PHILIPPE VITIELLO

Critère de rationalité

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. nº 4, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A3_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 4, 8 p.

15 novembre 1976

CRITÈRE DE RATIONALITÉ

par Philippe VITIELLO

Le but de cet exposé est d'établir un critère de rationalité du genre de celui de Borel-Dwork [1].

I. Fonctions méromorphes bornées.

1. Fonctions holomorphes bornées dans $\underset{\sim}{C}$.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe et bornée dans le disque $|z| < 1$ de $\underset{\sim}{C}$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ son développement de Taylor à l'origine, et M réel positif tel que, pour tout z tel que $|z| < 1$, $|f(z)| \leq M$.

Alors on a : $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 \leq M^2$ (inégalité de Bessel).

2. Inégalités de Cauchy dans $\underset{\sim}{C}$ ou dans $\underset{\sim}{C}_p$ [1].

$f(z)$ est une fonction holomorphe dans le disque $|z| \leq R$ de $\underset{\sim}{C}$ ou $\underset{\sim}{C}_p$.

$f(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ est son développement de Taylor à l'origine, $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$

Les inégalités de Cauchy s'écrivent

$$|\alpha_n| \leq \frac{M}{R^n} , \text{ pour tout } n \geq 0 .$$

3. Inégalités de Hadamard dans $\underset{\sim}{C}$ ou $\underset{\sim}{C}_p$ [1].

D est le déterminant à coefficients rationnels :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Alors on a les inégalités suivantes :

dans $\underset{\sim}{C}$:

$$|D| \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} ,$$

dans $\underset{\sim}{C}_p$:

$$|D|_p \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\max_{j=1}^{n} |a_{ij}|_p\right) .$$

4. Fonctions méromorphes bornées.

$\underset{\sim}{K}$ est un corps valué ultramétrique complet et algébriquement clos.

$\underset{\sim}{K}'$ désignera $\underset{\sim}{C}$ ou $\underset{\sim}{K}$, $|\ |$ représentera la valeur absolue de $\underset{\sim}{K}'$.

DÉFINITION. - Soit g une fonction analytique et bornée dans le disque $|z| < R$ de $\underset{\sim}{K}'$, et P un polynôme, alors la fonction f telle que $f(z) = g(z)/P(z)$ est dite méromorphe et bornée sur le disque $|z| < R$.

Exemple. - Les fractions rationnelles sont un bon exemple de fonctions méromorphes bornées.

PROPOSITION 1. - f étant une fonction méromorphe bornée sur le disque $|z| < 1$ de $\underset{\sim}{C}$, sans pôle à l'origine, et $f(z) = \sum_{n\geq 0} \beta_n z^n$ étant son développement en série de Taylor à l'origine, désignons par $D_n(\beta)$ le déterminant

$$D_n(\beta) = \begin{vmatrix} \beta_0 & \cdots & \beta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1 & \cdots & \beta_{2n} \end{vmatrix}$$

alors quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe C et n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait

$$|D_n(\beta)| \leq C \times \varepsilon^n ,$$

C étant une constante indépendante de n.

Preuve. - D'après la définition, $f(z) = g(z)/P(z)$. Nous avons donc

$$f(z) = \sum_0^\infty \beta_n z^n ,$$

$$g(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n ,$$

$$P(z) = \sum_0^s a_i z^i \quad \text{où} \quad s = \deg P , \quad a_0 = 1 .$$

$g(z) = f(z) P(z)$ s'écrit

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n = \sum_0^\infty \beta_n z^n . \sum_0^s a_i z^i ,$$

donc $\alpha_n = \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_s \beta_{n-s}$.

g bornée sur le disque $|z| < 1$, on a $|g(z)| \leq M$ pour tout z tel que $|z|<1$

Il en résulte donc

(1) $$\sum_0^\infty |\alpha_n|^2 \leq M^2 .$$

Soit d la distance de l'origine au 1er zéro de P, intérieur au disque unité, lorsqu'il existe. Sinon, on fait $\alpha = 1$. f est analytique et bornée sur tout disque de rayon $r < d$. Soit $H = \sup_{|z|\leq r} |f(z)|$. Les inégalités de Cauchy s'écrivent :

(2) $$|\beta_n| \leq \frac{H}{r^n} .$$

Par ailleurs le déterminant

$$D_n(\beta) = \begin{vmatrix} \beta_0 & \cdots & \beta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1 & \cdots & \beta_{2n} \end{vmatrix}$$

ne change pas si l'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres. En particulier, on a

$$D_n(\beta) = \begin{vmatrix} \beta_0 & \cdots & \beta_{s-1} & \alpha_s & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \beta_n & \cdots & \beta_{s-1+n} & \alpha_{s+n} & \cdots & \alpha_{2n} \end{vmatrix} .$$

