GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PAUL BEZIVIN

Interpolation et idéaux de fonctions analytiques bornées

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, n° 1 (1975-1976), exp. n° 3, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_1_A2_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTERPOLATION ET IDÉAUX
 DE FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES

par Jean-Paul BEZIVIN.

1. Notations.

On note K un corps ultramétrique, complet et algébriquement clos.

$D = D(0, 1)$ sera le disque unité "ouvert" de K , c'est-à-dire

$$D = \{x \in K ; |x| < 1\} .$$

B sera l'algèbre de Banach des fonctions analytiques bornées sur D , munie de la norme de la convergence uniforme sur D . On sait que dire que $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est dans B équivaut à dire que $\sup_n |a_n| < +\infty$, et qu'alors on a $\|f\| = \sup_n |a_n|$.

Enfin, on notera $b(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites bornées à coefficients dans K , muni de la norme $\sup_n |a_n| = \|a\|$, et $c(\mathbb{N})$ le sous-espace de $b(\mathbb{N})$ des suites convergentes.

2. Interpolation.

Soient $x_1, \dots, x_n$, une suite d'éléments de D , et $b_1, \dots, b_n$, une suite d'éléments de K ; on suppose la suite x_k injective.

On veut trouver une condition nécessaire et suffisante, pour qu'il existe $f \in B$, vérifiant $f(x_j) = b_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

PROPOSITION 1. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in B$, vérifiant $f(x_j) = b_j$, $\forall j$, est que la suite $b_n^{(n)}$ suivante soit bornée :

$$b_n^{(n)} = \sum_1^n \frac{b_k}{\sigma_{k,n}} \quad \text{où} \quad \sigma_{k,n} = \prod_{j \neq k, j=1}^{j=n} (x_k - x_j) .$$

Preuve. - On examine tout d'abord le même problème avec la condition supplémentaire $\|f\| < 1$. La condition générale s'en suivra aisément.

Condition nécessaire : Supposons donné f vérifiant $f(x_j) = b_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Posons $f = f_1$, et $b_j^{(1)} = b_j$, $\forall j$, et définissons une suite f_n d'éléments de B , et une suite double d'éléments de K , $b_j^{(l)}$, par les formules suivantes :

$$b_j^{(l+1)} = \frac{b_j^{(l)} - b_0^{(l)}}{x_j - x_0}, \quad \forall j \geq l+1,$$

$$f_l(x) = b_l^{(l)} + (x - x_l) f_{l+1}(x) .$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \geq n, f_n(x_j) = b_j^{(j_n)},$$

et une relation sur les normes des f_n :

$$\|f_{n+1}\| \leq \|f_n\| \text{ pour tout } n.$$

Ces deux relations impliquent :

$$\forall j \geq n, |b_j^{(n)}| \leq \|f_n\| \leq \|f\| < 1,$$

en particulier, $|b_n^{(n)}| \leq \|f\| < 1$, d'où

$$\sup_n |b_n^{(n)}| \leq \|f\| < 1.$$

Il est facile de voir que les $b_n^{(n)}$ que l'on vient de définir ainsi sont égaux aux $b_n^{(n)}$ de l'énoncé ; on a, par exemple,

$$b_2^{(2)} = \frac{b_2 - b_{11}}{x_2 - x_{11}} = \frac{b_2}{x_2 - x_{11}} + \frac{b_{11}}{x_1 - x_2}.$$

On en déduit donc qu'une condition nécessaire est que $\sup_n \left| \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\sigma_{k,n}} \right| < 1$; on va montrer que cette condition est suffisante.

Condition suffisante : On suppose donc $h = \sup_n |b_n^{(n)}| < 1$. Examinons tout d'abord le cas fini ; on se fixe un entier N , et on cherche la fonction la plus simple qui vérifie $f(x_j) = b_j$, $j \leq N$. En reprenant la suite de fonctions utilisée pour démontrer la nécessité de la condition de la proposition, on peut poser :

$$f_N(x) = b_N^{(N)},$$

définir ensuite f_{N-1} par

$$f_{N-1}(x) = b_{N-1}^{(N-1)} + (x - x_N) f_N(x),$$

et par récurrence

$$f_{N-p}(x) = b_{N-p}^{(N-p)} + (x - x_{N-p}) f_{N-p+1}(x).$$

Il est facile de voir que, $\forall p$, on aura :

$$f_{N-p}(x_j) = b_j^{N-p} \text{ si } N \geq j \geq N - p$$

et d'autre part que

$$\|f_{N-p}\| \leq \sup(|b_{N-p}^{(N-p)}|, \dots, |b_N^{(N)}|), \text{ pour } p = N - 1,$$

on aura donc une fonction f_1 qui va vérifier

$$f_1(x_j) = b_j^{(1)} = b_j \text{ si } 1 \leq j \leq N,$$

$$\|f_1\| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |b_k^{(k)}| \leq h < 1.$$

La fonction f_1 précédente dépend de N , notons-la g_N . Il est clair que si la suite g_N (ou une sous-suite extraite) convergeait vers $g \in B$, g serait une solution de notre problème.

Malheureusement, ce n'est pas le cas en général. Ecrivons

$$g_N(x) = \sum_0^\infty a_k^{(N)} x^k.$$

Si g_N convergeait, la suite $a_k^{(N)}$, pour k fixé, serait aussi convergente, donc on aurait $(a_k^{(N)}) = \Lambda_k \in c(\mathbb{N})$. Une solution g serait alors $g(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$, où l'on a posé $a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} a_k^{(N)}$.

Supposons provisoirement que la forme linéaire Φ , qui à $(c_n) \in C(\mathbb{N})$ associe sa limite, se prolonge en $\tilde{\Phi}$ linéaire continue d'un sous-espace fermé E de $b(\mathbb{N})$ contenant $c(\mathbb{N})$ et tous les Λ_k , $k \geq 0$, vérifiant $\|\tilde{\Phi}\| \leq 1 + \varepsilon$, ε étant choisi tel que $(1 + \varepsilon)h < 1$. On peut alors terminer la démonstration: Posons $a_k = \tilde{\Phi}(\Lambda_k)$, et notons $f(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$.

On a tout d'abord

$$|a_k| \leq \|\tilde{\Phi}\| \|\Lambda_k\| \leq (1 + \varepsilon)h < 1,$$

donc $f \in B$, et $\|f\| < 1$.

Soit $T_j = (g_N(x_j))$; si $N > j$, $g_N(x_j) = b_j$; donc $T_j \in c(\mathbb{N})$ et $\tilde{\Phi}(T_j) = b_j$.

Mais, d'autre part,

$$g_N(x_j) = \sum_0^\infty a_k^{(N)} x_j^k.$$

On en déduit $T_j = \sum_0^\infty \Lambda_k x_j^k$. Donc

$$\tilde{\Phi}(T_j) = \sum_0^\infty \tilde{\Phi}(\Lambda_k) x_j^k = \sum_0^\infty a_k x_j^k = f(x_j),$$

et par suite

$$f(x_j) = b_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Il est clair qu'alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in B$ vérifiant $f(x_j) = b_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$ est que $\sup |b_n^{(n)}| < +\infty$.

Il reste à montrer l'existence du prolongement $\tilde{\Phi}$.

On utilise une proposition démontrée par M. VAN DER PUT dans [2].

Définition. - Soit E un espace de Banach sur K . On dit que E est de type dénombrable, s'il existe un sous-espace vectoriel $F \subset E$, de dimension finie ou dénombrable, qui soit dense dans E .

PROPOSITION 2 (HAHN-BANACH). - Soit E un espace de Banach sur K, de type dénombrable. Soit G un sous-espace fermé de E, et ϕ une forme linéaire continue sur G. Pour tout ε strictement positif, il existe $\tilde{\phi}$, forme linéaire continue sur E, prolongeant ϕ et telle que $\|\tilde{\phi}\| \leq \|\phi\| + \varepsilon$.

Il suffit alors de remarquer que $c(\mathbb{N})$ est de type dénombrable.

Remarque. - Les coefficients $b_k^{(k)}$ sont les coefficients de Newton de la fonction f , et il y a des cas où la série de Newton $\sum_{k \geq 1} b_k^{(k)} (x - x_1) \dots (x - x_k)$ converge dans B. C'est par exemple le cas si $\prod |x_k| = 0$; par contre quand $\prod |x_k| > 0$, le produit infini $\prod |x - x_n|$ est convergent et non nul si $x \neq x_\rho$, $\forall \rho \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la série ne converge pas dans B.

3. Applications.

On va donner quelques applications, déjà connues, de la proposition 1 (cf. [1]).

COROLLAIRE 1. Soit x_k , $k \geq 2$, une suite d'éléments de D, distincts et non nuls. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in B$, vérifiant $f(x_j) = 0$, $\forall j \geq 2$, et $f \neq 0$, est que $\prod_{n \geq 2} |x_n| > 0$.

Preuve. - Il est clair qu'il faut et il suffit qu'il existe $f \in B$, vérifiant $f(0) = 1$, $f(x_j) = 0$, $\forall j \geq 2$. On applique alors la proposition 1, qui nous dit que $1/\prod_{2}^n |x_k|$ doit être borné.

Cette condition nous indique que si $\prod |x_k| > 0$ (avec $x_k \neq 0$, $\forall k$), il y a plusieurs fonctions satisfaisant à $f(x_j) = b_j$, en général; par contre, si $\prod |x_k| = 0$, la solution est unique.

COROLLAIRE 2. - On dit que la suite injective (x_n) , $x_n \in D$, est d'interpolation si l'application τ de B dans $b(\mathbb{N})$, définie par $\tau(f) = (f(x_n))$, est surjective [1].

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que (x_n) soit d'interpolation est que

$$\inf_j \prod_{k \neq j} |x_j - x_k| = \delta > 0.$$

Preuve. - La condition est visiblement suffisante, puisque l'on a, si elle est vérifiée, et si $(b_n) \in b(\mathbb{N})$,

$$|b_k^{(k)}| \leq \frac{\|b\|}{\delta}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

et la proposition 1 permet alors de conclure.

Pour montrer qu'elle est nécessaire, remarquons que, d'après la proposition 1, dire que τ est surjective, c'est dire que, $\forall (b_n) \in b(\mathbb{N})$, la suite $b_n^{(n)}$ est bornée.

Soit T_n la forme linéaire continue sur $b(\mathbb{N})$, définie par

$$T_n(b) = b_n^{(n)} = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\sigma_{k,n}}.$$

On sait donc que, $\forall (b_n) \in b(\mathbb{N})$, $T_n(b)$ est bornée. Il résulte alors du théorème de Banach-Steinhaus que $A = \sup_n \|T_n\| < +\infty$.

D'autre part, si $n > k$, $T_n(e_k) = 1/\sigma_{k,n}$, où $e_k = (0, 0 \dots 1, 0 \dots 0 \dots)$.

Donc, $\forall k, n > k$, on a $|\sigma_{k,n}| \geq 1/A$, ce qui termine la démonstration.

4. Généralisation.

On peut généraliser le problème, défini dans le paragraphe 1, et on trouve des résultats analogues.

Soit x_k une suite injective d'éléments de D , et P_k une suite de polynômes à coefficients dans K .

$$P_k(x) = b_{k,0} + b_{k,1}(x - x_k) + \dots + b_{k,s_k-1}(x - x_k)^{s_k-1}.$$

On se pose alors le problème de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in B$ vérifiant

$$f(x) \equiv P_k(x) [(x - x_k)^{s_k}]^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il est clair que l'on peut utiliser sans difficultés les mêmes méthodes que pour le cas $s_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, et écrire :

$$\tilde{f}(x) = \sum d_{s_1, \dots, s_\rho, r} (x - x_1)^{s_1} \dots (x - x_\rho)^{s_\rho} (x - x_{\rho+1})^r,$$

où les $d_{s_1, \dots, s_\rho, r}$ sont les coefficients de Newton de f , relatifs à la suite (x_k, s_k) .

On en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante est que les $d_{s_1, \dots, s_\rho, r}$ soient bornés.

Il est clair que $d_{s_1, \dots, s_\rho, r}$ dépend linéairement des coefficients $b_{j,\alpha}$. Plus précisément, posons

$$f_{j,r}(x) = (x - x_1)^{-s_1} \dots (x - x_\rho)^{-s_\rho} (x - x_{\rho+1})^{-r},$$

produit où l'on a enlevé le terme en $(x - x_j)^{-s_j}$. Définissons des coefficients $\beta_n^{j,r}$ par

$$f_{j,r}(x) = \sum_0^\infty \beta_n^{j,r} (x - x_j)^n.$$

On a alors le lemme suivant.

LEMME. - Le coefficient de $b_{j,\alpha}$ dans $d_{s_1, \dots, s_\rho, r}$ est $\beta_{s_j - \alpha - 1}^{j,r}$.

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in B$, vérifiant $f \equiv P_k [x - x_k]^{s_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ est que les sommes $\sum b_{j,\alpha} \beta_{s_j - \alpha - 1}^{j,r}$ soient bornées, où $j \leq \rho + 1$, $\alpha \leq s_j - 1$, si $j \leq \rho$ et $\alpha \leq r$ si $j = \rho + 1$.

On peut en déduire, comme pour le cas $s_k = 1$, deux corollaires :

COROLLAIRE 1. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in B$ telle que $f \neq 0$ et $f \equiv 0 [(x - x_k)^{s_k}]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, avec $x_k \neq 0$, $\forall k$, est que $\prod |x_k|^{s_k} > 0$.

On déduit de ce corollaire les cas d'unicité de la solution du problème

$$f \equiv P_k [(x - x_k)^{s_k}] .$$

COROLLAIRE 2. - Une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout choix des P_k vérifiant $\sup \|P_k\| < +\infty$, il existe $f \in B$, $f \equiv P_k [(x - x_k)^{s_k}]$, est que

$$\inf_j \prod_{j \neq k} |x_k - x_j|^{s_k} = \delta > 0 .$$

Preuve. - On raisonne comme dans le cas $s_k = 1$, ce qui nous donne comme première condition nécessaire et suffisante $\sup |\beta_\alpha^{(j),r}| < +\infty$. Si

$$\alpha = s_j - 1, \quad |\beta_0^{j,r}| = \frac{1}{\prod_{k \neq j} |x_j - x_k|^{s_k}} \quad \text{pour } j \leq n .$$

Ceci nous donne la nécessité de la condition du corollaire. Montrons qu'elle est suffisante : $f_{j,r}(x)$ est analytique dans

$$|x - x_j| \leq \sigma < \inf_{q \neq j} |x_j - x_q| = |x_j - x_{q_0}| ,$$

les inégalités de Cauchy entraînent alors

$$|\beta_k^{j,r}| \leq \frac{|f_j(x_j)|}{|x_j - x_{q_0}|^k} \quad \text{si } k \leq s_j ,$$

on en déduit donc

$$|\beta_{s_j - \alpha - 1}^{(j)}| \leq \frac{1}{|x_j - x_{q_0}|^{s_j}} |f_j(x_j)| .$$

Mais on a $|f_j(x_j)| \leq 1/\delta$ par l'hypothèse relative à j , et $|x_j - x_{q_0}|^{s_j} \geq \delta$, c'est l'hypothèse relative à q_0 . Donc

$$|\beta_{s_j}^{(j)} - \alpha| \leq 1/\delta^2,$$

ce qui termine la démonstration.

5. Idéaux de B.

La condition d'interpolation sert à exhiber des idéaux maximaux de B qui ne soient pas les noyaux de morphismes du type $f \rightarrow f(\alpha)$, où $\alpha \in D$.

On a en effet la proposition suivante [1].

PROPOSITION. - Soit (x_k) une suite d'interpolation, et soit $I \subset B$ l'idéal des fonctions de B s'annulant sur (x_k) . Alors il y a une bijection entre les idéaux maximaux de B contenant I et les ultrafiltres sur $\mathbb{N}$ par l'application

$$\mathcal{U} \rightarrow \{f \in B; \lim_{\mathcal{U}} |f(x_k)| = 0\}.$$

On va donner ci-dessous un exemple d'idéal premier, fermé, non maximal, stable par dérivation, ce qui répondra à une question posée dans [1].

Notations. - Soit $x_k, x_k \in D$, une suite vérifiant :

$$1^\circ |x_{k+1}| > |x_k|, \quad \forall k, \quad |x_0| > 0,$$

$$2^\circ \prod |x_k| > 0.$$

Soit $q_k \in \mathbb{N}$ une suite telle que $q_k \rightarrow +\infty$ et $\prod |x_k|^{q_k} > 0$, soit $\sigma \in |K|$ vérifiant $0 < \sigma < |x_0|$, et $c_k \in \mathbb{N}$ telle que $\prod |x_k|^{c_k q_k} = 0$.

On notera, avec ces données, a_n une suite d'éléments de D vérifiant :

$$(i) \quad \forall n, \exists k, |a_n - x_k| = \sigma,$$

$$(ii) \quad \text{card}\{n; |a_n - x_k| = \sigma\} = c_k q_k.$$

(iii) Si n, m vérifient $|a_n - x_k| = |a_m - x_k| = \sigma$, alors $|a_n - a_m| = \sigma$ si $n \neq m$.

PROPOSITION. - Avec les notations ci-dessus, soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ vérifiant, $\forall A \in \mathcal{U}, \prod_{n \in A} |a_n| = 0$, et soit $\mathcal{P}$ l'idéal $\mathcal{P} = \{f; \lim_{\mathcal{U}} |f(a_n)| = 0\}$. L'idéal $\mathcal{P}$ est un idéal premier, fermé, non maximal, stable par dérivation.

Preuve. - On montre tout d'abord que $\mathcal{P} \neq \{0\}$. Le corollaire 1 du chapitre 4 nous dit qu'il existe $f \in B$ vérifiant $f(x) \equiv 0 [(x - x_k)^{q_k}]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, car $\prod |x_k|^{q_k} > 0$ et $f(0) = 1$.

Montrons que $f \in \mathcal{P}$: $\forall k$, on a $f(x) = (x - x_k)^{q_k} \theta_k(x)$ avec $\|\theta_k\| = \|f\|$; donc, si $|a_n - x_k| = \sigma$, on en déduit

$$|f(a_n)| \leq \sigma^{q_k} \|f\|;$$

Comme $\sigma < 1$ et $q_k \rightarrow \infty$, il en résulte que $f \in \mathcal{P}$ (car $\mathcal{U}$ contient les complémentaires des parties finies).

On montre ensuite que $\mathcal{P}$ est stable par dérivation.

Soit $g \in \mathcal{P}$; notons $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ les zéros non nuls de g . Soit

$$C \subset \mathbb{N}, \quad n \in C \iff \{\exists j \in \mathbb{N}; |y_j - a_n| < \sigma\}$$

et

$$J \subset \mathbb{N}, \quad j \in J \iff \{\exists n \in \mathbb{N}; |y_j - a_n| < \sigma\}.$$

Si $j \in J$, soient n, m tels que $|a_n - y_j| < \sigma$ et $|a_m - y_j| < \sigma$. On en déduit alors $|a_n - a_m| < \sigma$, d'où $n = m$, d'après les hypothèses faites sur la suite a_n . Comme de plus $|a_n| > \sigma$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on en conclut que

$$\prod_{n \in C} |a_n| = \prod_{j \in J} |y_j| > 0.$$

D'après la définition de $\mathcal{U}$, $C \notin \mathcal{U}$. Soit $\varepsilon > 0$, puisque $g \in \mathcal{P}$,

$$\exists A \in \mathcal{U}, \quad |g(a_n)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \in A.$$

Comme $C \notin \mathcal{U}$, on peut toujours supposer $A \subset C$.

Si $n \in A$, $g(x)$ n'a pas de zéros dans $D(a_n, \sigma)$, d'où

$$|g'(a_n)| \leq \frac{|g(a_n)|}{\sigma} \leq \varepsilon/\sigma,$$

et $g' \in \mathcal{P}$.

Montrons enfin que $\mathcal{P}$ n'est pas maximal. Soit E_k , défini par

$$E_k = \{n; |a_n - x_k| = \sigma\}.$$

La famille E_k est une partition de $\mathbb{N}$, et $E_k \neq \emptyset$, $\forall k$. Il s'ensuit aisément que

$$\mathfrak{F} = \{A \subset \mathbb{N}; A \in \mathfrak{F} \iff \bigcup_{k \in A} E_k \in \mathcal{U}\}$$

est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$; d'autre part, du fait que

$$\prod |x_k| > 0 \quad \text{et que} \quad |x_{k+1}| > |x_k| \quad \text{pour tout } k,$$

il résulte que x_k est d'interpolation.

L'idéal $\mathfrak{M} = \{f; \lim_{\mathfrak{F}} |f(x_k)| = 0\}$ est donc maximal. Montrons que $\mathcal{P} \subset \mathfrak{M}$. Soit $g \in \mathcal{P}$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{U}$, $|g(a_n)| \leq \varepsilon$, $\forall n \in A$. Comme ci-dessus, on peut supposer que si y est un zéro de g , $|y - a_n| \geq \sigma$.

Si $n \in A$ dans $D(a_n, \sigma^-)$, g n'a donc plus de zéros; on en conclut

$$|g|_{a_n}(r) = |g(a_n)| \quad \text{si } r < \sigma,$$

et par continuité de $|g|_{a_n}$

$$|g|_{a_n}(\sigma) = |g(a_n)|$$

(Rappelons que $|g|_a(r) = \sup_{|x-a| \leq r} |g(x)|$).

Mais si $n \in E_k$, $|x_k - a_n| = \sigma$, d'où

$$|g(x_k)| \leq |g|_{a_n}(\sigma) = |g(a_n)| \leq \varepsilon.$$

Soit $B = \{k; \exists n \in A, n \in E_k\}$. On a :

$$\forall k \in B, |g(x_k)| \leq \varepsilon \text{ et } A \subset \bigcup_{k \in B} E_k;$$

donc $B \in \mathfrak{F}$, et $\lim_{\mathfrak{F}} |g(x_k)| = 0$.

Il suffit alors pour conclure, de montrer que $\mathfrak{M}$ n'est pas stable par dérivation; comme $\prod |x_k|^2 > 0$, il existe $f \in B$, vérifiant $f(x) = x - x_k [(x - x_k)^2]$. On a donc $f(x_k) = 0$, $\forall k$, d'où $f \in \mathfrak{M}$, et $f'(x_k) = 1$, $\forall k$, d'où $f' \notin \mathfrak{M}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] VAN DER PUT (Marius). — The non-archimedean Corona problem, "Table ronde d'analyse non archimédienne [1972, Paris]", Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 287-317.
- [2] VAN DER PUT (Marius). — Espaces de Banach non archimédien, Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969, p. 309-320.

(Texte reçu le 24 novembre 1975).

Jean-Paul BEZIVIN
 Mathématiques, Tour 46
 Université Pierre et Marie Curie
 4 place Jussieu
 75230 PARIS CEDEX 05