Philippe Robba

Factorisation d'un opérateur différentiel, III

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, nº 1 (1975-1976), exp. nº 6, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_1_A4_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° 6, 6 p.
8 décembre 1975

FACTORISATION D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL, III

par Philippe ROBBA

(d'après un travail en commun avec B. DWORK [1])

Soit L un opérateur différentiel linéaire à coefficients éléments analytiques dans $\Delta = D(0, 1^-)$. On sait [4] que l'opérateur différentiel unitaire R qui définit le noyau borné de L dans le disque générique a ses coefficients éléments analytiques dans le disque générique, et que la dimension du noyau borné de L dans Δ est inférieure ou égale à celle du noyau borné dans le disque générique. L'objet de cet exposé est de montrer que lorsque ces deux dimensions sont égales, les coefficients de l'opérateur différentiel unitaire définissant le noyau borné de L dans Δ sont les prolongements analytiques des coefficients de R.

1. Notations.

Soit K un corps valué ultramétrique complet, et soit Ω une extension algébriquement close, complète de K. On suppose qu'il existe $t \in \Omega$, $|t| = 1$, tel que $\bar{t}$ soit transcendant sur le corps résiduel $\bar{K}$.

Soit $\Delta = D(0, 1^-)$. On note $H(\Delta)$ l'espace des éléments analytiques sur Δ à coefficients dans K, et $\mathcal{R}(\Delta)$ le corps quotient de $H(\Delta)$. Un élément de $\mathcal{R}(\Delta)$ sera appelé un élément méromorphe dans Δ.

On note W_0 l'espace des fonctions analytiques bornées dans $D(0, 1^-)$, et M le corps quotient de W_0. La norme de la convergence uniforme sur Δ, définit sur W_0 une valeur absolue qui s'étend de façon unique à M. Cette valeur absolue définit une norme sur M notée $\| \ \|_\sigma$.

On note E le complété de $E_0 = K(x)$ pour la valeur absolue de Gauss (qui coïncide avec $\| \ \|_\sigma$). E s'identifie à l'espace des éléments analytiques sur $D(t, 1^-)$ à coefficients dans K, et $\mathcal{R}(\Delta)$ s'identifie à un sous-espace de E.

Si $\mathbb{L} \in E[D]$, $\mathbb{L} = \sum_{\text{finie}} C_m(D^m/m!)$

$$\|\mathbb{L}\| = \sup_m \|C_m\| .$$

Ceci définit une norme sur $E[D]$. Si $\mathbb{L} \in \mathcal{R}(\Delta)[D]$, alors pour $u \in M$, on a $\mathbb{L}u \in M$ et

$$\|\mathbb{L}u\|_\sigma \leq \|\mathbb{L}\| \, \|u\|_\sigma .$$

2. Comparaison des noyaux bornés dans Δ et le disque générique.

On notera $\mathrm{Ker}_t \mathbb{L}$ le noyau de L formé de fonctions analytiques au voisinage du point t.

2.1. THÉORÈME ([4], théorème 5.8). — Soit $L \in E[D]$. Soit R le générateur unitaire de l'idéal fermé dans $E[D]$ engendré par L. Alors

$$\mathrm{Ker}_t\, R = \mathrm{Ker}\, L \cap W_t^0 .$$

2.2. THÉORÈME.

1° Soit $L \in H(\Delta)[D]$. On a

$$(*) \qquad \dim(\mathrm{Ker}\, L \cap W_t) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}\, L \cap M) .$$

2° Soit R l'opérateur défini au théorème 2.1. Si $R \in H(\Delta)[D]$, ou si

$$R \in \mathcal{R}(\Delta)[D]$$

et si Δ n'est pas une classe singulière pour L, on a l'égalité dans (*).

3° Si (*) est une égalité, les coefficients de R se prolongent en fonctions méromorphes dans Δ (et $\mathrm{Ker}\, L \cap M$ est alors le noyau dans Δ de l'opérateur ainsi prolongé). Si la valuation de K est discrète, les coefficients de R sont, plus précisément, des éléments méromorphes sur Δ (autrement dit $R \in \mathcal{R}(\Delta)[D]$).

