Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Marie-Claude Sarmant-Durix

Répartition des zéros et des pôles d'une fonction analytique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. nº 6, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A5_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 6, 8 p.

6 décembre 1976

RÉPARTITION DES ZÉROS ET DES PÔLES D'UNE FONCTION ANALYTIQUE

par Marie-Claude SARMANT-DURIX

Nous nous plaçons dans un corps K valué complet algébriquement clos et de plus, maximalement complet [2].

Etant donné un produit infini défini sur K_∞, $\prod_{n=0}^{\infty} ((x - a_n)/(x - b_n))$, nous cherchons à savoir si, $\forall \alpha \in K$, la somme $\prod_{n=0}((x - a_n)/(x - b_n)) + \alpha$ peut, elle aussi, être mise sous la forme d'un produit infini.

1. Domaine de définition.

Soient R_1 , $R_2 \in \underset{\sim}{R}^+$ tels que $0 < R_1 < R_2$. On pose

$$\Delta = \{x \in \underset{\sim}{R} \ ; \ R_1 < |x| \leqslant R_2\} .$$

Soit $\{b_n\}_{n\in \underset{\sim}{N}}$ une suite infinie d'éléments de Δ tels que

(i) $\inf_{n\neq m} |b_n - b_m| = \delta > 0$;

(ii) $\Delta - \{b_n\}_{n\in \underset{\sim}{N}}$ soit quasi connexe [2].

On pose, pour $\rho \in \left]0 , \delta\right[$,

$$\Delta_\rho = \Delta - \bigcup_{n\in \underset{\sim}{N}} D(b_n , \rho) ,$$

où $D(b_n , \rho) = \{x \in K \ ; \ |x - b_n| \leqslant \rho\}$.

Δ_ρ est évidemment quasi connexe comme Δ . Nous allons commencer par étudier ses propriétés.

REMARQUE 1. - $\{b_n\}$ <u>n'admet pas de sous-suite à distance croissante, et donc</u> Δ_ρ <u>n'admet pas de filtre croissant</u> [1].

En effet, si $\{b_n\}$ admettait une sous-suite $\{b_{n_i}\}$ telle que

$$|b_{n_i} - b_{n_{i-1}}| < |b_{n_{i+1}} - b_{n_i}| ,$$

alors, pour $j > i + 1$,

$$|b_{n_i} - b_{n_j}| \leqslant \sup(|b_{n_i} - b_{n_{i+1}}| , \ldots , |b_{n_{j-1}} - b_{n_j}|) = |b_{n_{j-1}} - b_{n_j}| ,$$

donc un point a , tel que $|a - b_{n_i}| < \delta$, serait centre d'une infinité de circonférences de rayons $|a - b_{n_j}| = |b_{n_i} - b_{n_j}|$ rencontrant le complémentaire de Δ_0 , qui ne serait donc pas quasi connexe.

REMARQUE 2. - $\{b_n\}$ <u>peut admettre des sous-suites à distance décroissante, mais</u>

<u>alors elles correspondent toutes à un même filtre décroissant de</u> Δ_ρ .

<u>Démonstration</u>. - Soit $\{b_{n_i}\}$ une sous-suite à distance décroissante de $\{b_n\}$:

$$|b_{n_i} - b_{n_{i-1}}| > |b_{n_{i+1}} - b_{n_i}| .$$

Alors $\mathcal{C} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} D(b_{n_i}, |b_{n_i} - b_{n_{i-1}}|)$ n'est pas vide, puisque K est maximalement complet. Par contre, il ne doit pas être contenu dans Δ , puisque Δ est quasi connexe. La seule possibilité est donc

$$\mathcal{C} = D(0, R_1) .$$

$\{b_{n_i}\}$ sera donc une sous-suite à distance décroissante si, et seulement si, $|b_{n_i}| \to R_1$ quand $i \to +\infty$.

Dans ce cas, Δ_ρ admet un filtre décroissant défini par la base constituée des parties $\Delta_\rho \cap \Gamma_r$, où Γ_r est la couronne $\{x \in K ; R_1 < |x| < r\}$. Le diamètre du filtre est évidemment R_1 .

En conclusion, Δ_ρ n'admet pas de filtre croissant, et au plus un filtre décroissant.

