Philippe Robba

Nouveau point de vue sur le prolongement algébrique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 5, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A4_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 5, 14 p.
29 novembre 1976

NOUVEAU POINT DE VUE SUR LE PROLONGEMENT ALGÉBRIQUE

par Philippe ROBBA
(en collaboration avec B. DWORK)

1. Introduction.

Soit K un corps valué ultramétrique complet, algébriquement clos, de caractéristique zéro. Dans [3] et [4], avec $K = \mathbb{C}_p$, CHRISTOL a introduit les éléments algébriques. Une fonction algébrique f dans le disque $D(0\ ,\ 1^-)$ est une fonction analytique dans $D(0\ ,\ 1^-)$ solution d'une équation polynomiale $P(x\ ,\ f(x)) = 0$, $P \in K[X\ ,\ Y]$; il est clair qu'une telle fonction est bornée dans $D(0\ ,\ 1^-)$. Un élément analytique sur $D(0\ ,\ 1^-)$ est une limite uniforme sur $D(0\ ,\ 1^-)$ de fonctions algébriques dans $D(0\ ,\ 1^-)$.

CHRISTOL a étudié les propriétés des éléments algébriques, et donné des formules explicites définissant des prolongements plausibles pour les éléments algébriques dans les autres classes résiduelles (si un tel prolongement existe). Dans le cas d'un élément analytique f , ses formules donnent le prolongement analytique usuel de f , lorsqu'il existe, et sinon le prolongement de la partie régulière de f relative à ce trou. Ces formules ne sont valables que dans le cas où $K = \mathbb{C}_p$, et donc ne permettent pas de définir un prolongement algébrique dans le disque générique.

Nous donnerons une définition des éléments algébriques plus générale que celle de CHRISTOL. Il semble que notre définition soit mieux adaptée à la nature algébrique du problème ; avec notre définition, la démonstration de certains résultats de CHRISTOL [4] deviendra plus simple. Il est par ailleurs vraisemblable que ce ne soit qu'une généralisation apparente. Pour des raisons techniques, nous nous intéresserons aux genres d'éléments algébriques au bord d'un disque plutôt qu'aux éléments algébriques dans un disque. Nous montrerons que les germes d'éléments algébriques forment un corps stable par dérivation.

Nous définirons alors un morphisme (continu, de corps muni d'une dérivation) du corps des germes d'éléments algébriques dans un sous-corps de l'espace des fonctions analytiques bornées dans le disque générique. Ce morphisme, non unique, sera interprété comme un prolongement algébrique dans le disque générique. La définition que nous donnerons du disque générique est différente de la définition originelle de DWORK [5], mais est plus conforme à l'idée que nous nous faisons actuellement du disque générique (Cf. [9]). Nous ferons néanmoins le lien entre les deux présentations.

Nous dirons alors que deux éléments algébriques f et g dans deux classes résiduelles sont des prolongements algébriques l'un de l'autre s'ils possèdent un même prolongement algébrique dans le disque générique. Nous montrerons en particulier qu'une fonction algébrique possède un prolongement dans presque toutes les classes résiduelles.

Les éléments algébriques s'introduisent de façon naturelle dans certains problèmes où interviennent le Frobénius. Nous montrerons que l'équation $u^{\varphi} f = u$, où φ désigne le Frobénius et f un élément analytique inversible de norme 1 dans $D(0\ ,\ 1^-)$, a ses solutions éléments algébriques dans $D(0\ ,\ 1^-)$.

2. Germes d'éléments algébriques au bord d'une classe résiduelle.

2. 1. Germes de fonctions analytiques bornés au bord de $D(0\ ,\ 1^-)$. - Si A est un disque ou une couronne de K , on notera $W(A)$ l'espace des fonctions analytiques bornées sur A .

Considérons la classe résiduelle $D(0\ ,\ 1^-)$. On pose

$$\Delta_r = D(0\ ,\ 1^-) - D(0\ ,\ r^-)\ ,\quad r \in [0\ ,\ 1[.$$

On note W l'espace des germes de fonctions analytiques bornées au bord de $D(0\ ,\ 1^-)$:

$$W = \lim\, \mathrm{ind}_{r\to 1}\, W(\Delta_r)\ .$$

Si $f \in W$, f se décompose en série de Laurent, $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$. On définit la norme frontière de f par la formule

$$\|f\| = \sup_n |a_n|\ .$$

Cette norme sur W définit une valeur absolue sur l'anneau intègre W et se prolonge donc en une valeur absolue sur W' , le corps des fractions de W . On notera W'^c le complété de W' . On sait que la valuation de W'^c s'étend de façon unique à la clôture algébrique de W'^c . On notera $\mathcal{U}$ le complété de la clôture algébrique de W'^c .

Comme les espaces $W(\Delta_r)$ sont stables par dérivation, W est également stable par dérivation. De plus, la dérivation D est continue pour la norme frontière, et l'on a même $\|D\| = 1$. La dérivation s'étend de façon unique à W' , et est continue sur W' , donc s'étend à W'^c (et l'on a toujours $\|D\| = 1$ dans W'^c).

La dérivation s'étend alors de façon unique à la clôture algébrique $W'^{c\,\mathrm{alg}}$ de W'^c , mais n'est plus continue (par exemple si $w = \sqrt[p^m]{x}$, $\|Dw\| = p^m \|w\|$). La dérivation ne s'étend donc pas à $\mathcal{U}$.

2. 2. Germes d'éléments analytiques au bord de $D(0\ ,\ 1^-)$. - Munissons $E_0 = K(X)$ de sa norme de Gauss. Soit E le complété de $K(X)$ pour cette norme.

