

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PAUL BEZIVIN

Quelques questions ouvertes en analyse ultramétrique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, n° 2 (1975-1976), exp. n° J6, p. J1-J5

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A5_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES QUESTIONS OUVERTES EN ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

par Jean-Paul BEZIVIN

On signale, dans cet exposé, un certain nombre de questions ouvertes dans la théorie des fonctions analytiques en analyse ultramétrique.

Dans tout ce qui suit, K est un corps ultramétrique complet, et, bien que certaines questions deviennent triviales quand le corps K est supposé à valuation discrète, on ne fera pas d'autres hypothèses sur K .

1. Fonctions analytiques bornées.

On note D le disque unité ouvert de K , c'est-à-dire

$$D = \{x \in K ; |x| < 1\},$$

et D_n le polydisque ouvert, unité de K^n . Les fonctions analytiques bornées sur D_n à coefficients dans K s'identifient alors aux séries

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x^\nu, \quad \nu = \nu_1, \dots, \nu_n, \quad x^\nu = X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n},$$

avec $\sup_\nu |a_\nu| < +\infty$, on fait de cet espace B_n une algèbre de Banach ultramétrique en posant $\|f\| = \sup_\nu |a_\nu|$. On sait que cette norme est multiplicative.

On désigne par V le disque unité fermé de K : $V = \{u \in K ; |u| \leq 1\}$ (qui est aussi l'anneau de valuation de K), et par V_n le polydisque unité fermé de K^n .

On note $K\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ l'espace des fonctions analytiques convergeant sur V_n , que l'on appelle séries restreintes ; cet espace s'identifie aux séries

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X^\nu \quad \text{avec} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} |a_\nu| = 0,$$

c'est une sous-algèbre de Banach de B_n .

On commence par rappeler certaines questions de VAN DER PUT [11] :

QUESTION n° 1. - Soit I un idéal de type fini de B_n . Il est facile de voir que si $I = (g_1, \dots, g_s)$,

$$I = B \Rightarrow \inf_{x \in D_n, 1 \leq i \leq s} \sup |g_i(x)| > 0.$$

La réciproque est-elle vraie ?

On se place dans l'espace

$$E_n = V\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \{f \in K\langle X_1, \dots, X_n \rangle ; \|f\| \leq 1\}.$$

Soit I un idéal de type fini de l'anneau E_n , tel que $I \cap V \neq \{0\}$. On note

$$\alpha(I) = \sup\{|\alpha| ; \alpha \in I \cap V\}$$

et :

$$\delta(I) = \inf \sup_{\lambda \in V_n, f \in I} |f(\lambda)|.$$

On a évidemment $0 < \alpha(I) \leq \delta(I)$.

QUESTION n° 2. - Existe-t-il une constante $c(n, s) < +\infty$, telle que, $\forall I$ idéal de type fini de E_n , tel que $I \cap V \neq \{0\}$ on ait

$$\alpha(I) \geq \delta(I)^{c(n,s)}$$

si I a un système générateur de s éléments ?

VAN DER PUT, dans [11], démontre que si la question n° 2 est résolue par l'affirmative, on sait alors résoudre, par l'affirmative, la question n° 1. Dans le même article, il prouve que l'on peut prendre

$$c(1, s) = 2, \quad \forall s, \quad \text{et} \quad c(n, 2) = 2, \quad \forall n,$$

ce qui permet de résoudre la question n° 1 pour $n = 1$, s quelconque, et $s = 2$, n quelconque. On ne connaît pas d'autres résultats à l'heure actuelle.

On peut généraliser ces deux questions de la manière suivante :

QUESTION n° 3. - Soit I un idéal de type fini de B_n , $I = (g_1, \dots, g_s)$. Si $g \in I$, il est facile de voir qu'il existe $C > 0$ telle que l'on ait

$$(*) \quad |g(x)| \leq C \sup_{1 \leq i \leq s} |g_i(x)|, \quad \forall x \in D_n.$$

Etudier la réciproque. Existe-t-il une constante entière $A > 0$ telle que (*) implique $g^A \in I$?

D'après la méthode de VAN DER PUT, citée plus haut, cette question serait résolue si l'on savait répondre à la question n° 4.

QUESTION n° 4. - Soit I un idéal de type fini de E_n , $I = (g_1, \dots, g_s)$. Il est facile de voir que $t_I(x) = \sup_J |g_J(x)|$ ne dépend que de I , et pas du système générateur choisi. Si $g \in I$, on a

$$(**) \quad |g(x)| \leq t_I(x), \quad \forall x \in V_n.$$

Réciproquement, si (**) est vérifiée, existe-t-il une constante A ne dépendant que de n et s telle que $g^A \in I$?

On sait résoudre la question n° 4, par l'affirmative, avec $A = 2$, dans les cas $s = 2$, n quelconque, et $n = 1$, s quelconque, et on a même dans le cas $n = 1$ un résultat un peu plus général pour la question n° 3, puisque l'on peut traiter le cas d'une infinité de générateurs g_k , $k \in \mathbb{N}$, avec la condition

$$\|g_k\| \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad k \rightarrow +\infty \quad [1].$$

Dans le cas $n = 1$, s quelconque, la constante $A = 2$ est la meilleure possible.

Il peut être intéressant de regarder ce qui se passe dans le cas complexe ; il y a d'abord à constater que les analogues des questions posées (des n° 1 et n° 3) se formulent en remplaçant $\sup |g_i(x)|$ par $(\sum_{i=1}^s |g_i(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$.

La question n° 1 a alors été résolue par CARLESON [4]. Pour $n = 1$, un contre-exemple de RAO montre que si la condition (*) de la question n° 3 est réalisée, on n'a pas toujours $g \in I$, mais aucun résultat du type $g^A \in I$ n'est connu. Il n'y a aucun résultat en dimension plus grande que 1. Pour le contre-exemple de RAO, voir VON RENDELN [12].

Si l'on quitte le cadre des fonctions analytiques bornées, on a des résultats de ce type pour des fonctions analytiques qui sont dans L^2 pour certaines mesures sur un domaine Ω de \mathbb{C} (voir SKODA [9]). On connaît aussi des résultats de ce type pour des algèbres de fonctions analytiques à croissance (voir KELLEHER et TAYLOR [6]).

D'ailleurs, on peut se poser des questions analogues pour des fonctions analytiques sur D . Si l'on note $A(D)$ l'espace des fonctions analytiques sur D , on a la proposition suivante, dont la démonstration est tout à fait analogue à celle de la question n° 3, dans le cas $n = 1$.

PROPOSITION. - Soient $f_1, \dots, f_s \in A(D)$, et M le sous-B-module de $A(D)$, engendré par les f_i .

Soit $g \in A(D)$ tel qu'il existe $C > 0$, $\forall x \in D$,

$$|g(x)| \leq C(\sup_i |f_i(x)|)^2.$$

Alors $g \in M$.

Pour finir, on notera que si l'on se place dans $K\langle X_1, \dots, X_n \rangle$, une inégalité du type (*) (question n° 3), avec g et les g_J dans $K\langle X_1, \dots, X_n \rangle$, implique que g est nulle sur la variété des zéros de I . Un résultat de TATE ([10] ou [5]) implique alors qu'il existe $m \in \mathbb{N}$, $g^m \in I$, mais on ne sait pas borner ce m indépendamment de g et de I , et si $g^m = \sum t_J g_J$, on ne sait pas borner les $\|t_J\|$, ce qui empêche de résoudre la question n° 3 dans B_n .

2. Questions sur les germes de fonctions analytiques.

On note \mathcal{O}_n l'anneau des germes de fonctions analytiques en n variables au voisinage de 0 . On sait que cet anneau est noethérien. On a alors la question n° 5.

QUESTION n° 5. - Soit I un idéal de \mathcal{O}_n , $I = (g_1, \dots, g_s)$, et soit $g \in \mathcal{O}_n$ tel qu'il existe $C > 0$, et un voisinage de 0 , U , où g et les g_J sont définis, vérifiant :

(***) $\forall x \in U, |g(x)| \leq C \sup_J |g_J(x)|$.

Existe-t-il une constante A ne dépendant que de n et s telle que (***) implique $g^A \in I$?

On remarquera que le cas $n = 1$ est trivial, et vrai avec $A = 1$. D'autre part, une réponse affirmative à la question n° 4, résoudrait la question n° 5; le seul problème restant alors la détermination de la meilleure constante A possible.

Dans le cas $s = 2$, n quelconque, on a le résultat avec $A = 2$, et l'exemple $g_1 = x^2$, $g_2 = y^2$, $g = xy$ montrent que $A = 1$ ne convient pas, on a le meilleur résultat possible.

Dans le cas complexe, la question n° 5 a été résolue par J. BRIANÇON et H. SKODA [3].

DÉFINITION. - Soit A un anneau, et I un idéal de A. On dit que $g \in A$ est entier sur I s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_k \in I^k$ tels que

$$g^n + a_1 g^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

L'ensemble des éléments entiers sur I constitue un idéal J de A, qui contient I, on consultera [13] pour plus d'informations.

QUESTION n° 6. - Soit I un idéal de \mathcal{O}_n , $I = (g_1, \dots, g_s)$. On note I^* l'ensemble des $g \in \mathcal{O}_n$ vérifiant la condition (***) de la question n° 5, et J l'idéal des éléments entiers sur I. On voit facilement que $J \subset I^*$. A-t-on $J = I^*$?

Dans le cas de \mathbb{C} , la question n° 6 est résolue par l'affirmative (voir LEJEUNE-TEISSIER [7], J. BRIANÇON [2]).

Bien entendu, on peut formuler la question n° 6 en remplaçant \mathcal{O}_n par B_n ou $K\langle X_1, \dots, X_n \rangle$, en rajoutant J de type fini dans le cas de B_n .

3. Autres questions.

DÉFINITION. - On dit qu'un anneau unitaire commutatif est cohérent, si l'intersection de deux idéaux de type fini est encore de type fini.

QUESTION n° 7. - L'anneau B_n est-il cohérent ?

La question ne se pose évidemment pas pour \mathcal{O}_n et $K\langle X_1, \dots, X_n \rangle$, qui sont noethériens.

Dans le cas complexe, on sait répondre affirmativement dans le cas $n = 1$ (voir MAC VOY, RUBEL [8]).

Enfin, la plupart des questions posées dans les § 1 et 2 se généralisent. En notant A un anneau parmi B_n , $K\langle X_1, \dots, X_n \rangle$, $V\langle X_1, \dots, X_n \rangle$, \mathcal{O}_n , on

a donc la question n° 8 (voir [6]).

QUESTION n° 8. - Soit d un entier ≥ 1 , M un sous-module de type fini de A^d .
Soit $g \in A^d$. Trouver des conditions nécessaires et (ou) suffisantes pour que
 $g \in M$, en terme de g et d'un système générateur (f_1, \dots, f_s) de M .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEZIVIN (J.-P.). - Idéaux de type fini d'algèbre de fonctions analytiques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 15, 7 p.
- [2] BRIANÇON (J.). - Sur la clôture intégrale d'un idéal de $\mathbb{C}\{X, Y\}$, Université de Nice, 1973.
- [3] BRIANÇON (J.) et SKODA (H.). - Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes dans \mathbb{C}^n , C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 278, 1974, p. 949-951.
- [4] CARLESON (L.). - The corona theorem, "Proceedings of the 15th Scandinavian Congress [1968. Oslo]", p. 121-132. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 118).
- [5] HOUZEL (C.). - Espaces analytiques rigides sur un corps ultramétrique, Colloque Poitou-Aquitaine de la section régionale de la Société mathématique de France, 1965 (Exposé non publié).
- [6] KELLEHER (J.) and TAYLOR (B. A.). - Finitely generated ideals in rings of analytic functions, Math. Annalen, t. 193, 1971, p. 225-237.
- [7] LEJEUNE-JALABERT (M.) et TEISSIER (B.). - Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, Séminaire de l'Ecole Polytechnique, 1972.
- [8] MAC VOY (W. S.) and RUBEL (L. A.). - Coherence of some rings of functions, J. functional Analysis, t. 21, 1976, p. 76-87.
- [9] SKODA (H.). - Application des techniques L^p à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 5, 1972, p. 545-579.
- [10] TATE (J.). - Rigid analytic spaces, Invent. Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 257-289.
- [11] VAN DER PUT (Marius). - The non-archimedean corona problem, "Table ronde ultramétrique." [1972, Paris], Bull. Soc. math. France, t. 39-40, 1974, p. 287-317.
- [12] VON RENTELN (M.). - Finitely generated ideals in the Banach algebra H^∞ , Collect. Math., t. 26, 1975, p. 115-126.
- [13] ZARISKI (A.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra, Vol 2. - Princeton, D. Van Nostrand, 1960 (University Series in higher Mathematics).

(Texte reçu le 8 novembre 1976)

Jean-Paul BEZIVIN
 Mathématiques, Tour 46
 Université Pierre et Marie Curie
 4 place Jussieu
 75230 PARIS CEDEX