2. Fonction à étudier.

Soit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie d'éléments de Δ_0 , telle que $|a_n - b_n| \to 0$ si $n \to +\infty$. Alors le produit infini

$$f(x) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{x - a_n}{x - b_n}\right)$$

est défini pour tout $x \neq b_n$.

De plus, pour tout $\rho > 0$, f est un élément analytique sur Δ_ρ : $f \in H(\Delta_\rho)$. (Par contre, f n'est pas élément analytique sur Δ_0 , mais seulement fonction analytique sur Δ_0 .)

Nous allons étudier les solutions de l'équation

$$f(x) + \alpha = 0 ,$$

et nous allons chercher à mettre $f(x) + \alpha$ sous la forme d'un produit infini, soit

$$f(x) + \alpha = h(x) \prod_{n \in \mathbb{N}} \frac{x - c_n(\alpha)}{x - b_n} ,$$

où $h(x)$ est une fraction en x .

Nous voyons que le nombre de zéros de $f(x) + \alpha$ dans Δ_ρ est lié à la question de la quasi-inversibilité de $f + \alpha$ dans $H(\Delta_\rho)$.

DÉFINITION (Rappel)[1]. - <u>Une fonction</u> $g \in H(D)$ <u>est quasi-inversible s'il existe un polynôme</u> P <u>dont tous les zéros sont intérieurs à</u> D , <u>et un élément</u> $h \in H(D)$, <u>inversible dans</u> $H(D)$, <u>tels que</u> $g = Ph$. (Rappelons aussi que h est inversible si, et seulement si, il existe $m > 0$ tel que $|h(x)| \geq m$, $\forall x \in D$.)

Si $f+\alpha$ est quasi inversible dans $H(\Delta_\rho)$, $f(x)+\alpha$ n'a donc qu'un nombre fini de zéros dans Δ_ρ.

Nous allons donc étudier les conséquences pour la fonction $f+\alpha$ de la propriété " $f+\alpha$ quasi inversible dans $H(\Delta_\rho)$ ".

PROPOSITION 1. - Soient $\rho_1 < \rho_0$. Si $f+\alpha$ est quasi inversible dans $H(\Delta_{\rho_0})$, alors il l'est dans $H(\Delta_{\rho_1})$.

Démonstration. - Supposons que $f+\alpha$ est quasi inversible dans $H(\Delta_{\rho_0})$, mais pas dans $H(\Delta_{\rho_1})$.

Alors $f+\alpha$ est annulé proprement par un T-filtre $\mathfrak{F}$ de Δ_{ρ_1} ([1], prop III, 2, § 6, p. 42). (C'est-à-dire que si $\mathfrak{F}$ est défini par la famille des parties $(D_i)_{i\in I}$ de Δ_ρ, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ i(\varepsilon)\in I$ tel que $0<\sup_{x\in D_{i(\varepsilon)}}|f(x)|<\varepsilon$.)

Mais on a vu que Δ_{ρ_1} n'admet au plus qu'un filtre percé, et s'il en admet un, soit $\mathfrak{F}$, alors $\mathfrak{F}$ est décroissant de diamètre R_1.

Donc $f+\alpha$ est annulé par un filtre percé décroissant $\mathfrak{F}$, de diamètre R_1, de Δ_{ρ_1}, et par suite :

$$\lim_{|x|\to R_1^+,\,x\in\Delta_{\rho_1}}(f(x)+\alpha)=0\ .$$

D'où, d'après les résultats classiques de comportemant d'un élément analytique sur un filtre percé, comme $\Delta_{\rho_0}\subset\Delta_{\rho_1}$,

$$\lim_{|x|\to R_1^+,\,x\in\Delta_{\rho_0}}(f(x)+\alpha)=0\ ,$$

ce qui contredit évidemment l'hypothèse : $f+\alpha$ quasi inversible dans $H(\Delta_{\rho_0})$.

PROPOSITION 2. - Supposons $f+\alpha$ inversible dans tous les Δ_ρ pour $0<\rho<\alpha$. Soit $\rho<\delta$ quelconque. Alors les trous $D(b_i, \rho)$ de Δ_ρ contiennent tous un zéro unique de $f+\alpha$ (sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux).

Démonstration (par l'absurde). - Supposons qu'il existe $\rho_0 \leqslant \delta$, et une sous-suite $\{b_{n_q}\}$ de $\{b_n\}$ tels que, $\forall\ q\in \underset{\sim}{N}$, le nombre m_q des zéros de $f+\alpha$ dans $D(b_{n_q}, \rho_0)$ soit différent de 1.

Puisqu'on ne peut extraire de la suite $\{b_n\}$ aucune sous-suite à distance croissante, on peut évidemment extraire de $\{b_{n_q}\}$ soit une suite à distance décroissante, soit une suite à distance constante. On peut se ramener au cas où $\{b_{n_q}\}$ elle-même est soit à distance décroissante, soit à distance constante.

1e cas : $\{b_{n_q}\}$ à distance décroissante. - Soit $\rho_1<\rho_0$. $\forall\ q$ fixé, il existe ρ_q, avec $\rho_1<\rho_q<\rho_0$, tel que le nombre de zéros de $f+\alpha$ dans $D(b_{n_q}, \rho_q)$ soit encore m_q, au moins à partir d'un certain rang, car si, pour tous les n_q, les m_q zéros étaient sur la circonférence

$$C(b_{n_q}, \rho_0) = \{x ; |x - b_{n_q}| = \rho_0\} ,$$

alors $f + \alpha$ ne serait pas quasi inversible dans $H(\Delta_{\rho_1})$.

Nous voyons donc que $v[f(x) + \alpha]$ n'est pas constant dans la couronne $\Gamma(b_{n_q}, \rho_q, \rho_0)$, puisque $f(x) + \alpha$ n'a pas de zéros dans cette couronne, mais m_q zéros (avec $m_q \neq 1$) dans le disque $D(b_{n_q}, \rho_q)$.

Donc $v[f(x) + \alpha]$ n'est pas constant sur la circonférence $C(0 , |b_{n_q}|)$.

Donc l'inégalité $v[f(x) + \alpha] \neq v[f(x) + \alpha , v(x)]$ a des solutions dans $\Delta_{\rho_q} \cap C(0 , |b_{n_q}|)$, et comme $|b_{n_q}| \longrightarrow R_1^+$ (voir la remarque 2), elle a des solutions dans un nombre infini de circonférences centrées en 0. Donc $v[f(x) + \alpha , u]$ n'est pas borné dans Δ_{ρ_1} (voir [1], p. 30, prop. II, 5 (iii)).

(<u>Rappel</u> : $v(P , u) = \inf_{i=0,\ldots,k} [v(a_i) + iu]$ pour un polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$, et est construit par prolongement pour une fraction rationnelle, puis pour un élément analytique.)

Par conséquent $f + \alpha$ n'est pas quasi inversible dans $H(\Delta_{\rho_1})$: contradiction.

<u>2e cas</u> : $\{b_{n_q}\}$ <u>à distance constante</u>. - $|b_{n_q} - b_{n_p}| = r$, $\forall\, p \neq q$.

Les termes de la suite $\{b_{n_q}\}$ sont alors tous situés dans des classes différentes de la circonférence $C(b_n , r)$.

Comme précédemment, on voit que $v[f(x) + \alpha]$ n'est pas constante dans la couronne $\rho_q < |x - b_{n_q}| < \rho_0$, et par conséquent la relation

$$v_{b_{n_q}}[f(x) + \alpha] \neq v_{b_{n_q}}[f(x) + \alpha , - \log r]$$

a des solutions dans une infinité de classes de la circonférence $C(b_{n_q} , r)$ de sorte que $f + \alpha$ ne peut pas être quasi inversible dans $H(\Delta_{\rho_1})$: contradiction.

D'où la conclusion suivante.

THÉORÈME. - <u>Il existe au plus un</u> $\alpha_0 \in K$ <u>tel que</u> $f + \alpha_0$ <u>ne soit pas quasi inversible dans les</u> $H(\Delta_\rho)$, <u>et pour tout</u> $\alpha \neq \alpha_0$, <u>il existe une suite</u> $c_n(\alpha)$ <u>et une fraction</u> $h(x)$ <u>telles que</u>

$$f(x) + \alpha = h(x) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x - c_n(\alpha)}{x - b_n}\right) .$$

<u>Démonstration</u>. - Puisque Δ_ρ admet au plus un filtre décroissant $\mathfrak{F}$, il y a au plus une valeur α_0 telle que $f + \alpha_0$ ne soit pas quasi inversible (si $f + \alpha_0$ est annulé proprement par $\mathfrak{F}$, $f + \alpha$ ne le sera pas pour $\alpha \neq \alpha_0$).

Supposons maintenant $f + \alpha$ quasi inversible dans $H(\Delta_\rho)$. Alors, d'après la proposition 2, $\forall\, \rho > 0$, $\exists\, n_0$ tel que $n > n_0$ entraîne que le disque $D(b_n , \rho)$ contient un zéro unique $c_n(\alpha)$.

Donc $\lim_{n\to\infty} [c_n(\alpha) - b_n] = 0$ (et ceci à partir d'un n assez grand, Soit N).

Donc $\prod_{n\geq N} ((x - c_n(\alpha))/(x - b_n))$ existe, et on voit facilement que

$$[\prod_{n\geq N} (\frac{x - b_n}{x - c_n(\alpha)}) \prod_{n=1}^{N-1} (x - b_n)][f(x) + \alpha]$$

est un polynôme ; $f(x) + \alpha$ se factorise donc sous la forme

$$f(x) + \alpha = h(x) \prod_{n\geq 1} \frac{x - c_n(\alpha)}{x - b_n} ,$$

où $h(x)$ est une fraction.

Remarque. - Si $f + \alpha_0$ n'est pas quasi inversible dans $H(\Delta_\rho)$, alors $f + \alpha_0$ est annulé par le T-filtre $\mathfrak{F}$, et donc

$$\lim_{|x|\to R_1^+, x\in\Delta_\rho} [f(x) + \alpha] = 0 .$$

3. Cas général : pôles d'ordre infini.

Nous allons étudier maintenant une fonction f un peu différente.

Soit $\{a_n^i\}$ une suite infinie à double indice d'éléments de Δ_0 , telle que

(i) $a_n^i - b_n \longrightarrow 0$ quand $i \longrightarrow \infty$,

(ii) $\prod_{i\in\mathbb{N}} a_n^i/b_n \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Nous étudions alors une fonction $f(x)$ du type suivant :

$$f(x) = k(x) \prod_{n\in\mathbb{N}} [\prod_{i\in\mathbb{N}} (\frac{x - a_n^i}{x - b_n})] ,$$

où k est un élément quasi inversible de $H(\Delta)$. $f(x)$ est défini pour tout $x \in \Delta_0$. De plus, pour tout $\rho > 0$, f est élément analytique sur Δ_ρ , $f \in H(\Delta_\rho)$. Mais, comme au § 2, f n'est que fonction analytique sur Δ_0 .

On examine alors les solutions de l'équation $f(x) + \alpha = 0$. Si on peut mettre $f(x) + \alpha$ sous la forme

$$f(x) + \alpha = k_1(x) \prod_{n\in\mathbb{N}} [\prod_{i\in\mathbb{N}} (\frac{x - c_n^i(\alpha)}{x - b_n})] ,$$

où k_1 est un élément quasi inversible de $H(\Delta)$, alors

(i) $\dfrac{c_n^i(\alpha)}{b_n} \longrightarrow 1$ si $i \longrightarrow \infty$,

(ii) $\prod_{i\in\mathbb{N}} \dfrac{c_n^i(\alpha)}{b_n} \longrightarrow 1$ si $n \longrightarrow \infty$,

donc, $\forall\ \rho > 0$, dans Δ_ρ il n'y a qu'un nombre fini de $c_n^i(\alpha)$: $f + \alpha$ est quasi inversible dans $H(\Delta_\rho)$. Réciproquement, regardons, comme au § 2, quelles sont, pour $f + \alpha$, les conséquences de l'hypothèse : $f + \alpha$ quasi inversible dans $H(\Delta_\rho)$

La proposition 1 reste valable, car sa démonstration n'utilise pas l'ordre de multiplicité des pôles de $f + \alpha$.

Nous transformerons la proposition 2 de la manière suivante :

PROPOSITION 2 bis. - Supposons $f + \alpha$ quasi inversible dans les Δ_ρ pour

$0 < \rho < \delta$. Soit $\rho < \delta$ quelconque. Alors $\exists N$ tel que

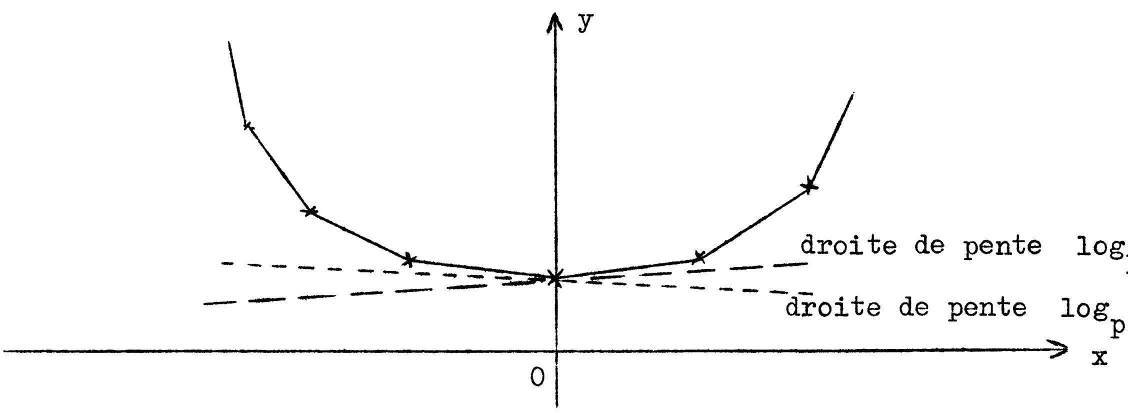
$$n > N \Longrightarrow f + \alpha \text{ n'a pas de zéro dans la couronne } \Gamma(b_n , \rho , \delta) .$$

Démonstration (toujours par l'absurde). - Supposons : $\exists \rho < \delta$ tel que, $\forall N$, $\exists n > N$ tel que $f + \alpha$ ait un zéro au moins dans la couronne $\Gamma(b_n , \rho , \delta)$, ce que nous pouvons écrire

$$\forall q , \exists n_q > q \text{ tel que } f + \alpha \text{ ait des zéros dans } \Gamma(b_{n_q} , \rho , \delta) .$$

Nous pouvons extraire de la suite $\{b_{n_q}\}$ soit une sous-suite à distance décroissante, soit une sous-suite à distance constante, ou encore supposer comme au § 2 que $\{b_{n_q}\}$ est une sous-suite de $\{b_n\}$ à distance, soit décroissante, soit constante.

1e cas : $\{b_{n_q}\}$ est à distance décroissante. - $f + \alpha$ a une infinité de zéros dans $D(b_{n_q} , \rho)$ et un nombre fini non nul de zéros dans $\Gamma(b_{n_q} , \rho , \delta)$. Pour que $v[f(x) + \alpha]$ soit constante dans $\Gamma(b_{n_q} , \rho , \delta)$, il faudrait que $f(x) + \alpha$ n'ait pas de zéro dans $\Gamma(b_{n_q} , \rho , \delta)$; le polygone de Newton de $f + \alpha$ autour de b_{n_q} serait alors



Comme ce n'est pas le cas, $v[f(x) + \alpha]$ n'est pas constante dans $\Gamma(b_{n_q} , \rho , \delta)$, donc pas constante sur la circonférence $C(0 , |b_{n_q}|)$, et on peut conclure de la même façon qu'au § 2.

2e cas : $\{b_{n_q}\}$ est à distance constante. - On établit comme précédemment que $v[f(x) + \alpha]$ n'est pas constante dans la couronne $\Gamma(b_{n_q} , \rho , \delta)$, et on conclut comme au § 2 .

La conclusion sera identique au § 2 .

THÉORÈME bis. - Il existe au plus un $\alpha_0 \in K$ tel que $f + \alpha_0$ ne soit pas quasi inversible dans $H(\Delta_\rho)$ et, pour tout $\alpha \neq \alpha_0$, il existe une suite $c_n^i(\alpha)$ et un élément $k(x)$ quasi inversible dans $H(\Delta)$ tels que

$$f(x) + \alpha = k(x) \prod_{n \in \underset{\sim}{N}} [\prod_{i \in \underset{\sim}{N}} (\frac{x - c_n^i(\alpha)}{x - b_n})] .$$

Démonstration. - L'existence d'un α_0 au plus tel que $f + \alpha_0$ ne soit pas quasi inversible se démontre comme au § 2.

Si $\alpha \neq \alpha_0$, $f + \alpha$ est quasi inversible dans tout $H(\Delta_\rho)$, et alors :

Soit $\{c_n^i(\alpha)\}_{i \in \underset{\sim}{N}}$ l'ensemble des zéros de $f + \alpha$ qui se trouvent dans le disque $D(b_n , \delta)$. Il est évident que cet ensemble est infini et que $c_n^i(\alpha)/b_n \longrightarrow 1$ si $n \longrightarrow \infty$.

D'après la proposition 2 bis, on a :

$$\forall\ \rho > 0 \ , \quad \exists\ N \ \text{ tel que } \ n > N \implies |c_n^i(\alpha) - b_n| < \rho \ , \quad \forall\ i \in \underset{\sim}{N} \ ,$$

soit

$$\left|\frac{c_n^i(\alpha)}{b_n} - 1\right| < \frac{\rho}{|b_n|} < \frac{\rho}{R_1} \ ,$$

d'où encore

$$\left|\prod_{i \in \underset{\sim}{N}} \frac{c_n^i(\alpha)}{b_n} - 1\right| < \frac{\rho}{R_1} \ ,$$

donc

$$\prod_{i \in \underset{\sim}{N}} \frac{c_n^i(\alpha)}{b_n} \longrightarrow 1 \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty \ ,$$

et le produit infini $\prod_{n \in \underset{\sim}{N}} [\prod_{i \in \underset{\sim}{N}} ((x - c_n^i(\alpha))/(x - b_n))]$ existe.

Le produit

$$(f(x) + \alpha)[\prod_{n \in \underset{\sim}{N}} (\prod_{i \in \underset{\sim}{N}} (\frac{x - b_n}{x - c_n^i(\alpha)}))]$$

est donc une fonction analytique sur Δ qui n'a aucun pôle dans Δ ; elle y a donc seulement des zéros, et en nombre fini. Donc

$$f(x) + \alpha = k_1(x)\ [\prod_{n \in \underset{\sim}{N}} (\prod_{i \in \underset{\sim}{N}} (\frac{x - c_n^i(\alpha)}{x - b_n}))] \ ,$$

où $k(x)$ est un élément quasi inversible de Δ .

4. Récapitulation.

Nous avons traité d'abord le cas où les pôles étaient simples, puis le cas où les pôles étaient "d'ordre infini". Il est facile de voir qu'on peut traiter de même le cas où certains pôles seraient d'ordre infini et d'autres d'ordre fini.

Nous pouvons donc récapituler tout cela par le théorème suivant.

THÉORÈME. - *Soit* f *une fonction analytique uniforme de support* Δ_0 , *telle que* $f|\Delta_\rho$ *soit élément analytique pour* $\rho < \delta$.

Alors si f *est quasi inversible dans* $H(\Delta_\rho)$ $(\forall\ \rho < \delta)$, *il existe un ensemble* $\{c_n^i(\alpha)\}_{i \in I}$ *d'éléments de* Δ_0 , *indicié par un ensemble* $I_n \subset \underset{\sim}{N}$, *fini ou infini, et une fonction* $k(x)$ *quasi inversible dans* $H(\Delta)$ *tels que*

$$f(x) = k(x)\ [\prod_{n \in \underset{\sim}{N}} (\prod_{i \in I_n} (\frac{x - c_n^i(\alpha)}{x - b_n}))] \ .$$

Remarque. - Nous avons pris un domaine

$$\Delta = \{x \in \underset{\sim}{R} \ ; \quad R_1 < |x| \leqslant R_2\}$$

circonférencié supérieurement. Le problème aurait évidemment été le même si Δ avait été circonférencié inférieurement, c'est-à-dire pour

$$\Delta = \{x \in \underset{\sim}{R} \ ; \quad R_1 \leqslant |x| < R_2\} \ ,$$

en remplaçant les filtres décroissants par des filtres croissants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner, Thèse de 3e cycle Univ. Bordeaux-I, 1970.

[2] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, "Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [1964. Clermont-Ferrand]", p. 97-141. - Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1966 (Colloques internationaux du CNRS, n° 143).

[3] SARMANT (Marie-Claude). - Forme de certaines fonctions automorphes ayant une infinité dénombrable de pôles dans une couronne, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 14e année, 1972/73, n° 8, 7 p.

(Texte reçu le 12 septembre 1977)

Marie-Claude SARMANT-DURIX
16 boulevard Jourdan
75014 PARIS