Le plongement canonique de $K(X)$ dans W est une isométrie, et donc s'étend de façon unique en un plongement de E dans $\mathcal{U}$.

Posons $\mathcal{E} = E \cap W$.

Soit $H(\Delta_r)$ l'espace des éléments analytiques sur la couronne Δ_r. Il a été démontré par DWORK et moi-même [6] (Cf. aussi [8]) que l'on a

$$\mathcal{E} = \lim\ \mathrm{ind}_{r\to 1} H(\Delta_r) ,$$

ainsi un élément de $\mathcal{E}$ est un germe d'élément analytique au bord de $D(0\ ,\ 1^-)$.

2. 3. Germes d'éléments algébriques au bord de $D(0\ ,\ 1^-)$. - Soit Ω le complété de la clôture algébrique de E , muni de sa valuation canonique.

Nous considèrerons la clôture algébrique de E_0 , que nous noterons Ω_0 , comme sous-corps de Ω muni de la valuation induite. Alors la fermeture Ω_0^c de Ω_0 dans Ω est un corps complet algébriquement clos contenant E , on a donc $\Omega_0^c = \Omega$, ce qui montre que Ω_0 est dense dans Ω .

On a vu que E se plongeait de façon canonique dans $\mathfrak{U}$. Soit θ un morphisme de Ω dans $\mathfrak{U}$ étendant ce plongement. Ce morphisme θ n'est pas unique, mais est défini à un élément de $\mathrm{Gal}(\Omega/E) = \mathrm{Gal}(E^{alg}/E)$ près, c'est-à-dire que les morphismes étendant le plongement de E dans $\mathfrak{U}$ sont les morphismes $\theta' = \theta \circ \sigma$ avec $\sigma \in \mathrm{Gal}(\Omega/E)$.

Posons $\mathfrak{F} = W \cap \theta(\Omega)$. Un élément de $\mathfrak{F}$ sera appelé germe d'élément algébrique au bord de $D(0\ ,\ 1^-)$.

Un élément algébrique sur la couronne Δ_r (resp. le disque $D(0\ ,\ 1^-)$) sera un élément de $\mathfrak{F} \cap W(\Delta_r)$ (resp. $\mathfrak{F} \cap W(D(0\ ,\ 1^-))$). Comparons notre définition avec celle de CHRISTOL. Une fonction algébrique dans $D(0\ ,\ 1^-)$ est un élément de $\theta(\Omega_0) \cap W(D(0\ ,\ 1^-))$, et l'espace des éléments algébriques, au sens de CHRISTOL, est le complété de cet espace. Comme $W(D(0\ ,\ 1^-))$ est complet, on a

$$\theta(\Omega_0) \cap W(D(0,1^-))^c \subset \theta(\Omega_0)^c \cap W(D(0,1^-)) = \theta(\Omega) \cap W(D(0,1^-)) = \mathfrak{F} \cap W(D(0,1^-)) .$$

Pour nous, un élément algébrique dans $D(0\ ,\ 1^-)$ est une fonction analytique bornée limite d'une suite f_n de fonctions algébriques, mais nous ne demandons pas, comme CHRISTOL, que les f_n soient analytiques dans $D(0\ ,\ 1^-)$.

Si les deux définitions ne coïncident pas, la question se pose de savoir si les propriétés de stabilité (stabilité par produit de Hadamard et produit de Hurewitz) démontrées par CHRISTOL sont encore vraies avec la nouvelle définition.

Nous allons, dans les paragraphes suivants, démontrer que $\mathfrak{F}$ est un corps stable par dérivation.

2. 4. THÉORÈME. - $\mathfrak{F}$ est un corps.

Démonstration. - Comme $\theta(\Omega)$ est un corps, et W est un anneau, $\mathfrak{F}$ est également un anneau. Il nous reste à démontrer que si $u \in \mathfrak{F}$, $1/u \in W$, ce qui équivaut à démontrer que u ne s'annule pas dans une couronne Δ_r .

En multipliant u par un élément de K , on peut se ramener au cas où $\|u\| = 1$ (en effet le groupe des valeurs de Ω est le même que celui de K , car K est algébriquement clos).

Il existe $v \in E^{alg}$ tel que $\|u - \theta(v)\| < 1$. Alors $|v| = 1$. Soit

$$P(y) = y^m + a_1 y^{m-1} + \dots + a_m \in E[y] ,$$

le polynôme irréductible de v sur E . On a alors $|a_i| \leqslant 1$ pour tout i , et $|a_m| = 1$. Choisissons, pour chaque i , $b_i \in E_0$ tel que $|b_i - a_i| < 1$. Soit

$$\eta = u^m + b_1 u^{m-1} + \dots + b_m .$$

On a

$$\|\eta\| \leqslant \max(\|\textstyle\sum_i b_i(u^i - \theta(v)^i\| , |\sum_i (b_i - a_i)v^i| , |\sum_i a_i v^i|) = 1 - \varepsilon , \quad \varepsilon > 0 .$$

u , b_1 , ... , b_m , et donc η , sont dans Δ_r pour un certain r . On peut choisir b suffisamment proche de 1 pour que b_m ne s'annule pas dans Δ_r et même vérifie $\inf_{x\in\Delta_r} |b_m(x)| > 1 - \varepsilon/2$ (ce qui est possible car $b_m \in E_0 = K(x)$ et $|b_m| = 1$), et que $\|\eta\|_{\Delta_r} < 1 - \varepsilon/2$. Alors, $b_m - \eta$ ne s'annule pas dans Δ_r , donc u non plus, et $1/u \in W$.

