text{Zéros de } f \text{ dans } D(a , r^-)],$$

$$|f|_a(r) = \sup_{|x-a|\leqslant r} |f(x)| \leqslant \left(\frac{r}{R}\right)^{N_a(f,r)} |f|_a(R)$$

et

$$|f|_a(r) \geqslant \left(\frac{r}{R}\right)^{n_a(f,R)} |f|_a(R).$$

Soit $\lambda \in \Lambda_\sigma$. On note

$$\|f\|_{\lambda,\sigma} = \sup_{x\in D(x_\lambda,\sigma)} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_{\lambda,r} = \sup_{x\in D(x_\lambda,r)} |f(x)|.$$

On a alors

$$\|f\|_{\lambda,r} \geqslant \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{n_\lambda(f,r)} \|f\|_{\lambda,r} .$$

Deux cas se présentent alors :

1° Si $\lim_{\mathcal{U}_\sigma} n_\lambda(f , r) < +\infty$, on déduit de $\lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,\sigma} = 0$ que

$$\lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,r} = 0 .$$

2° Si $\lim_{\mathcal{U}_\sigma} n_\lambda(f , r) = +\infty$, on a

$$\lim_{\mathcal{U}_\sigma} N_\lambda(f , r) = +\infty ,$$

et, $\forall R , \ 1 > R > r$,

$$\|f\|_{\lambda,r} \leqslant \left(\frac{r}{R}\right)^{N_\lambda(f,r)} \|f\|_{\lambda,r} .$$

D'où en faisant tendre R vers 1, $R < 1$:

$$\|f\|_{\lambda,r} \leqslant r^{N_\lambda(f,r)} \|f\| .$$

D'où encore

$$\lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,r} = 0 .$$

Donc

$$\lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,\sigma} = 0 \Longrightarrow \lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,r} = 0 .$$

Mais comme $\|f\|_{\lambda,\sigma} \leqslant \|f\|_{\lambda,r}$, la réciproque est trivialement vraie.

Enfin, on obtient Λ_r à partir de Λ_σ par la relation d'équivalence sur des représentants x_λ des classes de D modulo $\mathcal{R}$ par

$$\lambda \mathrel{S} \lambda' \Longleftrightarrow |x_\lambda - x_{\lambda'}| \leqslant r .$$

Si l'on note $\mathcal{U}_r$ l'image de l'ultrafiltre $\mathcal{U}_\sigma$ sur Λ_r , on obtient un ultrafiltre, et il est clair que

$$\lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,\sigma} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\mathcal{U}_r} \|f\|_{\lambda,r} = 0 ,$$

d'où le résultat.

Une question posée par M. Van der PUT concerne l'existence d'idéaux maximaux de B , stables par dérivation [2]. On ne résout pas ici cette question, mais la proposition 5 admet le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $\mathfrak{M}$ <u>un idéal maximal stable par dérivation</u>. <u>Alors</u> :

1° <u>Il existe un ultrafiltre</u> $\mathcal{U}$ <u>sur</u> Λ <u>tel que</u> $\mathfrak{M} = \operatorname{Ker} \varphi_{\mathcal{U}}$.

2° <u>Il existe une famille</u> x_λ , $\lambda \in \Lambda$, <u>et un ultrafiltre</u> $\mathcal{U}$ <u>sur</u> Λ <u>tel que</u>

$$\mathfrak{M} = \{f \ ; \ \lim_{\mathcal{U}} |f(x_\lambda)| = 0\} .$$

<u>Preuve</u>. - Le 1° est immédiat à partir de la proposition 5. Pour le 2°, on se donne x_λ représentants des classes d'équivalence de Λ . On a

$$|f(x_\lambda)| \leqslant \|f\|_{\lambda,\sigma} .$$

Soit $\varphi_{\mathcal{U}}(f) = \lim_{\mathcal{U}} \|f\|_\lambda$ et $\Phi_{\mathcal{U}}(f) = \lim_{\mathcal{U}} |f(x_\lambda)|$.