Remarques.

1° On rappelle que Δ n'est pas une classe singulière pour R si, pour tout $a \in \Delta$, $\dim \mathrm{Ker}_a\, R = \text{ordre}\, R$.

2° Le théorème 2.2 reste vrai si l'on travaille dabs une couronne Δ de rayon extérieur 1 ($\Delta = \{x \in \Omega \; ; \; r \leqslant |x| < 1\}$) au lieu de travailler dans une classe résiduelle.

3° Le résultat est similaire au théorème 2.2 de [5] qui compare les noyaux de L dans Δ et dans le disque générique :

Démonstration.

1° Ce résultat est déjà connu ([4], théorème 6.2).

2° Ceci se démontre comme le résultat correspondant du théorème 2.2 de [5].

3° Soit $k = \text{ordre}\, R = \dim(\mathrm{Ker}\, L \cap M)$.

Soit $u_i \ldots u_k$ une base de $\mathrm{Ker}\, L \cap M$ avec $\|u_i\|_\sigma = 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

D'après le théorème 2.1, il existe $R_n \in E_0[D]$, P_n et $Q_n \in \mathcal{R}(\Delta)[D]$ tels que

$$\|R_n - R\| \leqslant 1/n$$

$$\|P_n\| \leqslant 1/n$$

$$R_n = P_n + Q_n L .$$

Posons $R_n u_i = \theta_{ni}$. On obtient

$$\theta_{ni} = P_n u_i$$

et donc

$$\|\theta_{ni}\|_\sigma = \|P_n u_i\|_\sigma \leq \|P_n\| \leq 1/n .$$

Soit N l'unique opérateur différentiel unitaire d'ordre k à coefficients dans M tel que $Nu_i = 0$, $1 \leq i \leq k$. On a alors

$$(R_n - N)u_i = \theta_{ni} , \quad 1 \leq i \leq k .$$

Ceci est un système d'équation dont les inconnues a_{nj} sont les k coefficients de $R_n - N$. Le système se résoud pour les formules de Cramer, ce qui donne la majoration

$$\|a_{nj}\|_\sigma \leq 1/cn$$

où $c = \|\text{wronskien}(u_i)\|_\sigma$ ne dépend pas de n .

Les coefficients a_j de N sont donc les limites dans M d'une suite de fractions rationnelles a_{nj} qui, par ailleurs, convergent dans E vers les coefficients correspondants de R . Le résultat annoncé est donc une conséquence de la proposition 4.

3. Une classe d'ensembles analytiques.

Nous allons indiquer comment à toute fonction analytique bornée dans Δ est associée une famille d'ensembles analytiques.

Soit $h \in W_0$. Pour tout $c \in]0 , 1[$, nous définissons les ensembles

$$Z_c = \{x \in \Delta \ ; \ |h(x)| \geq c|h|_0(|x|)\}$$

$$Y_c = Z_c \cup D(t , 1^-)$$

$$D_c = Z_c \cup C\Delta$$

$$Y = \bigcup_{0<c<1} Y_c .$$

THÉORÈME (MOTZKIN [3]). - <u>Soit</u> $h \in W_0$. <u>Pour tout</u> $c \in]0 , 1[$, <u>l'ensemble</u> D_c (<u>et donc également</u> Y_c) <u>est analytique</u>.

<u>Remarques</u>.

1° Si la valuation de K est discrète, h n'a qu'un nombre fini de zéros dans Δ , donc D_c est Ω privé d'un nombre fini de disques, c'est donc un quasi-connexe, donc trivialement un ensemble analytique.

2° La conclusion du théorème est fausse si h n'est pas borné comme le montre le résultat d'ESCASSUT [2] correspondant à $h(x) = \log(1 + x)$.

4. Un résultat de prolongement analytique.

Soit $F \in E$, et $f_n \in E$, une suite de fractions rationnelles convergeant vers F . Comme la valeur absolue de Gauss et la norme $\| \ \|_\sigma$ coïncident sur E_0 , si f_n

converge vers une limite f dans M, toute autre suite approximante de F convergera vers la même limite f. On peut donc considérer que f est un prolongement de F en une fonction méromorphe dans Δ.

Ce que nous allons montrer c'est que f est le prolongement analytique de F au sens usuel du terme.

Avant d'énoncer le résultat essentiel, observons que tout $f \in M$ qui est adhérent à E_0 définit, de façon canonique, un élément F de E ; en effet si $f_n \in E_0$ converge vers f, (f_n) est de Cauchy, donc converge vers F dans E, et clairement la limite F ne dépend pas de la suite approximante choisie (f_n).

PROPOSITION. - <u>Soient</u> $g, h \in W_0$ <u>tels que</u> $f = g/h$ <u>soit adhérent à</u> E_0 <u>dans</u> M. <u>Alors, pour tout</u> $c \in]0, 1[$, f <u>prolongée par</u> F <u>sur</u> $D(t, 1^-)$, <u>est un élément analytique sur</u> Y_c (<u>donc</u> f <u>est une fonction analytique sur</u> Y).

En d'autres termes, f (resp. F) est le prolongement analytique de F (resp. f).

<u>Démonstration</u>. - Les pôles de f, qui sont les zéros de h, sont répartis sur des cercles Γ_m (de centre 0) et de rayon r_n, la suite r_n étant croissante et convergeant vers 1 (ou est finie). Les trous de Y_c situés dans Δ sont également contenus dans ces cercles Γ_n. On posera

$$f_n = \sum_{T\subset\Gamma_n} f_T = \sum_{\alpha\in\Gamma_n, h(\alpha)=0} \xi_\alpha$$

où ξ_α représente la partie singulière de f relative au pôle α.

<u>1re étape</u> : Montrons que $\|f_n\|_{D_c} \to 0$ quand $n \to \infty$.

Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $Q \in E_0$ tel que

$$|F - Q|_E < c\varepsilon$$
$$\|f - Q\|_\sigma < c\varepsilon .$$

Comme $\|f - Q\|_\sigma = \lim_{r\to 1} |f - Q|_0(r)$, il existe $r < 1$ tel que $|f - Q|_0(\rho) \leq c\varepsilon$ pour tout $\rho \in]r, 1[$, et tel que Q n'ait pas de pôles dans la couronne

$$r < |x| < 1 .$$

Soit $V_n = \Gamma_n \cap Y_c$. Comme Q n'a pas de pôles dans Γ_n, pour tout trou $T \subset \Gamma_n$,

$$(f - Q)_T = f_T$$

et donc

$$\|f_T\|_{CT} = \|(f - Q)_T\|_{CT} \leq \|f - Q\|_{V_n} .$$

Or (par définition de Y_c, donc de V_n), pour tout $x \in V_n$,

$$|h(x)| \geq c|h|_0(r_n) ,$$

et comme $g - hQ$ est analytique sur Γ_n , on a, pour tout $x \in V_n$,

$$|(f - Q)(x)|\ c|h|_0(r_n) \leqslant |(g - hQ)(x)| \leqslant |g - hQ|_0(r_n) = |h|_0(r_n)\ |f - Q|_0(r_n) ,$$

et par conséquent, si $r_n \in]r , 1[$

$$|(f - Q)(x)| \leqslant \varepsilon .$$

Comme $D_c \subset \complement T$, on a donc

$$\|f_T\|_{D_c} \leqslant \|f_T\|_{\complement T} \leqslant \|f - Q\|_{V_n} \leqslant \varepsilon ,$$

et finalement

$$\|f_n\|_{D_c} \leqslant \varepsilon .$$

<u>2e étape</u> : Posons $f_\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ (cette série converge dans $H(D_c)$ en vertu de le première étape), et

F_Δ = partie singulière de F relative au trou Δ de $D(t , 1^-)$.

Nous allons montrer que $f_\Delta = F_\Delta$ en tant qu'élément de $H(\complement\Delta)$.

Q et r étant comme dans la première étape, et Q_Δ étant la partie singulière de Q relative à Δ , on a

$$\|F_\Delta - Q_\Delta\|_{\complement\Delta} \leqslant \|F - Q\|_{D(t,1^-)} = |F - Q|_E < \varepsilon .$$

On peut supposer que l'on a $r \neq r_n$ pour tout n , r appartenant au groupe des valeurs de Ω . Posons $\Gamma = \{x ; |x| = r\}$, et soit T le trou de Γ ,

$$T = D(0 , r^-) .$$

On a

$$(Q - f)_T = Q_\Delta - \sum_{r_n<r} f_n$$

et

$$\|(Q - f)_T\|_{\complement\Delta} \leqslant \|(Q - f)_T\|_{\complement T} \leqslant \|Q - f\|_\Gamma = |Q - f|_0(r) \leqslant \varepsilon .$$

Comme par ailleurs $\|f_n\|_{\complement\Delta} \leqslant \varepsilon$ pour $r_n > r$, on a finalement

$$\|Q_\Delta - f_\Delta\|_{\complement\Delta} \leqslant \varepsilon ,$$

et donc

$$\|F_\Delta - f_\Delta\|_{\complement\Delta} \leqslant \varepsilon .$$

Cette majoration étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'égalité annoncée.

<u>3e étape</u> : $f - f_\Delta$ se prolonge en une fonction analytique bornée dans Δ , donc peut être considérée comme un élément de W .

$F - F_\Delta$ se prolonge en un élément analytique sur Δ , donc peut être considérée comme un élément de W .

Nous allons montrer que $f - f_\Delta = F - F_\Delta$ en tant que fonctions analytiques bornées sur Δ.

Q étant comme précédemment, on voit que $Q - Q_\Delta \in H(\Delta)$ et, de plus,

$$\|(f - f_\Delta) - (Q - Q_\Delta)\|_\Delta = \|(f - f_\Delta) - (Q - Q_\Delta)\|_\sigma \leqslant \max(\|f - Q\|_\sigma , \|f_\Delta - Q_\Delta\|_\sigma) \leqslant \varepsilon$$

$$\|(F - F_\Delta) - (Q - Q_\Delta)\|_\Delta = |(F - F_\Delta) - (Q - Q_\Delta)|_E \leqslant \max(|F - Q|_E , |F_\Delta - Q_\Delta|_E) \leqslant \varepsilon .$$

On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|(f - f_\Delta) - (F - F_\Delta)\|_\Delta \leqslant \varepsilon ,$$

ce qui démontre notre assertion :

<u>Final</u>. - On a, pour tout $x \in Z_c$,

$$f(x) = f_\Delta(x) + (F - F_\Delta)(x) ,$$

or $f_\Delta \in H(Y_c)$ et $F - F_\Delta \in H(\Delta \cup D(t , 1^-)) \subset H(Y_c)$. Donc f est la restriction à Z_c de $f_\Delta + (F - F_\Delta)$ élément analytique sur Y_c. Par ailleurs, pour

$$x \in D(t , 1^-)$$

on a $f_\Delta(x) = F_\Delta(x)$ ce qui montre que la restriction de $f_\Delta + (F - F_\Delta)$ à $D(t, 1^-)$ est F. Ceci achève la démonstration de la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.) et ROBBA (P.). - On ordinary linear p-adic differential equations, Trans. Amer. math. Soc. (à paraître).

[2] ESCASSUT (A.). - T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, n° 2, p. 45-80.

[3] MOTZKIN (E.). - Une classe d'ensembles analytiques p-adiques, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 2.

[4] ROBBA (P.). - Croissance des solutions d'une équation différentielle homogène, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 1, 15 p.

[5] ROBBA (P.). - Factorisation d'un opérateur différentiel, Application, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 10, 6 p.

(Texte reçu le 12 juin 1976)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS