Pierrette Cassou-Noguès

Fonctions p-adiques attachées à des formes quadratiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, nº 1 (1975-1976), exp. nº 16, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_1_A10_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° 16, 24 p.

5 avril 1976

FONCTIONS p-ADIQUES ATTACHÉES À DES FORMES QUADRATIQUES

par Pierrette CASSOU-NOGUÈS

Les fonctions que l'on va étudier ici sont liées à des fonctions zêta p-adiques d'un corps de nombres. Rappelons tout d'abord les études qui ont été faites à ce sujet.

En 1964, KUBOTA et LEOPOLDT [9] ont défini la fonction zêta p-adique de Riemann et la fonction zêta p-adique de Dedekind d'un corps de nombres abélien. La fonction zêta de Riemann est définie pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ par $s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Elle se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe, et l'on a pour tout k entier positif

$$\xi(1 - k) = - \frac{b_k}{k} ,$$

où b_k désigne le k-ième nombre de Bernoulli.

KUBOTA et LEOPOLDT ont montré que

$$b_k = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=0}^{p^r-1} n^k \quad \text{(limite p-adique)}$$

et que

$$k \mapsto \frac{1}{k} \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=0}^{p^r-1} \theta_p^0(n)\left(\frac{n}{\theta_p(m)}\right)^k ,$$

où

$$\begin{aligned} \theta_p : \underset{\sim}{Z}_p &\mapsto \underset{\sim}{Z}_p \\ x &\mapsto \lim_{n\to\infty} x^{p^n} \end{aligned}$$

se prolongeait en une fonction méromorphe sur $\underset{\sim}{Z}_p$, qui coïncide, pour $k \equiv 0 \bmod p-1$ avec $\xi(1 - k)(1 - p^{k-1})$.

Soit K un corps de nombres abélien. Alors

$$Z_K(s) = \prod_{\chi\in\mathfrak{X}} L(s , \chi)$$

où

$$L(s , \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 1 .$$

Notons f le conducteur de χ. On peut écrire

$$L(s , \chi) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(a + nf)^s} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 1 .$$

Posons

$$\xi_f(a\ ,\ s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a + nf)^s} \quad \text{pour} \quad Re(s) > 1 \ .$$

On peut alors montrer que, pour tout k entier positif,

$$\xi_f(a\ ,\ 1 - k) = - f^{k-1} \frac{B_k(a/f)}{k} = - \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=0}^{p^r-1} \frac{(fn + a)^k}{fk}$$

et que, si f est divisible par p,

$$k \mapsto \frac{1}{fk} \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=0}^{p^r-1} \theta_p^0(fn + a)\left(\frac{fn + a}{\theta_p(fn + a)}\right)^k$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{Z}_p$ qui coïncide, pour $k \equiv 0 \mod p - 1$ avec $\xi_f(a\ ,\ 1 - k)(1 - p^{k-1})$. Ceci permet d'obtenir les fonctions L p-adiques pour un corps de nombres abélien.

En 1969, K. IWASAWA [7] a retrouvé les fonctions L p-adiques de KUBOTA et LEOPOLDT en mettant en évidence une relation entre ces fonctions et la p-composante du groupe des classes d'idéaux de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotonique au-dessus de K.

En 1970, Y. AMICE et J. FRESNEL [1], en montrant que l'on pouvait obtenir des fonctions L p-adiques à partir des séries de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-s} T^n$, ont obtenu une formule p-adique des résidus.

Les résultats suivants ne concernent plus seulement $\mathbb{Q}$ et des extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$, mais des corps totalement réels quelconques et des extensions abéliennes de ces corps.

Nous allons tout d'abord rappeler quelques définitions notamment en ce qui concerne les fonctions qui généralisent $\xi_f(a\ ,\ .)$.

Soit K un corps de nombres totalement réel quelconque. Pour tout idéal entier $\mathfrak{y}$ de K, notons $v_{\mathfrak{y}}$ la valuation $\mathfrak{y}$-adique normalisée de telle sorte que $v_{\mathfrak{y}}(\pi) = 1$ si π est l'uniformisante locale. Soit $\mathfrak{f}$ un idéal premier de K. On note $K_{\mathfrak{f}}$ l'ensemble des éléments α de K totalement positifs tels que $v_{\mathfrak{y}}(\alpha - 1) \geqslant v_{\mathfrak{y}}(\mathfrak{f})$ pour tout idéal $\mathfrak{y}$ qui divise $\mathfrak{f}$. On appelle groupe des classes de rayon mod $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{f}}$, le groupe quotient des idéaux fractionnaires de K qui sont engendrés par des premiers qui ne divisent pas $\mathfrak{f}$, par les idéaux principaux engendrés par les éléments de $K_{\mathfrak{f}}$. Soit $r \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{f}}$, on définit

$$\xi_{\mathfrak{f}}(r\ ,\ s) = \sum N(\mathfrak{a})^{-s} \quad \text{pour} \quad Re(s) > 1\ ,$$

où la sommation porte sur les idéaux $\mathfrak{a}$ de K entiers premiers à $\mathfrak{f}$ qui sont dans la classe r, et N désigne la norme de K sur $\mathbb{Q}$. D'après la théorie du corps de classe, à tout idéal $\mathfrak{f}$ entier de K, on peut associer une extension M abélienne de K, dont le groupe de Galois $G(M/K)$ est isomorphe à $\mathfrak{R}_{\mathfrak{f}}$. Soit χ un caractère de $G(M/K)$. On note, si $r \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{f}}$, $\chi(r)$ l'image par χ de l'élément de $G(M/K)$

correspondant à r dans l'isomorphisme précédent. Alors

$$L(s , \chi) = \sum_{r \in \mathcal{R}_{\mathfrak{f}}} \chi(r) \, \zeta_{\mathfrak{f}}(r , s) \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1 .$$

Si $\mathfrak{f} = 1$, on a

$$\zeta(K , s) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \zeta(r , s) \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1 ,$$

$\mathcal{R}$ désignant ici l'ensemble des classes d'idéaux au sens restreint.

Si $\mathfrak{f} \neq 1$, on a

$$\zeta(L , s) = \prod_{\chi \in \hat{G}(M/K)} L(s , \chi) \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1 .$$

On va s'intéresser aux fonctions $\zeta_{\mathfrak{f}}(r , .)$. KLINGEN [8] et SIEGEL [12] ont montré les premiers que, pour tout n entier positif, $\zeta_{\mathfrak{f}}(r , 1-n)$ était rationnel, en utilisant le fait que $\zeta_{\mathfrak{f}}(r , 1-n)$ est le terme constant d'une forme modulaire sur $SL_2(\mathbb{Z})$ dont les autres termes se calculent par des formules simples.

En 1972, J.-P. SERRE [10] a alors construit des fonctions p-adiques qui coïncident sur des classes d'entiers p-adiques avec $\zeta_{\mathfrak{f}}(r , 1-n)$ en reprenant la méthode de KLINGEN et SIEGEL, et en définissant des formes modulaires p-adiques à une variable.

En 1974, J. COATES et W. SINNOTT [5] obtiennent la fonction zêta p-adique d'une extension abélienne d'un corps quadratique réel. Pour cela, ils démontrent, grâce à une formule explicite donnée par SIEGEL, des congruences qui leur permettent en utilisant la méthode d'IWASAWA d'obtenir les fonctions p-adiques. En même temps, ils conjecturent les congruences que doivent vérifier les fonctions $\zeta_{\mathfrak{f}}(r , .)$ pour un corps totalement réel quelconque.

En 1975, P. DELIGNE et K. RIBET [6] démontrent ces congruences en définissant des formes modulaires à plusieurs variables. Ils résolvent ainsi des conjectures concernant les dénominateurs de ces fonctions.

En 1976, T. SHINTANI [11] a donné une autre méthode d'étude de ces fonctions aux entiers négatifs en les décomposant en une somme finie de fonctions attachées à des formes normes et en étudiant le prolongement analytique à $\mathbb{C}$ et les valeurs aux entiers négatifs de ces fonctions. Notons que, pour le cas où K est un corps quadratique réel et $\mathfrak{f} = 1$, cette décomposition avait déjà été faite par D. ZAGIER [14], et le prolongement analytique étudié par l'auteur [4]. Cette nouvelle méthode d'étude aux entiers négatifs des fonctions $\zeta_{\mathfrak{f}}(r , .)$ donne une nouvelle méthode d'interpolation p-adique qui généralise celle de KUBOTA et LEOPOLDT. C'est cette méthode que nous allons exposer ici dans le cas quadratique réel. Tout d'abord nous ferons quelques rappels, nous étudierons ensuite pour une fonction attachée à une forme quadratique le prolongement complexe et l'interpolation p-adique éventuelle. Ceci nous permettra d'obtenir les fonctions zêta p-adiques. Nous verrons aussi que la formule de SIEGEL est en fait une décomposition du type de celle de SHINTANI.

I. Rappels.

Nous allons tout d'abord rappeler le théorème de Shintani, et ensuite quelques propriétés d'une forme linéaire p-adique que nous utiliserons par la suite.

1. Théorème de Shintani [11]

Tout d'abord, soit une matrice à coefficients positifs

$$a_{k,\ell} \quad (1 \leq k \leq i \ , \ 1 \leq \ell \leq n \ , \ i \leq n) \ .$$

Soit $y = (y_1 , y_2 , \dots , y_i)$ et

$$L_\ell(y) = \sum_{k=1}^{i} a_{k,\ell} \, y_k$$

et

$$\zeta(A , y , s) = \sum_{z_1,\dots,z_i=0}^{\infty} \prod_{\ell=s}^{n} L_\ell(z + y)^{-s} \ .$$

Soient maintenant $v_1 , v_2 , \dots , v_i$ des vecteurs linéairement indépendants dans $\underset{\sim}{R}^n$ $(i = 1 , 2 , \dots , n)$. L'ensemble de toutes les combinaisons de $v_1 \dots v_i$ à coefficients positifs est noté $c(v_1 , \dots , v_i)$

$$c(v_1 , \dots , v_i) = \{\sum_{k=1}^{i} c_k v_k , \ c_1 , \dots c_i > 0\} \ .$$

Pour un $x \in K$, on note $x^{(1)} \dots x^{(n)}$ les conjugués de x (n est le degré de K sur $\underset{\sim}{Q}$). Notons $E(\mathfrak{f})_+$ le groupe des unités totalement positives de K qui sont congrues à $1 \bmod \mathfrak{f}$. Il existe un système fini de cônes ouverts simples $C_j = C_j(v_{j,1} , \dots , v_{j,i(j)})$ $(j \in J , \ |J| < \infty)$ à générateurs dans $\mathfrak{f}$ qui satisfait

$$\underset{\sim}{R}^n_+ = \bigcup_{u \in E(\mathfrak{f})_+} \bigcup_{j \in J} \cup \, C_j \quad \text{(union disjointe)} \ .$$

Soit r une classe de rayon $\bmod \mathfrak{f}$, et b un idéal de r, on peut écrire

$$\zeta(b , \mathfrak{f} , s) = N(b)^{-s} \sum N(x)^{-s} \ ,$$

où la sommation est prise sur tous les éléments x de K totalement positifs qui satisfont $x - 1 \in \mathfrak{f} b^{-1}$ et qui ne soht pas associés sous l'action de $E(\mathfrak{f})_+$. Pour tout $j \in J$, et tout sous-ensemble S de K, posons

$$R(j , S) = \{y = (y_1 , \dots , y_{i(j)}) \in \underset{\sim}{Q}^{i(j)} \ ,$$
$$0 < y_1 , \dots , y_{i(j)} \leq 1 \ , \ \sum_{k=1}^{i(j)} y_k v_{j,k} \in S\}$$

De plus, posons

$$A_j = \begin{pmatrix} v_{j,1}^{(1)} & v_{j,1}^{(n)} \\ v_{j,i(j)}^{(1)} & v_{j,i(j)}^{(n)} \end{pmatrix} .$$

Alors,

(1) $$\xi_{\mathfrak{f}}(b , s) = N(b)^{-s} \sum_{j\in J} \sum_{y\in R(j, b^{-1}\mathfrak{f}+1)} \xi(Aj , y , s) .$$

On note que J et $R(j , b^{-1} \mathfrak{f} + 1)$ sont des ensembles finis.

SHINTANI donne une méthode de prolongement analytique à $\underset{\sim}{C}$ de $s \mapsto \xi(Aj , y , s)$ et les valeurs aux entiers négatifs. Il n'étudie pas les pôles de ces fonctions. Cette étude est importante car on ne peut pas interpoler les valeurs aux entiers négatifs pour obtenir une fonction p-adique méromorphe quand il y a une infinité de pôles.

Ici on va s'intéresser au cas quadratique. On va donner une méthode d'étude sur $\underset{\sim}{C}$ de ces fonctions attachées à des formes quadratiques, et on fera une description complète de ces fonctions en étudiant leurs pôles, leurs résidus et leurs valeurs aux entiers négatifs, en donnant une interprétation p-adique des valeurs.

Dans le cas totalement réel, l'étude des pôles n'est pas achevée.

2. Forme linéaire p-adique.

Soit p un nombre premier quelconque, $\underset{\sim}{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, $\underset{\sim}{Z}_p$ son anneau de valuation, $\underset{\sim}{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$.

On note $\mathfrak{W}(\underset{\sim}{Z}_p^k , \mathcal{K})$ l'ensemble des fonctions uniformément dérivables sur $\underset{\sim}{Z}_p^k$ à valeurs dans une extension algébrique $\mathcal{K}$ de $\underset{\sim}{Q}_p$. On peut montrer [2] que, si $u \in \mathfrak{W}(\underset{\sim}{Z}_p^k , \mathcal{K})$

$$J(u) = \lim_{r_1,\dots,r_k\to\infty} \frac{1}{p^{r_1+\dots+r_k}} \sum_{n_1=0}^{p^{r_1}-1} \sum_{n_k=0}^{p^{r_k}-1} u(n_1 , \dots , n_k) \quad (\text{limite p-adique}) ,$$

existe. Donc J est une forme linéaire définie sur $\mathfrak{W}(\underset{\sim}{Z}_p^k , \mathcal{K})$. On sait que l'on peut définir une norme sur cet espace en posant, si

$$u(x_1 , \dots , x_k) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} a_{n_1,\dots,n_k} \binom{x_1}{n_1} \binom{x_k}{n_k}$$

$$\|u\|_1 = \max(A_u , \sup_{n_1,\dots,n_k} n_1 \dots n_k |a_{n_1,\dots,n_k}| ,$$

où

$$A(u) = \sup\{ |a_{n_1,\dots,n_k}| ; \exists\, i \in [1 , k] \text{ et } n_i = 0\} .$$

Alors cet espace est un espace de Banach muni de cette norme, et J est une forme linéaire continue.

On a

$$J(x \mapsto x^k) = b_k ,$$

$$J(x \mapsto (x+a)^k) = B_k(a) ,$$

$$J[(x,y) \mapsto (x+a)^k (y+b)^{k'}] = B_k(a)\, B_{k'}(b) .$$

On va donc maintenant étudier le prolongement complexe.

II. Prolongement analytique complexe des fonctions attachées à des formes quadratiques.

On considère donc y_1 et y_2 deux réels positifs, tels que $0 < y_1 \leq 1$ et $0 < y_2 \leq 1$, et v_1, v_1', v_2, v_2' des réels positifs aussi, et la fonction définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et $\mathrm{Re}(s') > 1$ par

$$Z(s, s') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[v_1(m+y_1) + v_2(n+y_2)]^s \, [v_1'(m+y_1) + v_2'(n+y_2)]^{s'}} .$$

On montrera que

$$(s, s') \mapsto \Gamma(s)\, \Gamma(s')(e^{2\pi i s} - 1)(e^{2\pi i s'} - 1)(e^{2\pi i(s+s')} - 1)\, Z(s, s')$$

se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (théorème 1). On étudiera ensuite les pôles et les résidus de $s \mapsto Z(s, s)$ (théorème 2), et on donnera une interprétation p-adique des valeurs aux entiers négatifs de ces fonctions (théorème 3) qui permettra de définir les fonctions p-adiques associées. On interprètera ensuite la formule de Siegel.

Posons

$$L(x, y) = v_1(x+y_1) + v_2(y+y_2) ,$$

$$L'(x, y) = v_1'(x+y_1) + v_2(y+y_2) .$$

1. Prolongement analytique.

A l'aide de l'intégrale eulérienne, on va obtenir une sorte de transformée de Mellin à deux variables pour la fonction $(s, s') \mapsto Z(s, s')$.

Pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\mathrm{Re}(s') > 0$,

$$B(s, s') = \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{s'-1}\, dt = \int_0^1 (1-t)^{s+s'} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{s-1} \frac{dt}{(1-t)^2} .$$

Alors, pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\mathrm{Re}(s') > 0$, $\forall\, m \geq 0$, $\forall\, n \geq 0$,

$$L(m,n)^{-s}\, L'(m,n)^{-s'}\, B(s,s') = \int_0^1 \left[\frac{L'(m,n)}{1-t}\right]^{-(s+s')} \left[\frac{L'(m,n)}{L(m,n)}\,\frac{t}{1-t}\right]^{s-1} \frac{L'(m,n)}{L(m,n)}\,\frac{dt}{(1-t)^2}\,.$$

Posons

$$u = \frac{L'(m\,,\,n)}{L(m\,,\,n)}\,\frac{t}{1-t}\,,$$

alors

$$L(m\,,\,n)^{-s}\, L'(m\,,\,n)^{-s'}\, B(s\,,\,s') = \int_0^\infty \frac{u^{s-1}\,du}{[L(m\,,\,n)u + L'(m\,,\,n)]^{s+s'}}\,.$$

On a encore

$$L(m,n)^{-s}\, L'(m,n)^{-s'}\, B(s,s') = \int_0^1 \frac{u^{s-1}\,du}{[L(m,n)u + L'(m,n)]^{s+s'}} + \int_0^1 \frac{u^{s'-1}\,du}{[L(m,n)+L'(m,n)u]^{s+s'}}\,.$$

Considérons les séries

$$K(s\,,\,u) = \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{[L(m\,,\,n)u + L'(m\,,\,n)]^s}$$

et

$$K'(s\,,\,u) = \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{[L(m\,,\,n) + L'(m\,,\,n)u]^s}\,.$$

Elles convergent absolument et uniformément sur $[0\,,\,1]$, et l'on peut écrire, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et $\mathrm{Re}(s') > 1$,

$$(2)\quad \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s')}{\Gamma(s+s')}\, Z(s\,,\,s') = \int_0^1 u^{s-1}\, K(s+s'\,,\,u)\,du + \int_0^1 u^{s'-1}\, K'(s+s'\,,\,u)\,du\,.$$

Cette formule (2) se généralise très bien au cas d'une fonction attachée à une forme norme pour un corps totalement réel quelconque.

On transforme maintenant ces deux intégrales en intégrales complexes. On considère un chemin γ , qui longe l'axe réel de 1 à δ avec $\arg z = 0$, parcourt le cercle de rayon δ avec $0 \leq \arg z \leq 2\pi$, et enfin longe l'axe réel de δ à 1 avec $\arg z = 2\pi$; δ doit être choisi assez petit de telle sorte que les fonctions $z \mapsto K(s\,,\,z)$ et $z \mapsto K'(s\,,\,z)$ soient définies le long du cercle de rayon δ pour $\mathrm{Re}(s) > 2$.

Il est facile de voir que, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et $\mathrm{Re}(s') > 1$,

$$(3)\quad \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s')}{\Gamma(s+s')}\, Z(s,s') = \frac{1}{e^{2\pi i s}-1}\int_\gamma z^{s-1}\, K(s+s',z)\,dz + \frac{1}{e^{2\pi i s'}-1}\int_\gamma z^{s'-1}\, K'(s+s',z)\,dz\,.$$

D'autre part, on peut aussi montrer que le long de γ , la fonction

$$s \mapsto \Gamma(s)\, K(s\,,\,z)(e^{2\pi i s} - 1) = \Phi(z\,,\,s)$$

se prolonge en une fonction analytique sur $\underset{\sim}{C}$ telle que $\forall\ s \in \underset{\sim}{C}$, $z \mapsto \Phi(z\ ,\ s)$ soit analytique sur γ . On a donc

$$(4)\quad \begin{aligned}&\Gamma(s)\,\Gamma(s')\,Z(s\ ,\ s')(e^{2\pi i(s+s')} - 1)\\ &= \frac{1}{e^{2\pi is} - 1}\int_\gamma z^{s-1}\,\Phi(z\ ,\ s+s')\,dz + \frac{1}{e^{2\pi is'} - 1}\int_\gamma z^{s'-1}\,\Phi'(z\ ,\ s+s')\,dz\end{aligned}$$

et la fonction

$$(s\ ,\ s') \mapsto \Gamma(s)\,\Gamma(s')\,Z(s\ ,\ s')(e^{2\pi i(s+s')} - 1)(e^{2\pi is} - 1)(e^{2\pi is'} - 1)$$

est prolongeable en une fonction analytique sur $\underset{\sim}{C} \times \underset{\sim}{C}$.

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> y_1 <u>et</u> y_2 , v_1 , v_2 , v_1' , v_2' , <u>des réels positifs tels que</u> $0 < y_1 \leq 1$ <u>et</u> $0 < y_2 \leq 1$. <u>Soit, pour</u> $\mathrm{Re}(s) > 1$ <u>et</u> $\mathrm{Re}(s') > 1$,

$$Z(s\ ,\ s') = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{[v_1(m+y_1) + v_2(n+y_2)]^s\,[v_1'(m+y_1) + v_2'(n+y_2)]^{s'}} \cdot$$

<u>Alors la fonction</u>

$$(s\ ,\ s') \mapsto \Gamma(s)\,\Gamma(s')\,Z(s\ ,\ s')(e^{2\pi i(s+s')} - 1)(e^{2\pi is} - 1)(e^{2\pi is'} - 1)$$

<u>est prolongeable en une fonction analytique sur</u> $\underset{\sim}{C} \times \underset{\sim}{C}$.

Ce théorème se généralise au cas d'un nombre quelconque de formes linéaires.

Nous allons maintenant faire l'étude des pôles et des résidus de la fonction $s \mapsto Z(s\ ,\ s)$.

2. Etude des pôles et des résidus.

On a

$$(5)\quad \frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)}\,Z(s\ ,\ s) = \frac{1}{(e^{2\pi is} - 1)}\Big[\int_\gamma z^{s-1}\,K(2s\ ,\ z)\,dz + \int_\gamma z^{s-1}\,K'(2s\ ,\ z)\,dz$$

avec $K(s\ ,\ z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{[L(m\ ,\ n)z + L'(m\ ,\ n)]^s}$ pour $\mathrm{Re}(s) > 2$.

Or

$$[L(m\ ,\ n)u + L'(m\ ,\ n)]^{-s}\,\Gamma(s) = \int_0^\infty w^{s-1}\,e^{-[L(m,n)z+L'(m,n)]w}\,dw$$

et donc

$$\Gamma(s)\,K(s\ ,\ z) = \int_0^\infty \frac{w^{s-1}\,e^{-[(v_1z+v_1')y_1+(v_2z+v_2')y_2]w}}{(e^{-(v_1z+v_1')w} - 1)(e^{-(v_2z+v_2')w} - 1)}\,dw\ .$$

Alors [3],

$$\Gamma(s)\, K(s\ ,\ z) = \frac{1}{e^{2\pi i s}-1}\int_{\gamma'} \frac{\omega^{s-1}}{(e^{-(v_1z+v_1')\omega}-1)(e^{-(v_2'z+v_2')\omega}-1)}\, e^{-[(v_1z+v_1')y_1+(v_2z+v_2')y_2]\omega}\, d\omega\ ,$$

où γ' est un chemin le long de l'axe réel avec $\arg z = 0$ de ∞ à δ' , δ' étant assez petit, ensuite le long du cercle de rayon δ' avec $0 \leqslant \arg w \leqslant 2\pi$, et enfin le long de l'axe réel de δ' à $l'\infty$ avec $\arg \omega = 2\pi$; δ' doit être choisi assez petit pour que la fonction à intégrer soit définie sur γ'.

On a donc, pour $k \geqslant 0$,

$$K(-k\ ,\ z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}\,\frac{1}{(v_1\ z + v_1')(v_2\ z + v_2')}\,\frac{d^{k+2}}{d\omega^{k+2}}$$

$$\times\left[\frac{(v_1\ z + v_1')\omega}{(e^{-(v_1z+v_1')\omega}-1)}\ \frac{(v_2\ z + v_2')\omega\ e^{-\omega[(v_1z+v_1')y+(v_2'z+v_2')y_2]}}{(e^{-(v_2z+v_2')\omega}-1)}\right]_{\omega=0}$$

Or

$$\frac{-X}{e^{-X}-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, b_k\, \frac{X^k}{k!}$$

et puisque $b_k = J(x \mapsto x^k) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r}\sum_{n=0}^{p^r-1} n^k$.

On pose, par définition,

$$J(x \mapsto e^{-xX}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, b_k\, \frac{X^k}{k!} = \frac{-X}{e^{-X}-1}\ .$$

Alors,

$$\frac{(v_1\ z + v_1')w}{e^{-(v_1z+v_1')w}-1}\, e^{-(v_1z+v_1')y_1w} = -J[x \mapsto e^{-(x+y_1)(v_1z+v_1')}]$$

$$\frac{(v_2\ z + v_2')w}{e^{-(v_2z+v_2')\omega}-1}\, e^{-(v_2z+v_2')y_2w} = -J[y \to e^{-(y+y_2)(v_2z+v_2')}]\ .$$

Donc

$$K(-k,z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}\,\frac{1}{(v_1z+v_1')(v_2z+v_2')}\,\frac{d^{k+2}}{d\omega^{k+2}}\left\{J[(x,y)\mapsto e^{-(L(x,y)z+L'(x,y))\omega}]\right\}_{\omega=0}\ .$$

$$(6)\qquad K(-k\ ,\ z) = J[(x\ ,\ y) \mapsto \frac{(L(x\ ,\ y)z + L'(x\ ,\ y))^{k+2}}{(k+1)(k+2)(v_1\ z + v_1')(v_2\ z + v_2')}\ .$$

Si $k = 1$, la fonction a un pôle de résidu

$$J\left[(x , y) \mapsto \frac{(L(x , y)z + L'(x , y))}{(v_1 z + v_1')(v_2 z + v_2')}\right] .$$

Si $k = 2$, elle a un autre pôle de résidu

$$-\frac{1}{(v_1 z + v_1')(v_2 z + v_2')}$$

D'après (5), la fonction $s \mapsto Z(s , s)$ est susceptible d'avoir des pôles pour $s = 1$, $s = \frac{1}{2}$, et à tous les demi-entiers négatifs.

(a) <u>Etude pour</u> $s = 1$. – On a, d'après (5),

$$\Gamma(s)^2 Z(s , s)(e^{4\pi is} - 1) = \frac{1}{e^{2\pi is} - 1}\int_\gamma z^{s-1} \Phi(z , 2s) dz + \int_\gamma z^{s-1} \Phi'(z , 2s) dz .$$

Pour $Re(s) > 1$, on a

$$\frac{1}{e^{2\pi is} - 1}\int_\gamma z^{s-1} \Phi(z , 2s) du = \int_0^1 u^{s-1} \Phi(u , 2s) du .$$

Or les deux membres se prolongent analytiquement pour $s = 1$, on a donc, sachant que

$$\Phi(z , 2) = -\frac{2\pi i}{(v_1 z + v_1')(v_2 z + v_2')}$$

$$\lim_{s\to 1}(s - 1) Z(s , s) = -\frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{dz}{(v_1 z + v_1')(v_2 z + v_2')} + \int_0^1 \frac{dz}{(v_1 + v_1' z)(v_2 + v_2' z)}\right] .$$

On trouve

$$\lim_{s\to 1}(s - 1) Z(s , s) = + \frac{1}{2(v_2' v_1 - v_2 v_1')} \log\left(\frac{v_2'}{v_2}\cdot\frac{v_1}{v_1'}\right) .$$

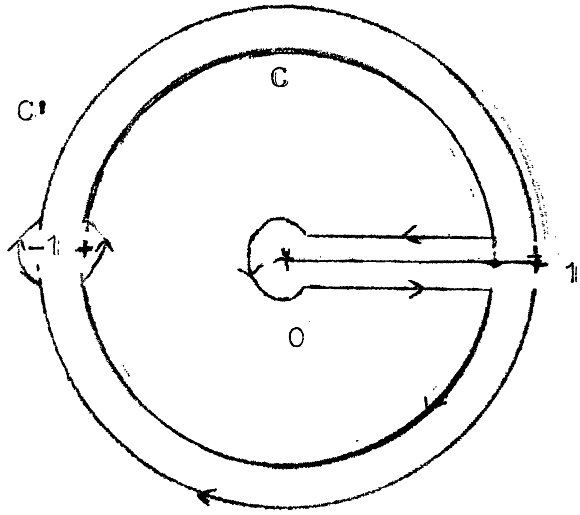
(b) <u>Etude pour</u> $s = \frac{1}{2}$. – On cherche à évaluer $\int_\gamma z^{-\frac{1}{2}} \Phi(z , 1) dz$.

Or

$$\Phi(z , 1) = 2\pi i J\left[(x , y) \mapsto \frac{(L(x , y)z + L'(x , y))}{(v_1 z + v_1')(v_2 z + v_2')}\right] .$$

On considère le chemin Γ , $\Gamma = C \cup \gamma$, où C est le cercle de rayon 1 centré en 0 , coupé au point 1 .

(Si $v_1 = v_1'$ ou $v_2 = v_2'$, le chemin C contournera -1 comme indiqué sur le croquis).



$$\int_{\gamma} z^{-\frac{1}{2}}\, \Phi(z\,,\,1)\, dz = \int_{\Gamma} z^{-\frac{1}{2}}\, \Phi(z\,,\,1)\, dz - \int_{C} z^{-\frac{1}{2}}\, \Phi(z\,,\,1)\, dz\ .$$

On considère aussi Γ' , $\Gamma' = C' \cup \gamma$, où C' est le cercle de rayon 1 , centré en 0 , coupé au point 1 (et éventuellement contournant -1 comme indiqué sur le croquis).

$$\int_{\gamma} z^{-\frac{1}{2}}\, \Phi'(z\,,\,1)\, dz = \int_{\Gamma'} z^{-\frac{1}{2}}\, \Phi(z\,,\,1)\, dz - \int_{C'} z^{-\frac{1}{2}}\, \Phi'(z\,,\,1)\, dz\ .$$

Or il est facile de voir que

$$\int_{C} z^{-\frac{1}{2}}\, \Phi(z\,,\,1)\, dz + \int_{C'} z^{-\frac{1}{2}}\, \Phi'(z\,,\,1)\, dz = 0\ .$$

Supposons par exemple que l'on ait $v_1'/v_1 < 1$ et $v_2'/v_2 > 1$. Alors

$$\int_{\gamma} z^{-\frac{1}{2}}\, \Phi(z\,,\,1)\, dz + \int_{\gamma} z^{-\frac{1}{2}}\, \Phi(z\,,\,1)\, dz$$

$$= \mathrm{Res}_{z=-v_1'/v_1}\, z^{-\frac{1}{2}}\, J\Big[(x\,,\,y) \mapsto \frac{L(x\,,\,y)z + L'(x\,,\,y)}{(v_1\, z + v_1')(v_2\, z + v_2')}\Big]$$

$$+ \mathrm{Res}_{z=-v_2/v_2'}\, z^{-\frac{1}{2}}\, J\Big[(x\,,\,y) \mapsto \frac{L(x\,,\,y) + L'(x\,,\,y)z}{(v_1 + v_1'\, z)(v_2 + v_2'\, z)}\Big]\ .$$

Donc la fonction $s \mapsto Z(s,\,s)$ possède un pôle simple pour $s = \frac{1}{2}$ de résidu

$$-\frac{1}{2}\, J\Big[(x\,,\,y) \mapsto \frac{(y + y_2)}{(v_1'\, v_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(x + y_1)}{(v_2'\, v_2)^{\frac{1}{2}}}\Big]\ .$$

(c) <u>Etude pour</u> s <u>demi-entier négatif</u>. – L'étude se fait de la même manière que précédemment.

Soit $s = -(2k + 1)/2$,

$$\int_\gamma z^{-(2k+3)/2}\ \Phi(z\ ,\ -(2k+1))\, dz + \int_\gamma z^{-(2k+3)/2}\ \Phi'(z\ ,\ -(2k+1))\, dz$$

$$= \mathrm{Res}_{z=-v_1'/v_1}\ z^{-(2k+3)/2}\ J[(x\ ,\ y) \mapsto \frac{(L(x\ ,\ y)z + L'(x\ ,\ y))^{2k+3}}{(2k+3)(2k+2)(v_1 z + v_1')(v_2 z + v_2')}]$$

$$+ \mathrm{Res}_{z=-v_2/v_2'}\ z^{-(2k+3)/2}\ J[(x\ ,\ y) \mapsto \frac{(L(x\ ,\ y) + L'(x\ ,\ y)z)^{2k+3}}{(2k+3)(2k+2)(v_1 + v_1' z)(v_2 + v_2' z)}]$$

$$\Gamma(-\frac{2k+1}{2}) = (-1)^{k+1}\ \frac{2^{2k+1}\ k!}{(2k+1)!}\sqrt{\pi}\ .$$

Donc

$$\lim_{s\to-(2k+1)/2}\ (s + \frac{2k+1}{2})\ Z(s\ ,\ s)$$

$$= -\frac{1}{2}\ \frac{(2k+1)!}{2^{4k+2}(k!)^2}\ J[(x\ ,\ y) \mapsto \frac{(v_2' v_1 - v_1' v_2)^{2k+2}}{(2k+2)(2k+3)}\ [\frac{(y + y_2)^{2k+3}}{(v_1' v_1)^{(2k+3)/2}} + \frac{(x + y_1)^{2k+3}}{(v_2' v_2)^{(2k+3)/2}}]$$

On a donc démontré

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> y_1 <u>et</u> y_2 , v_1 , v_2 , v_1' , v_2' <u>des réels positifs tels que</u> $0 < y_1 \leqslant 1$ <u>et</u> $0 < y_2 \leqslant 1$. <u>Soit, pour</u> $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$Z(s\ ,\ s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[v_1(m + y_1) + v_2(n + y_2)]^s\ [v_1'(m + y_1) + v_2'(n + y_2)]^s}\ .$$

<u>Alors</u> $s \mapsto Z(s\ ,\ s)$ <u>se prolonge à</u> $\mathbb{C}$ <u>en une fonction méromorphe qui admet des pôles simples pour</u>

$$s = 1 \quad \underline{\text{de résidu}} \quad \frac{1}{2(v_2' v_1 - v_2 v_1')} \log(\frac{v_2'}{v_2}\ \frac{v_1}{v_1'})$$

$$s = \frac{1}{2} \quad \underline{\text{de résidu}} \quad -\frac{1}{2}[\frac{B_1(y_2)}{(v_1' v_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{B_1(y_1)}{(v_2' v_2)^{\frac{1}{2}}}]$$

$$s = -\frac{2k+1}{2} \quad \underline{\text{de résidu}} \quad -\frac{1}{2}\ \frac{(2k+1)!}{2^{4k+2}(k!)^2}\ \frac{(v_2' v_1 - v_1' v_2)^{2k+2}}{(2k+3)(2k+2)}\ [\frac{B_{2k+3}(y_2)}{(v_1' v_1)^{(2k+3)/2}}\ \frac{B_{2k+3}(y_1)}{(v_2' v_2)^{(2k+3)/2}}]\ .$$

Nous étudions maintenant les valeurs aux entiers négatifs de $s \mapsto Z(s\ ,\ s)$.

4. Etude des valeurs aux entiers négatifs.

On reprend la formule (5). Ici on a l'intégrale le long de γ d'une fonction méromorphe. On a donc

$$Z(-k\,,\,-k) = \frac{(k!)^2}{2k!}\,\mathrm{Res}_{z=0}\,[J[(x\,,\,y) \mapsto \frac{(L(x\,,\,y)z + L'(x\,,\,y))^{2k+2}\,z^{-k-1}}{(v_1\,z + v_1')(v_2\,z + v_2')(2k+1)(2k+2)}]$$

$$+ \frac{(k!)^2}{2k!}\,\mathrm{Res}_{z=0}\,[J[(x\,,\,y) \mapsto \frac{(L(x\,,\,y) + L'(x\,,\,y)z)^{2k+2}\,z^{-k-1}}{(v_1 + v_1'\,z)(v_2 + v_2'\,z)(2k+1)(2k+2)}$$

On a donc le théorème suivant

THÉORÈME 3. - Soient y_1 et y_2, v_1, v_2, v_1', v_2' des réels positifs tels que $0 < y_1 \leqslant 1$ et $0 < y_2 \leqslant 1$. Soit pour $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$Z(s\,,\,s) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[v_1(m+y_1) + v_2(n+y_2)]^s\,[v_1'(m+y_1) + v_2'(n+y_2)]^s}$$

Alors $s \mapsto Z(s\,,\,s)$ se prolonge à $\underset{\sim}{C}$ en une fonction méromorphe qui admet des valeurs qui appartiennent à $\underset{\sim}{Q}(v_1\,,\,v_2\,,\,v_1'\,,\,v_2'\,,\,y_1\,,\,y_2)$ sur les entiers négatifs données par

$Z(-k\,,\,-k)$

$$(6)\quad = \frac{k!}{2(2k+2)!}\,J\{(x,y) \mapsto \frac{d^k}{dz^k}[\frac{\{[v_1(x+y_1)+v_2(y+y_2)]z+[v_1'(x+y_1)+v_2'(y+y_2)]\}^{2k+2}}{(v_1z+v_1')(v_2z+v_2')}]_{z=0}$$

$$+ \frac{d^k}{dz^k}[\frac{\{[v_1(x+y_1)+v_2(y+y_2)]+[v_1'(x+y_1)+v_2'(y+y_2)]z\}^{2k+2}}{(v_1+v_1'z)(v_2+v_2'z)}]_{z=0}\}$$

où

$$J[(x\,,\,y) \mapsto F(x\,,\,y)] = \lim_{r_1\to\infty,\,r_2\to\infty} \frac{1}{p^{r_1}\,p^{r_2}} \sum_{n_1=0}^{p^{r_1}-1}\sum_{n_2=0}^{p^{r_2}-1} F(n_1\,,\,n_2)\,.$$

Remarques importantes.

Remarque 1. - Posons

$$F_k(x\,,\,y) = \frac{k!}{2(2k+2)!}\,\frac{d^k}{dz^k}[\frac{(L(x\,,\,y)z + L'(x\,,\,y))^{2k+2}}{(v_1\,z + v_1')(v_2\,z + v_2')}]_{z=0}$$

$$F_k'(x\,,\,y) = \frac{k!}{2(2k+2)!}\,\frac{d^k}{dz^k}[\frac{(L(x\,,\,y) + L'(x\,,\,y)z)^{2k+2}}{(v_1 + v_1'\,z)(v_2 + v_2'\,z)}]_{z=0}\,.$$

Alors,

$$\frac{\partial^2 F_k}{\partial x\,\partial y}(x\,,\,y) = \frac{1}{2}\,L(x\,,\,y)^k\,L'(x\,,\,y)^k\,,$$

$$\frac{\partial^2 F'_k}{\partial x\, \partial y}(x , y) = \frac{1}{2} L(x , y)^k L'(x , y)^k .$$

On retrouve une propriété déjà rencontrée [3]. Si G est une fonction, définie par une série

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_i=1}^{\infty} f(n_1 , . , n_i)^{-s}$$

convergente dans un demi-plan, et prolongeable à tout le plan complexe en une fonction méromorphe, qui prend sur les entiers négatifs des valeurs qui appartiennent à un corps de nombre.

Alors, sur tous les exemples rencontrés, on a montré qu'il existait, pour tout k entier positif, une fonction F_k telle que

(i) $\frac{\partial^i}{\partial x_1 \partial x_i} F_k = f^k$,

(ii) $\mathfrak{J}[(x_1 , \ldots , x_i) \mapsto F_k(x_1 , \ldots , x_i)] = G(-k)$.

Remarque 2. - On peut aussi obtenir de la même manière les valeurs $Z(-k , -k')$, où k et k' sont des entiers positifs.

Remarque 3. - On sait trouver les formules analogues dans le cas d'un nombre quelconque de formes linéaires (donc pour la fonction zêta d'un corps de nombres totalement réel quelconque).

5. Formule de Siegel.

Ce n'est pas exactement la formule de Siegel que nous allons donner, mais cette formule modifiée par J. COATES et W. SINNOTT [5].

Soit K un corps quadratique réel, Δ son discriminant, et $\mathfrak{f}$ un idéal entier de K ; on suppose $\mathfrak{f} \neq 1$. Soit η l'unique générateur plus grand que 1 des unités totalement positives congrues à $1 \bmod \mathfrak{f}$, et $\mathfrak{D}$ la différente de K . Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de K premier à $\mathfrak{f}$, on note $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{D}\mathfrak{f}}$ où $\mathfrak{D}$ est la différente de K .

Il existe une $\mathbb{Z}$-base de $\mathfrak{a}$, (α , β) , telle que $\omega = -\beta/\alpha$ soit plus grand que son conjugué ω' et $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = 0$ et $v = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\beta) > 0$. On définit a , b , c , d éléments de $\mathbb{Z}$ par

$$\eta^{-1} \alpha = a\alpha + c\beta , \qquad \eta^{-1} \beta = b\alpha + d\beta .$$

On a alors

$$a \equiv d \equiv 1 \bmod f ,$$
$$c \equiv 0 \qquad \bmod f ,$$
$$v = t/f ,$$

où t est le plus grand rationnel qui divise $\mathfrak{b}$, et f est le générateur de

$$\mathfrak{f} \cap \underset{\sim}{Z} .$$

Alors, pour tout n entier positif, on a

$$(7) \qquad \xi_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{b}\ ,\ 1-n) = \left(\frac{N\mathfrak{b}}{t^2}\right)^{n-1} \left(\frac{f}{c}\right)^{2n-2} [\Omega_{2n} + \textstyle\sum_{k=0}^{2n-2} e_k\, \Omega_k] ,$$

où les e_k sont définis par

$$(z+\eta)^{n-1}(z+\eta')^{n-1} = \sum_{k=0}^{2n-2} e_k\, z^k$$

$$\Omega_{2n} = -\frac{b_{2n}}{2nc} \sum_{k=0}^{2n-2} e_k \frac{(a+d)^{k+1}}{k+1}$$

$$\Omega_k = \sum_{\ell \bmod c} c^{2n-2} \frac{B_{k+1}(\{a\ell/c + v\})}{k+1} \frac{B_{2n-k-1}(\{\ell/c\})}{2n-k-1}$$

$\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x.

Nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - <u>Soit</u> K <u>une extension quadratique réelle de</u> $\underset{\sim}{Q}$. <u>Soit</u> $\mathfrak{f}$ <u>un idéal entier de</u> K <u>tel que</u> $\mathfrak{f} \neq 1$, <u>et</u> $\mathfrak{b}$ <u>un idéal entier de</u> K <u>premier à</u> $\mathfrak{f}$. <u>Pour tout entier</u> n <u>positif, il existe une fonction</u> H_n <u>telle que</u>

$$(8) \qquad \xi_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{b}\ ,\ 1-n) = -(N\mathfrak{b})^{n-1} \frac{1}{2} \operatorname{Tr}_{K/\underset{\sim}{Q}} J(H_n)$$

<u>où</u>

$$J(H_n) = \lim_{r_1\to\infty, r_2\to\infty} \frac{1}{p^{r_1} p^{r_2}} \sum_{n_1=0}^{p^{r_1}-1} \sum_{n_2=0}^{p^{r_2}-1} H_n(n_1\ ,\ n_2) \quad \text{(limite p-adique)}$$

$$H_n(x\ ,\ y)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{c-1} \frac{(n-1)!}{2n!} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left[\frac{(\{\frac{f}{t}(x+\frac{\omega_\ell}{c}) + \frac{f}{t}\eta(y+\frac{\ell}{c})\}u + \{\frac{f}{t}(x+\frac{\omega_\ell}{c}) + \frac{f}{t}\eta'(y+\frac{\ell}{c})\})^{2n}}{(\frac{f}{t}u + \frac{f}{t})(\frac{f}{t}\eta u + \frac{f}{t}\eta')}\right]_{u=0} .$$

<u>C'est à dire que l'on a</u>

$$(9) \qquad \xi_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{b}\ ,\ 1-n) = -N(\mathfrak{b})^{n-1} \sum_{\ell=0}^{c-1} Z_\ell(1-n) ,$$

<u>où, pour</u> $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$Z_\ell(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[\frac{f}{t}(m+\frac{\omega_\ell}{c}) + \eta\frac{f}{t}(n+\frac{\ell}{c})]^s\ [\frac{f}{t}(m+\frac{\omega_\ell}{c}) + \eta'\frac{f}{t}(n+\frac{\ell}{c})]^s}$$

en posant $\omega_\ell = c\{ -\frac{a\ell}{c} + w\}$.

Quand ℓ varie de 0 à $c-1$, ω_ℓ varie aussi de 0 à $c-1$, mais dans un ordre différent. On a

$$\frac{1}{c^{2n-2}} \sum_{k=0}^{2n-2} e_k \Omega_k = \sum_{\ell=0}^{c-1} \sum_{k=0}^{2n-2} e_k \frac{B_{k+1}(\frac{\omega_\ell}{c})}{k+1} \frac{B_{2n-k-1}(\frac{\ell}{c})}{2n-k-1} = -\sum_{\ell=0}^{c-1} J(F_{n,\ell})$$

où

$$F_{n,\ell}(x , y) = \sum_{k=0}^{2n-2} e_k \frac{(x+\frac{\omega_\ell}{c})^{k+1}}{k+1} \frac{(y+\frac{\ell}{c})^{2n-k-1}}{2n-k-1} .$$

Or

$$\frac{\partial^2 F_{n,\ell}}{\partial x\, \partial y}(x , y) = [(x+\frac{\omega_\ell}{c}) + \eta(y+\frac{\ell}{c})]^{n-1} [(x+\frac{\omega_\ell}{c}) + \eta'(y+\frac{\ell}{c})]^{n-1} .$$

Donc

$$H_n(x , y) = (\frac{f}{t})^{2n-2} \sum_{\ell=0}^{c-1} F_{n,\ell}(x , y) + h_n(x) + h_n(y) .$$

Il reste à montrer que

$$\mathrm{Tr}_{K/\underset{\sim}{Q}} J[(x , y) \mapsto h_n(x) + k_n(y)] = 2(\frac{f}{t})^{2n-2} \frac{1}{c^{2n-1}} \frac{b_{2n}}{2n} \sum_{k=0}^{2n-2} e_k \frac{(a+d)^{k+1}}{k+1} .$$

Un calcul, pas très simple, donne le résultat.

SHINTANI dans [11] part directement de la formule de Siegel, et montre qu'elle est du type de celles qu'il étudie.

On va maintenant passer à l'étude du prolongement p-adique.

III. Interpolation p-adique.

Soit K un corps quadratique réel , $\mathfrak{f}$ un idéal entier de K . Soit $\mathfrak{b}$ un idéal entier de K premier à $\mathfrak{f}$. On rappelle (1)

$$\xi_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{b} , s) = N(\mathfrak{b})^{-s} \sum_{j\in J} \sum_{y\in R(j,\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{f}+1)} \xi(Aj , y , s) ,$$

où $\xi(Aj , y , s)$ est du type

$$Z(s , s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L(m , n)^s L'(m , n)^s}$$

avec

$$L(x , y) = v_1(x+y_1) + v_2(y+y_2)$$

$$L'(x , y) = v'_1(x+y_1) + v'_2(y+y_2)$$

telles que v_1, v_2, v'_1, v'_2 soient des éléments de $\mathfrak{f}$, et y_1, y_2 des éléments de $\underset{\sim}{Q}$ tels que

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 \in 1 + b^{-1} \mathfrak{f} .$$

Soit p un premier impair. Nous supposerons, dans toute la suite, que $\mathfrak{f}$ est divisible par tous les premiers au-dessus de p. Nous avons vu que, pour tout n entier positif,

$$Z(-n , -n) \in \underset{\sim}{Q}(v_1 , v_2 , y_1 , y_2) .$$

Nous allons chercher s'il existe une fonction méromorphe sur $\underset{\sim}{Z}_p$ qui coïncide sur tous les entiers avec $Z(-n , -n)$.

Nous allons tout d'abord faire l'hypothèse supplémentaire suivante

$$|v_1|_y = |v_2|_y = |v'_1|_y = |v'_2|_y \text{ pour tout premier au-dessus de } p .$$

Nous allons décomposer $Z(-n , -n)$ en deux parties, l'une donnant un prolongement p-adique en une fonction méromorphe ayant un seul pôle en -1, l'autre ne se prolongeant pas méromorphiquement sur $\underset{\sim}{Z}_p$, et liée au résidu aux demi-entiers négatifs de $Z(-s , -s)$. Mais lorsqu'il s'agit d'une fonction zêta, quand on fait la somme de toutes les fonctions $\xi(Aj , y , s)$ qui interviennent, il n'y a plus de pôles aux demi-entiers négatifs : la somme des résidus est nulle. Donc quand on fera la somme de ces parties non analytiques elles disparaîtront, et la somme des parties méromorphes, avec un seul pôle en 1, donnera la fonction zêta p-adique.

Rappelons (8)

$$Z(-k , -k) = \frac{k!}{2(2k+2)!} J\{(x,y) \mapsto \frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{[L(x,y)z+L'(x,y)]^{2k+2}}{(v_1 z+v'_1)(v_2 z+v'_2)} + \frac{[L(x,y)+L'(x,y)z]^{2k+2}}{(v_1+v'_1 z)(v_2+v'_2 z)}\right]_{z=0}$$

Nous allons utiliser le lemme suivant.

LEMME. - <u>Soit</u> $(s , x) \mapsto f(s , x)$ <u>une fonction définie sur</u> $\underset{\sim}{Z}_p \times \underset{\sim}{Z}_p^k$ <u>telle que, pour tout élément</u> s <u>de</u> $\underset{\sim}{Z}_p$, $x \mapsto f(s , x)$ <u>soit uniformément dérivable sur</u> $\underset{\sim}{Z}_p^k$. <u>Pour montrer que</u>

$$s \mapsto J[x \mapsto f(s , x)]$$

<u>est analytique sur</u> $\underset{\sim}{Z}_p$, <u>il suffit que</u>

$$f(s , x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \binom{s}{n}$$

<u>où</u>, $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, $x \mapsto a_n(x)$ <u>est uniformément dérivable, et</u>

$$\frac{\|a_n(x)\|_1}{|n!|} \underset{n \mapsto \infty}{\mapsto} 0 .$$

Nous allons étudier la fonction

$$k \mapsto \frac{k!}{(2k+2)!}\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{[L(x\,,\,y)z + L'(x\,,\,y)]^{2k+2}}{(v_1\, z + v_1')(v_2\, z + v_2')} + \frac{[L(x\,,\,y) + L'(x\,,\,y)z]^{2k+2}}{(v_1 + v_1'\, z)(v_2 + v_2'\, z)}\right]_{z=0} .$$

On a

$$\frac{1}{(v_1\, z + v_1')(v_2\, z + v_2')} = \frac{1}{v_2'\, v_1 - v_1'\, v_2}\left[\frac{v_1}{v_1\, z + v_1'} - \frac{v_2}{v_2\, z + v_2'}\right] .$$

Posons

$$H_k^1(x\,,\,y\,,\,z) = \frac{k!}{(2k+2)!}\,\frac{1}{v_2'\, v_1 - v_1'\, v_2}\,\frac{[L(x\,,\,y)z + L'(x\,,\,y)]^{2k+2}}{z + \frac{v_1'}{v_1}} .$$

On peut écrire

$$H_k^1(x,y,z) = \frac{k!}{(2k+2)!}\,\frac{1}{v_2'v_1 - v_1'v_2}\,\frac{\left[(L(x,y)-1)(z+\frac{v_1'}{v_1}) + z + \frac{v_1'}{v_1} + L'(x,y) - \frac{v_1'}{v_1}L(x,y)\right]^{2k+2}}{z + \frac{v_1'}{v_1}}$$

$$= \frac{k!}{(2k+2)!}\,\frac{1}{v_2'v_1 - v_1'v_2}\,\frac{\left[(z+\frac{v_1'}{v_1}) + L'(x,y) - \frac{v_1'}{v_1}L(x,y)\right]^{2k+2}}{z + \frac{v_1'}{v_1}}$$

$$+ \frac{k!}{(2k+2)!}\,\frac{1}{v_2'v_1 - v_1'v_2}\sum_{i=1}^{2k+2}\binom{2k+2}{i}(L(x,y)-1)^i(z+\frac{v_1'}{v_1})^{i-1} \times \left[z + \frac{v_1'}{v_1} + L'(x,y) - \frac{v_1'}{v_1}L(x,y)\right]^{2k+2-i}$$

$$\frac{d^k}{dz^k}\left\{(z+\frac{v_1'}{v_1} + L'(x,y) - \frac{v_1'}{v_1}L(x,y))^{2k+2-i}(z+\frac{v_1'}{v_1})^{i-1}\right\}_{z=0}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\frac{(2k+2-i)!}{(k+2-i+j)!}\,\frac{(i-1)!}{(i-1-j)!}\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^{i-j-1}\left[L'(x,y) - \frac{v_1'}{v_1}(L(x,y)-1)\right]^{k+2-i+j} .$$

Donc

$$\frac{d^k}{dz^k}[H_k^1(x,y,z)]_{z=0} = \frac{k!}{(2k+2)!}\,\frac{1}{v_2'v_1 - v_1'v_2}\,\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{(z+\frac{v_1'}{v_1} + L'(x,y) - \frac{v_1'}{v_1}L(x,y))^{2k+2}}{z+\frac{v_1'}{v_1}}\right]_{z=0}$$

$$+ \frac{1}{k+1}\,\frac{1}{v_2'v_1 - v_1'v_2}\sum_{i=1}^{2k+2}\frac{(L(x,y)-1)^i}{i}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{k}{j}\binom{k+1}{i-j-1}\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^{i-j-1}\left[L'(x,y) - \frac{v_1'}{v_1}(L(x,y)-1)\right]^{k+2-i+j} .$$

On s'intéresse tout d'abord à

$$H_k^1(x,y) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{2k+2}\frac{(L(x,y)-1)^i}{i}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{k}{j}\binom{k+1}{i-j-1}\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^{i-j}\left[L'(x,y) - \frac{v_1'}{v_1}(L(x,y)-1)\right]^{k+2-i+j} .$$

Or

$$|v_1'|_{\mathfrak{p}} = |v_1|_{\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad L(x\,,\,y) \equiv L'(x\,,\,y) \equiv 1 \mod \mathfrak{p}$$

puisque, pour tout x et tout y élément de $\underset{\sim}{Z}_p$, $L(x, y) \in 1 + b^{-1}\mathfrak{f}$, b est premier à $\mathfrak{f}$, et $\mathfrak{f}$ est divisible par tous les premiers de K au-dessus de p. Donc

$$|L'(x, y) - \frac{v_1'}{v_1}(L(x, y) - 1)|_{\mathfrak{P}} = 1 .$$

Donc

$$k \mapsto \binom{k}{j}\binom{k+1}{i-j-1}[L'(x, y) - \frac{v_1'}{v_1}(L(x, y) - 1)]^{k+2-i+j}$$

se prolonge en une fonction analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$, et

$$f_1(s,x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(L(x,y)-1)^i}{i} \sum_{j=0}^{i-1}\binom{s}{j}\binom{s+1}{i-j-1}\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^{i-j}[L'(x,y)-\frac{v_1'}{v_1}(L(x,y)-1)]^{s+2-i+j}$$

est une série convergente de fonctions analytiques qui définit une fonction analytique vérifiant les propriétés du lemme et, pour tout k entier positif,

$$H_k^1(x, y) = f_1(k, x, y) .$$

Il nous reste à étudier

$$\frac{k!}{(2k+2)!}\frac{1}{v_2'v_1-v_1'v_2}\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{[(z+\frac{v_1'}{v_1}+L'(x,y)-\frac{v_1'}{v_1}L(x,y)]^{2k+2}}{z+\frac{v_1'}{v_1}}\right]_{z=0}$$

$$= \frac{k!}{(2k+2)!}\frac{1}{v_2'v_1-v_1'v_2}\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{(L'(x,y)-\frac{v_1'}{v_1}L(x,y))^{2k+2}}{z+\frac{v_1'}{v_1}}\right]_{z=0}$$

$$+ \frac{k!}{(2k+2)!}\frac{1}{v_2'v_1-v_1'v_2}\sum_{i=0}^{k+1}\binom{2k+2}{i}(L'(x,y) - \frac{v_1'}{v_1}L(x,y))^i\frac{(2k+1-i)!}{(k+1-i)!}\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^{k+1-i} .$$

On a

$$\frac{1}{v_2'v_1-v_1'v_2}\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{(L'(x,y)-\frac{v_1'}{v_1}L(x,y))^{2k+2}}{z+\frac{v_1'}{v_1}}\right]_{z=0} = \frac{1}{v_2v_1'-v_1v_2'}\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{(L'(x,y)-\frac{v_1}{v_2'}L(x,y))^{2k+2}}{z+\frac{v_1'}{v_1}}\right]_{z=0}.$$

Il reste donc si l'on ajoute la partie obtenue en changeant la place du ' (le conjugué dans un cas d'un corps de nombres)

$$\frac{1}{(v_2'v_1-v_1'v_2)}\frac{1}{(k+1)}\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}(L'(x,y)-\frac{v_1'}{v_1}L(x,y))^i\left(\frac{v_1}{v_1'}\right)^{k+1}\left[\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^{2k+2-i}+(-1)^{i-1}\right]\frac{1}{2k+2-i} .$$

Pour achever, nous devons faire maintenant une hypothèse supplémentaire qui est vérifiée dans le cas des formules de Siegel. Nous allons supposer que

$$\frac{v'_1}{v_1} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}) \qquad \text{et} \qquad \frac{v'_2}{v_2} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}) \ , \qquad \forall \quad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$$

et après avoir remarqué que

$$|L'(x\ ,\ y) - \frac{v'_1}{v_1} L(x\ ,\ y)|_{\mathfrak{p}} = |(v'_2 - \frac{v'_1}{v_1} v_2)(y + y_2)|_{\mathfrak{p}} < 1\ ,$$

nous posons

$$M_k^1(y) = \frac{1}{(v'_2 v_1 - v'_1 v_2)} \frac{1}{(k+1)} \sum_{i=0, i \text{ pair}}^{k+1} \binom{k+1}{i} (L'(x,y) - \frac{v'_1}{v_1} L(x,y))^i (\frac{v_1}{v'_1})^{k+1} [(\frac{v'_1}{v_1})^{2k+2-i} - 1] \frac{1}{2k+2-i}$$

et

$$N_k^1(y) = \frac{1}{(v'_2 v_1 - v'_1 v_2)} \frac{1}{(k+1)} \sum_{i=0, i \text{ impair}}^{k+1} \binom{k+1}{i} (L'(x,y) - \frac{v'_1}{v_1} L(x,y))^i (\frac{v_1}{v'_1})^{k+1} [(\frac{v'_1}{v_1})^{2k+2-i} + 1] \frac{1}{2k+2-i}$$

Etudions tout d'abord $M_k^1(y)$:

$$(\frac{v'_1}{v_1})^{2k+2-i} = 1 + (2k + 2 - i) \sum_{j=1}^{2k+2-i} \binom{2k + 1 - i}{j - 1} (\frac{v'_1}{v_1} - 1)^j \frac{1}{j} \ .$$

Alors

$$M_k^1(y) = \frac{(\frac{v_1}{v'_1})^{k+1}}{(v'_2 v_1 - v'_1 v_2)} \frac{1}{(k+1)} \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=1}^{2k+2-i} (\frac{v'_1}{v_1} - 1)^j \frac{1}{j} \binom{k+1}{i} \binom{2k+1-i}{j-1} (L'(x,y) - \frac{v'_1}{v_1} L(x,y))^i$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \binom{2k+1-i}{j-1} (L'(x,y) - \frac{v'_1}{v_1} L(x,y))^i = \sum_{r=0}^{j-1} \binom{k+1}{r} \binom{k}{j-r-1} (L'(x,y) - \frac{v'_1}{v_1} L(x,y) + 1)^{k+1-r} \ .$$

Pour tout j , la fonction

$$k \mapsto \sum_{r=0}^{j-1} \binom{k + 1}{r} \binom{k}{j - r - 1} (L'(x\ ,\ y) - \frac{v'_1}{v_1} L(x\ ,\ y) + 1)^{k+1-r}$$

se prolonge en une fonction analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$, et

$$g^1(s\ ,\ y) = \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{v'_1}{v_1} - 1)^j \frac{1}{j} \sum_{r=0}^{j-1} \binom{k + 1}{r} \binom{k}{j - r - 1} (L'(x\ ,\ y) - \frac{v'_1}{v_1} L(x\ ,\ y) + 1)^{k+1-r}$$

définit une fonction analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$ qui vérifie les propriétés du lemme et

$$M_k^1(y) = (\frac{v_1}{v'_1})^{k+1} \frac{1}{(v'_2\ v_1 - v'_1\ v_2)} \frac{1}{(k + 1)} g^1(k\ ,\ y) \quad \text{pour } k \text{ entier positif} \ .$$

Terminons par $N_k^1(y)$.

Pour tout i impair, écrivons :

$$\alpha_i(s) = \frac{1}{v'_2 v_1 - v'_1 v_2} \binom{s+1}{i} (L'(x,y) - \frac{v'_1}{v_1} L(x,y))^i \ (\frac{v_1}{v'_1})^{s+1} \ [(\frac{v'_1}{v_1})^{2s+2-i} + 1] \ \frac{1}{2s+2-i} \ .$$

On a

$$\alpha_i(s) = \binom{i/2}{i}(v_2' v_1 - v_1' v_2)^{i-1} (y + y_2)^i (v_1 v_1')^{-i/2} \frac{1}{2s+2-i} + \beta_i(s) .$$

$s \mapsto \beta_i(s)$ est une fonction analytique en s , et la série $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i(s)$ est une série convergente de fonctions analytiques, qui définit une fonction analytique vérifiant la propriété du lemme. On a, de plus, pour tout k entier,

$$N_k^1(y) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{i/2}{i}(v_2' v_1 - v_1' v_2)^{i-1} (y+y_2)^i (v_1 v_1')^{-i/2} \frac{1}{2k+2-i} + \frac{1}{k+1} \sum_{i=0,i \text{ impair}}^{\infty} \beta_i(k)$$

Mais par contre, $NA(y , .)$:

$$k \mapsto \sum_{i=0,i \text{ impair}}^{k+1} \binom{i/2}{i}(v_2' v_1 - v_1' v_2)^{i-1} (y + y_2)^i (v_1 v_1')^{-i/2} \frac{1}{2k+2-i}$$

ne se prolonge pas en une fonction analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$.

Mais

$$J(y \mapsto NA(y , k)) = \sum_{i=0,i \text{ impair}}^{k+1} \operatorname{Res}_{s=i-2/2} Z(-s , -s) .$$

Mais, s'il s'agit d'une fonction $\xi(b , .)$, on a (1)

$$\forall\ i > 0 , \sum_{j\in J} \sum_{y \in R(j,b^{-1}\gamma+1)} \operatorname{Res}_{s=i-2/2} \xi(A_j , \mathfrak{p} , -s) = 0 .$$

Alors la partie non analytique disparaît. On a démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Soient y_1 et y_2 des rationnels tels que

$$0 < y_1 \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < y_2 \leq 1 .$$

Soit K un corps de nombres, et v_1 , v_2 , v_1' , v_2' des entiers de K .

Soit p un nombre premier, et $\mathfrak{p}$ un premier quelconque de K au-dessus de p . On suppose que

$$|v_1|_{\mathfrak{p}} = |v_2|_{\mathfrak{p}} = |v_1'|_{\mathfrak{p}} = |v_2'|_{\mathfrak{p}} ,$$

$$(v_1 y_1 + v_2 y_2) \equiv 1 \quad (\mathfrak{p})$$

et

$$(v_1' y_1 + v_2' y_2) \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}) .$$

Soit pour $\operatorname{Re}(s) > 1$,

$$Z(s , s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L(m , n)^s \, L'(m , n)^s}$$

où

$$L(x\,,\,y) = (x+y_1)v_1 + (y+y_2)v_2$$
$$L'(x\,,\,y) = (x+y_1)v'_1 + (y+y_2)v'_2$$

Alors pour tout k entier positif, on a

$$Z(-k,-k) = \mathbb{J}[(x,y) \mapsto \frac{1}{(k+1)(v'_2v_1-v'_1v_2)}(f_1(k,x,y)-f'_1(k,x,y)-f_2(k,x,y)+f'_2(k,x,y)$$
$$+M^1_k(y)-M^2_k(x)+N^1_k(y)+N^2_k(x)]$$

où $s \mapsto f_1(s\,,\,x\,,\,y)$ est la fonction analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(L(x,y)-1)^i}{i} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{s}{j}\binom{s+1}{i-j-1}\left(\frac{v'_1}{v_1}\right)^{i-j} [L'(x,y) - \frac{v'_1}{v_1}(L(x,y)-1)]^{s+2-i+j}$$

(f_2 , f'_1 , f'_2 sont de la même forme).

Si, de plus, $\frac{v'_1}{v_1} \equiv 1$ ($\mathfrak{p}$) et $\frac{v'_2}{v_2} \equiv 1$ ($\mathfrak{p}$) , alors

$$M^1_k(y) = g^1(k\,,\,y)$$

où $s \mapsto g^1(s\,,\,y)$ est la fonction analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{v'_1}{v_1} - 1\right)^j \frac{1}{j} \sum_{r=0}^{j-1} \binom{s+1}{r}\binom{s}{j-r-1}[L'(x\,,\,y) - \frac{v'_1}{v_1} L(x\,,\,y) + 1]^{s+1-r}$$

(on a la même propriété pour M^2_k).

Enfin

$$N^1_k(y) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0,\ i \text{ impair}}^{k+1} \frac{\operatorname{Res}_{s=(i+2)/2} Z(-s\,,\,-s)}{2k+2-i} + \frac{1}{k+1}\beta(k\,,\,y)\ ,$$

où $s \mapsto \beta(s\,,\,y)$ est aussi une fonction analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$. Par contre,

$$k \mapsto \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} \frac{\operatorname{Res}_{s=(i-2)/2} Z(-s\,,\,-s)}{2k+2-i}$$

ne se prolonge pas en une fonction analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$.

COROLLAIRE. - Soit K un corps quadratique réel, $\mathfrak{f}$ un idéal entier de K , et $\mathfrak{b}$ un idéal entier de K , premier à $\mathfrak{f}$. Soit p un nombre premier. On suppose que $\mathfrak{f}$ est divisible par tous les premiers $\mathfrak{p}$ de K au-dessus de p . Alors il existe une fonction méromorphe sur $\underset{\sim}{Z}_p$ ayant un seul pôle en -1 qui coïncide pour k entier positif $k \equiv 1 \mod p^f - 1$ (où f désigne le cardinal du corps résiduel de $K_{\mathfrak{p}}$ avec $\xi_f(\mathfrak{b}\,,\,-s)$).

Les hypothèses que nous avons faites sont bien vérifiées dans le cas des formules de Siegel.

Nous allons pour terminer chercher le résidu en -1 de la fonction p-adique.

Considérons tout d'abord

$$\frac{1}{(s+1)(v_2' v_1 - v_1' v_2)}(f_1(s,x,y) - f_1'(s,x,y) - f_2(s,x,y) + f_2'(s,x,y))$$

où

$$f_1(s,x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(L(x,y)-1)^i}{i} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{s}{j}\binom{s+1}{i-j-1}\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^{i-j-1} \left(L'(x,y) - \frac{v_1'}{v_1}(L(x,y)-1)\right)^{s+2-i+j},$$

$$f_1(-1,x,y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(L(x,y)-1)^i}{i}(-1)^{i-1} = \log_p L(x,y),$$

$$f_2(-1,x,y) = \log_p L(x,y).$$

Donc,

$$f_1(-1,x,y) - f_1'(-1,x,y) - f_2(-1,x,y) + f_2'(-1,x,y) = 0.$$

Nous avons ensuite

$$\frac{1}{(s+1)(v_2' v_1 - v_1' v_2)}(g^1(s,y) - g^2(s,x))$$

où

$$g^1(s,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{v_1'}{v_1} - 1\right)^j \frac{1}{j} \sum_{r=0}^{j-1} \binom{s+1}{r}\binom{s}{j-r-1}\left(L'(x,y) - \frac{v_1'}{v_1} L(x,y)+1\right)^{s+1-r}$$

$$g^1(-1,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{v_1'}{v_1} - 1\right)^j \frac{1}{j}(-1)^{j-1} = \log_p \frac{v_1'}{v_1}.$$

Donc

$$\frac{1}{v_2' v_1 - v_1' v_2}(g^1(-1,y) - g^2(-1,x)) = \frac{1}{v_2' v_1 - v_1' v_2} \log_p \frac{v_1'}{v_1}\frac{v_2}{v_2'}.$$

Enfin, il reste

$$N_k^1(y) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0,\, i \text{ impair}}^{k+1} \frac{\operatorname{Res}_{s=(i-2)/2} Z(-s,-s)}{2s+2-i} + \frac{1}{k+1}\beta(k,y)$$

et $\beta(s,y)$ est définie par $\beta(s,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(s,y)$, où

$$\binom{s+1}{i}\left(L'(x,y)-\frac{v'_1}{v_1}L(x,y)\right)^i\left(\frac{v_1}{v'_1}\right)^{s+1}\left[\left(\frac{v'_1}{v_1}\right)^{2s+2-i}+1\right]\frac{1}{2s+2-i}=\frac{\mathrm{Res}_{s=(i-2)/2}Z(-s,-s)}{2s+2-i}+\beta_i(s)$$

On a donc, pour tout i impair,

$$\beta_i(-1)=-\frac{\mathrm{Res}_{s=(i-2)/2}\,Z(-s,-s)}{-i}\ .$$

Dans le cas où l'on a un prolongement, cette partie disparaît.

Donc la fonction p-adique a pour résidu au pôle

$$\frac{1}{2(v'_2\,v_1-v'_1\,v_2)}\log_p\frac{v'_1}{v_1}\frac{v_2}{v'_2}\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.

[2] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique, Thèse 3e cycle, Université de Bordeaux-I, 1971 (polycopié).

[3] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Analogues p-adiques de quelques fonctions arithmétiques, Publications mathématiques de Bordeaux, Année 1974/75, p. 1-43.

[4] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Prolongement analytique et valeurs aux entiers négatifs de certaines séries arithmétiques relatives à des formes quadratiques, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, 1975/76, Exposé n° 4.

[5] COATES (J.) and SINNOTT (W.). - On p-adic L-functions over real quadratic fields, Inventiones math., Berlin, t. 25, 1974, p. 253-279.

[6] DELIGNE (P.) and RIBET (K.). - Values of abelian L-functions at negative integers (à paraître).

[7] IWASAWA (K.). - On p-adic L-functions, Annals of Math., t. 89, 1969, p. 198-205.

[8] KLINGEN (H.). - Über die Werte der Dedekindschen Zeta funktion, Math. Annalen, t. 145, 1962, p. 265-272.

[9] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie des Zetawerte, I : Einführung der p-adishen Dirichletschen L-Funktionen, J. für die reine und ang. Math., t. 214-215, 1964, p. 328-339.

[10] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, "Modular functions of one variable, III", p. 191-268. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[11] SHINTANI (T.). - On evaluation of zeta functions of totally real algebraïc numbers fields at non positive integral places, Journal of Faculty of Science University o. Tokio (preprint).

[12] SIEGEL (C. L.). - Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Göttingen Nachr., t. 3, 1970, p. 15-56.

[13] SIEGEL (C. L.). - Bernoullishe Polynome und quadratisches Zablkörper, Göttingen Nachr., t. 2, 1968, p. 7-38.

[14] ZAGIER (D.). - A Kronecker limit formula for real quadratic fields, Math. Annalen, t. 213, 1975, p. 153-184.

Pierrette CASSOU-NOGUÈS
9 rue Ségalier
33000 BORDEAUX

(Texte reçu le 13 septembre 1976)