Il est clair que, $\forall\, f \in B$, $\Phi_{\mathcal{U}}(f) \leqslant \varphi_{\mathcal{U}}(f)$, d'où

$$\operatorname{Ker} \varphi_{\mathcal{U}} \subset \operatorname{Ker} \Phi_{\mathcal{U}} \underset{\neq}{\subset} B ,$$

d'où le résultat.

4. Chaînes croissantes d'idéaux premiers fermés stables par dérivation.

Dans cette partie, on suppose K maximalement complet. On montre que, dans ce cadre, il existe des chaînes infinies strictement croissantes d'idéaux premiers fermés, stables par dérivation.

LEMME 1. - Soit x_h une suite d'éléments de D , et $\theta_h \in \,]0\,,\,1[$, $\forall\, h$, telle qu'il existe $\delta > 0$, $\theta_h \geqslant \delta$, $\forall\, h \in \underset{\sim}{N}$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\underset{\sim}{N}$. On note $D_h = D(x_h\,,\,\theta_h)$. Alors $\mathcal{P} = \{f \in B\ ;\ \lim_{\mathcal{U}} \|f\|_{D_h} = 0\}$ est un idéal premier, fermé, stable par dérivation (éventuellement réduit à $\{0\}$).

Preuve. - Il suffit de vérifier la stabilité par dérivation, qui provient de la relation

$$\|f'\|_{D_h} \leqslant \frac{1}{\theta_h} \|f\|_{D_h} \leqslant \frac{1}{\delta} \|f\|_{D_h} .$$

Si l'on fixe la suite x_h et l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, le lemme suivant donne une condition suffisante sur deux suites θ_h et τ_h pour que les idéaux associés par le lemme 1 soient identiques.

LEMME 2. - Soient τ_h et θ_h deux suites d'éléments de $]\delta\,,\,1[$ tels que θ_h et τ_h tendent vers 1 si $h \longrightarrow +\infty$. Alors si $\lim_{\mathcal{U}} (1-\tau_h)/(1-\theta_h) \in \,]0\,,\,+\infty[$, les idéaux associés par le lemme 1 sont égaux.

Preuve. - On a d'abord que si $E_1 = \{h\ ;\ \tau_h \leqslant \theta_h\}$ et $E_2 = \{h\ ;\ \theta_h \leqslant \tau_h\}$, $E_1 \cup E_2 = \underset{\sim}{N}$. Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, E_1 ou E_2 est danss $\mathcal{U}$: on peut donc supposer que $\theta_h \geqslant \tau_h$, $\forall\, h \in \underset{\sim}{N}$.

On a encore

$$|f|_h(\tau_h) \geqslant \left(\frac{\tau_h}{\theta_h}\right)^{n_h(f,\theta_h)} |f|_h(\theta_h) \qquad \text{(avec des notations évidentes).}$$

Si $\lim_{\mathcal{U}} \left(\frac{\tau_h}{\theta_h}\right)^{n_h(f,\theta h)} \neq 0$, de $\lim_{\mathcal{U}} |f|_h(\tau_h) = 0$, on déduit

$$\lim_{\mathcal{U}} |f|_h(\theta_h) = 0 .$$

Si $\lim_{\mathcal{U}} \left(\frac{\tau_h}{\theta_h}\right)^{n_h(f,\theta_h)} = 0$, on voit facilement que l'on a

$$\lim_{\mathcal{U}} n_h(f\,,\,\theta_h)(1-\theta_h) = +\infty ,$$

donc aussi

$$\lim_{\mathcal{U}} N_h(f\,,\,\theta_h)(1-\theta_h) = +\infty ,$$

et comme l'on a

$$|f|_h(\theta_h) \leq \theta_h^{N_h(f,\theta_h)} \|f\| ,$$

on a trivialement

$$\lim_{\mathcal{U}} |f|_h(\theta_h) = 0 .$$

Donc $\lim_{\mathcal{U}} |f|_h(\tau_h) = 0 \implies \lim_{\mathcal{U}} |f|_h(\theta_h) = 0$, et l'implication réciproque étant triviale, on a le résultat annoncé.

Le lemme 2 nous indique que c'est l'ordre de croissance de θ_h vers 1 qui est important.

On peut maintenant construire un exemple de chaîne strictement croissante d'idéaux premiers fermés stables par dérivation.

<u>On se donne une suite</u> x_h , <u>vérifiant</u>

1° $|x_{h+1}| > |x_h|$, $\forall$ k , $|x_0| > 0$,

2° $\prod_{h\in \underset{\sim}{N}} |x_h| > 0$.

Dans ces conditions, on montre facilement qu'il existe deux suites d'entiers n_h et q_h , $h \in \underset{\sim}{N}$, telles que

3° $\prod_{h\in \underset{\sim}{N}} |x_h|^{n_h} > 0$,

4° $\lim_{h\to+\infty} q_h = +\infty$, $\lim_{h\to+\infty} \frac{n_h}{q_h} = +\infty$, $n_h \geq q_h \geq 2$, $\forall$ h .

LEMME 3. - <u>Il existe une suite double d'entiers</u> $m_h^{(\ell)}$, <u>vérifiant</u>

(a) $n_h \geq m_h^{(\ell)} \geq m_h^{(\ell+1)} \geq q_h$, $\forall$ h , $\forall$ ℓ ,

(b) $m_h^{(0)} = n_h$,

(c) $\lim_{h\to+\infty} (m_h^{(\ell)})/(m_h^{(\ell+1)}) = +\infty$, $\forall$ ℓ <u>fixé</u>.

<u>Preuve</u>. - Par récurrence, construisons $m_h^{(1)}$ par exemple. On prend

$$m_h^{(1)} = q_h \left[\sqrt{\frac{n_h}{q_h}}\,\right]$$

(où [ ] désigne la partie entière), et on vérifie que $m_k^{(1)}$ ainsi défini convient.

Soit maintenant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\underset{\sim}{N}$, non trivial, fixé dans tout ce qui suit.

On définit $\theta_h^{(\ell)}$ par $\theta_h^{(\ell)} = 1 - \frac{1}{m_h^{(\ell)}}$. On a alors

$$\theta_h^{(\ell+1)} \leq \theta_h^{(\ell)} , \forall \ell , \forall h \text{ et } \theta_h^{(\ell)} \geq \frac{1}{2} , \forall h , \forall \ell ,$$

Si $\ell \in \underset{\sim}{N}$ et $f \in B$, on pose

$$\Phi_{\mathcal{U},\ell}(f) = \lim_{\mathcal{U}} \|f\|_{D(x_h,\theta_h^{(\ell)})} .$$

D'après le lemme 1, $\operatorname{Ker} \Phi_{\mathcal{U},\ell} = \mathcal{P}_\ell$ est un idéal premier, fermé, stable par dérivation.

PROPOSITION 7. - La suite $\wp_\ell$, $\ell \in \underset{\sim}{N}$, est une suite strictement croissante d'idéaux premiers, fermés, stables par dérivation.

Preuve. - On remarque tout d'abord que la suite est trivialement croissante, puisque $\theta_h^{(\ell+1)} < \theta_h^{(\ell)}$; d'où $\Phi_{\mathcal{U},\ell+1}(f) \leqslant \Phi_{\mathcal{U},\ell}(f)$, $\forall$ f , et $\wp_\ell \subset \wp_{\ell+1}$. Pour montrer que les $\wp_\ell$ forment une suite strictement croissante, on va exhiber $f_\ell \in B$ tel que

$$f_\ell \in \wp_{\ell+1} \text{ et } f_\ell \notin \wp_\ell .$$

On a $n_h \geqslant m_h^{(\ell)}$, $\forall$ h . Par suite, on a

$$\prod_{k\in \underset{\sim}{N}} |x_k|^{m_k^{(\ell)}} > 0 .$$

On sait alors qu'il existe f_ℓ dans B , tel que f_ℓ admette x_h comme zéro à l'ordre exactement $m_k^{(\ell)}$, et ne s'annule pas ailleurs (parce que K est maximalement complet, voir [2]).

Montrons que $f_\ell \in \wp_{\ell+1}$. On a $\forall$ **k** , $f_\ell(x) = (x - x_k)^{m_k^{(\ell)}} \lambda_{k,\ell}(x)$, relation d'où on déduit

$$\|f_\ell\| = \|\lambda_{k,\ell}\| ,$$

puis

$$\|f_\ell\|_{D(X_k,\theta_k^{(\ell+1)})} \leqslant [\theta_k^{(\ell+1)}]^{m_k^{(\ell)}} \|f_\ell\| .$$

Mais

$$\theta_k^{(\ell+1)} = 1 - \frac{1}{m_k^{(\ell+1)}} \text{ et } \frac{m_k^{(\ell)}}{m_k^{(\ell+1)}} \longrightarrow +\infty \text{ si } k \longrightarrow +\infty ,$$

d'où

$$\lim_{\mathcal{U}} \|f_\ell\|_{D(x_k,\theta_k^{(\ell+1)})} = \Phi_{\mathcal{U},\ell+1}(f) = 0 ,$$

et le fait que $f_\ell \in \wp_{\ell+1}$.

Montrons que $f_\ell \notin \wp_\ell$. On a

$$f_\ell(x) = (x - x_k)^{m_k^{(\ell)}} \lambda_{k,\ell}(x) .$$

On en déduit, en posant $r_{\mathbf{k}} = |x_{\mathbf{k}}|$, que

$$\|f_\ell\|_{D(0,r_k)} = r_k^{m_k^{(\ell)}} \|\lambda_{k,\ell}\|_{D(0,r_k)} .$$

Comme $\prod_{k\in \underset{\sim}{N}} |x_k|^{m_k^{(\ell)}} > 0$, on a $\lim_{k\to+\infty} r_k^{m_k^{(\ell)}} = 1$, donc

$$\|\lambda_{k,\ell}\|_{D(0,r_k)} \longrightarrow \|f_\ell\| \text{ si } h \longrightarrow +\infty .$$

On a d'autre part

$$\|f_\ell\|_{D(x_k,\theta_k^{(\ell)})} = [\theta_k^{(\ell)}]^{m_k^{(\ell)}} \|\lambda_{k,\ell}\|_{D(x_k,\theta_k^{(\ell)})} .$$

Pour k assez grand, f_ℓ n'a que x_k pour zéros sur $|x| = |x_k| = r_k$. Donc

$\lambda_{k,\ell}$ n'a plus de zéros sur $|x| = r_k$. On en déduit que l'on a

$$\|\lambda_{k,\ell}\|_{D(x_k,\theta_k^{(\ell)})} = \|\lambda_{k,\ell}\|_{D(0,r_k)} .$$

Enfin, $\theta_k^{(\ell)} = 1 - 1/m_k^{(\ell)}$. Donc $[\theta_k^{(\ell)}]^{m_k^{(\ell)}} \longrightarrow \frac{1}{e}$ si $k \longrightarrow +\infty$. Finalement,

$$\lim_{k\to+\infty} \|f_\ell\|_{D(x_k,\theta_k^{(\ell)})} = \frac{\|f_\ell\|}{e} = \Phi_{\mathfrak{U},\ell}(f) \neq 0 ,$$

ce qui prouve que $f_\ell \notin \mathfrak{P}_\ell$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEZIVIN (J.-P.). - Interpolation et idéaux de fonctions analytiques bornées, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 3, 9 p.

[2] Van der PUT (Marius). - The non-archimedean corona problem, "Table ronde d'analyse non archimédienne [1972. Paris]", Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 287-317.

(Texte reçu le 20 décembre 1976)

Jean-Paul BEZIVIN
163 rue de Charonne
75011 PARIS