GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ALAIN ESCASSUT

Spectres d'algèbres de Banach p -adiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, n° 2 (1975-1976), exp. n° J4, p. J1-J8

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A3_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SPECTRES D'ALGÈBRES DE BANACH p -ADIQUES

par Alain ESCASSUT

1. Partitions naturelles et calcul fonctionnel holomorphe.

On désignera par K un corps ultramétrique complet, algébriquement clos. Soit D un fermé borné de K . On appelle partition naturelle infraconnexe de $K - D$ une partition ρ de $K - D$ dont les éléments sont :

- le complémentaire dans K d'un disque circonférencié $\bar{P}$ contenant D ,
- une famille de disques non circonférenciés inclus dans $\bar{P} - D$, appelés supertrous de ρ .

On définit un ordre $<$ entre les partitions naturelles infraconnexes de la façon suivante.

Soit ρ_1 et ρ_2 deux partitions naturelles infraconnexes de $K - D$. On dit que $\rho_1 < \rho_2$ si $\rho_1 \subset \rho_2$ et si tout supertrou de ρ_2 est inclus dans un supertrou de ρ_1 .

Soit ρ une partition naturelle de $K - D$; on notera $\mathfrak{E}(D, \rho)$ l'ensemble des filtres circulaires [6] de K sécant à D , ou bien sécant à la fois à un supertrou T de ρ et au complémentaire de T . Pour toute semi-norme multiplicative φ de $K(D)$, on notera $\mathfrak{F}_\varphi$ le filtre circulaire associé à φ . Alors on définit sur l'algèbre $K(D)$ une norme $\|\cdot\|_\rho$

$$\|h\|_\rho = \sup\{\varphi(h) ; \mathfrak{F}_\varphi \in \mathfrak{E}(D, \rho)\}.$$

On notera $H(D, \rho)$ l'algèbre de Banach complétée de $K(D)$ pour la norme $\|\cdot\|_\rho$.

PROPOSITION 1. - Soit D un fermé borné de K , et soient ρ_1, ρ_2 deux partitions naturelles de $K - D$ telles que $\rho_1 < \rho_2$. Alors on a $\|h\|_D \leq \|h\|_{\rho_1} \leq \|h\|_{\rho_2}$ pour tout $h \in K(D)$, et il existe un homomorphisme unique, continu, de $H(D, \rho_2)$ dans $H(D, \rho_1)$ qui induit l'identité sur $K(D)$.

2. Théorème de Mittag-Leffler pour les partitions naturelles [9].

Si Λ est le complémentaire d'un disque, on notera $H_0(\Lambda)$ l'ensemble des $f \in H(\Lambda)$ tels que $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} f(\xi) = 0$.

THÉORÈME 1. - Soit D un fermé borné de K ; soit ρ une partition naturelle infraconnexe de $K - D$, et soient $(T_i)_{i \in I}$ les supertrous de ρ . Soit T un supertrou de ρ (resp. $T = K - D$), et soit $T' = K - T$. Pour tout $h \in H(T')$,

on a $\|h\|_{T_i} = \|h\|_{\rho}$, et cette isométrie de $(K(T_i), \|\cdot\|_{T_i})$ dans $(K(D), \|\cdot\|_{\rho})$ permet d'identifier $H(T_i)$ à une sous-algèbre de $H(D, \rho)$. Soit $f \in H(D, \rho)$.

Alors il existe f_0 unique appartenant à $H(\bar{\rho})$, et pour tout $i \in I$, il existe f_i unique appartenant à $H_0(T_i)$, tel que la famille $(f_z)_{z=0, z \in I}$ soit sommable dans $H(D, \rho)$ et satisfasse $f = \sum_{z=0, z \in I} f_z$ et $\|f\|_{\rho} = \sup_{z=0, z \in I} \|f_z\|_{T_i}$.

