Pierrette Cassou-Noguès

Fonctions L p-adiques attachées à une courbe elliptique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 22, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A15_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, p. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 22, 13 p.

16 mai 1977

FONCTIONS L $\mathfrak{p}$-ADIQUES ATTACHÉES À UNE COURBE ELLIPTIQUE

par Pierrette CASSOU-NOGUÈS

Soit K un corps quadratique imaginaire de nombre de classe 1. Soit E une courbe elliptique, définie sur K, dont l'anneau des endomorphismes est isomorphe à l'anneau des entiers de K, $\mathcal{O}_K$. Fixons un modèle minimal de Weierstrass pour E

(1) $$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 ,$$

où g_2 et g_3 appartiennent à $\mathcal{O}_K$, et dont le discriminant Δ n'est divisible que par les premiers de K pour lesquels E a mauvaise réduction, et éventuellement les premiers de K au-dessus de 2 et 3. Soit $\wp(z)$ la fonction de Weierstrass aattachée à ce modèle, et L le réseau associé. Puisque le nombre de classes de K est 1, il existe $\Omega \in L$, tel que $L = \Omega\mathcal{O}_K$.

On notera ψ le Grössencharacter (au sens de SHIMURA [15]) de E, défini sur K, et $\mathfrak{f}$ son conducteur.

Soit F une extension abélienne finie de K, contenue dans $\underset{\sim}{C}$ de conducteur $\mathfrak{g}$ sur K. Soit $\mathfrak{G}$ le p. p. c. m. de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{f}$. Notons $G(F/K)$ le groupe de Galois de F sur K. Pour tout idéal $\mathfrak{C}$ de K, premier à $\mathfrak{g}$, $\sigma_{\mathfrak{C}}$ désignera le symbole d'Artin $(\mathfrak{C}, F/K)$.

Pour tout $\sigma \in G(F/K)$, on définit

$$\zeta_F(\sigma , k , s) = \sum_{(\mathfrak{A},\mathfrak{G})=1,\sigma_{\mathfrak{A}}=\sigma} \bar{\psi}^k(\mathfrak{A})\, N\mathfrak{A}^{-s} ,$$

où la sommation est prise sur les idéaux $\mathfrak{A}$ entiers de K, premiers à $\mathfrak{G}$ tels que $\sigma_{\mathfrak{A}} = \sigma$. Cette fonction, définie pour $\mathrm{Re}(s) > 3/2$, se prolonge analytiquement à tout le plan complexe. Soit χ un caractère de $G(F/K)$ à valeurs complexes. On définit

$$L(\bar{\psi}^k \bar{\chi} , s) = \sum_{\sigma\in G(F/K)} \bar{\chi}(\sigma)\, \zeta_F(\sigma , k , s)$$

et

$$\xi(s , \bar{\psi}^k \bar{\chi}) = \Gamma(s + \tfrac{k}{2})\, A^s\, L(\bar{\psi}^k \bar{\chi} , s + \tfrac{k}{2}) , \text{ où } A = \frac{1}{2\pi} |\sqrt{dN\mathfrak{G}}|$$

(d désigne le discriminant du corps K).

HECKE [7](n° 14, § 6) a montré que, si $\psi^k \chi$ est un Grössencharacter primitif mod $\mathfrak{G}$, alors

$$\xi(1 - s , \bar{\psi}^k \bar{\chi}) = W(\bar{\psi}^k \bar{\chi})\, \xi(s , \psi^k \chi) ,$$

où $W(\bar{\psi}^k \bar{\chi})$ est un nombre algébrique de module 1. Soit $s = k/2$, alors

$$L(\psi^k \chi , 1) = \frac{1}{W(\bar{\psi}^k \bar{\chi})} (k - 1)!\, A^{k-1}\, L(\bar{\psi}^k \bar{\chi} , k) .$$

D'autre part, N. ARTHAUD [1] a prouvé que, pour k entier positif, $\zeta(\sigma , k , k)\Omega^{-k}$ appartient à F. Donc si $\psi^k \chi$ est un Grössencharacter primitif mod $\mathfrak{G}$,

$\Omega^{-k}\,\pi^{k-1}\,L(\psi^k\chi\,,\,1)$ est un nombre algébrique.

Soit p un premier de $\underset{\sim}{Z}$, qui se décompose dans K , différent de 2 et 3, et ne divisant pas $\mathfrak{C}$. Soit $\underset{\sim}{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, $\underset{\sim}{Z}_p$ son anneau de valuation, $\underset{\sim}{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$, et $\mathfrak{M}_p$ l'idéal de valuation de $\underset{\sim}{C}_p$. Fixonx τ , un plongement de $\overline{\underset{\sim}{Q}}$ dans $\underset{\sim}{C}_p$, $\overline{\underset{\sim}{Q}}$ étant la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}$, contenue dans $\underset{\sim}{C}$.

Soit $\mathfrak{p}$ le premier de K , au-dessus de p , tel que $\tau(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{M}_p$. On se propose d'étudier le problème suivant :

Existe-t-il une fonction analytique f , définie sur $\underset{\sim}{Z}_p$, à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$, telle que pour tout entier k d'un ensemble dense dans $\underset{\sim}{Z}_p$, on ait

$$f(k) = \tau(\Omega^{-k}\pi^{k-1}\,L(\psi^k\chi\,,\,1)) \ ?$$

(A partir de maintenant, on écrira a pour $\tau(a)$ si $a \in \overline{\underset{\sim}{Q}}$.)

On montrera l'existence de telles fonctions $\mathfrak{p}$-adiques, on étudiera l'analogue de la formule de Leopoldt pour $s = 1$, et on en déduira une formule p-adique des résidus. La méthode utilise la Γ-transformation, déjà employée par IWASAWA [8] et LEOPOLDT [10] pour l'étude des fonctions L des extensions abéliennes de $\underset{\sim}{Q}$. C'est LICHTENBAUM [11] qui le premier a eu l'idée d'utiliser cette méthode dans le cas elliptique pour interpoler des nombres d'Hurwitz généralisés. Il a, depuis, appliqué sa méthode à un cadre plus large. On peut aussi définir des éléments de Stickelberger, et suivre ce que fait IWASAWA ([8], [2]). Signalons enfin que tout ceci se généralise au cas où le nombre de classes est supérieur à 1 [3].

I. Rappels.

1. La Γ-transformation.

Soit M un sous-corps complet de $\underset{\sim}{C}_p$, $\mathcal{O}_M$ son anneau des entiers. On note Q_M l'ensemble des séries formelles de $M[[x]]$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} |n!\,a_n| = 0 \quad \text{et} \quad P_M = \mathcal{O}_M[[x]] \ .$$

Soit $\mathcal{C}_M$ l'ensemble des fonctions continues de $\underset{\sim}{Z}_p$ à valeurs dans M . Q_M et $\mathcal{C}_M$ sont des algèbres de Banach, munies respectivement des normes

$$\lim_n |n!\,a_n| \quad \text{et} \quad \sup_{x\in \underset{\sim}{Z}_p} |f(x)| \ .$$

Rappelons que ω est la fonction continue

$$\omega : \underset{\sim}{Z}_p \longrightarrow \underset{\sim}{Z}_p$$
$$x \longmapsto \lim_{n\to\infty} x^{p^n} \ .$$

On a donc

$$\omega^p(x) = x \quad \text{et} \quad \omega(x) \equiv x \mod p\underset{\sim}{Z}_p \ .$$

On pose, si $x \notin p\underset{\sim}{Z}_p$, $\langle x\rangle = x/\omega(x)$.

LEMME 1. - *Soit* α *une classe de congruences* $\bmod(p-1)$. *Il existe une application linéaire, bornée, unique* $\Gamma^{\alpha} : Q_M \longrightarrow C_M$, *telle que* $\forall\, s \in \underset{\sim}{Z}_p$,

$$\Gamma^{\alpha}((1+x)^n)(s) = \begin{cases} \omega^{\alpha}(n)\langle n\rangle^s & \text{si } p\nmid n ,\\ 0 & \text{si } p\mid n .\end{cases}$$

LEMME 2. - *Soit* $A \in Q_M$ *et*

$$\tilde{A}(x) = A(x) - \frac{1}{p}\sum_{\zeta} A(\zeta(x+1)-1) ,$$

où la sommation est prise sur les racines p-*ièmes de* 1. *Alors, pour tout* m *entier positif tel que* $m \equiv \alpha \bmod(p-1)$,

$$\Gamma^{\alpha}(A)(m) = \frac{d^m}{dt^m}(\tilde{A}(e^t-1))_{t=0} .$$

LEMME 3. - *Si* $A \in P_M$, $\Gamma^{\alpha}(A)$ *est une fonction d'Iwasawa.*

Les preuves de ces lemmes se trouvent dans [8], [10] et [11].

2. Groupes formels.

Soit L un corps quelconque. On appelle *groupe formel, défini sur* L , tout élément de $L[[X , Y]]$, tel que

(i) $F(X , 0) = 0$; $F(0 , Y) = 0$,

(ii) $F(X , F(Y , Z)) = F(F(X , Y) , Z)$.

Si F et G sont deux groupes formels définis sur L , on appelle *homomorphisme de groupes formels,* tout élément de $L[[X]]$ tel que

$$f(F(X , Y)) = G(f(X) , f(Y)) .$$

On note G_a le *groupe formel additif* $G_a(X , Y) = X + Y$, G_m le *groupe formel multiplicatif* $G_m(X , Y) = X + Y + XY$.

On utilisera le lemme suivant :

LEMME 4 [6]. - *Soit* L *un corps de caractéristique* 0, *et* F *un groupe formel défini sur* L . *Alors il existe un homomorphisme unique* $\ell_F : F \longrightarrow G_a$, *défini sur* L , *tel que* $\ell'_F(0) = 1$. *Supposons que* S *soit un anneau intègre de corps de fraction* L , *et que* F *soit défini sur* S , *alors* $\ell'_F(X) \in S[[X]]$.

Si $F = G_m$,

$$\ell_{G_m}(X) = \log(1+X) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} ; \quad e_{G_m}(X) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{n!} .$$

On peut construire un groupe formel $\hat{E}$, défini sur l'anneau des entiers de K , associé au module de Weierstrass (1) [17].

Posons $t = -2x/y$, $\omega = -1/y$; alors $x = t/2\omega$, $y = -1/\omega$. (1) devient

$$\omega = \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}g_2\, t\omega^2 - g_3\,\omega^3 ,$$

et on obtient l'expression formelle

$$\omega = \frac{1}{2} t^3 (1 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots) ,$$

où les $A_i \in \mathcal{O}_K$. Donc on en déduit

$$x = t^{-2} a(t) \quad \text{et} \quad y = - 2t^{-3} b(t) ,$$

où a et b sont des séries en t à coefficients dans $\mathcal{O}_K$ et premier coefficient 1. Si l'on écrit la loi de groupe de E , $P_3 = P_1 + P_2$, en utilisant ce paramétrage, on obtient $t_3 = \hat{E}(t_1 , t_2)$, où $\hat{E}$ est un groupe formel défini sur $\mathcal{O}_K$.

Puisque $t = - 2\wp(z)/\wp'(z)$, on peut écrire

$$t = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k , \text{ où } \forall k \geq 2 , \quad a_k \in K ,$$

et ceci est un isomorphisme du groupe G_a dans $\hat{E}$ défini sur K .

D'autre part, soit T le complété de l'extension maximale non ramifiée au-dessus de $K\mathfrak{p}$, et $\mathcal{O}_T$ son anneau des entiers. LUBIN [12] a montré que puisque p se décompose dans K , il existe un isomorphisme g , défini sur $\mathcal{O}_T$ de E dans G_m . On a donc

$$G_a \xrightarrow{r^{-1}} \hat{E} \xrightarrow{g} G_m .$$

Donc il existe $\gamma \in \mathcal{O}_T^*$, unique, tel que

$$u = \exp(\gamma z) - 1 \quad \text{et} \quad t = g(\exp(\gamma z) - 1) .$$

3. Théorie du corps de classe.

Soit $\mathfrak{A}$ un idéal entier de K . On dit que $\tau \in E$ est un point de $\mathfrak{A}$-division sur E si

$$\mathfrak{A} = \{\alpha \in \mathcal{O}_K ; \quad \alpha\tau = 0\} .$$

On notera $E_{\mathfrak{A}}$ l'ensemble des points de $\mathfrak{A}$-division de E , et $K(E_{\mathfrak{A}})$ le corps engendré sur K par les coordonnées des points de $\mathfrak{A}$-division.

LEMME 5 [5].

(i) Pour tout idéal $\mathfrak{f}_1$ de K , tel que $\mathfrak{f} | \mathfrak{f}_1$, $K(E_{\mathfrak{f}_1})$ est le corps de classes de rayon $\mathfrak{f}_1$;

(ii) $F(E_{\mathfrak{p}})$ a pour conducteur $\mathfrak{z}\mathfrak{p}$; $F(E\mathfrak{p}) \cap K(E\mathfrak{g}) = F$; le compositum de $F(E\mathfrak{p})$ et $K(E\mathfrak{g})$ est $K(E\mathfrak{g}\mathfrak{p})$.

4. Fonctions elliptiques.

Soit L un réseau quelconque de $\mathbb{C}$, et soit

$$\sigma(z , L) = z \prod_{\omega \in L, \omega \neq 0} (1 - \frac{z}{\omega}) \exp(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}(\frac{z}{\omega})^2) .$$

Soit

$$\theta(z , L) = \Delta(L) \exp(- 6s_2(L) z^2) \sigma(z , L)^{12} ,$$

où $\Delta(L)$ est le discriminant de L , et

$$s_2(L) = \lim_{s\to 0, s>0} \sum_{\omega\in L, \omega\neq 0} \omega^{-2} |\omega|^{-2s} .$$

Rappelons que $L = \Omega\mathcal{O}$. Soit $\mathfrak{A}$ un idéal entier de K . On définit

$$\Theta(z , \mathfrak{A}) = \frac{\theta(z , L)^{N\mathfrak{A}}}{\theta(z , \mathfrak{A}^{-1} L)} ,$$

où $N\mathfrak{A}$ désigne la norme absolue de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}^{-1} L$ le réseau $\Omega\mathfrak{A}^{-1}$. G. ROBERT [14] a montré que $\Theta(z , \mathfrak{A})$ est une fonction elliptique pour le réseau L , dont l'expression en fonction de $\wp(z)$ est

$$\Theta(z , \mathfrak{A}) = \frac{\Delta(L)}{\Delta(\mathfrak{A}^{-1} L)} \prod_{\ell} \frac{\Delta(L)}{(\wp(z) - \wp(\ell))^6} ,$$

où le produit à droite est pris sur un ensemble de représentants des classes $\mathfrak{A}^{-1} L$ mod L .

Fixons un ensemble B d'idéaux de K , entiers premiers à $\mathfrak{g}$, tels que

$$\{(\mathfrak{b} , K(E_{\mathfrak{g}})/K) , \mathfrak{b} \in B\} = G(K(E_{\mathfrak{g}})/F) .$$

Soit $\rho \in \underset{\sim}{C}$, tel que $(\wp(\rho) , \wp'(\rho))$ soit un générateur des points de $\mathfrak{g}$-division de E . Soit $\mathfrak{A}$ un idéal entier de K , premier à $\mathfrak{g}\mathfrak{p}$. Posons

$$\Lambda(z , \rho , \mathfrak{A}) = \prod_{\mathfrak{b}\in B} \Theta(z + \psi(\mathfrak{b}) \rho , \mathfrak{A}) .$$

LEMME 6. - $\Lambda(z , \rho , \mathfrak{A})$ <u>est une fonction rationnelle de</u> $\wp(z)$ <u>et</u> $\wp'(z)$ <u>à coefficients dans</u> F .

Soit $\sigma \in G(F/K)$; on notera $\Lambda_\sigma(z , \rho , \mathfrak{A})$ la fonction rationnelle en $\wp(z)$ et $\wp'(z)$, obtenue en faisant agir σ sur les coefficients de $\Lambda(z , \rho , \mathfrak{A})$.

LEMME 7. - $\forall \sigma \in G(F/K)$,

$$z \frac{d}{dz} \log \Lambda_\sigma(z , \rho , \mathfrak{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\rho , \mathfrak{A} , \sigma) z^k ,$$

<u>où</u> $c_k(\rho , \mathfrak{A} , \sigma) = 12(- 1)^{k-1} \rho^{-k} (N\mathfrak{A}\zeta_F(\sigma , k , k) - \psi^k(\mathfrak{A}) \zeta_F(\sigma\sigma_{\mathfrak{A}} , k , k)$ <u>pour</u> $k = 1 , 2 , \ldots$

On trouvera la preuve de ces lemmes dans [1].

COROLLAIRE. - $\forall k \geq 1$, $\forall \sigma \in G(F/K)$,

$$\Omega^{-k} \zeta_F(\sigma , k , k) \in F .$$

II. Fonctions $\mathfrak{p}$-adiques

Soit $K_{\mathfrak{p}}$ le complété de K en $\mathfrak{p}$, et $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ son anneau d'entiers. Soit $\pi = \psi(\mathfrak{p})$.

Notons $\mathfrak{P}$ le premier de F au dessus de $\mathfrak{p}$ tel que $\tau(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{M}_p$, $F_{\mathfrak{P}}$ le complété de F en $\mathfrak{P}$, et $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ son anneau de valuation.

LEMME 8. - <u>Par rapport au paramètre</u> $t = -2\,\wp(z)/\wp'(z)$ <u>sur</u> $\hat{E}$, $\Lambda_\sigma(z, \rho, \mathfrak{A})$ <u>a un développement</u>

$$\Lambda_\sigma(z, \rho, \mathfrak{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)\, t^k ,$$

<u>où</u> $h_k(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)$, $k \geqslant 0$ <u>appartient à</u> $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, <u>et</u> $h_0(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)$ <u>est une unité de</u> $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$.

<u>Preuve</u>. - Voir [1].

On peut maintenant montrer le lemme suivant.

LEMME 9. - <u>Par rapport au paramètre</u> $u = \exp(\gamma z) - 1$ <u>sur</u> G_m , $\frac{d}{dz} \log \Lambda_\sigma(z,\rho,\mathfrak{A})$ <u>a un développement</u>

$$\frac{d}{dz} \log \Lambda_\sigma(z, \rho, \mathfrak{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)\, u^k ,$$

<u>où</u> $b_k(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)$ <u>appartient à</u> $\mathcal{O}_T$, $\forall\, k \geqslant 0$.

D'après le lemme 8, nous savons que

$$\Lambda_\sigma(z, \rho, \mathfrak{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)\, t^k ,$$

où, pour tout k entier positif ou nul, $h_k(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)$ appartient à $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, et $h_0(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)$ est une unité de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. Alors

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Log}\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)}{h_0(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)}\, t^k\Big)$$

est une série en t à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. De plus, $\frac{dz}{dt}$ est aussi une série en t à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. En effet, l'application

$$\begin{aligned} \hat{E} &\longrightarrow G_a \\ t &\longmapsto z \end{aligned}$$

est le logarithme. Donc, d'après le lemme 4, $\frac{dz}{dt}$ est une série en t , à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ et premier coefficient 1. Donc

$$\frac{d}{dz} \log\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)}{h_0(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)}\, t^k\Big)$$

admet un développement en série par rapport au paramètre t à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$.

Si nous remplaçons t par son développement en série par rapport à u à coefficients dans $\mathcal{O}_T$, $\frac{d}{dz} \log(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (h_k(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)/h_0(\rho, \mathfrak{A}, \sigma))\, t^k)$ admet alors un développement en séries par rapport à u à coefficients dans $\mathcal{O}_T$. Notons $C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)}(u)$ cet élément de $\mathcal{O}_T[[u]]$. Alors, d'après le lemme 3, $\Gamma^\alpha(C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)})$ est une fonction d'Iwasawa définie sur $\underset{\sim}{Z}_p$ à valeurs dans $\mathcal{O}_T$. Posons

$$m \in \underset{\sim}{Z} , \quad \lambda_m = 12(-1)^m\, \gamma^{-m} .$$

LEMME 10. - $\forall\, m \in \underset{\sim}{N}^*$, $m \equiv \alpha \mod(p-1)$,

$$\Gamma^\alpha(C_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)})(m) = \lambda_m\, \rho^{-(m+1)}\, m!$$

$$[N\mathfrak{A}(\zeta_F(\sigma,m+1) - \frac{\psi^{m+1}(p)}{Np}\, \zeta_F(\sigma\sigma_p,m+1)) - \psi^{m+1}(\mathfrak{A})(\zeta_F(\sigma\sigma_{\mathfrak{A}},m+1) - \frac{\psi^{m+1}(p)}{Np}\, \zeta_F(\sigma\sigma_{\mathfrak{A}}\sigma_p,m+1))],$$

où $\zeta_F(\sigma\ ,\ k) = \zeta_F(\sigma\ ,\ k\ ,\ k)$.

Preuve. – D'après le lemme 2,

$$\Gamma^{\alpha}(C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)})(m) = \frac{d^m}{dz^m}\,(\tilde{C}_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)}(e^z - 1))_{z=0}\ ,$$

où $\tilde{C}_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)}(x) = C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)}(x) - \frac{1}{p}\sum_{\zeta} C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)}(\zeta(u+1) - 1)$,

et la somme est prise sur toutes les racines p-ièmes de 1. Le point $\zeta(u+1) - 1$ de G_m , produit de u par $\zeta - 1$, qui est d'ordre p , correspond sur G_a au point $\gamma^{-1} z + q$, où $u = \exp(\gamma z) - 1$ et q est tel que $(\mathfrak{p}(q)\ ,\ \mathfrak{p}'(q))$ est un point de $\mathfrak{p}$-division de E . On a défini

$$\Lambda(z\ ,\ \rho\ ,\ \mathfrak{A}) = \prod_{\mathfrak{b}\in B} \Theta(z + \psi(\mathfrak{b})\ \rho\ ,\ \mathfrak{A})$$

et, si $\sigma \in G(F/K)$,

$$\Lambda_{\sigma}(z\ ,\ \rho\ ,\ \mathfrak{A}) = \prod_{\mathfrak{b}\in B} \Theta(z + \psi(\mathfrak{b}\mathfrak{c})\ \rho\ ,\ \mathfrak{A})\ ,$$

où $\mathfrak{c}$ est un idéal de K , premier à $\mathfrak{g}$, tel que $\sigma_{\mathfrak{c}} = \sigma$. On a donc égalité des séries formelles

$$C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)}(e^z - 1) = \sum_{\mathfrak{b}\in B} \sum_{\ell} \frac{\mathfrak{p}'(\gamma^{-1}\ z + \psi(\mathfrak{b}\mathfrak{c})\ \rho)}{\mathfrak{p}(\gamma^{-1}\ z + \psi(\mathfrak{b}\mathfrak{c})\ \rho) - \mathfrak{p}(\ell)}$$

et

$$\sum_{\zeta} C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)}(\zeta e^z - 1) = \sum_{\mathfrak{b}\in B} \sum_{\ell} \sum_{q} \frac{\mathfrak{p}'(\gamma^{-1}\ z + \psi(\mathfrak{b}\mathfrak{c})\ \rho + q)}{\mathfrak{p}(\gamma^{-1}\ z + \psi(\mathfrak{b}\mathfrak{c})\ \rho + q) - \mathfrak{p}(\ell)}\ ,$$

la deuxième somme étant prise sur un ensemble de représentants des classes non nulles de $\mathfrak{A}^{-1} L \mod L$, et la troisième sur tous les points q tels que

$$\{(\mathfrak{p}(q)\ ,\ \mathfrak{p}'(q))\} = E_{\mathfrak{p}}\ .$$

On peut alors montrer que

$$\sum_{\zeta} C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)}(\zeta e^z - 1) = \pi C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma\sigma_{\mathfrak{p}})}(e^{\pi z} - 1)\ ,$$

d'où l'on déduit aisément le lemme 10.

Soit maintenant χ un caractère de $G(F/K)$ à valeurs complexes. En remplaçant F par le corps des invariants du noyau de χ , on peut supposer que le noyau de χ est trivial. On considère

$$L(\overline{\psi}^k\ \overline{\chi}\ ,\ s) = \sum_{\sigma\in G(F/K)} \overline{\chi}(\sigma)\ \zeta_F(\sigma\ ,\ k\ ,\ s)\ .$$

On ne s'intéresse qu'aux valeurs de k , $k \equiv 0 \mod(p - 1)$. Puisque p est décomposé dans K , $p - 1 \equiv 0 \mod w_K$, où w_K désigne le nombre de racines de l'unité dans K . Donc ψ^k a pour conducteur 1. Alors $\psi^k \chi$ est un Grössencharacter primitif mod $\mathfrak{h}$, si χ est un caractère primitif mod $\mathfrak{h}$. Pour tout $\alpha \in K$, on notera $S(\alpha)$ la trace de α . Soit $\mathfrak{d}$ la différente de K . On choisit, une fois pour toutes, δ_0 tel que $\mathfrak{h}^{-1}\ \mathfrak{d}^{-1} = (\delta_0)$ de telle sorte que $\delta_0 \sqrt{d}$ ait pour dénominateur h_0 , où $(h_0) = \mathfrak{h}$. Soit

$$T(\overline{\chi}) = \sum_{\lambda \bmod \mathfrak{h}} \overline{\chi}(\lambda)\ \exp(2\pi i S(\lambda\delta_0))\ ,$$

où λ parcourt un système complet de représentants des classes résiduelles mod $\mathfrak{h}$. Soit

$$L_1(\psi^k \chi , s) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{g}} (1 - \frac{\psi^k(\mathfrak{p})\ \chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s})^{-1} .$$

Alors, d'après HECKE [7](n° 14, § 6),

$$L_1(\psi^k \chi , 1) = \frac{\delta_0^{-k}\ (k-1)!}{(2\pi)^{k-1}\sqrt{d}\ T(\overline{\chi})} L_1(\overline{\psi}^k \overline{\chi} , k) .$$

Mais

$$L(\psi^k \chi , 1) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{g}} (1 - \frac{\psi^k(\mathfrak{p})\ \chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s})^{-1} ,$$

donc

$$L(\psi^k \chi , s) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} (1 - \frac{\psi^k(\mathfrak{p})\ \chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s})\ L_1(\psi^k \chi , s)$$

et

$$L(\psi^k \chi , 1) = \frac{\delta_0^{-k}\ (k-1)!}{(2\pi)^{k-1}\sqrt{d}\ T(\overline{\chi})} \times \frac{\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} (1- \frac{\psi^k(\mathfrak{p})\ \chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}})}{\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} (1 - \frac{\overline{\psi}^k(\mathfrak{p})\ \overline{\chi}(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^k})} L(\overline{\psi}^k \overline{\chi} , k) .$$

Considérons $\tau \circ \chi$, le caractère de $G(F/K)$ à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$, associé à τ et à χ, et la fonction

$$L_p(\psi,\chi,\rho,-s) = \frac{1}{\sqrt{d}\ T(\overline{\chi})} \times \frac{\sum_{\sigma\in G(F/K)} \tau\circ\chi^{-1}(\sigma)\ \Gamma^{-1}(C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)})(s)}{(N\mathfrak{A} - \langle\psi(\mathfrak{A})\rangle^{s+1}\ \chi(\mathfrak{A}))} .$$

C'est une fonction d'Iwasawa, définie sur $\underset{\sim}{Z}_p$, à valeurs dans $\mathcal{O}_T$, qui ne dépend pas de $\mathfrak{A}$. On a le résultat suivant.

THÉORÈME 1. - <u>Il existe une fonction d'Iwasawa sur</u> $\underset{\sim}{Z}_p$, <u>telle que, pour tout entier négatif,</u> $n \equiv 1 \mod(p-1)$,

$L_p(\psi,\chi,\rho,n)$

$$= \lambda_n(\rho\Omega^{-1}\delta_0^{-1})^{n-1}(\frac{1-\psi^{-n+1}(\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}) \frac{\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{f}} (1- \frac{\overline{\psi}^{-n+1}(\mathfrak{q})\chi^{-1}(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}^{-n+1}})}{\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{f}} (1- \frac{\psi^{-n+1}(\mathfrak{q})\chi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})})} (\rho^{n-1}(2\pi)^{-n}\ L(\psi^{-n+1}\chi^{-1})) .$$

Nous avons défini des fonctions $\mathfrak{p}$-adiques pour un caractère χ, et un premier $\mathfrak{p}$ qui ne divise pas le conducteur de χ. On s'intéresse maintenant aux caractères du groupe de Galois de $F(E\mathfrak{p})$ sur K. Soit θ le caractère canonique qui donne l'action de $G(F(E\mathfrak{p})/K)$ sur $E\mathfrak{p}$. Le caractère p-adique $\tau \circ \theta$ sera noté θ aussi. Il peut être défini de la façon suivante : si $\sigma \in G(F(E\mathfrak{p})/K)$, soit $\mathfrak{A}$ un idéal de K, premier à $\mathfrak{g}\mathfrak{p}$, tel que $\sigma = (\mathfrak{A} , F(E\mathfrak{p})/K)$, alors $\theta(\sigma) = \omega(\psi(\mathfrak{A}))$. Soit θ_0 la restriction de θ à $G(F(E\mathfrak{p})/F)$. D'après la théorie de LUBIN-TATE [13], on sait que $G(K(E\mathfrak{p})/K)$ est isomorphe à $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})^*$. On pose

$$T(\theta_0^{\alpha} , \zeta) = \sum_{\sigma\in G(F(E\mathfrak{p})/F)} \theta_0^{\alpha}(\sigma)\ \zeta^{\sigma} ,$$

où ζ est une racine p-ième de 1. ζ^σ est défini de la manière suivante : $\zeta - 1$ est un point d'ordre p de G_m qui correspond dans G_a à q tel que $(\mathfrak{p}(q)\ ,\ \mathfrak{p}'(q))$ soit un point de $\mathfrak{p}$-division de E . $\zeta^\sigma - 1$ correspond à $(\mathfrak{p}(q)\ ,\ \mathfrak{p}'(q))^\sigma$. Soit M un sous-corps complet de $\underset{\sim}{C}_p$, et $A \in Q_M$. On pose

$$A_\alpha(u) = \frac{1}{T(\theta_0^{-\alpha}\ ,\ \zeta)} \sum_{\sigma\in G(F(E\mathfrak{p})/F)} \theta_0^{-\alpha}(\sigma)\ A(\zeta^\sigma(u+1)-1)\ .$$

LEMME 11. – $\forall\ s \in \underset{\sim}{Z}_p$, $\Gamma^{\alpha-\beta}(A)(s) = \Gamma^{-\beta}(A_\alpha)(s)$.

Ceci permet d'étudier $\Gamma^{\alpha-1}(C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)})(m)$ pour $m \equiv -1 \mod(p-1)$. Soit

$$L_{\mathfrak{p}}(\psi,\chi\theta^\alpha,\rho,-s) = \frac{1}{\sqrt{d}\ T(\overline{\chi})} \times \frac{\sum_{\sigma\in G(F/K)} \chi^{-1}(\sigma)\ \Gamma^{\alpha-1}(C_{(\rho,\mathfrak{A},\sigma)})(s)}{(N\mathfrak{A} - \langle\psi(\mathfrak{A})\rangle^{s+1}\ \chi\theta^\alpha(\mathfrak{A}))}\ .$$

C'est une fonction d'Iwasawa qui ne dépend pas de $\mathfrak{A}$. On a le théorème suivant.

THÉORÈME 2. – <u>Il existe une fonction d'Iwasawa sur</u> $\underset{\sim}{Z}_p$, <u>telle que, pour tout</u> n <u>entier négatif,</u> $n \equiv 1 \mod(p-1)$,

$$L_{\mathfrak{p}}(\psi,\chi\theta^\alpha,\rho,n)$$

$$= \lambda_{-n}((p+q)\Omega^{-1}\delta_0^{\prime -1}) \times \frac{\prod_{q|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{\overline{\psi}^{-n+1}(q)\chi^{-1}\theta^{-\alpha}(q)}{Nq^{-n+1}}\right)}{\prod_{q|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{\psi^{-n+1}(q)\chi\theta^\alpha(q)}{Nq}\right)} (\Omega^{n-1}\ (2\pi)^{-n}\ L(\psi^{-n+1}\ \chi\theta^\alpha\ ,\ 1))\ .$$

III. Formule de Léopoldt. Fonctions L $\mathfrak{p}$-adiques.

On va étudier les fonctions $\mathfrak{p}$-adiques que l'on vient de définir pour $s = 1$. Les unités elliptiques de ROBERT [14] jouent ici un rôle important. Considérons une paire $(\mathfrak{a}\ ,\ \mathfrak{n})$, où $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{A}_j\ ;\ j \in J\}$ et $\mathfrak{n} = \{n_j\ ;\ j \in J\}$; J est un ensemble fini d'indices, quelconque, les $\mathfrak{A}_j$ sont des idéaux entiers, premiers à $\mathfrak{g}\mathfrak{q}$, et les n_j des entiers rationnels satisfaisant $\sum_{j\in J} n_j(N\mathfrak{A}_j - 1) = 0$. Etant donnée $(\mathfrak{a}\ ,\ \mathfrak{n})$, on définit

$$\Theta(z\ ,\ (\mathfrak{a}\ ,\ \mathfrak{n})) = \prod_{j\in J} \Theta(z\ ,\ \mathfrak{A}_j)^{n_j}\ .$$

Soit $\mathfrak{D}$ un idéal de K , et $(\mathfrak{p}(\rho)\ ,\ \mathfrak{p}'(\rho))$ un point de $\mathfrak{D}$-division de E , alors G. ROBERT [14] a montré que $\Theta(\rho\ ,\ (\mathfrak{a}\ ,\ \mathfrak{n}))$ est une unité de $K(E_{\mathfrak{D}})$.

1. Formule de Léopoldt.

On peut montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 3.

$$L_{\mathfrak{p}}(\psi,\chi,\rho,1) = \frac{\gamma}{\sqrt{d}\ T(\overline{\chi})} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right) \frac{\sum_{\sigma\in G(F/K)} \chi^{-1}(\sigma)\ \log_p(\prod_{\mathfrak{b}\in B} \Theta(\psi(\mathfrak{b})\rho\ ,\ (\mathfrak{a},\mathfrak{n})))^\sigma}{\sum_{j\in J} n_j(N\mathfrak{A}_j - \chi(\mathfrak{A}_j))}\ .$$

<u>Si</u> α <u>est une classe de congruence non nulle</u> $\mod(p-1)$,

$$L_{\mathfrak{p}}(\psi,\chi\theta^{\alpha},\rho,1) = \frac{\gamma \sum_{\sigma\in G(F(E\mathfrak{p})/K)} \chi^{-1}\theta^{-\alpha}(\sigma) \log_p(\prod_{\mathfrak{b}\in B} \Theta(q+\psi(\mathfrak{b})\rho \ , \ (\mathfrak{a},\pi)))^{\sigma}}{\sqrt{d}\ T(\overline{\chi})\ T(\theta_0^{-\alpha},\zeta) \sum_{j\in J} n_j(N\mathfrak{A}_j - \chi\theta^{\alpha}(\mathfrak{A}_j))} .$$

Tout d'abord, $(\mathfrak{a} , \pi)$ est choisi de telle sorte que les dénominateurs soient des unités $\mathfrak{p}$-adiques. D'autre part, on a

$$\Lambda_{\sigma}(z , \rho , (\mathfrak{a},\pi)) = \prod_{j\in J} \Lambda_{\sigma}(z , \rho , \mathfrak{A}_j)^{n_j} ,$$

qui admet le développement en séries

$$\Lambda_{\sigma}(z , \rho , (\mathfrak{a},\pi)) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\rho , (\mathfrak{a},\pi) , \sigma) t^k ,$$

où les $h_k(\rho , (\mathfrak{a},\pi) , \sigma)$, $k \geqslant 0$, appartiennent à $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, et $h_0(\rho , (\mathfrak{a},\pi) , \sigma)$ est une unité de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. On considère alors $\log(\underset{\sim}{1}+(h_k(\rho,(\mathfrak{a},\pi),\sigma)/h_0(\rho,(\mathfrak{a},\pi),\sigma))t^k)$ qui admet un développement en séries dans $F_{\mathfrak{P}}$. En remplaçant t par son développement en u , on obtient une série en u à coefficients dans T , que l'on note $\mathcal{S}(\rho , (\mathfrak{a},\pi) , \sigma)(u)$. Il est alors facile de voir que

$$L_{\mathfrak{p}}(\psi,\chi,\rho,1-s) = \frac{\gamma}{\sqrt{d}\ T(\overline{\chi})} \frac{\sum_{\sigma\in G(F/K)} \chi^{-1}(\sigma)\ \Gamma^0(\mathcal{S}(\rho,(\mathfrak{a},\pi),\chi))(s)}{\sum_{j\in J} n_j(N\mathfrak{A}_j - \langle\psi(\mathfrak{A}_j)\rangle^s\ \chi(\mathfrak{A}_j))}$$

et

$$L_{\mathfrak{p}}(\psi,\chi\theta^{\alpha},\rho,1-s) = \frac{\gamma}{\sqrt{d}\ T(\overline{\chi})} \frac{\sum_{\sigma\in G(F/K)} \chi^{-1}(\sigma)\ \Gamma^{\alpha}(\mathcal{S}(\rho,(\mathfrak{a},\pi),\chi))(s)}{\sum_{j\in J} n_j(N\mathfrak{A}_j - \langle\psi(\mathfrak{A}_j)\rangle^s\ \chi\theta^{\alpha}(\mathfrak{A}_j))} .$$

On emploie ensuite la même méthode que pour le lemme 10.

2. L-functions.

SIEGEL [16] a montré le lemme suivant.

LEMME 12. - <u>Soit</u> χ <u>un caractère primitif des classes de rayon</u> modulo <u>un idéal entier</u> $\mathfrak{h} \neq 1$ <u>de</u> $Q(\sqrt{d})$. <u>La fonction</u> $L(s , \chi)$ <u>peut être prolongée analytiquement en une fonction entière de</u> s , <u>et sa valeur pour</u> $s = 1$ <u>est donnée par</u>

$$L(1 , \chi) = - \frac{2\pi}{\omega_h \sqrt{d}\ T(\overline{\chi})} \sum_{c\in cl(\mathfrak{h})} \overline{\chi}(c) \log|\varphi_{\mathfrak{h}}(c)|^2 ,$$

<u>où</u> c <u>parcourt les classes de rayon</u> mod $\mathfrak{h}$, <u>et</u> $\varphi_{\mathfrak{h}}(c)$ <u>désignent certaines unités du corps de classe de rayon</u> $\mathfrak{h}$.

On en déduit, en utilisant [14], le résultat suivant.

LEMME 13. - <u>Pour tout</u> $\chi \neq 1$ <u>de</u> $cl(\mathfrak{g})$, <u>notons</u> χ' <u>le caractère primitif associé à</u> χ . <u>Alors</u>

$$L(1 , \chi) = - \frac{2\pi}{\omega \sqrt{d}\ T(\overline{\chi})} \frac{\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{g}} (1 - \chi'(\mathfrak{p})\ N\mathfrak{p}^{-1})}{\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{g}}(1 - \overline{\chi}'(\mathfrak{p}))} \sum_{c\in cl(\mathfrak{g})} \overline{\chi}(c) \log|\varphi_{\mathfrak{g}}(c)|^2 .$$

$L_{\mathfrak{p}}(\psi , \chi , \rho , 1)$ est l'analogue $\mathfrak{p}$-adique de

$$- 12(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}) \frac{\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{f}} (1 - \chi^{-1}(\mathfrak{q}))}{\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{f}} (1 - \chi(\mathfrak{q})\, N\mathfrak{q}^{-1})} \frac{L(\psi^0 , \chi , 1)}{2\pi} .$$

Mais $L(\psi^0 , \chi , 1) = L(1 , \tilde{\chi})$, où $\tilde{\chi}$ est défini par

$$\begin{array}{ccc} G(K(E\mathfrak{g})/K) & \longrightarrow & G(F/K) \\ & \searrow^{\tilde{\chi}} & \downarrow \chi \\ & & \underset{\sim}{C} \end{array}$$

Donc

$$- 12(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}) \frac{\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{f}} (1 - \chi^{-1}(\mathfrak{q}))}{\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{f}} (1 - \chi(\mathfrak{q})\, N(\mathfrak{q})^{-1})} L(\psi^0 , \chi , 1)$$

$$= \frac{12(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}})}{\sqrt{d}\; T(\overline{\chi})} \sum_{\sigma\in G(K(E\mathfrak{g})/K)} \tilde{\chi}^{-1}(\sigma) \log|\varphi_{\mathfrak{g}}(\sigma)|^2 .$$

D'autre part

$$L_{\mathfrak{p}}(\psi,\chi,\rho,1) = \frac{\gamma(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}})}{\sqrt{d}\; T(\overline{\chi})} \times \frac{\sum_{\sigma\in G(K(E\mathfrak{g})/K)} \tilde{\chi}^{-1}(\sigma) \log_p \Theta(\rho,(\mathfrak{a},\pi))^{\sigma}}{\sum_{j\in J} n_j (N\mathfrak{A}_j - \chi(\mathfrak{A}_j))} .$$

On peut choisir ρ_0 tel que

$$\Theta(\rho_0 , \mathfrak{A})^{\sigma} = (\frac{\varphi_{\mathfrak{g}}(\sigma\sigma_{\mathfrak{A}})}{\varphi_{\mathfrak{g}}(\sigma)^{N\mathfrak{A}}})^{24} .$$

Alors on définit

$$L_{\mathfrak{p}}(\psi , \chi , \rho_0 , s) = L_{\mathfrak{p}}(\psi , \chi , s) .$$

IV. Formule $\mathfrak{p}$-adique des résidus.

Soient Δ , R , $\omega_{F(E\mathfrak{p})}$, h , g , respectivement, le discriminant de $F(E\mathfrak{p})$ sur $\underset{\sim}{Q}$, le régulateur, le nombre de racines de l'unité, le nombre de classes de $F(E\mathfrak{p})$ et le degré de $F(E\mathfrak{p})$ sur K . On a

$$\frac{(2\pi)^g\, hR}{\omega_{F(E\mathfrak{p})} \sqrt{\Delta}} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{d}} \prod_{\chi\neq 1} L(1 , \chi') ,$$

où χ parcourt l'ensemble des caractères de $G(F(E\mathfrak{p})/K)$, et χ' est le caractère primitif associé à χ . Nous allons donner un analogue $\mathfrak{p}$-adique à cette formule. Tout d'abord nous allons définir la quantité $R_{\mathfrak{p}}\, d^{\frac{1}{2}}/\Delta^{\frac{1}{2}}$ qui interviendra dans notre formule. Soit A_K et $A_{F(E\mathfrak{p})}$ la clôture intégrale de $\underset{\sim}{Z}$ dans K et $F(E\mathfrak{p})$; ω_1 , ω_2 une base du $\underset{\sim}{Z}$-module A_K ; ω'_1 , ... , ω'_{2g} une base du $\underset{\sim}{Z}$-module $A_{F(E\mathfrak{p})}$. Soient σ_0 , ... , σ_{g-1} les éléments de $G(F(E\mathfrak{p})/K)$; $\sigma_0,\dots,\sigma_{g-1}\, \sigma_g,\dots,\sigma_{2g-1}$ les éléments de $G(F(E\mathfrak{p})/\underset{\sim}{Q})$; $\overline{\sigma}_0$ et $\overline{\sigma}_g$ désigneront les éléments de $G(K/\underset{\sim}{Q})$. Soit $\mathcal{E}$ le groupe des unités globales dans $F(E\mathfrak{p})$. Puisque $F(E\mathfrak{p})$ est totalement imaginaire, le $\underset{\sim}{Z}$-rang de $\mathcal{E}$ modulo la torsion est égal à $g - 1$. Soit e_1 , ... , e_{g-1} un ensemble d'unités fondamentales dans $\mathcal{E}$.

On sait que

$$R_\infty = |\det(\log|\sigma_j(e_k)|)| \ , \quad 0 \leqslant j \leqslant g-1 \ ; \quad 1 \leqslant k \leqslant g$$

et

$$d = \det^2(\overline{\sigma}_\ell(\omega_i)) \ , \quad \ell = 0 \ , \ g \ ; \quad i = 1 \ , \ 2 \ ,$$

$$\Delta = \det^2(\sigma_{j'}(\omega'_m)) \ , \quad 0 \leqslant j' \leqslant 2g-1 \ ; \quad 1 \leqslant m \leqslant 2g \ ,$$

ne dépendent pas du choix de (ω_i) , (ω'_m) , (σ_j) , (e_k) .

Mais

$$A_\infty((\omega_i),(\omega'_m),(\sigma_j),(e_k)) = \frac{\det(\log|\sigma_j(e_k)|)\ \det(\overline{\sigma}_j(\omega_i))}{\det(\sigma_{j'}(\omega'_m))} \ ,$$

$$0 \leqslant j \leqslant g-1 \ ; \ 1 \leqslant k \leqslant g \ ; \ \ell = 0, g \ ; \ i = 1,2 \ ; \ 0 \leqslant j' \leqslant 2g-1 \ ; \ 1 \leqslant m \leqslant 2g \ ,$$

dépend du choix de

$$(\omega_i) \ , \ (\omega'_m) \ , \ (\sigma_j) \ , \ (e_k) \ ,$$

$$|A_\infty((\omega_i) \ , \ (\omega'_m) \ , \ (\sigma_j) \ , \ (e_k))| = \frac{Rd^{\frac{1}{2}}}{\Delta^{\frac{1}{2}}} \ ,$$

est un invariant de $F(E\mathfrak{p})$ qui apparaît dans la formule complexe des résidus.

Etant donnés (ω_i) , (ω'_m) , (σ_j) , (e_k) , on considère le nombre $\mathfrak{p}$-adique

$$A_p((\omega_i),(\omega'_m),(\sigma_j),(e_k)) = \frac{\det(\log_p \sigma_j(e_k))\ \det(\overline{\sigma}_j(\omega_i))}{\det(\sigma_{j'}(\omega'_m))} \ .$$

Parmi les bases (ω_i) , (ω'_m) , (e_k) et les permutations des groupes de Galois, on choisit ceux tels que

$$A_\infty((\omega_i) \ , \ (\omega'_m) \ , \ (\sigma_j) \ , \ (e_k)) > 0 \ .$$

Pour un tel choix, $A_p((\omega_i) \ , \ (\omega'_m) \ , \ (\sigma_j) \ , \ (e_k))$ ne dépend que de $F(E\mathfrak{p})$: on le note $R_p \ d^{\frac{1}{2}}/\Delta^{\frac{1}{2}}$.

La formule $\mathfrak{p}$-adique des résidus s'écrit sous la forme suivante.

THÉORÈME 4. - $\prod_{\chi \neq 1} L_{\mathfrak{p}}(\psi,\chi',1) = \gamma^{g-1}\ h\ \frac{\omega}{\omega_{F(E\mathfrak{p})}} \ . \ R_p\ d^{\frac{1}{2}}/\Delta^{\frac{1}{2}} \prod_{q \in S} (1 - Nq^{-1})$, _où_ S _désigne l'ensemble des premiers de_ $F(E\mathfrak{p})$ _au-dessus de_ $\mathfrak{p}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTHAUD (N.). - On Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for elliptic curve with complex multiplication, I (à paraître).

[2] CASSOU-NOGUÈS (P.). - On $\mathfrak{p}$-adic L-functions for elliptic curves, I (à paraître).

[3] CASSOU-NOGUÈS (P.). - On $\mathfrak{p}$-adic L-functions for elliptic curves, II (à paraître).

[4] COATES (J.). - p-adic L-functions and Iwasawa's theory, "Algebraic number fields", p. 269-353. - London, Academic Press, 1977.

[5] COATES (J.) and WILES (A.). - On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math., t. 39, 1977, p. 223-251.

[6] FRÖHLICH (A.). - Formal groups. - Berlin, Springer-Verlag, 1968 (Lecture Notes in Mathematics, 74).

[7] HECKE (E.). - Mathematische Werke. - Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1959.

[8] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L-functions. - Princeton, Princeton University Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 74).

[9] IWASAWA (K.). - On p-adic L-functions, Annals of Math., t. 89, 1969, p. 198-205.

[10] LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, II., J. reine und angew. Math., t. 274-275, 1975, p. 224-239.

[11] LICHTENBAUM (S.). - On p-adic L-functions associated to elliptic curves (à paraître).

[12] LUBIN (J.). - One parameter formal Lie groups over p-adic integer rings, Annals of Math., t. 80, 1964, p. 464-484.

[13] LUBIN (J.) and TATE (J.). - Formal complex multiplication in local fields, Annals of Math., t. 81, 1965, p. 380-387.

[14] ROBERT (G.). - Unités elliptiques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 36, 1973, 77 p.

[15] SHIMURA (G.). - Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. - Princeton, Princeton University Press, 1971 (Publications of the mathematical Society of Japan, 11).

[16] SIEGEL (C. L.). - Lectures on advanced analytic number theory. - Bombay, Tata Institute, 1961 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 23).

[17] TATE (J.). - Arithmetic of elliptic curves, Invent. Math., t. 23, 1974, p. 179-206.

(Texte reçu le 29 juillet 1977)

Pierrette CASSOU-NOGUÈS
9 rue Ségalier
33000 BORDEAUX