

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

DANIEL BARSKY

Polynômes eulériens modulo p^h

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 11, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A10_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POLYNÔMES EULÉRIENS modulo p^h

par Daniel BARSKY

RÉSUMÉ. - On montre que, pour tout nombre premier p , la fonction génératrice des polynômes eulériens, $A_n(t)$, est une fonction analytique p -adique au sens de Krasner sur certains sous-ensembles de $\mathbb{C}_p$. On déduit de ce résultat des congruences entre les polynômes eulériens. En particulier, on montre que, pour tout entier $h \geq 0$, la suite de fractions rationnelles

$$A_n^*(t) = \frac{t}{(t-1)^{n+1}} A_n(t) - p^n \frac{t^p}{(t^p-1)^{n+1}} A_n(t^p)$$

est périodique modulo p^h de période $(p-1)p^{h-1}$.

Introduction et notations.

Les polynômes eulériens, $A_n(t)$, ont pour fonction génératrice de Hurwitz [10]

$$\sum_{n \geq 0} A_n(t) \frac{u^n}{n!} = \frac{1-t}{-t + e^{u(t-1)}}.$$

Ce sont des polynômes qui s'introduisent naturellement dans des problèmes d'énumération concernant le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble totalement ordonné $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ [10]. Il est dès lors assez naturel de s'intéresser aux propriétés des polynômes eulériens, et en particulier au comportement de la suite $n \rightarrow A_n(t)$ modulo les puissances d'un nombre premier.

Nous suivons les notations d'Y. AMICE [1]. Soit p un nombre premier, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}_+$ ont leur signification habituelle ; $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ désignent respectivement l'anneau des entiers p -adiques et le corps des nombres p -adiques munis de la valeur absolue p -adique normalisée par $|p| = p^{-1}$; $\mathbb{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, sa valeur absolue est encore normalisée par $|p| = p^{-1}$ [1]. On sait depuis les travaux d'AMICE et FRESNEL qu'il y a un lien entre la prolongeabilité analytique au sens de Krasner d'une série de Taylor

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{C}_p[[X]],$$

sur un quasi-connexe de $\mathbb{C}_p$ contenant le disque de convergence de la série et des congruences entre les a_n .

Le théorème de Mittag-Leffler p -adique ([1], [12]), par les inégalités de type Cauchy qu'il fournit, permet d'établir un lien étroit entre les propriétés de prolongeabilité analytique sur un quasi-connexe de $\mathbb{C}_p$ de $F(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{C}_p[[X]]$ et des congruences entre les a_n (cf. [12] ainsi que [3], [5], [6], [7] et [8]).

Rappelons que l'on dit qu'une fonction F , définie sur un sous-ensemble $B \subset \mathbb{C}_p$ à valeurs dans $\mathbb{C}_p$, est un élément analytique sur B si F est une limite uniforme sur B d'une suite de fractions rationnelles de $\mathbb{C}_p(X)$ sans pôles dans B .

La norme de la convergence uniforme sur B est notée $\| \cdot \|_B$, donc

$$\|F\|_B = \sup_{X \in B} |F(X)|.$$

On note $H(B)$, respectivement $H_0(B)$, l'espace de Banach des éléments analytiques sur B , respectivement des éléments analytiques sur B nuls à l'infini, muni de la norme de la convergence uniforme sur B . On note, si $a \in \mathbb{C}_p$ et si $\rho \in \mathbb{R}_+$, $B(a, \rho^+) = \{X \in \mathbb{C}_p; |X - a| \leq \rho\}$, resp. $B(a, \rho^-) = \{X \in \mathbb{C}_p; |X - a| < \rho\}$, la boule fermée, respectivement ouverte, de centre a et de rayon ρ . Si $(C_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est une suite croissante de quasi connexes de $\mathbb{C}_p$ ([1], [11]), on dira que F est une fonction analytique sur $C \subset \bigcup_{i \in \mathbb{I}} C_i$, si F est un élément analytique sur chacun des C_i . Nous désignons par ρ , r et ε des réels > 0 . Nous posons $q = p$ si $p > 2$, et $q = 4$ si $p = 2$. Si $a \in \mathbb{R}_+$, $[a]$ est la partie entière de a , c'est-à-dire que $[a] \in \mathbb{N}$ et $a - 1 < [a] \leq a$. Il sera commode d'étudier les fractions rationnelles

$$A_n^*(t) = \frac{t}{(t-1)^{n+1}} A_n(t) - p^n \frac{t^p}{(t^p-1)^{n+1}} A_n(t^p)$$

et leur fonction génératrice

$$G_t(v) = \sum_{n \geq 0} A_n^*(t) v^n.$$

Cette modification des $A_n(t)$ permet d'avoir des congruences qui s'expriment simplement en termes de fonctions continues, analytiques, etc., p -adiques.

Nous posons, si $\varepsilon > 0$ et si $B \subset \mathbb{C}_p$,

$$\mathcal{V}_\varepsilon(B) = \{X \in \mathbb{C}_p; |X - b| \geq \varepsilon \text{ pour tout } b \in B\}.$$

Il est clair que si B est compact, $\mathcal{V}_\varepsilon(B)$ est un quasi-connexe ([11] ou [1]). Nous posons $Z_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p; |x| = 1\}$. Notons Γ_p le groupe des racines p -ièmes de l'unité. Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$, l'application $v \rightarrow G_t(v)$ appartient à $H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(Z_p^*))$, et $\|G_t\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(Z_p^*)} \leq 1/\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où nous déduisons que $k \rightarrow A_{i+k(p-1)}^*(t)$ est la restriction d'une fonction de l'algèbre d'Iwasawa sur $\mathbb{Q}_p(t)$ (théorème 1, proposition 1 et corollaire 1). Si $1 \geq \rho > p^{-1/(p-1)}$ et si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, \rho^+)$, nous montrons que $v \rightarrow G_t(v)$ est une fonction analytique sur $\mathcal{V}_r(Z_p^*)$, où r dépend de ρ de manière explicite; en outre, nous donnons la croissance de $v \rightarrow G_t(v)$ sur le bord de $\mathcal{V}_r(Z_p^*)$. Ce résultat implique que $k \rightarrow A_{i+k(p-1)}^*(t)$ est la restriction d'une fonction localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ dont nous donnons une estimation du rayon d'analyticité locale (théorème 1, proposition 2 et corollaire 2). Enfin si $t \in \mathbb{C}_p - \bigcup_{\xi \in \Gamma_p} B(\xi, \rho^+)$, où $0 < \rho < p^{-1/(p-1)}$, alors $v \rightarrow G_t(v)$ est une fonction analytique bornée sur $B(0, r^-)$, où r dépend explicitement de ρ , et nous donnons une estimation de $\|G_t\|_{B(0, r^-)}$; de là nous déduisons une estimation de la norme p -adique de $A_n^*(t)$ pour

$$t \in \mathbb{C}_p - \bigcup_{\xi \in \Gamma_p} B(\xi, \rho^+).$$

Les deux premiers résultats permettent d'obtenir, via des théorèmes de J.-P. SERRE

et Y. AMICE, des congruences sur les quantités $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A_{i+k(p-1)}^*(t)$, des estimations p -adiques de $A_n^*(t) - A_{n+(p-1)p}^*(t)$, ainsi que des estimations en norme de Gauss de la même quantité (i. e. des congruences entre fractions rationnelles formelles).

2. Fonctions génératrices des polynômes eulériens.

Par définition [10], la fonction génératrice de Hurwitz des polynômes eulériens $A_n(t)$ est

$$\sum_{n \geq 0} A_n(t) \frac{u^n}{n!} = \frac{1-t}{-t + e^{u(t-1)}} = \tilde{F}_t(u).$$

Donc

$$\tilde{F}_t(u) = \left(1 - \frac{e^{u(t-1)}}{t-1}\right)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^{u(t-1)} - 1}{t-1}\right)^n,$$

la dernière série convergeant formellement en u . Posons $v = u(t-1)$, il vient

$$\tilde{H}_t(v) = \sum_{n \geq 0} \frac{A_n(t)}{(t-1)^n} \frac{v^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^v - 1}{t-1}\right)^n,$$

la dernière série convergeant formellement en v (i. e. v -adiquement). Nous allons étudier la série génératrice ordinaire de $A_n(t)/(t-1)^n$, pour cela nous allons utiliser la transformation de Laplace formelle $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{C}_p(t)[[v]]$, c'est-à-dire sur l'espace des séries formelles en v à coefficients fractions rationnelles en t sur $\mathbb{C}_p$. Si

$$\tilde{f}_t(v) = \sum_{n \geq 0} a_n(t) \frac{v^n}{n!} \in \mathbb{C}_p(t)[[v]],$$

nous posons par définition

$$\mathcal{L}(\tilde{f}_t(v)) = f_t(v) = \sum_{n \geq 0} a_n(t) v^n.$$

On remarque que $\mathcal{L}$ est une application $\mathbb{C}_p(t)$ -linéaire de $\mathbb{C}_p(t)[[v]]$ dans lui-même qui est v -adiquement continue. On a

$$\mathcal{L}(e^{av}(e^{bv}-1)^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (1-(a+bk)v)^{-1} = \frac{(n!)v^n b^n}{(1-av)(1-(a+b)v)\dots(1-(a+nb)v)}.$$

$$\text{On pose } \mathcal{L}(e^{av}(e^{bv}-1)^n) = \left[\begin{matrix} n \\ a, b, v \end{matrix} \right].$$

LEMME 1. - Si

$$H_t(v) = \mathcal{L}(\tilde{H}_t(v)) = \sum_{n \geq 0} \frac{A_n(t)}{(t-1)^n} v^n,$$

alors

$$H_t(v) = \sum_{n \geq 0} (t-1)^{-n} \left[\begin{matrix} n \\ 0, 1, v \end{matrix} \right].$$

Démonstration. - C'est évident, car $\tilde{H}_t(v) = \sum_{n \geq 0} (t-1)^{-n} (e^v - 1)^n$, donc

$$H_t(v) = \mathcal{L}(\tilde{H}_t(v)) = \sum_{n \geq 0} (t-1)^{-n} \mathcal{L}((e^v - 1)^n).$$

Q. E. D.

LEMME 2. - Pour tout entier $h \geq 1$, $H_t(v)$ est modulo $p^h \mathbb{C}_p(t)[[v]]$ une série formelle reconnaissable en les deux variables commutatives v et t .

Pour les définitions et les propriétés des séries formelles reconnaissables, voir [9].

Démonstration. - Soit N un entier tel que p^h divise $N!$, alors

$$H_t(v) = \sum_{n=0}^N (t-1)^{-n} \left[\begin{matrix} n \\ 0, 1, v \end{matrix} \right] \text{ mod}(p^h \mathbb{C}_p(t)[[v]]) .$$

Le second membre est de la forme

$$\frac{P(v, t)}{(t-1)^N (1-v)(1-2v)\dots(1-nv)} \quad \text{où } P(v, t) \in \mathbb{C}_p[t, v],$$

c'est donc une fraction rationnelle reconnaissable en les variables commutatives v et t [9].

Q. E. D.

3. Polynômes eulériens modulo p^h .

Nous allons interpréter p -adiquement la formule

$$H_t(v) = \sum_{n \geq 0} \frac{A_n(t)}{(t-1)^n} v^n = \sum_{n \geq 0} (t-1)^{-n} \left[\begin{matrix} n \\ 0, 1, v \end{matrix} \right] .$$

Dorénavant t et v sont des éléments de certains sous-ensembles de $\mathbb{C}_p$.

LEMME 3. - Pour tout $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$ et tout $v \in B(0, 1^-)$, on a $|H_t(v)| \leq 1$.

Démonstration. - On sait (Cf. [3]) que

$$\sup_{v \in B(0, 1^-)} |H_t(v)| = \sup_{n \geq 0} \left| \frac{n!}{(t-1)^n} \right| .$$

Q. E. D.

On tire du lemme 3 que, pour $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$, $H_t(v) \in H(B(0, 1^-))$, et que l'on a uniformément, pour $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$, $\sup_{v \in B(0, 1^-)} |H_t(v)| \leq 1$.

Pour obtenir des congruences modulo p^h entre les $(t-1)^{-n} A_n(t)$, on choisit N tel que $|N!| \leq p^{-h}$, alors

$$\sup_{t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)} \left\| H_t(v) - \sum_{n=0}^{N-1} (t-1)^{-n} \left[\begin{matrix} v \\ 0, 1, v \end{matrix} \right] \right\|_{B(0, 1^-)} \leq p^{-h} .$$

Posons $H_{h,t}(v) = \sum_{n=0}^{N-1} (t-1)^{-n} \left[\begin{matrix} n \\ 0, 1, v \end{matrix} \right]$. En revenant à la définition $\left[\begin{matrix} n \\ 0, 1, v \end{matrix} \right]$, il vient

$$H_{h,t}(v) = \sum_{n=0}^{N-1} B_n(t) (1-nv)^{-1} ,$$

où $B_n(t) \in \mathbb{C}_p(t)$ et $\sup_{t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)} |B_n(t)| \leq 1$. D'après le petit théorème de Fermat,

$$n^{(p-1)p^{h-1}} \equiv 1 \text{ mod}(p^h) \quad \text{si } n \text{ est premier à } p ,$$

et

$$|n^k| \leq p^{-k} \quad \text{si } p \text{ divise } n.$$

De là, il vient immédiatement, en développant $H_{h,t}(v)$ en série de puissances de v ,

$$\sup_{t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)} \left| \frac{A_n(t)}{(t-1)^n} - (t-1)^{-n-(p-1)p^{h-1}} A_{n+(p-1)p^{h-1}}(t) \right| \leq p^{-h}$$

pour $n \geq h$. En particulier, d'après les inégalités de Cauchy [1], on a, pour $n \geq h$,

$$(t-1)^{-n} A_n(t) - (t-1)^{-n-(p-1)p^{h-1}} A_{n+(p-1)p^{h-1}}(t) = p^h (t-1)^{-n-(p-1)p^{h-1}} P_{n,h}(t)$$

où $P_{n,h}(t) \in \mathbb{Z}_p[t]$.

Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$, les congruences précédentes ne sont obtenues que pour $n \geq h$, ce qui est peu agréable. Pour nous débarrasser de cette condition, nous allons modifier quelque peu $H_t(v)$. En fait, nous allons calculer la partie singulière $H_{\infty,t}(v)$ de $H_t(v)$ relative au trou à l'infini $\mathbb{C}_p - B(0, 1^+)$ du quasi-connexe $B(0, 1^-)$ (Cf. [1], [11], [12]). C'est-à-dire que $H_{\infty,t}(v)$ est, d'après le théorème de Mittag-Leffler p -adique, l'unique élément analytique sur $B(0, 1^+)$ tel que $H_t(v) - H_{\infty,t}(v)$ soit un élément analytique sur $\{X \in \mathbb{C}_p; |X| \neq 1\}$, nul à l'infini. Nous trouverons aussi une relation fonctionnelle simple entre $H_{\infty,t}(v)$ et $H_t(v)$:

$$H_{\infty,t}(v) = \frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p-1} H_{t^p}(pv).$$

Nous obtenons, pour $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$ et pour $\varepsilon > 0$, un élément analytique sur $\mathbb{V}_{\varepsilon}(\mathbb{Z}_p^*)$:

$$G_t(v) = \frac{t}{t-1} H_t(v) - \frac{t^p}{t^p-1} H_{t^p}(pv).$$

Ceci nous fournira des congruences entre les

$$A_n^*(t) = \frac{t}{(t-1)^{n+1}} A_n(t) - p^n \frac{t^p}{(t^p-1)^{n+1}} A_n(t^p),$$

qui s'expriment simplement à l'aide des notions de fonctions continues, respectivement lipschitziennes, respectivement localement analytiques, respectivement de l'algèbre d'Iwasawa p -adiques. Nous allons réaliser maintenant ce programme.

LEMME 4. - Si $A_n^*(t) = \frac{1}{t-1} A_n(t) - \frac{t^p}{t^p-1} A_n(t^p)$, alors

$$G_t(v) = \sum_{n \geq 0} A_n^*(t) v^n = \frac{t}{t-1} H_t(v) - \frac{t^p}{t^p-1} H_{t^p}(pv) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n \geq 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p-1)^{n+1}} \left[\begin{matrix} n \\ i, p, v \end{matrix} \right]$$

Démonstration. - On a

$$\tilde{H}_t(v) = \frac{1-t}{-t+e^v} = \frac{t-1}{t} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{e^{iv}}{t^i} (1 - \frac{e^{pv}}{t^p})^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p-1} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{e^{iv}}{t^i} \left(1 - \frac{e^{pv}-1}{t^p-1}\right)^{-1} \\
&= \frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p-1} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{e^{iv}}{t^i} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^{pv}-1}{t^p-1}\right)^n.
\end{aligned}$$

On constate que, pour $i = 0$, on a

$$\frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p-1} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^{pv}-1}{t^p-1}\right)^n = \frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p-1} \mathbb{H}_{t^p}(pv).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{t}{t-1} \mathbb{H}_t(v) - \frac{t^p}{t^p-1} \mathbb{H}_{t^p}(pv) &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{t}{(t-1)^{n+1}} A_n(t) - \frac{t^p}{(t^p-1)^{n+1}} A_n(t^p) \right) \frac{v^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} A_n^*(t) \frac{v^n}{n!} \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n \geq 0} e^{iv} \frac{t^{p-i}}{t^p-1} \left(\frac{e^{pv}-1}{t^p-1}\right)^n.
\end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur $\mathcal{E}$ dans les égalités précédentes, il vient

$$\sum_{n \geq 0} A_n^*(t) v^n = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n \geq 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p-1)^{n+1}} \left[i, \begin{matrix} n \\ p \end{matrix}, v \right] = \frac{t}{t-1} \mathbb{H}_t(v) - \frac{t^p}{t^p-1} \mathbb{H}_{t^p}(pv).$$

Q. E. D.

En fait, ce lemme exprime que la partie singulière $H_{\infty,t}(v)$ de $H_t(v)$, dans la décomposition du théorème de Mittag-Leffler p -adique relative au trou à l'infini du quasi-connexe $B(0, 1^-)$, est

$$H_{\infty,t}(v) = \frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p-1} \mathbb{H}_{t^p}(pv).$$

Nous allons étudier $G_t(v)$ suivant les valeurs du paramètre t dans $\mathbb{C}_p$.

THÉOREME 1. - Soit $G_t(v) = \sum_{n \geq 0} A_n^*(t) v^n$.

(i) Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$G_t \in H_0(\mathcal{V}_{\varepsilon}(\mathbb{Z}_p^*)) \text{ et } \|G_t\|_{\mathcal{V}_{\varepsilon}(\mathbb{Z}_p^*)} \leq 1/\varepsilon.$$

(ii) Si $1 \geq \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > p^{-1/(p-1)}$, soit $h = \lceil -(\log(\alpha)/\log(p)) \rceil$ et $h'' \in \mathbb{R}_+$, défini par $h < h'' = h - (\alpha p^{h+1} - p)/(p-1) \leq h+1$. Alors, si $h < h' < h'' \leq h+1$ et si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, \rho^+)$,

$$G_t \in H_0(\mathcal{V}_{p^{-h'}}(\mathbb{Z}_p^*)) \text{ et } \|G_t\|_{\mathcal{V}_{p^{-h'}}(\mathbb{Z}_p^*)} \leq \frac{(ep)^{h+2}}{h'' - h'}.$$

(iii) Soit Γ_p le groupe des racines p -ièmes de l'unité. Soit

$$p^{-1/(p-1)} > \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > 0.$$

Si $t \in \mathbb{C}_p - \bigcup_{\xi \in \Gamma_p} B(\xi, \rho^+)$, alors G_t est une fonction analytique bornée sur $B(0, r^-)$, pour $r = \rho p^{1/(p-1)}$, et

$$\|G_t\|_{B(0, r^-)} \leq \frac{ep}{\alpha-1} p^{\alpha/(p-1)}.$$

Démonstration. - Le théorème découlera des formules suivantes. Si $p > 2$,

$$(1) \quad G_t(v) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n \geq 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \left[i, p, v \right],$$

$$(2) \quad G_t(v) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n \geq 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \frac{n! p^n v^n}{(1-iv)(1-(i+p)v) \dots (1-(i+np)v)},$$

$$(3) \quad G_t(v) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n \geq 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (1 - (i + pk)v)^{-1},$$

et si $p = 2$, on utilisera aussi la formule

$$(4) \quad G_t(v) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{t^3}{(t^4 - 1)^{n+1}} \left[1, q, v \right] + \frac{t}{(t^4 - 1)^{n+1}} \left[3, q, v \right] \right).$$

Le lemme suivant est fondamental pour les évaluations de norme.

LEMME 5. - Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, soit $h \in \mathbb{N}$ tel que $p^{-h} > \varepsilon \geq p^{-(h+1)}$, et soit $h' = -\log(\varepsilon)/\log(p)$. Posons

$$r(\varepsilon, n) = \sum_{i \geq 0} \left\lfloor \frac{n}{p^{h+i}} \right\rfloor - (h' - h) \left\lfloor \frac{n+1}{p^h} \right\rfloor \quad \text{et} \quad r(n) = \sum_{i \geq 0} \left\lfloor \frac{n}{p^{i+1}} \right\rfloor.$$

Alors

$$\left\| \left[i, p, v \right] \right\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)} \leq p^h p^{-r(\varepsilon, n)}.$$

Démonstration. - Posons

$$s(\varepsilon, n) = \sum_{i=1}^{h-1} \left\lfloor \frac{n+1}{p^i} \right\rfloor + (h' - h) \left\lfloor \frac{n+1}{p^h} \right\rfloor.$$

Pour $1 \leq i \leq p-1$ et pour $v \in \mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)$, $|v| \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} |(1-iv)(1-(i+p)v) \dots (1-(i+np)v)| &\geq |(1-iv) \dots (1-(i+p(p^h-1))v)|^{1+\lfloor (n+1)/p^h \rfloor}, \\ &\geq p^{-n-1-s(\varepsilon, n)}. \end{aligned}$$

Or $|n!| = p^{-r(n)}$ et $0 \leq \lfloor (n+1)/p^i \rfloor - \lfloor n/p^i \rfloor \leq 1$, donc

$$-r(n) + s(\varepsilon, n) \leq h-1 + (h' - h) \left\lfloor \frac{n+1}{p^h} \right\rfloor - \sum_{i \geq 0} \left\lfloor \frac{n}{p^{i+1}} \right\rfloor.$$

Si $|v| > 1$, alors $|(1-iv) \dots (1-(i+np)v)| = |v|^{n+1}$. D'où le résultat

$$\left\| \left[i, p, v \right] \right\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)} \leq p^{h-r(\varepsilon, n)}.$$

Q. E. D.

Nous sommes en mesure de démontrer le théorème.

(i) Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$, alors pour $1 \leq i \leq p-1$, $|t^{p-i}/(t^p - 1)^{n+1}| = 1$ donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \left[i, p, v \right] \right\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)} = 0.$$

Par conséquent, si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$ et si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $G_t \in H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*))$. L'inégalité $\|G_t\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)} \leq 1/\varepsilon$ est triviale sur la formule 3 (Pour une autre démonstration, Cf. [8]).

(ii) Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, \rho^+)$ avec $1 \geq \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > p^{-1/(p-1)}$, on a

$$\left\| \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \left[i, p, v \right] \right\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(Z_p^*)} \leq (\rho)^{-p(n+1)} p^{h-r(\varepsilon, n)} \text{ pour } \varepsilon > 0.$$

Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, \rho^+)$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \left[i, p, v \right]$ converge si, et seulement si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n / \left((\rho)^{-p(n+1)} p^{h-r(\varepsilon, n)} \right) < 1 \quad (\text{Cf. [3]}),$$

c'est-à-dire si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left[i, p, v \right] \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \right\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(Z_p^*)} = 0,$$

c'est-à-dire, avec les notations du lemme 5, si

$$p(p\alpha/(p-1)) - (1/p^h)(p/(p-1)) + (h' - h)/p^h < 1$$

ou encore si

$$\frac{\alpha p^{h+1} - p}{(p-1)p^h} + \frac{(h' - h)(p-1)}{p^h(p-1)} < 0.$$

Pour réaliser cette dernière condition, il suffit que $\alpha p^{h+1} - p < 0$, donc que $h = -\log(\alpha)/\log(p)$ et que $h' < (p - \alpha p^{h+1})/(p-1) + h = h''$. Par conséquent, $G_t \in H_0(\mathcal{V}_{p-h'}(Z_p^*))$ avec $h' < h''$, et h'' comme ci-dessus. Nous allons évaluer maintenant

$$\|G_t\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(Z_p^*)}, \text{ où } p^{-h} > \varepsilon > p^{-h''}, \quad t \in \mathbb{C}_p - B(1, \rho^+)$$

et

$$1 > \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > p^{-1/(p-1)},$$

h et h'' comme ci-dessus. On a, sous ces hypothèses, d'après l'inégalité ultramétrique,

$$\|G_t\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(Z_p^*)} \leq \sup_{n \geq 0} (\rho)^{-n-1} p^{h-r(\varepsilon, n)}.$$

Compte tenu de l'expression de $r(\varepsilon, n)$ et ρ , on est ramené à trouver un majorant de

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 0} \left((n+1) \frac{p\alpha}{p-1} + h - \sum_{i \geq 0} \left[\frac{n}{p^{h+i}} \right] + (h' - h) \left[\frac{n+1}{p^h} \right] \right) \\ \leq \sup_{n \geq 0} \left((n+1) \frac{p\alpha}{p-1} + h - \frac{np^{-h+1}}{p-1} + \frac{\log(n)}{\log(p)} + (h' - h) \frac{n+1}{p^h} \right) \\ \leq \sup_{n \geq 0} (np^{-h}(h' - h'') + \frac{\log(n)}{\log(p)} + h + \frac{p\alpha}{p-1} + (h' - h)p^{-h}), \end{aligned}$$

pour la dernière inégalité, on a utilisé la définition de h'' .

Un petit calcul de variation de fonction montre que le maximum de

$$x \longrightarrow xp^{-h}(h' - h'') + \frac{\log(x)}{\log(p)} + h + \frac{p\alpha}{p-1} + p^{-h}(h' - h), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

est atteint pour $x = p^h/(h'' - h')\log(p)$, et vaut

$$- \frac{1}{\log(p)} - \log(h'' - h') + h(\log(p) + 1) - \log \log(p) + \frac{p\alpha}{p-1} + p^{-h}(h' - h).$$

Donc

$$\|G_t\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)} \leq \frac{(ep)^{h+2}}{h'' - h'} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = p^{-h'}.$$

La partie (ii) du théorème est démontrée.

(iii) Si $t \in \mathbb{C}_p - \bigcup_{\xi \in \mathbb{I}_p} B(\xi, \rho^+)$ avec $p^{-1/(p-1)} \geq \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > 0$. On sait [3] que, pour $1 \leq i \leq p-1$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n \left[\begin{smallmatrix} n \\ i, p, v \end{smallmatrix} \right]$ converge dans le disque de centre 0 et de rayon $\inf(1, 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| p^{-n} |n!|})$. Compte tenu de l'hypothèse faite sur t , on a ici

$$|a_n| = \left| \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \right| \leq \left(\frac{p}{\rho} \right)^{n+1},$$

donc $v \rightarrow G_t(v)$ converge pour $v \in B(0, r^-)$ avec $r = \rho p^{1/(p-1)} = p^{(1-\alpha)/(p-1)}$

Donc $G_t(v)$ est une fonction analytique sur $B(0, r^-)$. En outre, d'après l'inégalité ultramétrique,

$$\begin{aligned} \|G_t\|_{B(0, r^-)} &\leq \sup_{t \in \mathbb{C}_p - \bigcup_{\xi \in \mathbb{I}_p} B(\xi, \rho^+)} \sup_{n \geq 0} \left| \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} p^n n! \right| r^n \\ &\leq \sup_{n \geq 0} p^{n+1 + \frac{(n+1)\alpha}{p-1} - n - \frac{n}{p-1} + \frac{\log(n)}{\log(p)}} \leq p e^{\frac{p\alpha/(p-1)}{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

La troisième partie du théorème est démontrée.

Q. E. D.

Nous allons utiliser ce théorème pour obtenir des congruences entre les $A_n^*(t)$, via le théorème de Mittag-Leffler p -adique et les inégalités de Cauchy ([1], [11] et [12]).

PROPOSITION 1. - Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$, alors $n \rightarrow A_n^*(t)$ est, pour $n \equiv i \pmod{p-1}$, $p > 2$ (resp. $n \equiv i \pmod{2}$), la restriction d'une fonction de l'algèbre d'Iwasawa sur $\bigoplus_{i=1}^{p-1} t^{p-i}/t^{p-1} \mathbb{Z}_p[1/t^{p-1}]$.

(Pour la définition de l'algèbre d'Iwasawa, Cf. [13].)

Démonstration. - D'après le théorème 1, si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$, $G_t \in H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*))$ pour $1 > \varepsilon > 0$. D'après le théorème de Mittag-Leffler p -adique,

$$H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)) = \bigoplus_{i=1}^{p-1} H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(i + p\mathbb{Z}_p)), \quad p > 2$$

(resp. $H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_2)) = H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(1 + 4\mathbb{Z}_2)) \oplus H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(3 + 4\mathbb{Z}_2))$), algébriquement et topologiquement. On en déduit que l'on peut écrire, de manière unique,

$$G_t(v) = \sum_{i=1}^{p-1} G_{t,i}(v), \quad \text{où} \quad G_{t,i} \in H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(i + p\mathbb{Z}_p))$$

et

$$\sup_{1 \leq i \leq p-1} \|G_{t,i}\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(i + p\mathbb{Z}_p)} = \|G_t\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)} \leq 1/\varepsilon.$$

La conclusion de la proposition est immédiate d'après [8] ou [3].

Q. E. D

On déduit de là, en utilisant une caractérisation de l'algèbre d'Iwasawa due à J.-P. SERRE [13], le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - Pour $0 \leq i \leq p-1$ et pour $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$, on a en posant $\delta_{i,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A_{i+k(p-1)}^*(t)$ et $\sum_{j=1}^n c_{j,n} Y^j = Y(Y-1)\dots(Y-n+1)$, $n \geq 1$,

$$1^\circ \quad |\delta_{i,n}| \leq p^{-n},$$

$$2^\circ \quad \left| \sum_{j=1}^n c_{j,n} \delta_{i,j} p^{-j} \right| \leq |n!|.$$

Nous allons maintenant utiliser la deuxième partie du théorème.

PROPOSITION 2. - Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, \rho^+)$ avec $1 \geq \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > p^{-1/(p-1)}$, alors $n \rightarrow A_{i+n(p-1)}^*(t)$ est la restriction d'une fonction localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ (i. e. c'est une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$ qui est germe d'une fonction analytique en chaque point de $\mathbb{Z}_p$).

Démonstration. - D'après le théorème de Mittag-Leffler p-adique, on a, pour $\varepsilon = p^{-h'} > p^{-h''}$ et $\varepsilon > p^{-1}$ (h'' comme au théorème 1 (ii)),

$$H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)) = \bigoplus_{i=1}^{p-1} H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(\xi_i + p\mathbb{Z}_p^*))$$

algébriquement et topologiquement (ξ_i est une racine $(p-1)$ -ième de l'unité).

On a donc, de manière unique,

$$G_t(v) = \sum_{i=1}^{p-1} G_{t,i}(v) \quad \text{où} \quad G_{t,i} \in H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(\xi_i + p\mathbb{Z}_p^*))$$

et

$$\sup_{1 \leq i \leq p-1} \|G_{t,i}\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\xi_i + p\mathbb{Z}_p^*)} = \|G_t\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)}.$$

On a donc

$$G_{t,i}(v) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n(t, i) \frac{v^{n-1}}{(1 - \xi_i^{-1} v)^n}, \quad \text{avec} \quad |\lambda_n(t, i)| p^{h'n} \leq \frac{(pe)^{h+2}}{h'' - h'}.$$

Par conséquent, $A_k^*(t) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n \geq 1} \lambda_n(t, i) \xi_i^{-k} \binom{k}{n}$. Donc, d'après le corollaire 3 du théorème 3 de [2], la suite $k \rightarrow A_{j+k(p-1)}^*(t)$ est la restriction d'une fonction localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$.

Q. E. D.

Le même théorème de [2] nous permettrait de calculer le rayon d'analyticité locale de $k \rightarrow A_{j+k(p-1)}^*(t)$, mais les formules sont lourdes.

COROLLAIRE 2. - Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, \rho^+)$,

$$1 \geq \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > p^{-1/(p-1)},$$

et si $0 < h' < 1$ et $h' < h''$ (h'' comme au théorème 1 (ii)), on a

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A_{j+k(p-1)}^*(t) \right| \leq p^{-h'n} \frac{(pe)^{h+2}}{h'' - h'}.$$

Démonstration. - Un calcul élémentaire sur les coefficients binomiaux montre que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{j+k(p-1)}{m} = 0$$

si $m < n$ et que

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (j + \frac{k(p-1)}{m}) \right| \leq 1.$$

Donc

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A_{j+k(p-1)}^*(t) \right| \leq \sup_{1 \leq i \leq p-1} |\lambda_n(t, i)|.$$

Q. E. D.

On aurait pu utiliser le théorème 3 de [2] pour démontrer ce corollaire.

En fait, pour la proposition 2 et son corollaire, on n'a utilisé qu'une partie des résultats contenus dans le théorème 1 (ii), mais les énoncés deviennent lourds si on essaye de les utiliser tous.

PROPOSITION 3. - Si $t \in \mathbb{C}_p - \bigcup_{\xi \in \Gamma_p} B(\xi, \rho^+)$, où $0 < \rho = p^{-\alpha/(p-1)} < p^{-1/(p-1)}$, si $r = p^{1/(p-1)}$, on a

$$|A_n^*(t)| r^n \leq e p^{\frac{\alpha/(p-1)}{\alpha-1}}.$$

Démonstration. - On applique les inégalités de Cauchy à $G_t(v)$ sur $B(0, r^-)$.

Q. E. D.

PROPOSITION 4. - Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, (p^{-1/(p-1)})^+)$, il existe $M(t) \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|A_n^*(t) - A_{n+(p-1)p}^*(t)| \leq M(t) p^{-h}.$$

Démonstration. - L'application $k \rightarrow A_{j+k(p-1)}^*(t)$ est la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ si t vérifie la condition de la proposition. Elle est donc lipschitzienne d'après [4].

Q. E. D.

La constante $M(t)$ est calculable d'après [4]. En particulier, si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$, on a $M(t) = 1$ d'après la proposition 1 et la définition de l'algèbre d'Iwasawa. La proposition 4 donne alors une propriété de congruences entre fractions rationnelles formelles. On note, si $P(t) = \sum_{i=1}^n a_i t^i$, $\|P\|_1 = \sup_i |a_i|$ et si $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \in \mathbb{C}_p(t)$, on pose $\|R\|_1 = \|P\|_1 / \|Q\|_1$, c'est la norme de Gauss sur $\mathbb{C}_p(t)$. D'après les inégalités de Cauchy, et si $Q(t)$ n'a pas de racines dans $B(0, 1^-)$, on a

$$\|R\|_1 = \sup_{t \in B(0, 1^-)} \left| \frac{P(t)}{Q(t)} \right|.$$

La proposition 4 a alors pour corollaire le résultat suivant.

COROLLAIRE 3. - Dans $\mathbb{C}_p(t)$, muni de la norme de Gauss, on a les inégalités suivantes :

$$\|A_n^*(t) - A_{n+(p-1)p}^*(t)\|_1 \leq p^{-h}$$

et

$$\left\| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A_{i+k(p-1)}^*(t) \right\|_1 \leq p^{-n}.$$

Démonstration. - Les polynômes $t - 1$ et $t^p - 1$ n'ont pas de racines dans

$B(0, 1^-)$, et en outre, $B(0, 1^-) \subset \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$.

Q. E. D.

On peut obtenir d'autres congruences dans $\mathbb{C}_p(t)$ muni de la norme de Gauss en utilisant d'autres boules que $B(0, 1^-)$ contenue dans $\mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$.

Conclusion. - A l'aide de considération d'analyse p -adique, on a pu étudier la suite $n \longrightarrow A_n^*(t)$ modulo p^h suivant les valeurs de $t \in \mathbb{C}_p$. Mais en fait, le théorème 1 est plus riche que la réunion des propositions 1, 2, 3, 4 et corollaires, et c'est à partir de lui que l'on peut obtenir les meilleures informations sur la suite $n \longrightarrow A_n^*(t)$ modulo p^h (pour compléter le théorème, il faudrait étudier le comportement de $G_t(v)$ pour $|t - 1| = p^{-1/(p-1)}$).

On peut aussi présenter les calculs et les résultats donnés dans cet exposé en terme de transformation de Cauchy p -adique des distributions, en généralisant les résultats sur la transformation de Cauchy des mesures donnés dans [8].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). - Nombres p -adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).
- [2] AMICE (Y.). - Interpolation p -adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).
- [3] BARSKY (D.). - Algèbre d'Iwasawa, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 2, 10 p.
- [4] BARSKY (D.). - Fonctions k -lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 397-411.
- [5] BARSKY (D.). - Analyse p -adique et nombres de Bell, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282, 1976, Série A, p. 1257-1259.
- [6] BARSKY (D.). - Analyse p -adique et nombres de Bernoulli, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283, 1976, Série A, p. 1069-1072.
- [7] BARSKY (D.). - Analyse p -adique et nombres de Bernoulli-Hurwitz, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 137-140.
- [8] BARSKY (D.). - Transformation de Cauchy et Algèbre d'Iwasawa (à paraître).
- [9] FLIESS (M.). - Matrices de Hankel, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 53, 1974, p. 198-222.
- [10] FOATA (D.) et SCHUTZENBERGER (M.). - Théorie géométrique des polynômes eulériens. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 138).
- [11] KRASNER (M.). - Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la méthode des éléments analytiques quasi connexes, "Table ronde d'Analyse non archimédienne [1972. Paris]", Bull. Soc. math. France, Mémoires n° 39-40, 1974, p. 131-254.
- [12] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.

- [13] SERRE (J.-P.). - Fonctions zéta p -adiques, "Modular functions of one variable [1972. Antwerp]", p. 192-268. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

(Texte reçu le 27 juillet 1977)

Daniel BARSKY
Mathématiques
Université Paris-7, Tour 45-55
2 place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05