COROLLAIRE 1. - Soit D un fermé borné de K , et soit ρ une partition naturelle infraconnexe de $K - D$. Soit $h \in K(D)$, et soient $T_1, \dots, T_n$ les supertrous de h qui contiennent au moins un pôle de h . Soit Δ un infraconnexe fermé borné de K tel que $\Delta = \bar{\rho}$ et $D \subset \Delta$, et tel que $T_1, \dots, T_n$ soient des trous de Δ . Alors on a $\|h\|_{\Delta} = \|h\|_{\rho}$.

COROLLAIRE 2. - Soit D un fermé borné de K , soit ρ une partition naturelle infraconnexe de $K - D$ telle que $\Delta = \bar{\rho}$ et telle que tout trou de Δ soit un supertrou de ρ . Alors l'homomorphisme canonique de $(K(\Delta), \|\cdot\|_{\Delta})$ dans $(K(D), \|\cdot\|_{\rho})$ est isométrique et se prolonge de façon unique en un homomorphisme isométrique de $H(\Delta)$ dans $H(D, \rho)$.

Nous allons définir la notion de partition x -canonique grâce au lemme suivant.

LEMME 1. - Soit $(A, \|\cdot\|)$ une K -algèbre de Banach commutative unitaire, soit x un élément inversible de A , et soit $D = s(x)$. Soit $\|\cdot\|'$ une semi-norme ultramétrique définie sur A , telle que

$$\|\frac{1}{x}\|_{si}^A \leq \|\frac{1}{x}\|' \leq \|\frac{1}{x}\|.$$

Alors on a

$$\|\frac{1}{x-b}\|' = \|\frac{1}{x}\|' \text{ pour tout } b \in K \text{ tel que } |b| < \frac{1}{\|\frac{1}{x}\|'}.$$

Appliquons ce lemme dans le cas où $\|\cdot\|' = \|\cdot\|$; on voit que grâce au lemme 1

$$d^-(b, \|\frac{1}{1/(x-b)}\|) = d^-(a, \|\frac{1}{1/(x-a)}\|) \text{ si } |a-b| < \frac{1}{\|\frac{1}{1/(x-a)}\|}.$$

On appellera partition x -canonique l'unique partition naturelle infraconnexe de $K - s(x)$ de diamètre $\|\frac{1}{x}\|_{si}^A$ dont les supertrous $T(a)$ ont pour diamètre $\frac{1}{\|\frac{1}{1/(x-a)}\|}$.

3. Algèbres de Banach multibjectives.

Soit R un anneau commutatif unitaire. On note $\text{Max}(R)$ l'ensemble des idéaux maximaux de R , et on notera $\mathfrak{Z}(R)$ l'ensemble des homomorphismes de R sur les corps quotients de R par ses idéaux maximaux. Pour tout $x \in R$, on notera $\sigma(x)$ l'adhérence dans $\text{Max}(R)$ pour la topologie de Jacobson, de l'ensemble des $\mathfrak{M} \in \text{Max}(R)$ tels que $x \notin \mathfrak{M}$. Soit F un fermé de $\text{Max}(R)$; alors l'ensemble $f(F)$ des $x \in R$, tels que $\sigma(x) \cap F = \emptyset$, est un idéal. Enfin, on notera $I(F)$ l'intersection des idéaux maximaux $\mathfrak{M} \in F$. Rappelons les résultats élémentaires

suyvants.

LEMME 2. - Soit R un anneau commutatif unitaire, soit $\mathfrak{J}$ un idéal de R , et soit F un fermé de $\text{Max } R$ tel que $F \cap h(\mathfrak{J}) = \emptyset$. Alors il existe $u \in \mathfrak{J}$ satisfaisant $\chi(u) = 1$, $\forall \chi \in \mathfrak{X}(R)$ tel que $\ker \chi \in F$.

COROLLAIRE. - Soit R un anneau commutatif unitaire sans radical, et soit F un fermé de $\text{Max } R$. Alors, pour tout idéal $\mathfrak{J}$ tel que $h(\mathfrak{J}) = F$, on a

$$f(F) \subset \mathfrak{J} \subset I(F) .$$

Considérons maintenant un corps L algébriquement clos et valué (ultramétrique ou archimédien) complet. Soit $(A, \|\cdot\|)$ une L -algèbre normée commutative unitaire ; rappelons que l'on note $\text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives et $\text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$ l'ensemble des $\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ tels que l'idéal premier fermé $\text{Ker } \varphi$ des $x \in A$ satisfaisant $\varphi(x) = 0$ soit un idéal maximal [8].

Soit A une K -algèbre de Banach commutative unitaire. Nous noterons Φ_A la surjection [7] $\varphi \rightarrow \text{Ker } \varphi$, définie dans $\text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$, à valeurs dans $\text{Max}(A)$, et nous dirons que A est multibijective si Φ_A est une bijection. Grâce au procédé du calcul fonctionnel holomorphe, on démontre le théorème 2 suivant :

Nous allons maintenant introduire la notion de corps fortement valué afin de pouvoir résoudre le problème de la multibijektivité.

Définition. - Soit k le corps résiduel de K , et soit $|K| = \{|\lambda| ; \lambda \in K\}$. Nous dirons que K est fortement valué si l'un au moins des deux ensembles k et $|K|$ n'est pas dénombrable.

THÉOREME 2. - Si K est fortement valué, toute K -algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire est multibijective. Si K n'est pas fortement valué, il existe des infraconnexes fermés bornés D de K tels que l'algèbre de Banach $H(D)$ ne soit pas multibijective.

Preuve. - On a démontré dans [5] l'existence d'infraconnexes fermés bornés D tels que $H(D)$ ne soit pas multibijective lorsque K n'est pas fortement valué. Réciproquement, on va donner un aperçu de la démonstration selon laquelle si K est fortement valué, toute K -algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire est multibijective.

Procédant par l'absurde, on suppose qu'il existe φ_1 et $\varphi_2 \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ tels que $\text{Ker } \varphi_1 = \text{Ker } \varphi_2$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, de sorte que le corps quotient $\Gamma = A/\text{Ker } \varphi_1$ est une K -algèbre de Banach qui possède deux valeurs absolues continues :

$$|\theta(y)|_1 = \varphi_1(y) \quad \text{et} \quad |\theta(y)|_2 = \varphi_2(y) ,$$

en désignant par θ la surjection canonique de A sur Γ .

Alors il existe $x \in \Gamma$ tel que $|x|_1 \neq |x|_2$; supposons $|x|_1 < |x|_2$, et soit $\mathcal{P}_0$ la partition x -canonique. Comme K est fortement valué, on peut construire un infraconnexe fermé borné D possédant un T -filtre croissant $\mathcal{C}$ [4] tel que l'homomorphisme canonique de $(K(D), \|\cdot\|_D)$ dans $H(\emptyset, \mathcal{P}_0)$ soit continu et se prolonge en un homomorphisme continu N de $H(D)$ dans $H(\emptyset, \mathcal{P}_0)$, définissant ainsi un homomorphisme continu $\pi = \theta_i N$ de $H(D)$ dans Γ . Alors il existe un élément $\xi \in H(D)$ strictement annulé par $\mathcal{C}$, et on voit que $\pi(\xi)$ n'est pas inversible, ni nul, ce qui est absurde.

On montre le théorème suivant par un raisonnement voisin.

THÉORÈME 3. - Supposons K fortement valué, et soit A une K -algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire. Soit $\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ tel que $h(\text{Ker } \varphi)$ soit dénombrable ; alors $\varphi \in \text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$.

4. Algèbres de Banach régulières et synthèse harmonique [2].

Rappelons qu'une C -algèbre de Banach A est dite régulière si l'application $\chi \rightarrow \text{Ker } \chi$ de $\mathfrak{X}(A)$ sur $\text{Max}(A)$ est un homéomorphisme quand on munit $\mathfrak{X}(A)$ de la convergence simple, et $\text{Max}(A)$ de la topologie de Jacobson. En fait, il est équivalent de dire que Φ_A est un homéomorphisme, et comme Φ_A est trivialement continue, il est équivalent de dire que Φ_A est fermée.

Prolongeant donc la notion d'algèbre de Banach régulière comme dans la théorie classique, nous dirons qu'une K -algèbre de Banach A commutative unitaire est régulière si Φ_A est fermée quand on munit $\text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$ de la topologie de la convergence simple, et $\text{Max}(A)$ de la topologie de Jacobson. On a une caractérisation immédiate des algèbres de Banach régulières.

PROPOSITION 2. - Soit A une K -algèbre de Banach commutative unitaire. Alors A est régulière si, et seulement si, pour tout couple de fermés F_1, F_2 de $\text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$, tels que $\Phi_A(F_1) \cap \Phi_A(F_2) = \emptyset$, il existe $x \in A$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in F_1$, et $\varphi(x) = 1$ pour tout $\varphi \in F_2$.

Nous allons maintenant rechercher les idéaux $\mathfrak{J}$ d'une K -algèbre de Banach A satisfaisant $\mathfrak{J} = I(h(\mathfrak{J}))$. Dans le cas où $h(\mathfrak{J})$ est dénombrable, on obtient aisément un résultat qui ne nécessite aucune hypothèse de régularité ni de multibjectivité sur A .

Définition. - Soit L un corps algébriquement clos valué ultramétrique ou archimédien complet. Nous dirons qu'une L -algèbre de Banach commutative unitaire A satisfait la condition de Ditkin si, pour tout $\mathfrak{M}_0 \in \text{Max}(A)$, et pour tout $x \in A$, il existe une suite $u_n \in A$, et une suite de voisinage V_n de $\mathfrak{M}_0$ (dans $\text{Max } A$, pour la topologie de Jacobson de A) telle que $u_n \in \mathfrak{M}$, $\forall \mathfrak{M} \in V_n$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x u_n = x .$$

THÉOREME 4. - Soit A une L-algèbre de Banach commutative unitaire sans radical, satisfaisant la condition de Ditkin. Alors, pour tout idéal fermé $\mathfrak{J}$ tel que $h(\mathfrak{J})$ ait une frontière dénombrable (dans $\text{Max } A$, pour la topologie de Jacobson), on a $\mathfrak{J} = I(h(\mathfrak{J}))$.

Preuve. - Il s'agit de montrer que $I(h(\mathfrak{J})) \subset \mathfrak{J}$. Soit

$$F = \{\mathfrak{M}_n ; n \in \mathbb{N}\}$$

la frontière de $h(\mathfrak{J})$; soit $x \in \mathfrak{J}$ et soit $\varepsilon > 0$. Nous allons définir une suite (u_n, V_n) où $u_n \in A$ et V_n est un voisinage de F dans $\text{Max}(A)$ tel que

$$(1) \quad \|x(u_{n+1} - u_n)\| \leq \varepsilon/n^2$$

et

$$(2) \quad u_n \in \mathfrak{M}, \quad \forall \mathfrak{M} \in V_n.$$

Supposons déjà définis (u_j, V_j) satisfaisant (1) et (2) pour $j = 1, \dots, n$. D'après la condition de Ditkin, il existe $u \in A$, et il existe un voisinage V de $\mathfrak{M}_{n+1}$ tel que

$$\|u_n x(1 - u)\| \leq \varepsilon/(n+1)^2 \quad \text{et } u \in \mathfrak{M}, \quad \forall \mathfrak{M} \in V$$

de sorte que l'on peut définir $u_{n+1} = uu_n$ et $V_{n+1} = V_n \cup V$: on voit que les couples (u_j, V_j) satisfont bien (1) et (2) pour $j \leq n+1$. Donc la suite (u_n, V_n) est définie par récurrence, et la suite $u_n x$ converge évidemment vers une limite $y_\varepsilon \in A$ telle que

$$(3) \quad \|x - y_\varepsilon\| \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 \quad \text{et } y_\varepsilon \in \mathfrak{M}, \quad \forall \mathfrak{M} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

et bien sûr $\forall \mathfrak{M}_p \in h(\mathfrak{J})$. Alors $h(\mathfrak{J}) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n)$ est un voisinage de $h(\mathfrak{J})$ et l'on a

$$\sigma(y_\varepsilon) \cap h(\mathfrak{J}) = \emptyset,$$

donc $y_\varepsilon \in \mathfrak{J}$ d'après le lemme.

Enfin ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui prouve, grâce à (3), que $x \in \mathfrak{J}$ puisque $\mathfrak{J}$ est fermé.

Remarque. - Cette démonstration n'est pas généralisable dans le cas où la frontière de $h(\mathfrak{J})$ n'est pas dénombrable. Pour cela nous allons utiliser dans la théorie ultramétrique un procédé apparenté à l'étude classique, à l'aide de la compacité de $\text{Mult}(A, \|\cdot\|)$.

Notations. - Soit A une K -algèbre de Banach commutative unitaire, et soit $P \subset \text{Max}(A)$. On notera $\tilde{P} = \hat{\mathfrak{G}}_A^{-1}(P)$. Soit $F \subset \text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$; on notera $\hat{F}$ l'adhérence de F dans $\text{Mult}(A, \|\cdot\|)$. Enfin, on notera

$$\Delta(A, \|\cdot\|) = \widehat{\text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)}.$$

On a tout d'abord dans $\Delta(A, \|\cdot\|)$ un lemme préparatoire tout à fait analogue à celui connu dans le cas complexe.

LEMME 3. - Soit A une K -algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire multibijectionnelle, régulière, sans radical. Soit $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ un recouvrement ouvert fini de $\Delta(A, \|\cdot\|)$. Alors il existe $x_1, \dots, x_n \in A$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ et

$$\widehat{\sigma(x_i)} \subset \mathcal{O}_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

La proposition suivante remplace la proposition bien connue de la théorie classique selon laquelle, si x "appartient à $\mathfrak{J}$ au voisinage de $\mathfrak{M}$ ", pour tout $\mathfrak{M} \in \text{Max } A$, alors $x \in \mathfrak{J}$. Ici, il faut encore remplacer $\text{Max } A$ par $\Delta(A, \|\cdot\|)$.

PROPOSITION 3. - Soit A une K -algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire multibijectionnelle régulière, sans radical. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A et soit $x \in A$ tel que, pour tout $\varphi \in \Delta(A, \|\cdot\|)$, il existe un voisinage V_φ de φ (dans $\Delta(A, \|\cdot\|)$) et un élément $y_\varphi \in \mathfrak{J}$ satisfaisant $\theta(y_\varphi - x) = 0$, $\forall \theta \in V_\varphi$. Alors on a $x \in \mathfrak{J}$.

Maintenant nous pouvons conclure en introduisant deux variantes de la condition de Ditkin appliquées, non plus à $\text{Max } A$, mais à $\Delta(A, \|\cdot\|)$, ce qui est encore, pour la première que nous allons citer, une forme de généralisation de la condition de Ditkin classique, $\Delta(A, \|\cdot\|)$ étant identifié à $\text{Max}(A)$ dans une $\mathcal{C}$ -algèbre de Banach régulière.

Définitions. - Soit A une K -algèbre de Banach commutative unitaire multibijectionnelle régulière. Nous dirons que A satisfait la supercondition de Ditkin si, pour tout $\varphi \in \Delta(A, \|\cdot\|)$ et pour tout $x \in A$, il existe une suite $u_n \in A$, et une suite V_n de voisinages de φ dans $\Delta(A, \|\cdot\|)$ telle que $\theta(u_n) = 0$, $\forall \theta \in V_n$, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n x = x.$$

Nous dirons que A satisfait la condition de Ditkin normée si, pour tout $\varphi \in \Delta(A, \|\cdot\|)$ et pour tout $x \in A$, il existe une suite $u_n \in A$ telle que $\|u_n\| = 1$, et une suite V_n de voisinages de φ telle que $\theta(u_n) = 0$, $\forall \theta \in V_n$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n x = x$.

Alors nous avons maintenant un résultat qui rappelle celui de la théorie classique, utilisant l'absence dans la frontière de $h(\mathfrak{J})$ d'ensembles parfaits non vides.

THÉORÈME 5. - Soit A une K -algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire multibijectionnelle régulière sans radical, satisfaisant la supercondition de Ditkin. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal fermé, et soit $\lambda(\mathfrak{J})$ la frontière de $\widehat{h(\mathfrak{J})}$. Alors, si toute partie fermée de $\lambda(\mathfrak{J})$ admet au moins un point isolé (pour la topologie induite), on a $I(h(\mathfrak{J})) = \mathfrak{J}$.

Preuve. - Pour tout $x \in I(h(\mathfrak{J}))$, on notera $F(x)$ l'ensemble des $\varphi \in \Delta(A, \|\cdot\|)$ pour lesquels il existe un couple (y_φ, V_φ) où $y_\varphi \in \mathfrak{J}$, et V_φ est un voisinage de φ (dans $\Delta(A, \|\cdot\|)$) tel que $\theta(y_\varphi - x) = 0$, $\forall \theta \in V_\varphi$, et on notera

$$G(x) = \Delta(A, \|\cdot\|) - F(x).$$

Montrons que $G(x) = \emptyset$, ce qui prouvera que $x \in \mathfrak{J}$ d'après la proposition.

D'abord $F(x)$ est évidemment ouvert de sorte que $G(x)$ est fermé. De plus, $F(x)$ contient l'intérieur Λ de $\widehat{h(\mathfrak{J})}$ (dans $\Delta(A, \|\cdot\|)$): il suffit de considérer $u_\varphi = 0$ et $V_\varphi = \Lambda$, $\forall \varphi \in \Lambda$. Alors nous allons montrer que

$$F(x) \supset \Delta(A, \|\cdot\|) - \widehat{h(\mathfrak{J})}.$$

En effet, soit $\varphi \in \Delta(A, \|\cdot\|) - \widehat{h(\mathfrak{J})}$; puisque $\Delta(A, \|\cdot\|)$ est compact, il existe un voisinage fermé V_φ de φ et un voisinage fermé W_φ de $\widehat{h(\mathfrak{J})}$ tels que $V_\varphi \cap W_\varphi = \emptyset$ et comme A est régulière et multibijective, il existe $u_\varphi \in A$ tel que

$$\theta(u_\varphi) = 0, \quad \forall \theta \in W_\varphi, \quad \text{et} \quad \theta(u_\varphi) = 1, \quad \forall \theta \in V_\varphi.$$

Alors posons $y_\varphi = u_\varphi x$: nous voyons que $\varphi \in F(x)$ de sorte que $G(x) \subset \lambda(\mathfrak{J})$, et par suite $G(x)$ a au moins un point isolé, ou bien $G(x)$ est vide.

Montrons donc que $G(x) = \emptyset$; pour cela supposons $G(x) \neq \emptyset$; soit φ_0 un point isolé de $G(x)$. Soit $G_0 = G(x) - \varphi_0$. Alors il existe un voisinage fermé V_0 de φ_0 dans $\Delta(A, \|\cdot\|)$ tel que $G_0 \cap V_0 = \emptyset$, et par suite il existe $u_0 \in A$ tel que $\theta(u_0) = 1$, $\forall \theta \in V_0$, et $\theta(u_0) = 0$, $\forall \theta \in G_0$. Soit $y_0 = u_0 x$; on a $\theta(y_0 - x) = 0$, $\forall \theta \in V_0$, et il reste donc seulement à montrer que $y_0 \in \mathfrak{J}$ pour en déduire que $x_0 \in \mathfrak{J}$ (d'après la proposition 3).

Or nous avons de façon évidente $y_0 \in I(h(\mathfrak{J}))$ et

$$G(y_0) \subset G(u_0) \cap G(x) = \{\varphi_0\}.$$

Mais grâce à la supercondition de Ditkin, il existe une suite u_n de A et une suite V_n de voisinages de φ_0 telles que $\theta(u_n) = 0$, $\forall \theta \in V_n$, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n y_0 = y_0.$$

Maintenant, puisque $\varphi_0 \notin G(u_n)$, on a $G(u_n) \cap G(y_0) = \emptyset$, donc $G(u_n y_0) = \emptyset$, et $u_n y_0 \in \mathfrak{J}$ d'après la proposition 2, donc $y_0 \in \mathfrak{J}$.

Enfin la supercondition normée nous permet d'obtenir un résultat qui concerne tous les idéaux fermés. Nous utiliserons ici, à nouveau, une propriété typiquement ultramétrique.

THÉOREME 6. - Soit A une K -algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire régulière multibijective sans radical, satisfaisant la supercondition de Ditkin normée. Alors, pour tout idéal fermé $\mathfrak{J}$ de A , on a $I(h(\mathfrak{J})) = \mathfrak{J}$.

Preuve. - Soit $x \in I(h(\mathfrak{D}))$, soit $\varepsilon > 0$, et montrons qu'il existe un élément $\gamma_\varepsilon \in \mathfrak{D}$ tel que $\|x - \gamma_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Grâce à la supercondition de Ditkin normée, il existe une famille $(u_\varphi, V_\varphi)_{\varphi \in h(\mathfrak{D})}$ telle que $\|u_\varphi\| = 1$, $\|u_\varphi x - x\| \leq \varepsilon$ et $\theta(u_\varphi) = 0$, $\forall \theta \in V_\varphi$. Maintenant, puisque $\widehat{h(\mathfrak{D})}$ est compact, on peut extraire une famille finie $(\varphi_1, V_1), \dots, (\varphi_n, V_n)$ de $\widehat{h(\mathfrak{D})}$ telle que

$$\bigcup_{i=1}^n V_{\varphi_i} > \widehat{h(\mathfrak{D})}.$$

Soit $u = \prod_{i=1}^n u_{\varphi_i}$ et soit $\gamma_\varepsilon = ux$. On voit que

$$\mathfrak{D}_A[(\bigcup_{i=1}^n V_{\varphi_i}) \cap \text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)]$$

est un voisinage de $h(\mathfrak{D})$ tel que $\chi(u) = 0$, $\forall \chi \in \Gamma$, donc $\gamma_\varepsilon \in \mathfrak{D}$ d'après le lemme. Enfin, il est immédiat de vérifier que $\|\gamma_\varepsilon - x\| \leq \varepsilon$ du fait que

$$\|u_{\varphi_i}\| = 1, \forall i,$$

et ainsi $x \in \mathfrak{D}$.

On remarque qu'ici l'inégalité ultramétrique joue un rôle essentiel.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.) et ESCASSUT (A.). - Sur la non-injectivité de la transformation de Fourier p-adique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, Série A, 1974, p. 583-585.
- [2] BOURBAKI (N.). - Théorie spectrale. Chap. I. - Paris, Hermann, 1967 (Act. scient. et ind.).
- [3] ESCASSUT (A.). - Éléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe, Annali di Mat. pura ed appl., Bologna (A paraître).
- [4] ESCASSUT (A.). - T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, n° 2, 1975, p. 75-110.
- [5] ESCASSUT (A.). - Spectre maximal d'une algèbre de Krasner, Colloquium Math., Wroclaw, t. 37, 1977, n° 2 (à paraître).
- [6] GARANDEL (G.). - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, Indag. Math., t. 37, 1975, p. 327-341.
- [7] GUENNEBAUD (B.). - Algèbres localement convexes sur les corps valués, Bull. Sc. math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.
- [8] GUENNEBAUD (B.). - Sur une notion de spectre pour les algèbres normés ultramétriques, Thèse Doctorat ès-Sciences, Université de Poitiers-I, 1973.
- [9] KRASNER (M.). - Prolongement analytique dans les corps valués complets : préservation de l'analyticit par la convergence uniforme et par la dérivation ; théorème de Mittag-Löfller généralisé pour les éléments analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 2570-2572.

Alain ESCASSUT
Laboratoire de Mathématiques
associé au C. N. R. S.
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE

(Texte reçu le 1er juillet 1976)