Posons

$$U_n^i(\beta) = \begin{pmatrix} \beta_i \\ \vdots \\ \beta_{i+n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n^{s+j}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_{s+j} \\ \vdots \\ \alpha_{s+j+n} \end{pmatrix} ,$$

alors

$$D_n(\beta) = \det[U_n^0(\beta) \ , \ \ldots \ , \ U_n^{s-1}(\beta) \ , \ U_n^s(\alpha) \ , \ \ldots \ , \ U_n^{s+(n-s)}(\alpha)] .$$

L'inégalité de Hadamard nous donne

(3) $$|D_n(\beta)| \leqslant \prod_{i=0}^{i=s-1} \|U_n^i(\beta)\| + \prod_{j=0}^{n-s} \|U_n^{s+j}(\alpha)\| ,$$

où

$$\|U_n^i(\beta)\| = (\sum_{j=0}^n |\beta_{i+j}|^2)^{\frac{1}{2}} .$$

D'après (2), $|\beta_{i+j}|^2 \leqslant H^2/r^{2(i+j)}$. D'où

$$\|U_n^i(\beta)\| \leqslant (\sum_{j=0}^n \frac{H^2}{r^{2(i+j)}})^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{H}{r^i} (\sum_{j=0}^n \frac{1}{r^{2j}})^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{H}{r^i} (\frac{(1/r^2)^{n+1} - 1}{(1/r^2) - 1})^{1/2}$$

et

$$\prod_{i=0}^{s-1} \|U_n^i(\beta)\| \leqslant \frac{H^s}{r^{s(s-1)/2}} [\frac{(1/r^2)^{n+1} - 1}{(1/r^2) - 1}]^{s/2} ,$$

$$\|U_n^{s+j}(\alpha)\| = \sum_{i=0}^n |\alpha_{s+j+i}|^2)^{\frac{1}{2}} .$$

D'après (1), $\sum_0^\infty |\alpha_{s+j+i}|^2 \leqslant M^2$ et $\|U_n^{s+j}(\alpha)\| \leqslant M$. De plus, la série $\sum_0^\infty |\alpha_n|^2$ est convergente. Donc, pour tout $r > 0$, il existe n_0 tel que quel que soit $n \geqslant n_0$,

$$\sum_n^\infty |\alpha_n|^2 \leqslant \varepsilon^2 r^{2s} .$$

Il s'en suit que $\|U_n^{s+j}(\alpha)\| \leqslant \varepsilon r^s$ pour tout j tel que $j + s \geqslant n_0$.

On peut écrire

$$\prod_{j=0}^{n-s} \|U_r^{s+j}(\alpha)\| = \prod_{j=0}^{n_0-s-1} \|U_n^{s+j}(\alpha)\| \times \prod_{j=n_0-s}^{n-s} \|U_n^{s+j}(\alpha)\| .$$

D'où

$$|D_n(\beta)| \leqslant \frac{H^j}{r^{s(s-1)/2}} \times \frac{1}{(1-r^2)^{s/2}} \times M^{n_0-s} \times (\varepsilon r^s)^{n-n_0-1} \times [\frac{1-r^{2n+2}}{r^{2n}}]^{s/2}$$

$$\leqslant \frac{H^s}{r^{s(s-1)/2}} \times \frac{1}{(1-r^2)^{s/2}} \times M^{n_0-s} \times (\varepsilon r^s)^{1-n_0} \times \frac{\varepsilon^n r^{n/s}}{r^{n/s}} .$$

En posant

$$\frac{H^s}{r^{s(s-1)/2}} \times \frac{1}{(1-r^2)^{s/2}} \times M^{n_0-s} \times (\varepsilon r^s)^{1-n_0} = C ,$$

on a

$$|D_n(\beta)| \leqslant C \times \varepsilon^n .$$

PROPOSITION 2. - f <u>étant une fonction méromorphe bornée sur le disque</u> $|z| < 1$ <u>de</u> $\underset{\sim}{K}$, <u>sans pôle à l'origine, et</u> $f(z) = \sum_0^\infty \beta_n z^n$ <u>son développement de Taylor à l'origine</u> ; <u>désignons par</u> $D_n(\beta)$ <u>le déterminant</u>

$$D_n(\beta) = \begin{vmatrix} \beta_0 & \cdots & \beta_n \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_n & \cdots & \beta_{2n} \end{vmatrix} ,$$

<u>alors</u>

$$|D_n(\beta)| \leqslant A \times H^n ,$$

<u>où</u> A <u>et</u> H <u>sont des constantes indépendantes de</u> n .

Nous pouvons reprendre les mêmes notations que précédemment.

De plus, g étant analytique dans le disque $|z| < 1$ et bornée, on a $|g(z)| < M$ pour tout z tel que $|z| < 1$. Et les inégalités de Cauchy s'écrivent

(4) $$|\alpha_n| \leqslant M ,$$

d étant la distance de l'origine au 1er zéro de P rencontré intérieur au disque unité, s'il existe, sinon $d = 1$, on a

$$m = \sup_{|z|<d} |f(z)| .$$

Les inégalités de Cauchy permettent d'écrire

(5) $$|\beta_n| \leqslant \frac{m}{d^n} .$$

On a encore

$$D_n(\beta) = \text{dét}[U_n^0(\beta) , \ldots , U_n^{s-1}(\beta) , U_n^s(\alpha) , \ldots , U_n^n(\alpha)] ,$$

et d'après l'inégalité de Hadamard,

(6) $$|D_n(\beta)| \leqslant \prod_{i=0}^{s-1} \|U_n^i(\beta)\| \times \prod_{j=0}^{n-s} \|U_n^{s+j}(\alpha)\| ,$$

avec $\|U_n^i(\beta)\| = \max_{j=0}^n(|\beta_{i+j}|)$; on peut écrire

$$\|U_n^i(\beta)\| \leq \max_{j=0}^n \frac{m}{d^{i+j}} \quad \text{ou} \quad \|U_n^i(\beta)\| \leq \frac{m}{d^{i+n}} \quad \text{car} \quad d \leq 1 ,$$

$$\|U_n^{s+j}(\alpha)\| = \max_{i=0}^n (\alpha_{s+j+i}) ,$$

d'où

$$\|U_n^{s+j}(\alpha)\| \leq M .$$

En reportant dans (6) , il vient

$$|D_n(\beta)| \leq \frac{m^s \times M^{1-s}}{d^{s(s-1)/2}} \times (\frac{M}{d^s})^n .$$

En posant, $M/d^s = H$ et $(m^s \times M^{1-s})/d^{s(s-1)/2} = A$, on a

$$|D_n(\beta)| \leq A.H^n .$$

II. Critère de rationalité.

1. Déterminant de Kronecker.

DÉFINITION. - On appelle déterminant de Kronecker, noté D_0^n , le déterminant

$$D_0^n = \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} .$$

PROPOSITION (Critère de Kronecker). - Pour que $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ soit une fraction rationnelle, il faut et il suffit qu'il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $D_0^n = 0$.

2. THÉORÈME (Critère de rationalité). - Soit $\varphi(X) = \sum_{n\geq 0} U_n X^n$ une série formelle à coefficients dans $\mathbb{Q}$; s'il existe une famille S finie de nombres premiers telle que

(i) pour tout $p \notin S$, $|U_n|_p \leq 1$,

(ii) φ définit dans $\mathbb{C}$ une fonction méromorphe et bornée dans un disque ouvert de centre 0 et de rayon R ,

(iii) pour tout $p \in S$, φ définit dans $\mathbb{C}_p$ une fonction méromorphe et bornée dans un disque ouvert de centre 0 et de rayon R_p ,

(iv) le produit $R \prod_p R_p \geq 1$,

alors φ est une fraction rationnelle.

Démonstration.

1° Considérons le déterminant de Kronecker

$$D_n(u) = \begin{vmatrix} u_0 & \cdots & u_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ u_n & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix} .$$

Puisque $u_n \in \mathbb{Q}$, $D_n(u) \in \mathbb{Q}$, l'hypothèse (i), $|u_n|_p \leqslant 1$ pour tout $p \notin S$, permet d'écrire, pour tout $p \notin S$, $|D_n(u)|_p \leqslant 1$; par suite,

(7) $$\prod_{p \notin S} |D_n(u)|_p \leqslant 1 .$$

2° Plaçons-nous dans $\mathbb{C}$. Posons $X = Rz$, alors $\varphi(Rz) = \sum_{n \geqslant 0} u_n R^n z^n$ et, en posant $u_n R^n = \beta n$, on a $f(z) = \sum_0^\infty \beta_n z^n$ qui définit dans $\mathbb{C}$ une fonction méromorphe bornée dans le disque ouvert $|z| < 1$, compte tenu de l'hypothèse (ii).

Considérons le déterminant

$$D_n(\beta) = \begin{vmatrix} \beta_0 & \cdots & \beta_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \beta_n & \cdots & \beta_{2n} \end{vmatrix} .$$

D'après la proposition (1), on a $|D_n(\beta)| \leqslant C\, \varepsilon^n$, où C ne dépend que de $r > 0$. Par ailleurs,

$$D_n(\beta) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 R & \cdots & u_n R^n \\ u_1 R & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ u_n R^n & \cdots\cdots\cdots & & u_{2n} R^{2n} \end{vmatrix} ,$$

déterminant qui peut s'écrire

$$D_n(\beta) = (R \times R^2 \times \ldots \times R^n)^2 \begin{vmatrix} u_0 & \cdots & u_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ u_n & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix} ,$$

d'où $D_n(\beta) = R^{n(n+1)} D_n(u)$ et $D_n(u) = \frac{1}{R^{n(n+1)}} D_n(\beta)$. Ce qui entraîne

(8) $$|D_n(u)| \leqslant \frac{1}{R^{n(n+1)}} \times C \times \varepsilon^n .$$

3° Plaçons-nous dans $\mathbb{C}_p$. Si R_p n'appartient pas au groupe des valeurs, on considère une extension de $\mathbb{C}_p$ telle qu'il existe ρ avec $|\rho|_p = R_p$. De toute façon, il vient, en posant $X = \rho z$,

$$\varphi(\rho z) = \sum_{n\geqslant 0} u_n \rho^n z^n$$

et en posant $u_n \rho^n = \beta_n$, on obtient

$$f(z) = \sum_0^\infty \beta_n z^n ,$$

qui définit dans $\underset{\sim}{C}_p$ (ou une extension K) une fonction méromorphe bornée dans le disque ouvert $|z|_p < 1$, compte tenu de l'hypothèse (iii).

Comme dans le cas complexe, on voit que

$$|D_n(u)|_p = \frac{1}{R_p^{n(n+1)}} |D_{n(\beta)}|_p ,$$

et la proposition 2 permet d'écrire

$$(9) \qquad |D_n(u)|_p \leqslant \frac{1}{R_p^{n(n+1)}} \cdot A.H_p^n ,$$

pour tout $p \in S$.

En tenant compte des inégalités (7), (8), (9), on peut écrire

$$|D_n(u)| \times \prod_{p\notin S} |D_n(u)|_p \times \prod_{p\in S} |D_n(u)|_p \leqslant C \times A' \times (\varepsilon H')^n \times \frac{1}{(R \prod_{p\in S} R_p)^{n(n+1)}} ,$$

où $A' = \prod_{p\in S} A$ et $H' = \prod_{p\in S} H_p$.

On peut choisir ε tel que $\varepsilon H' < 1$. On voit alors que, dans l'hypothèse (iv) à savoir $R \prod_{p\in S} R_p \geqslant 1$,

$$|D_n(u)| \prod_p |D_n(u)|_p \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty .$$

Autrement dit, il existe N tel que $\forall\, n \geqslant N$,

$$|D_n(u)| \prod_p |D_n(u)|_p < 1 .$$

La formule du produit nous permet donc d'affirmer qu'il existe N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $D_n(u) = 0$. Par suite, d'après le critère de Kronecker, φ est une fraction rationnelle.

III. Application.

Ce critère peut être utilisé pour montrer la fermeture des ensembles S_q [2].

A tout nombre entier q , différent de zéro, il est possible d'associer un ensemble de nombres algébriques réels noté S_q .

DÉFINITION. - S_q est l'ensemble des nombres algébriques θ réels tels que

1° $\theta > 1$,

2° $1/\theta$ est le seul zéro situé dans le disque $|z| \leqslant 1$ d'un polynôme Q à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$,

3° $Q(0) = q$,

4° <u>il existe un polynôme</u> A <u>à coefficients dans</u> $\mathbb{Z}$, <u>tel que</u> $A(1/\theta)$ <u>soit différent de</u> 0,

5° $|A(0)| \geqslant |Q|$,

6° $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$ <u>pour tout</u> z <u>tel que</u> $|z| = 1$.

θ_ν étant une suite d'éléments de S_q convergeant vers un réel θ , pour montrer que S_q est fermé, il faut montrer que $\theta \in S_q$.

La définition permet d'associer à tout θ_ν une fraction rationnelle f_ν conformément à la définition. On montre qu'il est possible d'extraire une suite convergeant vers une fonction f .

Il faut alors montrer que f est une fraction rationnelle associée à θ conformément à la définition de S_q . C'est donc dans la démonstration " f est une fraction rationnelle" qu'intervient le critère de rationalité précédemment établi. Il est aisé de montrer que f vérifie les 4 hypothèses du critère de rationalité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 14).

[2] PISOT (C.). - Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques. - Montréal, Université de Montréal, 1963 (Séminaire de Mathématiques supérieures, Eté 1963, 5).

(Texte reçu le 24 janvier 1977)

Philippe VITIELLO
Cité de l'Avenir
Immeuble Dalia 1, App. 14
ELMENZAH VI, Tunis
(Tunisie)