2. 5. LEMME. - <u>On a</u> $\mathfrak{F} = W \cap (W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $u \in \mathfrak{F} = W \cap \theta(\Omega)$. Pour chaque $n \in \underset{\sim}{N}$, il existe $u_n \in \theta(\Omega_0)$ tel que $\|u - u_n\| \leqslant 1/n$. Posons

$d_n = d(u_n , \mathrm{conj}_E u_n)$

avec $\mathrm{conj}_E u_n$ = ensemble des conjugués de u_n par rapport à E ,

$d_n = 0$ si $u_n \in E$.

D'après AX [2], il existe une constante universelle k (> 1) telle que

$$d_n \geqslant k(d(u_n , E)) .$$

(i) Supposons qu'il existe une infinité de n tels que

$$\|u - u_n\| \geqslant d_n .$$

Pour ces n , on a

$$d(u , E) \leqslant 1/nk ,$$

et donc, $u \in E \subset (W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$.

(ii) Si (i) n'est pas satisfait, pour une infinité de n ,

$$\|u - u_n\| < d_n ,$$

et d'après KRASNER ([1], théorème 2.7.1),

$$u_n \in E(u) \subset \mathfrak{F}^c \subset W^c .$$

Donc $u_n \in W^c \cap \theta(\Omega_0)$, et par suite $u \in (W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$.

On a donc montré que $\mathfrak{F} \subset W \cap (W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$. Par ailleurs, il est évident que $(W^c \cap \theta(\Omega_0))^c \subset \theta(\Omega_0)^c = \theta(\Omega)$, et donc on a égalité.

2. 6. <u>Remarque</u>. - Le lemme 2. 5 représente une première étape dans la démonstra-

tion de la conjecture que notre définition n'est pas plus générale que celle de CHRISTOL.

2. 7. THÉORÈME. - $\mathfrak{F}$ <u>est stable par dérivation.</u>

Il est clair que W est stable par dérivation. Par contre, ainsi que nous l'avons observé, si la dérivation s'étend à E^{alg}, elle ne se prolonge pas à Ω tout entier.

<u>Démonstration.</u> - En vertu du lemme 2. 5, il suffit de montrer que $(W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$ est stable par dérivation (la dérivation est définie sur cet espace).

Comme W est stable par dérivation, et la dérivation est continue, W^c est stable par dérivation. Par ailleurs, $\theta(\Omega_0)$ est stable par dérivation. Donc $W^c \cap \theta(\Omega_0)$ est stable par dérivation, et son complété aussi.

2. 8. THÉORÈME. - <u>Soit</u> f <u>un élément analytique sur</u> $D(a, r^-)$ <u>réalisant une bijection de</u> $D(a, r^-)$ <u>sur</u> $D(0, 1^-)$. <u>Alors la fonction inverse</u> f^{-1} <u>est un élément algébrique sur</u> $D(0, 1^-)$.

<u>Démonstration.</u> - Il est bien connu que f^{-1} est une fonction analytique bornée sur $D(0, 1^-)$. Il suffit de montrer que $f^{-1} \in \theta(\Omega)$.

Par un changement affine de variable, on peut se ramener au cas où f est défini sur $D(0, 1^-)$.

Il est clair que l'élément analytique f (défini originellement seulement sur le disque $D(0, 1^-)$ de K) s'étend en un élément analytique $\tilde{f}(y)$, à coefficients dans K , défini sur l'union des classes résiduelles de $\mathfrak{U}$ qui ne contiennent pas de points de K , soit A cet ensemble. La fonction $\tilde{f}(y) - x$ (où $x \in \mathfrak{U}$ désigne l'application identique de $D(0, 1^-)$ dans lui-même) est donc un élément analytique sur A à coefficients dans E_0 , donc à coefficients dans E . Il résulte du lemme de Hensel que les zéros de $\tilde{f}(y) - x$ situés dans A sont algébriques sur E, donc appartiennent à $\theta(E^{alg}) \subset \theta(\Omega)$.

Par définition, f^{-1} , considéré comme élément de $\mathfrak{U}$, est un zéro de $\tilde{f}(y) - x$. Il reste donc à démontrer que $f^{-1} \in A$, ce qui est évident, car si $f^{-1}(x) = \sum a_n x^n$, $d(f, K) = \sup_{n \geq 1} |a_n| = 1$.

2. 9. <u>Remarque.</u> - Soit f , élément analytique sur $D(0, 1^-)$ réalisant une bijection de $D(0, 1^-)$ sur lui-même. On voit facilement que, par passage aux classes résiduelles, f définit une fraction rationnelle $\bar{f}$ sur $\bar{K}$. Alors, d'après MOTZKIN [7], f^{-1} est un élément analytique si, et seulement si, <u>$\bar{f}$ est une homographie.</u>(La nécessité est triviale puisque, si c'est le cas, $\bar{f}\,\overline{f^{-1}} = \overline{f^{-1}}\,\bar{f} = \mathrm{id}$.)

2. 10. <u>Exemple.</u> - Soit $\pi = p^{-1/(p-1)}$. La fonction $f(x) = \frac{1}{\pi}\log(\pi x)$ est un élément analytique dans $D(1, 1^-)$ (le rayon de convergence de son développement de Taylor en 1 est > 1), et réalise une bijection de $D(1, 1^-)$ sur $D(0, 1^-)$.

La fonction inverse, $f^{-1}(x) = \frac{1}{\pi}\exp(\pi x)$, est donc un élément algébrique sur $D(0\ ,\ 1^-)$.

3. Disque générique et prolongement algébrique.

3. 1. Disque générique. L'application τ . - Soit t un point quelconque de Ω . Nous appellerons disque générique le disque $D(t\ ,\ 1^-)$ de Ω .

Pour chaque $u \in \mathfrak{F}$, nous posons

$$\tau(u) = \sum_{n\geq 0} \theta^{-1}\left(\frac{u^{(n)}}{n!}\right)(Y - t)^n .$$

Cette définition a un sens car nous avons vu que $\mathfrak{F}$ était stable par dérivation et par conséquent, pour tout $n \geq 0$, $u^{(n)} \in \mathfrak{F}$.

Montrons que $\tau(u)$ définit une fonction analytique bornée dans le disque générique ne s'y annulant pas. En effet, comme $u \in W$, on a pour $n \geq 1$,

$$\left|\theta^{-1}\left(\frac{u^{(n)}}{n!}\right)\right| = \left\|\frac{u^{(n)}}{n!}\right\| \leq \|u\| = |\theta^{-1}(u)| .$$

3. 2. - Nous avons remarqué que la dérivation était définie sur $\Omega_0 = E_0^{\mathrm{alg}}$ (mais non sur Ω). Nous posons

$$F_0 = \left\{\sum_{n\geq 0} \frac{v^{(n)}}{n!}(Y - t)^n\ ;\ v \in \Omega_0\ ,\ \forall\, n\ \left|\frac{v^{(n)}}{n!}\right| \leq |v|\right\} .$$

Il est clair que F_0 est un sous-corps de $W(D(t\ ,\ 1^-))$. Soit F le complété de F_0 pour la norme de la convergence uniforme sur $D(t\ ,\ 1^-)$.

PROPOSITION. - On a $\tau(\mathfrak{F}) \subset F$.

Démonstration. - C'est une conséquence immédiate du lemme 2. 5. Nous allons étendre l'application τ à $(W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$ et montrer qu'elle envoie cet espace dans F .

Pour $u \in W^c \cap \theta(\Omega_0)$, nous avons $\theta^{-1}(u) \in \Omega_0$ et, pour tout n ,

$$\left|\frac{\theta^{-1}(u^{(n)})}{n!}\right| = \left\|\frac{u^{(n)}}{n!}\right\| \leq \|u\| = |\theta(n)| ,$$

ce qui montre que

$$\tau(u) = \sum_{n\geq 0} \frac{\theta^{-1}(u^{(n)})}{n!}(Y - t)^n$$

appartient à F_0 . On a de plus,

$$\|\tau(u)\|_{D(t,1^-)} = |\theta^{-1}(u)| = \|u\| ,$$

donc τ réalise une isométrie de $W^c \cap \theta(\Omega_0)$ dans F_0 et par conséquent s'étend en une isométrie de $(W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$ dans F .

THÉORÈME. - τ réalise un morphisme de corps valué avec dérivation de $\mathfrak{F}$ dans F.

Démonstration. - On a déjà vu que $\|\tau(u)\|_{D(t,1^-)} = \|u\|$. Il est évident par ailleurs que $\tau(u') = \tau(u)'$, et que $\tau(u + v) = \tau(u) + \tau(v)$. Il reste à montrer que $\tau(uv) = \tau(u)\,\tau(v)$, mais ceci est une conséquence de la formule de Liebnitz :

$$\frac{(uv)^{(n)}}{n!} = \sum_{i+j=n} \frac{u^{(i)}}{i!} \frac{v^{(j)}}{j!} .$$

3. 4. Liaison avec le disque générique de Dwork. - Pour les applications, le choix du point générique t de Ω ne joue aucun rôle. Mais si l'on choisit $t = X$ (considéré comme élément de $K(X) \subset \Omega$), on obtient une interprétation intéressante de l'application τ .

Si $u = c$ est une fonction constante $(c \in K)$, on a : $\tau(u)$ est la fonction constante $\tau(u) = c$.

Si $u = x$ est la fonction identité (image du polynôme $X \in K(X)$), on obtient $\tau(u) = X + (Y - X) = Y$.

Donc, τ définit sur $K(X)$ (considéré comme sous-ensemble de W) le morphisme $K(X) \longrightarrow K(Y)$ qui à X associe Y .

Si l'on considère E comme sous-ensemble de W^c , on voit que $\tau(E)$ s'identifie au sous-ensemble des éléments analytiques à coefficients dans K dans le disque générique.

De même, F_0 s'identifie à l'espace des fonctions algébriques à coefficients dans K dans le disque générique (c'est-à-dire que $f \in F_0$ si, et seulement si, f est une fonction analytique dans le disque générique et s'il existe $P \in K[Y , U]$ tel que $P(Y , f(Y)) = 0$) et, par conséquent, F s'identifie aux éléments algébriques dans le disque générique à coefficients dans K (dans ce cas, les deux définitions pour les éléments algébriques coïncident).

Par ailleurs, Ω est une extension valuée de K , complète et algébriquement close, et l'élément $t = X$ de Ω appartient à l'anneau de valuation de Ω , son image dans le corps résiduel de Ω étant transcendante sur le corps résiduel $\overline{K}$ de K . On trouve bien que $t = X$ est un point générique au sens de DWORK, et l'on retrouve l'interprétation de E comme espace des éléments analytiques à coefficients dans K dans le disque générique.

3. 5. Prolongement algébrique. - Soient $D(a , 1^-)$ et $D(b , 1^-)$ deux classes résiduelles de K , et notons W_a , $\mathcal{E}_a$, $\mathfrak{F}_a$ (resp W_b , $\mathcal{E}_b$, $\mathfrak{F}_b$) les espaces des germes de fonctions analytiques bornées, d'éléments analytiques, d'éléments algébriques au bord de $D(a , 1^-)$ (resp. $D(b , 1^-)$).

Nous avons défini un morphisme τ_a (resp. τ_b) de $\mathfrak{F}_a$ (resp. $\mathfrak{F}_b$) dans F . Comme l'application θ de Ω dans $\mathfrak{U}$ n'était définie qu'à un élément de $Gal(\Omega/E)$ près, le morphisme τ_a n'est défini, lui aussi, qu'à un élément de $Gal(\Omega/E)$ près. Plus précisément, soit $\sigma \in Gal(\Omega/E)$. Si $u = \sum_{n\geq 0} u_n (Y - t)^n$, $u_n \in \Omega$, on pose $\sigma(u) = \sum_n \sigma(u_n) (Y - t)^n$. Alors σ définit un automorphisme de F (qui laisse invariants les éléments de E considérés comme éléments de F). Il est clair que $\sigma \circ \tau_a$ définit un autre morphisme de corps valué différentiel de $\mathfrak{F}_a$ dans F .

Si $f \in \mathfrak{F}_a$, $\tau_a(f)$ sera considéré comme un prolongement algébrique de f dans le disque générique. Les autres prolongements de f étant les $\sigma(\tau_a(f))$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\Omega/E)$. On voit que si $f \in \mathcal{E}_a$, f a un seul prolongement dans le disque générique.

Si $f \in \mathfrak{F}_a$ et $g \in \mathfrak{F}_b$, on dit que g est un prolongement algébrique de f s'il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\Omega/E)$ tel que $\tau_a(f) = \sigma(\tau_b(g))$.

Comme dans le cas des "fonctions" multiformes, ces prolongements algébriques sont à manier avec les précautions d'usage. Mais notons qu'ici l'on peut aussi choisir une branche particulière : pour un choix particulier des morphismes τ_a et τ_b , il est clair que $\tau_b^{-1} \circ \tau_a$, définit un morphisme de corps valué différentiel de $\tau_a^{-1}(F_{ab})$ sur $\tau_b^{-1}(F_{ab})$ où $F_{ab} = \tau_a(\mathfrak{F}_a) \cap \tau_b(\mathfrak{F}_b)$.

Dans le cas où $f \in \mathcal{E}_a$, alors $g \in \mathcal{E}_b$ et d'après les résultats de [6], ce prolongement correspond avec le prolongement analytique usuel à la Krasner.

3. 6. Exemple : Prolongement de la fonction exponentielle. - On a vu que $f = e^{\pi x}$ était un élément algébrique dans $D(0\ ,\ 1^-)$. Comme f satisfait l'équation différentielle $f' - \pi f = 0$, son prolongement algébrique g dans $D(a\ ,\ 1^-)$, s'il existe, doit satisfaire la même équation. On a donc $g = c \exp \pi(x - a)$. Le problème est de déterminer quels sont les choix convenables de c . Or f satisfait l'équation algébrique $f^p = \exp(\pi p x)$, et $\exp(\pi p x)$ appartient à E . Il en résulte que g est solution de la même équation, et on obtient ainsi

$$c^p = \exp \pi p a .$$

On trouve, pour c , p valeurs qui sont les racines p-ièmes de $\exp(\pi p a)$. Il reste à montrer que ces p valeurs sont admissibles. Ceci équivaut à montrer que le polynôme $Y^p - \exp(\pi p x)$ est irréductible sur $E[Y]$. Or cette équation a pour racines, dans $\mathfrak{U}$, $\gamma \exp(\pi x)$ avec γ racines p-ièmes de l'unité. Le produit de k de ces racines est de la forme $\alpha \exp(\pi k x)$ et n'appartient pas à E pour $k < p$, ce qui montre l'irréductibilité sur E du polynôme considéré.

3. 7. Prolongement des fonctions algébriques. - Nous allons montrer que les éléments algébriques dans le disque générique (c'est-à-dire les éléments de F_0) possèdent un prolongement algébrique dans presque toutes les classes résiduelles (nous montrerons en fait un résultat un peu plus fort). Cette propriété, jointe au fait que F_0 est dense dans F , jouera dans les applications un rôle similaire à celui joué par la propriété que E_0 est dense dans E et que ses éléments, les fractions rationnelles, définissent des éléments analytiques dans presque toutes les classes résiduelles.

THÉORÈME. - Soit A une union de classes résiduelles. Soit $u \in F$ une solution d'une équation $P(u) = 0$ avec $P \in \tau(H(A))[Y]$. Soit Q le polynôme minimal unitaire de u dans $E[Y]$. Il existe B , sous-ensemble admissible de A , tel que les coefficients de Q appartiennent à $\tau(H(B))$ et tel que, pour toute classe résiduelle $\Delta \subset B$, le polynôme $\tau^{-1}(Q)$ se décompose en facteurs linéaires dans $W(\Delta)$.

Dire que B est un sous-ensemble admissible de A signifie que B contient toutes les classes résiduelles contenues dans A sauf au plus un nombre fini.

Démonstration. - Quitte à se restreindre à un sous-ensemble admissible A_1 de A, on peut supposer que P est unitaire et est premier avec P' (et $P \in \tau(H(A_1))[Y]$). Soit alors $P = QR$ avec Q et R unitaires appartenant à $E[Y]$. Alors Q et R sont forcément premiers entre eux. On déduit alors du théorème 3. 1. 6 de [6], sur les solutions d'un système d'équations différentielles non linéaires, que les coefficients de Q et R appartiennent à $\tau(H(A_2))$, où A_2 est un sous-ensemble admissible de A_1 (donc de A).

Par conséquent, les facteurs premiers de P dans $E[Y]$, et en particulier le polynôme minimal unitaire Q de u, ont tous leurs coefficients dans $\tau(H(A_3))$, où A_3 est un sous-ensemble admissible de A.

Soit g le discriminant de Q. g est un élément de $\tau(H(A_3))$. Notons B le complément dans A_3 de l'union des classes résiduelles contenant des racines de $\tau^{-1}(g)$ (qui sont en nombre fini).

Comme Q est irréductible sur $E[Y]$, toutes les autres racines de Q appartiennent à F. Soit m le degré de Q. Si Y est une racine de Q, posons $\underset{\sim}{X} = (1, Y, \ldots, Y^{m-1})$. Alors

$$\frac{d\underset{\sim}{X}}{dx} = \underset{\sim}{X}G, \tag{3. 7. 1}$$

où G est une $m \times m$ matrice à coefficients dans $\tau(H(B))$.

Pour chaque $s \in \underset{\sim}{N}$, il existe une $m \times m$ matrice G_s, à coefficients dans $\tau(H(B))$ telle que

$$\frac{d^s \underset{\sim}{X}}{dx^s} = \underset{\sim}{X}G_s .$$

Comme Q a m racines distinctes dans F, le système différentiel (3. 7. 1) possède m solutions linéairement indépendantes analytiques dans le disque générique. On en déduit que

$$|G_s| = O(1) \quad \text{quand} \quad s \to +\infty ,$$

où $|G_s|$ désigne le sup des valeurs absolues des coefficients de G_s. On en déduit que, pour toute classe résiduelle $\Delta \subset B$, les solutions de l'équation

$$\frac{d\underset{\sim}{X}}{dx} = \underset{\sim}{X}G^{\tau^{-1}}$$

au voisinage d'un point de Δ convergent dans Δ tout entier, donc les racines de $\tau^{-1} Q$ au voisinage d'un point de Δ convergent dans Δ tout entier, ce qui achève la démonstration du théorème.

4. Frobenius.

4. 1. - Soit U un corps valué ultramétrique complet, dont le corps résiduel $\overline{U}$ est de caractéristique $p \neq 0$. Nous appellerons Frobenius sur U un automorphis-

me φ de U qui relève l'automorphisme de Frobenius sur $\bar{U}$: $\bar{x} \longmapsto \bar{x}^p$.

Nous supposerons de plus que le corps résiduel $\bar{U}$ est algébriquement clos, que la valuation induite sur $\mathbb{Q}$ est la valuation p-adique, que la valuation de U est discrète et que p est une uniformisante.

Nous noterons $\mathcal{O}_U$ l'anneau des entiers de U . Alors $p\mathcal{O}_U$ est son idéal maximal.

Observons que si $q \in \mathbb{Q}$, $\varphi(q) = q$. Soit $u \in U$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|p^k u| = 1$. On a alors $1 = |\varphi(p^k u)| = |p^k \varphi(u)|$, et donc $|u| = |\varphi(u)|$, ce qui montre qu'un Frobenius est une isométrie.

4\. 2. LEMME. - Pour tout $\bar{b} \in \bar{U}$, il existe un relèvement b de $\bar{b}$ tel que $b^\varphi = b^p$.

Démonstration. - On construit par récurrence une suite b_n de relèvements de b tels que

$$b_n^\varphi - b_n^p \in p^n \mathcal{O}_U \quad \text{et} \quad b_n - b_{n+1} \in p^n \mathcal{O}_U \ .$$

Il est alors clair que la suite b_n converge vers une limite b , solution du problème.

On prend pour b_1 un relèvement quelconque de $\bar{b}$. Soit alors

$$b_n^\varphi - b_n^p = p^n a_n \quad \text{avec} \quad a_n \in \mathcal{O}_U \ .$$

Soit u_n un relèvement d'une racine p-ième de $\overline{a_n}$. On pose

$$b_{n+1} = b_n - p^n u_n \ .$$

Un calcul simple montre que $b_{n+1}^\varphi - b_{n+1}^p \in p^{n+1} \mathcal{O}_U$.

4\. 3. LEMME. - Les éléments de U invariants sous l'action de φ sont les éléments de $\mathbb{Q}_p$.

Démonstration. - Comme φ est continu, et laisse invariants les éléments de $\mathbb{Q}$, φ laisse aussi invariants les éléments de $\mathbb{Q}_p$.

Soit u tel que $u^\varphi = u$. On peut toujours, en multipliant au besoin u par une puissance de p , supposer que $|u| = 1$.

On construit par récurrence une suite d'éléments $k_n \in \mathbb{N}$ tels que $u - k_n \in p^n \mathcal{O}_U$. On prend $k_0 = 0$. Soit

$$u - k_n = p^n a_n \ , \quad a_n \in \mathcal{O}_U \ .$$

On a

$$p^n a_n^\varphi = u^\varphi - k_n^\varphi = u - k_n = p_n a_n \ ,$$

et donc

$$\overline{a_n} = \overline{a_n^\varphi} = \overline{a_n^p} \ .$$

Il existe alors un entier $m \in [0 \ , \ \dots \ , \ p-1]$, relèvement de $\overline{a_n}$. On pose $k_{n+1} = k_n - mp^n$. Il est clair que $u - k_{n+1} \in p^{n+1} \mathcal{O}_U$.

Il en résulte que u , limite de la suite k_n , appartient à $\mathbb{Z}_p$.

4. 4. LEMME. - *Soit* $f \in U$. *Il existe* $u \neq 0$ *de* U *tel que* $u^{\varphi} f = u$ *si, et seulement si,* f *est une unité.*

Démonstration. - On a déjà vu que φ était une isométrie, la nécessité est donc évidente.

Soit alors $f \in U$, $|f| = 1$. On choisit pour u_1 un relèvement de $\bar{f}^{-1/(p-1)}$. On voit que $u_1^{\varphi} f - u_1 \in p\mathcal{O}_U$. On construit par récurrence une suite u_n telle que $u_n - u_{n+1} \in p^n \mathcal{O}_U$ et $u_n^{\varphi} f - u_n \in p^n \mathcal{O}_U$. Il est alors clair que la suite u_n converge vers une limite $u \neq 0$ solution du problème. Soit

$$u_n^{\varphi} f - u_n = p^n a_n , \quad a_n \in \mathcal{O}_U .$$

Soit v un relèvement d'une solution de l'équation

$$\bar{v}^p \bar{f} - \bar{v} = \bar{a}_n .$$

On pose $u_{n+1} = u_n - p^n v$. Un calcul facile montre que $u_{n+1}^{\varphi} f - u_{n+1} \in p^{n+1} \mathcal{O}_U$.

4. 5. - On suppose que K est le complété de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ (alors $\bar{K}$ est algébriquement clos, et p est une uniformisante de K). Soit σ un Frobénius sur K .

Sur W , espace des germes de fonctions analytiques bornées au bord de $D(0 , 1^+)$, on définit un Frobénius de la façon suivante : Si $u \in W$ s'écrit $u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$, on pose

$$u^{\varphi} = \sum_n a_n^{\sigma} x^{np} .$$

Observons que, la valuation de K étant discrète, W est un corps. L'homomorphisme φ se prolonge au complété W^c de W et au complété U de l'extension maximale non ramifiée de W^c .

Il est par ailleurs évident que φ laisse globalement invariant $E_0 = K(X)$, donc également E , et également le complété de la clôture algébrique dans U de E à savoir $U \cap \Omega$.

THÉORÈME. - *Soit* f *un élément analytique sur* $D(0 , 1^-)$.

(i) *L'équation*

$$(*) \qquad u^{\varphi} f = u$$

possède une solution analytique non nulle dans $D(0 , 1^-)$ *si, et seulement si,* $|f|_E = 1$, *et* f *ne s'annule pas dans* $D(0 , 1^-)$.

(ii) *Soit alors* u *une solution non nulle de* $(*)$, u *est un élément algébrique dans* $D(0 , 1^-)$. *Si* v *est une autre solution de* $(*)$, *il existe* $c \in \mathbb{Q}_p$ *tel que* $v = cu$.

(iii) *Si la solution* u *se prolonge algébriquement dans la classe résiduelle* $D(a , 1^-)$, f *se prolonge analytiquement en un élément méromorphe dans cette classe. Si* f *se prolonge analytiquement dans* $D(a , 1^-)$, u *se prolonge algébri-*

quement dans cette classe si, et seulement si, f ne s'y annule pas.

Démonstration.

(i) D'après le lemme 4. 4, on sait déjà que si l'équation $(*)$ a une solution, $|f|_E = 1$. Si la solution u de $(*)$ a un zéro d'ordre m en 0 , u^φ a un zéro d'ordre mp en 0 , et $u^\varphi f$ un zéro d'ordre au moins mp en 0 . Si u n'est pas nul, on a donc $m = 0$. Mais alors $u(0)^\sigma f(0) = u(0)$ et, en vertu du lemme 4. 4, on a $|f(0)| = 1$, ce qui entraîne, puisque $|f|_E = 1$, que f ne s'annule pas dans $D(0 , 1^-)$.

Supposons maintenant que $|f|_E = |f(0)| = 1$. D'après le lemme 4. 4, il existe $a \in K$ tel que $a^\sigma f(0) = a$. Posons $u = av$. Il est clair que résoudre $(*)$ équivaut à résoudre

$$a^\sigma v^\varphi f = av \text{ , soit } v^\varphi f/f(0) = v \text{ ,}$$

ce qui montre qu'on peut supposer que $f(0) = 1$. Mais alors f^{φ^n} converge x-adiquement vers 1 quand $n \to +\infty$, donc le produit $\prod_{n=1}^{\infty} f^{\varphi^n}$ converge x-adiquement vers une fonction u analytique bornée dans $D(0 , 1^-)$, et il est évident que u est solution de l'équation $(*)$.

De plus, $u(0) = 1$, ce qui montre que $u \neq 0$.

(ii) Si u et v sont deux solutions non nulles de $(*)$, alors $(u/v)^\varphi = u/v$ et donc, d'après le lemme 4. 3, $u/v = c \in \mathbb{Q}_p$.

D'après (i), l'équation $(*)$ a une solution $u \in W(D(0 , 1^-))$. D'autre part, on a remarqué que $U \cap \Omega$ était stable par φ . Donc, d'après le lemme 4. 4, l'équation $(*)$ a une solution $v \in U \cap \Omega$. D'après ce qu'on vient de voir $u = cv$ avec $c \in \mathbb{Q}_p$, ce qui montre que $u \in W(D(0 , 1^-)) \cap \Omega$, donc que u est un élément algébrique.

(iii) D'après le lemme 4. 2, on peut supposer que le centre du disque $D(a , 1^-)$ a été choisi de telle sorte que $a^\sigma = a^p$.

Pour $u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(x - a)^n$, germe de fonction analytique bornée au bord de $D(a , 1^-)$, on pose

$$u^\psi = \sum_n a_n^\sigma(x^p - a^\sigma)^n \text{ .}$$

Ceci définit un Frobénius sur W_a qui s'étend à U_a complété de l'extension non ramifiée maximale de W_a . Observons que $U_a \cap \Omega$, complété de l'extension maximale non ramifiée de E s'identifie de façon canonique avec $U \cap \Omega$. De plus, l'application ψ ainsi définie sur $K(X)$, considéré comme sous-espace de U_a , s'identifie avec l'application φ définie précédemment. Donc φ coïncide avec ψ sur E également, et l'on peut supposer que l'extension choisie sur U_a est telle que φ coïncide avec ψ sur $U \cap \Omega = U_a \cap \Omega$. Dorénavant, on écrira φ au lieu de ψ .

On a vu que u était un élément de $U \cap \Omega$, donc définit un élément (noté u_a) de $U_a \cap \Omega$. Dire que u se prolonge algébriquement dans $D(a , 1^-)$ signifie que

u_a est analytique dans $D(a , 1^-)$. Comme $f = u_a/u_a^\varphi$, f est une fonction méromorphe dans $D(a , 1^-)$. Comme de plus $f \in E$, c'est que f est un élément méromorphe dans $D(a , 1^-)$ (c'est-à-dire un quotient de deux éléments analytiques).

Supposons maintenant que f définisse un élément analytique dans $D(a , 1^-)$. Si u se prolonge algébriquement dans $D(a , 1^-)$ en une fonction u_a , alors, à cause du choix de a , on a

$$u_a(a)^\sigma \; f(a) = u_a(a) \; ,$$

et comme en (i), on en déduit que l'on doit avoir $|f(a)| = 1$, ce qui joint au fait que $|f|_E = 1$ entraîne que f ne s'annule pas dans $D(a , 1^-)$.

Si f , analytique dans $D(a , 1^-)$ ne s'annule pas dans $D(a , 1^-)$, on a $|f(a)| = 1$, et le même raisonnement qu'en (i) montre qu'il existe $v_a \neq 0$ analytique bornée dans $D(a , 1^-)$ telle que $v_a^\varphi f = v_a$. Mais comme u_a , image de u dans $U_a \cap \Omega$, est également solution de cette équation, on a $u_a = cv_a$, $c \in \mathbb{Q}_p$ et donc u_a est analytique dans $D(a , 1^-)$, ce qui montre que u se prolonge algébriquement dans $D(a , 1^-)$.

4. 6. <u>Perturbation du Frobénius</u>. - Gardons les notations de 4. 5. Soit $\eta(x)$ un élément analytique sur $D(0 , 1^-)$ tel que $|\eta|_E \leqslant |p|$. Pour $u = \sum_n a_n x^n$ de W , on pose

$$u^\psi = \sum_n a_n(x^p + \eta(x))^n \; .$$

Alors ψ définit un Frobénius sur W qui s'étend à U . De plus E , et donc $U \cap \Omega$, reste globalement invariant sous l'action de ψ .

Les résultats (i) et (ii) du théorème 4. 5 restent donc valables si l'on remplace φ par ψ .

Pour généraliser les résultats de (iii), on doit évidemment supposer que η se prolonge analytiquement dans $D(a , 1^-)$. On peut alors généraliser le lemme 4. 1, et montrer qu'il existe un $b \in D(a , 1^-)$ tel que $b^\sigma = b^p + \eta(b)$ (la démonstration repose sur la remarque que, avec l'hypothèse $|\eta|_E \leqslant |p|$, pour tout $x \in D(a,1^-)$ et $y \in \mathcal{O}_K$, on a $\eta(x + p^n y) - \eta(x) \in p^{n+1} \mathcal{O}_K$). Il est alors clair que les conclusions de (iii) subsistent si l'on remplace φ par ψ .

4. 7. <u>Cas ramifié</u>. - Dans le cas où la valuation de U est discrète, mais où p n'est pas une uniformisante de U_1 le lemme 4. 3 n'est plus vrai. Par conséquent, les démonstrations, utilisant le fait que la solution de l'équation (*) est unique à un facteur de $\mathbb{Q}_p$ près, ne sont plus valables.

Cependant si u est une solution de (*) analytique dans $D(0 , 1^-)$, on peut, par une démonstration d'approximations successives de u par des fonctions algébriques, montrer que u est un élément algébrique. C'est la démarche suivie par CHRISTOL dans sa thèse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 14).

[2] AX (J.). - Zeros of polynomials over local fields, J. of Algebra, t. 15, 1970, p. 412-428.

[3] CHRISTOL (G.). - Eléments analytiques uniformes et multiformes, séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 15e année, 1973/74, n° 6, 18 p.

[4] CHRISTOL (G.). - Eléments algébriques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 1ère année, 1973/74, n° 14, 10 p.

[5] DWORK (B.). - On p-adic differential equations, II, Annals of Math., t. 98, 1973, p. 366-376.

[6] DWORK (B.) and ROBBA (P.). - On ordinary linear p-adic differential equations, Trans. Amer. math. Soc., t. 231, 1977, p. 1-46.

[7] MOTZKIN (E.). - Un invariant conforme p-adique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 507-509.

[8] ROBBA (P.). - Factorisation d'un opérateur différentiel, III, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 6, 6 p.

[9] ROBBA (P.). - Disque générique et équations différentielles, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 8,

(Texte reçu le 17 juin 1977)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS