Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Philippe Robba

Lemme de Schwarz p-adique pour plusieurs variables

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, nº 2 (1975-1976), exp. nº J9, p. J1-J12
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A8_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° J9, 12 p.

Journées d'analyse ultramétrique
[1976. Marseille-Luminy]

LEMME DE SCHWARZ p-ADIQUE POUR PLUSIEURS VARIABLES

par Philippe ROBBA

Nous nous proposons de répondre aux questions posées par D. BERTRAND, lors des Journées ultramétriques de Lumigny [1]. Nous conseillons au lecteur de lire son exposé à titre d'introduction. Les résultats ci-après n'ont, bien entendu, pas été exposés à Lumigny (ils ont été exposés pour la première fois à Oberwolfach en septembre 1976), mais il a paru souhaitable de les faire voisiner ici avec l'exposé de BERTRAND.

Cet exposé comprend deux parties. La première est consacrée à une généralisation du lemme de Schwarz pour plusieurs variables démontré par SERRE (pour toutes les références se reporter à l'article de BERTRAND). Nous montrerons comment tenir compte de la multiplicité des zéros, et comment s'affranchir de l'hypothèse que les zéros sont bien distribués. Comme nous l'a fait remarquer Y. AMICE, les calculs que nous faisons sont valables dans le cas d'un corps non localement compact, mais comme les énoncés sont plus simples dans le cas d'un corps localement compact, nous ne ferons que donner des indications dans le cas général.

La deuxième partie est consacrée aux problèmes d'approximation. Nous généralisons au cas de plusieurs variables la majoration de BEZIVIN et BERTRAND, et nous montrons comment améliorer cette estimation lorsque le corps est localement compact et que la famille des points d'interpolation est bien répartie. Dans ce dernier cas, on améliore même un résultat de SCHINZEL établi pour une variable.

Traditionnellement, pour traiter ce genre de problème , on s'inspirait des méthodes complexes, et on utilisait les polynômes d'interpolation. Les méthodes utilisées ici sont purement p-adiques, et, partant, beaucoup plus simples. La fonction de valuation est incontestablement l'outil le plus adapté à ce genre de problème.

1. Lemme de Schwarz.

1.1. La fonction de valuation. Multiplicité. - Soit K un corps valué ultramétrique complet de caractéristique 0 . Nous noterons $|.|$ la valeur absolue sur K .

Soit d un entier $\geqslant 1$. Nous munissons K^d de la norme

$$\|x\| = \max_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i| .$$

Pour $a \in K^d$ et $r \in |K|$, nous définissons la boule "fermée" de centre a et de rayon r

$$B(a\,,\,r^+) = \{x \in K^d\ ;\ \|x - a\| \leqslant r\}\ ,$$

et la boule "ouverte"

$$B(a\,,\,r^-) = \{x \in K^d\ ;\ \|x - a\| < r\}\ .$$

On dit que la fonction f est analytique dans $B(a\,,\,R^+)$ si f se développe en série de Taylor

$$f(x) = \sum a_\nu\, x^\nu = \sum a_{\nu_1 \dots \nu_d}\, x_1^{\nu_1} \dots x_d^{\nu_d}$$

avec $\lim_{\nu \to \infty} |a_\nu|\, R^{|\nu|} = 0$.

Pour r réel, $\leqslant R$, on pose alors

$$|f|_a(r) = \sup_\nu |a_\nu|\, r^{|\nu|}\ ,$$

c'est <u>la fonction de valuation de</u> f (relative au point a).

Il est évident que

$$\sup_{x \in B(a,r^+)} |f(x)| \leqslant |f|_a(r)\ ,$$

et il est bien connu que l'on a le signe égal lorsque K n'est pas localement compact (on peut avoir une inégalité stricte lorsque K est localement compact).

Nous définissons <u>la multiplicité de</u> f <u>en</u> a

$$m(f\,,\,a) = \inf\{|\nu|\ ;\ |a_\nu| \neq 0\}\ ,$$

<u>la multiplicité totale de</u> f <u>dans</u> $B(a\,,\,r^+)$,

$$N_a(f\,,\,r) = \sup\{|\nu|\ ;\ |a_\nu|\, r^{|\nu|} = |f|_a(r)\}\ ,$$

<u>et dans</u> $B(a\,,\,r^-)$,

$$n_a(f\,,\,r) = \inf\{|\nu|\ ;\ |a_\nu|\, r^{|\nu|} = |f|_a(r)\}\ .$$

Observons que, pour $r \leqslant R$ et $f \neq 0$, il n'y a qu'un nombre fini de multi-indices ν tels que $|a_\nu|\, r^{|\nu|} = |f|_a(r)$.

Comme $\log|f|_a(r) = \sup_\nu(\log|a_\nu| + |\nu| \log r)$, il est clair que la fonction

$$\log r \to \log|f|_a(r)\ ,$$

définie pour $\log r \leqslant \log R$, est continue, croissante au sens large, convexe et affine par morceaux, sa dérivée à droite (resp. à gauche) au point $\log r$ étant $N_a(f\,,\,r)$ (resp. $n_a(f\,,\,r)$).

Notons $\tilde{K}$ le complété de la clôture algébrique de K. On sait que la valuation de K se prolonge de façon unique à $\tilde{K}$. La fonction f se prolonge naturellement aux $x \in \tilde{K}^d$ tels que $\|x - a\| \leqslant R$. Si $b \in K^d$, $\|b - a\| \leqslant r$, on a ($\tilde{K}$ n'étant pas localement compact)

$$\begin{aligned} |f|_a(r) &= \sup\{|f(x)|\ ;\ x \in \tilde{K}^d,\ \|x - a\| \leqslant r\} \\ &= \sup\{|f(x)|\ ;\ x \in \tilde{K}^d,\ \|x - b\| \leqslant r\} = |f|_b(r)\ . \end{aligned}$$

Il en résulte que si $\|b - a\| \leq r$ (resp. $\|b - a\| < r$), on a

$$N_a(f , r) = N_b(f , r) \quad (\text{resp. } n_a(f , r) = n_b(f , r)),$$

ce qui montre que la multiplicité totale de f dans $B(a , r^+)$ (resp. $B(a , r^-)$) ne dépend que de la boule $B(a , r^+)$ (resp. $B(a , r^-)$) et non du centre a choisi (ceci justifie la terminologie employée).

Donnons une autre interprétation de $N_a(f , r)$ et $n_a(f , r)$. Si $r \in |K|$, on peut par une homothétie-translation se ramener au cas $a = 0$, $r = 1$. Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $|f|_0(1) = 1$ (si $f \neq 0$). Alors si $f(x) = \sum a_\nu x^\nu$, les coefficients a_ν appartiennent à l'anneau de valuation de K, et on peut passer au corps résiduel $\bar{K}$. Alors $\bar{f}$ est un polynôme à coefficients dans $\bar{K}$ à d indéterminées, et l'on a

$$N_0(f , 1) = \text{degré de } \bar{f}$$

et

$$n_0(f , 1) = \text{multiplicité de } \bar{f} \text{ en } 0 \in \bar{K}^d$$

(observons que 0 est l'image de $B(0 , 1^-)$ dans $\bar{K}^d$).

1.2. <u>Le petit lemme de Schwarz.</u>

PROPOSITION. - <u>Soit</u> f <u>analytique dans</u> $B(0 , R^+)$, <u>et soit</u> $r \leq R$. <u>On a</u>

(1.2.1) $$|f|_0(r) \leq (r/R)^{N_0(f,r)} \; |f|_0(R)$$

(1.2.2) $$|f|_0(r) \geq (r/R)^{n_0(f,R)} \; |f|_0(R) .$$

<u>Remarque</u>. - Si la dimension d est 1, il est connu que $N_0(f , r)$ (resp. $n_0(f , r)$) représente le nombre de zéros de f dans la clôture algébrique de K, qui sont de module $\leq r$ (resp. $< r$). Cette proposition généralise les propositions 1 et 2 de B. C'est à cause de ce résultat que nous avons baptisé N et n les multiplicités totales de f.

<u>Démonstration</u>. - Les inégalités traduisent le fait que la fonction

$$\log t \to \log|f|_0(t)$$

est convexe en tenant compte de l'interprétation de N et n comme dérivées de cette fonction.

On a, pour $r < t < R$,

$$N_0(f , r) \leq n_0(f , t) \leq N_0(f , t) \leq n_0(f , R) .$$

Il résulte alors du théorème de Rolle que

$$N_0(f , r) \leq \frac{\log|f|_0(R) - \log|f|_0(r)}{\log R - \log r} \leq n_0(f , R) ,$$

ce qui démontre la proposition.

1.3. Méthode de calcul de la multiplicité dans une boule. - Pour rendre utilisable la proposition 1.2, il faut maintenant expliquer comment on peut estimer la multiplicité totale de f dans une boule sachant que f s'annule avec une multiplicité donnée en certains points de la boule. Cette estimation s'obtiendra en utilisant les deux principes suivants.

PRINCIPE 1. - Soit $f \neq 0$ analytique dans $B(a , R^+)$, et soit $0 < r < r' \leqslant R$. On a

$$m(f , a) \leqslant n_a(f , r) \leqslant N_a(f , r) \leqslant n_a(f , r') \leqslant N_a(f , r') .$$

C'est évident.

PRINCIPE 2. - Soit $f \neq 0$ analytique dans $B(a , R^+)$. Soit $r \in |K^*|$, $r \leqslant R$. La boule "fermée" $B(a , r^+)$ est réunion d'une famille de boules "ouvertes" disjointes de la forme $B(b , r^-)$. Soit q un entier $\geqslant 1$. Nous allons indiquer comment estimer la multiplicité totale de f dans $B(a , r^+)$ connaissant la multiplicité totale de f dans une famille de q^d boules de la forme $B(b , r^-)$ qui sont des produits de q^d disques de K . Plus précisément, notant $D(a , r^{\pm})$ les disques de K de centre a et rayon r , soient

$$a_{ij} \in D(a , r^+) , \quad 1 \leqslant i \leqslant d \quad 1 \leqslant j \leqslant q ,$$

tels que $|a_{ij} - a_{ik}| = r$ pour $j \neq k$ (ainsi pour i fixé les disques $D(a_{ij},r^-)$ sont disjoints). Soit

$$\Omega = \{\omega = (a_{1j_1} , \dots , a_{dj_d}) ; \; j_1 , \dots , j_d \in [1 , \dots q]\} .$$

C'est un sous-ensemble de $B(a , r^+)$ de cardinalité $\# \Omega = q^d$. Les boules "ouvertes" $B(\omega , r^-) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} D(a_{ij_i} , r^-)$ sont les boules mentionnées précédemment. On a la relation

$$N_a(f , r) \geqslant \frac{1}{q^{d-1}} \sum_{\omega \in \Omega} n_\omega(f , r) .$$

Démonstration. - Par une translation-homothétie, on peut se ramener au cas où $a = 0$ et $r = 1$. Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $|f|_0(1) = 1$. Alors $\overline{f} \in \overline{K}[x_1 , \dots , x_d]$, et

$$N_0(f , 1) = \deg \overline{f}$$

$$n_\omega(f , 1) = m(\overline{f} , \overline{\omega}) .$$

Le principe 2 est alors une retranscription du lemme 1.4.

1.4. LEMME. - Soit un corps L , et soit un entier $q \geqslant 1$. Soient Ω_i des sous-ensembles finis de L avec $\# \Omega_i = q$, et posons $\Omega = \prod_{i=1}^d \Omega_i \subset L^d$. Alors, si $g \in K[x_1 , \dots , x_d]$, $g \neq 0$, on a

$$N(g) = \deg g \geqslant \frac{1}{q^{d-1}} \sum_{\omega \in \Omega} m(g , \omega) .$$

Démonstration. - On raisonne par récurrence sur d . Le cas $d = 1$ est bien connu et traduit le fait que le nombre de zéros de g, comptés suivant leur multiplicité, est inférieur ou égal au degré du polynôme g.

Si $g \in L[x_1, \dots, x_{d+1}]$, $g = \sum c_\nu x_1^{\nu_1} \dots x_{d+1}^{\nu_{d+1}}$, et si $b \in L$, nous noterons g_b le polynôme à d indéterminées obtenu en spécialisant la dernière variable en b.

$$g_b = \sum c_\nu b^{\nu_{d+1}} x_1^{\nu_1} \dots x_d^{\nu_d} .$$

Soit $g \neq 0$. Si $g_b = 0$, c'est que le polynôme g est divisible par $x_{d+1} - b$. Pour chaque $b \in \Omega_{d+1}$, il existe donc un entier ≥ 0, k_b, tel que

$$g = h \prod_{b \in \Omega_{d+1}} (x_{d+1} - b)^{k_b}$$

où $h \in L[x_1, \dots, x_{d+1}]$ est tel que, pour tout $b \in \Omega_{d+1}$, $h_b \neq 0$.

Écrivons $\Omega = \Omega' \times \Omega_{d+1}$ avec $\Omega' = \prod_{i=1}^{d} \Omega_i$, et pour $\omega \in \Omega$, posons $\omega = (\omega', b)$ avec $\omega' \in r'$ et $b \in \Omega_{d+1}$. Il est clair que

$$N(g) = N(h) + \sum_{b \in \Omega_{d+1}} k_b$$

et

$$m(g, \omega) = m(h, \omega) + k_b \quad \text{pour tout} \quad \omega = (\omega', b) \in \Omega .$$

Par ailleurs, la spécialisation diminue le degré et augmente la multiplicité, plus précisément

$$N(h_b) \leq N(h) \quad \text{pour tout} \quad b \in \Omega_{d+1}$$

et

$$m(h, \omega) \geq m(h_b, \omega') \quad \text{pour tout} \quad \omega = (\omega', b) \in \Omega .$$

Pour tout $b \in \Omega_{d+1}$, on a $h_b \neq 0$, il résulte alors de l'hypothèse de récurrence que

$$\sum_{\omega' \in \Omega'} m(h_b, \omega') \leq q^{d-1} N(h_b)$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} m(h, \omega) &= \sum_{b \in \Omega_{d+1}} \sum_{\omega' \in \Omega'} m(h, (\omega', b)) \leq \sum_{b \in \Omega_{d+1}} \sum_{\omega' \in \Omega'} m(h_b, \omega') \\ &\leq \sum_{b \in \Omega_{d+1}} q^{d-1} N(h_b) \leq q^{d-1} \sum_{b \in \Omega_{d+1}} N(h) = q^d N(h) . \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} m(g, \omega) &= \sum_{b \in \Omega_{d+1}} \sum_{\omega' \in \Omega'} (m(h, (\omega', b)) + k_b) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} m(h, \omega) + \sum_{b \in \Omega_{d+1}} q^d k_b \leq q^d N(h) + q^d \sum_{b \in \Omega_{d+1}} k_b = q^d N(g) . \end{aligned}$$

1.5. <u>Exemple</u>. - Soit f analytique dans $B(0, R^+)$, $f \neq 0$ et soit $r \in |K|$, $r < R$. Soit Γ un sous-ensemble fini de $B(0, r^+)$. On cherche à améliorer l'estimation $|f|_0(r) \leq |f|_0(R)$ sachant que f s'annule sur Γ avec des multiplicités données. A l'aide des principes 1 et 2 du paragraphe 1.3, on trouve une minoration de la multiplicité totale de f dans $B(0\,,\,r^+)$. Le petit lemme de Schwarz nous donne alors l'estimation cherchée. Comme il est malaisé de donner des formules générales dans le cas d'un corps quelconque, nous étudierons seulement le cas où K est localement compact ce qui nous fournira une bonne illustration des techniques employées. Signalons cependant le résultat trivial suivant.

PROPOSITION. - Soit f analytique dans $B(0\,,\,R^+)$. Si f s'annule au point γ de $B(0\,,\,r^+)$ avec une multiplicité $\geqslant m(\gamma)$, on a

$$|f|_0(r) \leqslant (r/R)^{m(\gamma)}\ |f|_0(R)\ .$$

1.6. Cas K localement compact. - Nous supposons désormais que K est localement compact. Alors le corps résiduel $\overline{K}$ est fini, soit $q = \#\,\overline{K}$, et le groupe des valeurs est discret, soit $\lambda > 1$ tel que $|K^*| = \{\lambda^k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Soit Γ un sous-ensemble fini de $B(0\,,\,r^+)$, $r \in |K^*|$. Nous poserons

$$h = \#\,\Gamma\ ,\quad \delta = \inf\{\|\gamma - \gamma'\|\ ;\ \gamma \neq \gamma' \in \Gamma\}\ ,$$

et nous dénoterons s l'entier $\geqslant 1$ tel que $r/\delta = \lambda^{s-1}$.

Observons que $B(0\,,\,r^+)$ est une réunion de q^{ds} boules "ouvertes" de rayon δ, c'est-à-dire de la forme $B(b\,,\,\delta^-)$ et que, dans chacune de ces boules "ouvertes", il y a au plus un point de Γ. On a donc la relation suivante entre h et s

$$h \leqslant q^{sd}\ .$$

Si $h = q^{sd}$, c'est-à-dire si dans chaque $B(b\,,\,\delta^-)$ il y a un (et donc un seul) point de Γ, on dira que Γ est bien réparti dans $B(0\,,\,r^+)$.

THÉORÈME. - Soit f analytique dans $B(0\,,\,R^+)$. Soit Γ un sous-ensemble fini de $B(0\,,\,r^+)$, $r \in |K^*|$, $r < R$. Si f a en chaque point $\gamma \in \Gamma$ une multiplicité $\geqslant m(\gamma)$, on a l'estimation

$$|f|_0(r) \leqslant (r/R)^N\ |f|_0(R) \tag{1.6.1}$$

avec

$$N = \frac{1}{q^{s(d-1)}} \sum_{\gamma\in\Gamma} m(\gamma)\ .$$

Remarques :

1° Le résultat de SERRE ([1], Proposition 7) correspond au cas $K = \mathbb{Q}_p$, donc $q = p$, Γ bien réparti, $m(\gamma) = 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On trouve alors

$$N = q^{sd}/q^{s(d-1)} = q^s\ .$$

2° Ce théorème répond aux questions 2 et 3 de [1].

3° Dans l'énoncé, il n'y a aucune hypothèse de bonne répartition de Γ. En fait, la formule tenant compte des multiplicités, on peut toujours se ramener au cas bien réparti : il suffit de considérer un ensemble fini Γ' contenant Γ, bien réparti dans $B(0\,,\,r^+)$ (qui ne change pas la valeur de δ), et de poser $m(\gamma') = 0$ pour

$\gamma' \in \Gamma' - \Gamma$. C'est d'ailleurs ainsi que nous allons procéder dans la démonstration.

4° L'estimation donnée n'est pas fameuse si h est trop petit devant s. En effet, d'après 1.5, on voit que

(1.6.2) $$|f|_0(r) \leq (r/R)^{N_1} |f|_0(R)$$

avec $N_1 = \max_{\gamma \in \Gamma} m(\gamma)$.

Or, pour $h \leq q^{s(d-1)}$, on a $N \leq N_1$. La formule (1.6.1) n'est donc à utiliser que si Γ n'est pas trop mal réparti. Pour $h \leq q^{s(d-1)}$, il faudra lui préférer la formule (1.6.2).

<u>Démonstration</u>. – Ainsi que nous l'avons indiqué dans la remarque 3, il suffit de démontrer le théorème dans le cas où Γ est bien réparti. Nous allons montrer que la multiplicité totale de f dans $B(0\ ,\ r^+)$ est $\geq N$. La formule (1.6.1) sera alors une conséquence immédiate du petit lemme de Schwarz (formule 1.2.1).

Nous allons montrer, par récurrence sur s, que si Γ, avec $h = q^{sd}$, est bien réparti dans la boule $B(a\ ,\ r^+)$ (contenue dans $B(0\ ,\ R^+)$), et si f a une multiplicité $\geq m(\gamma)$ au point γ de Γ, alors la multiplicité totale de f dans $B(a\ ,\ r^+)$ est $\geq (1/q^{s(d-1)}) \sum_{\gamma \in \Gamma} m(\gamma)$.

Si $s = 1$, les boules $B(\gamma\ ,\ r^-)$ satisfont aux hypothèses du principe 2. On a donc, en vertu du principe 2,

$$N_a(f\ ,\ r) \geq \frac{1}{q^{d-1}} \sum_{\gamma \in \Gamma} n_\gamma(f\ ,\ r)\ .$$

Mais, en vertu du principe 1 et de l'hypothèse,

$$n_\gamma(f\ ,\ r) \geq m(f\ ,\ \gamma) \geq m(\gamma)\ ,$$

par conséquent,

$$N_a(f\ ,\ r) \geq \frac{1}{q^{d-1}} \sum_{\gamma \in \Gamma} m(\gamma)$$

ce qui est la formule à démontrer.

Soit maintenant Γ bien réparti dans $B(a\ ,\ r^+)$, avec $h = q^{d(s+1)}$. Considérons la partition de $B(a\ ,r^+)$ en q^d boules "ouvertes" $B(a_j\ ,\ r^-)$, $1 \leq j \leq q^d$. Alors il est clair que l'ensemble $\Gamma_j = \Gamma \cap B(a_j\ ,\ r^-)$ est bien réparti dans $B(a_j\ ,\ \lambda^{-1} r^+)$, et $h_j = q^{ds}$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a alors, pour $1 \leq j \leq q^d$,

$$N_{a_j}(f\ ,\ \lambda^{-1} r) \geq \frac{1}{q^{s(d-1)}} \sum_{\gamma \in \Gamma_j} m(\gamma)\ .$$

Par ailleurs, d'après le principe 1, on a

$$N_{a_j}(f\ ,\ \lambda^{-1} r) \leq n_{a_j}(f\ ,\ r)\ .$$

En vertu du principe 2, on obtient alors

$$N_a(f , r) \geqslant \frac{1}{q^{d-1}} \sum_{j=1}^{q^s} n_{a_j}(f , r) \geqslant \frac{1}{q^{(s+1)(d-1)}} \sum_{\gamma\in\Gamma} m(\gamma) ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

2. Lemme d'approximation.

2.1. Le problème. - Soit f analytique dans $B(0 , R^+)$. Soit Γ un sous-ensemble fini de $B(0 , r^+)$, $r < R$. Soit k un entier $\geqslant 1$, et posons

$$\varepsilon = \sup\{ |\partial_\alpha f(\gamma)| ; \gamma \in \Gamma , |\alpha| \leqslant k - 1\}$$

où $\partial_\alpha f$ désigne $(\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_d} f/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d})$.

On cherche à estimer $|f|_0(r)$ (resp. le suppremum de f dans $B(0 , r^+)$) à partir de $|f|_0(R)$ et de ε.

Remarquons que si $\varepsilon = 0$, f s'annule en γ avec la multiplicité k, et on est ramené à un problème type lemme de Schwarz.

2.2. Un lemme d'approximation. - Nous supposons que K est localement compact. Si Γ est un sous-ensemble fini de $B(0 , r^+)$, nous conservons la notation du § 1.6 concernant h, δ, s.

THÉORÈME. - Soit f analytique dans $B(0 , R^+)$. Soit Γ un sous-ensemble fini de $B(0 , r^+)$, $r \in |K^*|$, $r < R$. Soit k un entier > 1. Posons

$$\varepsilon = \sup\{ |\partial_\alpha f(\gamma)| ; \gamma \in \Gamma , |\alpha| \leqslant k - 1\} .$$

On a l'estimation

$$|f|_0(r) \leqslant \max[(r/R)^N |f|_0(R) , c\varepsilon(r/\delta)^{N-1}]$$

où

$$N = \frac{kh}{q^{s(d-1)}} \quad \text{et} \quad c = \sup_{|\alpha|\leqslant k-1} \frac{\delta^{|\alpha|}}{|\alpha!|} .$$

Remarques.

1° La constante c est anodine. En fait, si $\delta \leqslant p^{-1/(p-1)}$ (où p = caractéristique de $\overline{K}$), on a $c = 1$.

2° Pour $d = 1$, on retrouve exactement la proposition 4 de [1].

3° L'hypothèse que K est localement compact n'est pas essentielle. Si Γ est un sous-ensemble fini de $B(0 , r^+)$, notons $N(\Gamma)$ le plus grand entier tel que toute fonction f analytique dans $B(0 , R^+)$, satisfaisant $n_\gamma(f , \delta) \geq k$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, vérifie $N_0(f , r) \geq N(\Gamma)$ (une minoration de $N(\Gamma)$ peut être obtenue à l'aide des principes 1 et 2). Alors on a l'estimation

$$|f|_0(r) \leqslant \max[(r/R)^{N(\Gamma)} |f|_0(R) , c\varepsilon(r/\delta)^{N(\Gamma)-1}] .$$

4° Ce théorème améliore un résultat de BERTRAND ([1], Proposition 8), et répond en partie à la question 4 de [1] (trouver une démonstration purement "p-adique" des lemmes d'approximation).

Démonstration. – Si la multiplicité totale de f dans $B(0, r^+)$ est $\geq N$, on a, d'après le petit lemme de Schwarz (formule 1.2.1),

$$|f|_0(r) \leq (r/R)^N \, |f|_0(R) .$$

Suppsons alors que la multiplicité totale de f dans $B(0, r^+)$ soit $\leq N-1$. Si pour chaque $\gamma \in \Gamma$, la multiplicité totale de f dans $B(\gamma, \delta^-)$ est $\geq k$, alors d'après la démonstration du théorème 1.6, la multiplicité totale de f dans $B(0, r^+)$ est $\geq N$, ce qui contredit notre hypothèse. Il existe donc un γ de Γ tel que $n_\gamma(f, \delta) \leq k-1$. Mais alors, d'après la définition de n_γ, on a, si $f(x) = \sum a_\nu (x-\gamma)^\nu$,

$$|f|_\gamma(\delta) = \sup\{|a_\nu| \, \delta^{|\nu|} ; \; |\nu| \leq n_\gamma(f, \delta) \leq k-1\} .$$

Comme $a_\nu = (1/\nu!)(\partial_\nu f(\gamma)/\partial x^\nu)$, on déduit immédiatement de la définition de ε,

$$|f|_\gamma(\delta) \leq c\varepsilon \quad \text{avec} \quad c = \sup_{|\nu| \leq k-1} \frac{\delta^{|\nu|}}{|\nu!|} .$$

Par hypothèse, on a $n_\gamma(f, r) \leq N_\gamma(f, r) = N_0(f, r) \leq N-1$. On déduit alors du petit lemme de Schwarz (formule 1.2.2)

$$|f|_0(r) = |f|_\gamma(r) \leq (r/\delta)^{n_\gamma(f,r)} \, |f|_\gamma(\delta) \leq (r/\delta)^{N-1} \, c\varepsilon ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

2.3. Cas où K est localement compact et Γ bien réparti. – Avec des hypothèses supplémentaires sur K et Γ on peut améliorer sensiblement le théorème 2.2. On utilise toujours les notations du § 1.6.

THÉORÈME. – *Soit K localement compact. Soit f analytique dans $B(0, R^+)$. Soit Γ bien réparti dans $B(0, r^+)$ avec $r \in |K^*|$, $r < R$. Soit k un entier ≥ 1 et posons*

$$\varepsilon = \sup\{|\partial_\alpha f(\gamma)| ; \; \gamma \in \Gamma , \; |\alpha| \leq k-1\} .$$

On a les estimations

(2.3.1) $$|f|_0(r) \leq \max((r/R)^{kq^s} \, |f|_0(R) , \, c\varepsilon\lambda^\tau)$$

(2.3.2) $$\sup_{\|x\| \leq r} |f(x)| \leq \max((r/R)^{kq^s} \, |f|_0(R) , \, c\varepsilon)$$

avec

$$\tau = \frac{q^s - q}{q-1} k - s + 1 \quad \text{et} \quad c = \sup_{|\alpha| \leq k-1} \frac{\delta^{|\alpha|}}{|\alpha!|} .$$

Rappelons que Γ bien réparti dans $B(0, r^+)$ signifie que l'on a $h = q^{ds}$ et $r/\delta = \lambda^{s-1}$.

Remarques.

1° L'hypothèse que K est localement compact est essentielle pour établir (2.3.2), c'est en effet seulement dans ce cas que $\sup_{\|x\|\leq r} |f(x)|$ peut être strictement inférieur à $|f|_0(r)$. Par contre, une majoration du type (2.3.1) peut être obtenue dans le cas K non localement compact avec des conditions sur Γ analogues à la bonne répartition.

2° Ce théorème répond aux questions 1 et 4 de [1].

3° Dans le cas $d = 1$, la majoration (2.3.2) représente une amélioration d'un résultat de SCHINZEL ([1], Proposition 6).

Démonstration.

1° Si la multiplicité totale de f dans $B(0, r^+)$ est $\geq kq^s$, on a, d'après le petit lemme de Schwarz (formule 1.2.1),

$$\sup_{\|x\|\leq r} |f(x)| \leq |f|_0(r) \leq (r/R)^{kq^s} |f|_0(R) ,$$

ce qui rend compte de la moitié des majorations (2.3.1) et (2.3.2).

2° On suppose désormais que la multiplicité totale de f dans $B(0, r^+)$ est $\leq kq^s - 1$.

Considérons alors les q^d boules "ouvertes" disjointes $B(a_j, r^-)$ réalisant une partition de $B(0, r^+)$. Soit i l'indice tel que

$$n_{a_i}(f, r) = \inf_j n_{a_j}(f, r) .$$

On a alors, en vertu du principe 2,

$$n_{a_i}(f, r) \leq \frac{q^{d-1}}{q^d} N_0(f, r) < q^{s-1} k ,$$

et par conséquent, en vertu du principe 1,

$$N_{a_i}(f, \lambda^{-1} r) \leq n_{a_i}(f, r) \leq q^{s-1} k - 1 .$$

En recommençant ce raisonnement, on voit qu'on peut construire de proche en proche une suite emboitée de boules de centre a, telles que la multiplicité totale de f dans $B(a, \lambda^{-u} r^-)$ soit $\leq q^{s-u-1} k - 1$ pour $0 \leq u \leq s - 1$. Appliquons alors le petit lemme de Schwarz (formule 1.2.2), on obtient

$$|f|_a(\lambda^{-u+1} r) \leq \lambda^{\tau_u} |f|_a(\lambda^{-u} r) \qquad 1 \leq u \leq s - 1$$

avec $\tau_u = q^{s-u} k - 1$.

On en déduit

$$|f|_0(r) = |f|_a(r) \leq \lambda^{\tau} |f|_a(\lambda^{-s+1} r) = \lambda^{\tau} |f|_a(\delta) \tag{2.3.3}$$

avec

$$\tau = \sum_{u=1}^{s-1} \tau_u = \frac{q^s - q}{q - 1} k - s + 1 .$$

3° Nous allons maintenant estimer $|f|_a(\delta)$, ce qui achèvera la démonstration de la majoration (2.3.1).

Comme Γ est bien réparti, il existe un (et un seul) élément γ de Γ appartenant à $B(a, \delta^-)$. Comme par ailleurs la multiplicité totale de f dans $B(a,\delta^-)$ est $\leq k-1$, il résulte alors de la définition de ε, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 2.2, que

$$|f|_a(\delta) = |f|_\gamma(\delta) \leq c\varepsilon ,$$

ce qui, associé à (2.3.3), achève la démonstration de la majoration (2.3.1).

4° Soit $x \in B(0, r^+)$. Rappelons que l'on a $N_x(f, r) \leq q^s k - 1$ puisque la multiplicité totale de f dans $B(0, r^+)$ est $\leq q^s k - 1$.

Soit σ l'entier $(\leq s)$ tel que

$$N_x(f, \lambda^{\sigma-1}\delta) \leq q^\sigma k - 1$$

et

$$N_x(f, \lambda^{u-1}\delta) \geq q^u k \quad \text{pour tout } u \text{ entier, } 1 \leq u \leq \sigma - 1 .$$

Alors, en appliquant le petit lemme de Schwarz (majoration 1.2.1), on obtient

$$|f|_x(\lambda^{u-1}\delta) \leq \lambda^{-q^u k} |f|_x(\lambda^u \delta) \qquad 1 \leq u \leq \sigma - 1$$

et par conséquent

(2.3.4) $$|f|_x(\delta) \leq \lambda^{-(q^\sigma - q)/(q-1)k} |f|_x(\lambda^{\sigma-1}\delta) .$$

Mais comme la multiplicité totale de f dans $B(x, \lambda^{\sigma-1}\delta^+)$ est $\leq q^\sigma k - 1$, l'argument utilisé au 2° montre qu'il existe un a appartenant à cette boule tel que

$$n_a(f, \lambda^{u-1} r) \leq q^{u-1} k - 1 \quad \text{pour tout } u \text{ entier } 1 \leq u \leq \sigma ,$$

et on en déduit, comme au 2°, la majoration

(2.3.5) $$|f|_a(\lambda^{\sigma-1}\delta) \leq \lambda^{(q^\sigma-q)/(q-1)k-\sigma+1} |f|_a(\delta) .$$

Par ailleurs, pour les mêmes raisons qu'au 3°, on a

(2.3.6) $$|f|_a(\delta) \leq c\varepsilon .$$

Alors, tenant compte du fait que $|f|_a(\lambda^{\sigma-1}\delta) = |f|_x(\lambda^{\sigma-1}\delta)$, on déduit de (2.3.4) (2.3.5) et (2.3.6)

$$|f(x)| \leq |f|_x(\delta) \leq \lambda^{-(q^\sigma-q)/(q-1)k} |f|_a(\lambda^{\sigma-1}\delta) \leq \lambda^{-\sigma+1} |f|_a(\delta) \leq c\varepsilon$$

ce qui achève la démonstration de la majoration (2.2.3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRAND (D.). - Lemmes de Schwarz et lemme d'approximation dans les domaines ultramétriques, Journées d'Analyse ultramétrique [1976. Marseille-Luminy], Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° J8, 12 p.

(Texte reçu le 20 septembre 1976)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS