GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

MICHEL EMSALEM

Approximation pondérée sur un corps de nombres p-adiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. n$^{\text{o}}$ 8, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A7_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 8, 8 p.

20 janvier 1975

APPROXIMATION PONDÉRÉE SUR UN CORPS DE NOMBRES p-ADIQUES

par Michel EMSALEM

Tout le long du texte, p désigne un nombre premier fixé, $\underset{\sim}{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, $\underset{\sim}{K}$ une extension finie de $\underset{\sim}{Q}_p$ plongée dans $\underset{\sim}{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$. La norme p-adique, notée $|\ |_p$, est normalisée par $|p|_p = 1/p$. On note e et f respectivement l'indice de ramification et le degré résiduel de $\underset{\sim}{K}$ sur $\underset{\sim}{Q}_p$.

Si ω est une fonction de $\underset{\sim}{R}^+$ dans $\underset{\sim}{R}^{+*}$ telle que, pour tout n, $\rho^n = o(\omega(\rho))$ à l'infini, on appelle $\mathcal{C}_\omega$ l'espace de toutes les fonctions continues de $\underset{\sim}{K}$ dans $\underset{\sim}{C}_p$, qui sont $o(\omega)$ à l'infini, muni de la norme $\|f\|_\omega$ définie par

$$\|f\|_\omega = \sup_{\rho\in|K|}(\sup_{x\in\underset{\sim}{K}, |x|_p=\rho}|f(x)|_p)\omega^{-1}(\rho) .$$

On cherchera à caractériser, pour un ω fixé, la sous-classe de $\mathcal{C}_\omega$ adhérence de $\underset{\sim}{C}_p[X]$ pour la topologie induite sur $\mathcal{C}_\omega$ par la norme $\|\ \|_\omega$. On particularise le problème en prenant le poids $\omega_\alpha(\rho) = p^{\rho^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. On notera $\mathcal{C}_\alpha$ (resp. $\|\ \|_\alpha$) l'espace $\mathcal{C}_{\omega_\alpha}$ (resp. la norme $\|\ \|_{\omega_\alpha}$). La réponse à la question posée est contenue dans le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> η <u>le degré de</u> $\underset{\sim}{K}$ <u>sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$.

(i) <u>Si</u> $\alpha < \eta$, <u>l'adhérence de</u> $\underset{\sim}{C}_p[X]$ <u>dans</u> $\mathcal{C}_\alpha$ <u>est constituée de restrictions à</u> $\underset{\sim}{K}$ <u>de fonctions entières sur</u> $\underset{\sim}{C}_p$ <u>qui sont sur</u> $\underset{\sim}{C}_p$ $o(p^{C|x|_p^\alpha})$ <u>à l'infini, où</u> C <u>est une constante qui ne dépend que de</u> α.

(ii) <u>Si</u> $\alpha > \eta$, <u>toute fonction de</u> $\mathcal{C}_\alpha$ <u>est limite dans</u> $\mathcal{C}_\alpha$ <u>d'une suite de polynômes</u>.

<u>Remarque</u>. - Le cas particulier $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{Q}_p$ donne un résultat analogue à celui concernant l'approximation pondérée sur $\underset{\sim}{R}$: l'exposant limite est $\alpha = 1$.

Dans la première partie, on énonce des lemmes qui comparent les valeurs d'un polynôme sur $\underset{\sim}{K}$ et sur $\underset{\sim}{C}_p$; dans la deuxième partie, on s'occupe du cas $\alpha < \eta$, et dans la troisième partie, on traite le cas $\alpha > \eta$.

1. Comparaison des valeurs d'un polynôme sur $\underset{\sim}{K}$ et sur $\underset{\sim}{C}_p$.

LEMME 1. - <u>Soit</u> $P(x)$ <u>un polynôme de degré</u> n <u>à coefficients dans</u> $\underset{\sim}{C}_p$ <u>ayant tous ses zéros dans le disque unité de</u> $\underset{\sim}{C}_p$, <u>et tel que</u> $\sup_{x\in\underset{\sim}{C}_p, |x|_p\leq 1}|P(x)|_p = 1$, <u>alors</u>

$$\sup_{x\in\underset{\sim}{K}, |x|_p\leq 1} |P(x)|_p \geq p^{-n/(p^f-1)e} .$$

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite très bien répartie dans l'anneau A de valuation de $\underset{\sim}{K}$; P s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{j=0}^{n} b_j(x - u_0) \dots (x - u_{j-1}) .$$

Les hypothèses sur P impliquent que, pour tout k, $|a_k|_p \leq 1$ et que $|a_n|_p = 1$; en particulier $|b_n|_p = |a_n|_p = 1$. On a donc (d'après [1]) :

$$\sup_{x\in A} |P(x)|_p \geq \sup_{x\in A} |x-u_0|_p \dots |x-u_{n-1}|_p = p^{-(1/e)\sum_{k\geq 1}[n/p^{fk}]} \geq p^{-n/(p^f-1)e} .$$

LEMME 2. - Soit $P(x)$ un polynôme de degré n ; alors, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\sup_{x\in\underset{\sim}{K}, |x|_p\leq p^{k/e}} |P(x)|_p \geq p^{-n/(p^f-1)e} \sup_{x\in\underset{\sim}{C}_p, |x|_p\leq p^{k/e}} |P(x)|_p .$$

Il suffit de démontrer le lemme pour $k = 0$: on fait le changement de variable $y = \pi^k x$, où π est un élément premier de $\underset{\sim}{K}$. P de degré n se décompose en un produit $P = P_1 P_2$, où P_1 a tous ses zéros dans le disque $|x|_p \leq 1$ de $\underset{\sim}{C}_p$, et P_2 n'y a aucun zéro. Soit $x_0 \in \underset{\sim}{K}$ tel que $|x_0|_p = 1$. Pour $|x|_p \leq 1$, $|P_2(x)|_p$ est constant, et vaut $|P_2(x_0)|_p$. On a donc :

$$\sup_{x\in\underset{\sim}{K}, |x|_p\leq 1} |P(x)|_p = |P_2(x_0)|_p \sup_{x\in\underset{\sim}{K}, |x|_p\leq 1} |P_1(x)|_p$$

et

$$\sup_{x\in\underset{\sim}{C}_p, |x|_p\leq 1} |P(x)|_p = |P_2(x_0)|_p \sup_{x\in\underset{\sim}{C}_p, |x|_p\leq 1} |P_1(x)|_p .$$

Le lemme 1, appliqué à P_1, donne le lemme 2.

2. Etude du cas $\alpha < \eta$.

Enonçons la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Pour tout $\alpha < \eta$, il existe une constante $C(\alpha)$ qui possède la propriété suivante : si un polynôme $P \in \underset{\sim}{C}_p[X]$ vérifie, pour tout $x \in \underset{\sim}{K}$,

$$|P(x)|_p \leq p^{|x|_p^\alpha} ,$$

alors, pour tout $x \in \underset{\sim}{C}_p$,

$$|P(x)|_p \leq p^{C(\alpha)|x|_p^\alpha} .$$

Ce résultat implique que, pour tout $a \in \underset{\sim}{C}_p$, l'application linéaire, qui à un polynôme P associe $P(a)$, est continue pour la norme de $\mathcal{C}_\alpha$. Elle s'étend donc à l'adhérence de $\underset{\sim}{C}_p[X]$ dans $\mathcal{C}_\alpha$. Les fonctions de $\mathcal{C}_\alpha$ limites dans $\mathcal{C}_\alpha$ de polynômes se prolongent donc naturellement à $\underset{\sim}{C}_p$ et, de plus, ce prolongement est une fonction entière ; en effet, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. - Si $\alpha < \eta$, l'adhérence de $\underset{\sim}{C}_p[X]$ dans $\mathcal{C}_\alpha$ est constituée de fonctions entières de $\underset{\sim}{C}_p$ qui sont sur $\underset{\sim}{C}_p$,

$$o(p^{C(\alpha)|x|_p^\alpha}) .$$

C'est clairement une conséquence de la proposition 1.

Démontrons à présent la proposition 1. - Soit P le polynôme de la proposition ; P s'écrit :

$$P(x) = Q(x)\, P_1(x)\, P_2(x) \ldots P_k(x) ,$$

où Q n'a aucun zéro sur les cercles $|x|_p = p^{j/e}$ de $\underset{\sim}{C}_p$ (j parcourt $\underset{\sim}{N}$), et où P_i de degré s_i a tous ses zéros sur le cercle $|x|_p = p^{(i-1)/e}$ de $\underset{\sim}{C}_p$, et $P_i(0) = 1$. On notera $B_i = \log_p \sup_{x \in \underset{\sim}{C}_p,\, |x|_p = p^{i/e}} |Q(x)|_p$; la suite B_i est évidemment croissante. On a les propriétés suivantes :

pour $x \in \underset{\sim}{K}$ et $|x|_p \leq p^{(i-2)/e}$, $|P_i(x)|_p = 1$,

grâce au lemme 1 $\sup_{x \in \underset{\sim}{K},\, |x|_p \leq p^{(i-1)/e}} |P_i(x)|_p \geq p^{-s_i/(p^f - 1)e}$,

et pour $x \in \underset{\sim}{K}$, $|x|_p = p^{j/e}$ et $j \geq i$, $|P_i(x)|_p = p^{s_i(j-i+1)/e}$.

La relation $|P(x)|_p \leq p^{|x|_p^{\alpha}}$ pour $x \in \underset{\sim}{K}$ entraîne la suite d'inégalités (I_k) :

$$(I_k) \begin{cases} 1 \geq B_0 - (s_1/(p^f - 1)e) \\ p^{\alpha/e} \geq B_1 + (s_1/e) - (s_2/(p^f - 1)e) \\ \ldots \\ p^{(k-1)\alpha/e} \geq B_{k-1} + (k-1)(s_1/e) + \ldots + (s_{k-1}/e) - (s_k/(p^f - 1)e) \\ p^{k\alpha/e} \geq B_k + k(s_1/e) + \ldots + 2(s_{k-1}/e) + (s_k/e) \\ \ldots \end{cases}$$

Nous allons démontrer que les inégalités (I_k) entraînent les inégalités (II) :

$$(II) \begin{cases} C \geq B_0 \\ Cp^{\alpha/e} \geq B_1 + (s_1/e) \\ \ldots \\ Cp^{(k-1)\alpha/e} \geq B_{k-1} + (k-1)(s_1/e) + \ldots + (s_{k-1}/e) \\ Cp^{k\alpha/e} \geq B_k + k(s_1/e) + \ldots + 2(s_{k-1}/e) + (s_k/e) \\ \ldots \end{cases}$$

Il est alors clair que ces dernières inégalités entraînent la conclusion de la proposition avec une constante $C(\alpha)$ supérieure à C .

Nous allons voir que si l'on prend $C \geq (p^f - 1)/(p^f - p^{\alpha/e}) > 1$, les inégalités (I_k) entraînent (II) (on utilise ici le fait que $\alpha < fe = \eta$).

Raisonnons par l'absurde, et supposons que, pour un indice $j_0 \leq k-1$,

$$B_{j_0} + j_0(s_1/e) + \ldots + (s_{j_0}/e) > Cp^{j_0\alpha/e} ;$$

On aura alors

$$s_{j_0+1} > e(p^f - 1)(C - 1)p^{j_0\alpha/e} \; ;$$

d'où

$$B_{j_0+1} + (j_0 + 1)(s_1/e)+\dots+(s_{j_0+1}/e)$$
$$\geq B_{j_0}+j_0(s_1/e)+\dots+(s_{j_0}/e)+(s_{j_0+1}/e) > (C+(C-1)(p^f-1))p^{j_0\alpha/e} \, ,$$

et cette dernière expression est supérieure à $Cp^{(j_0+1)\alpha/e}$ du fait du choix de C. La récurrence se poursuit jusqu'à k, où l'on obtient :

$$p^{k\alpha/e} \geq B_k + k(s_1/e)+ \dots +(s_k/e) > Cp^{k\alpha/e} \, ,$$

ce qui est impossible. On aura donc, pour tout j,

$$B_j + j(s_1/e)+ \dots +(s_j/e) \leq Cp^{j\alpha/e} \, ,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

Remarque 1. - Le théorème 1 ne donne pas une caractérisation des fonctions entières dont la restriction à $\underset{\sim}{K}$ est limite dans $\mathcal{C}_\alpha$ de polynômes. Une réciproque pourrait être : toute fonction entière sur $\underset{\sim}{C}_p$ qui est $o(p^{C|x|_p^\alpha})$ à l'infini sur $\underset{\sim}{C}_p$ et qui, sur $\underset{\sim}{K}$, est $o(p^{|x|_p^\alpha})$ a une restriction à $\underset{\sim}{K}$ qui est limite dans $\mathcal{C}_\alpha$ d'une suite de polynômes.

Remarque 2. - Le lemme 2 permet d'affirmer que si L est une extension de degré infini de $\underset{\sim}{Q}_p$ contenue dans $\underset{\sim}{C}_p$, les bornes supérieures de $|P(x)|_p$ sur des cercles correspondants de L et de C_p sont les mêmes ; on peut en effet trouver dans L une suite d'extensions finies dont le degré η_n tend vers $+\infty$; alors $(p^{f_n} - 1)e_n \geq \eta_n$ tend aussi vers $+\infty$, ce qui prouve la propriété annoncée. Si on étudie l'approximation pondérée sur L ; les seules fonctions qui seront limites de polynômes seront des fonctions entières.

3. Etude du cas $\alpha > \eta$.

Dans un premier temps, on essaie de situer l'endroit où $\sup_{x\in\underset{\sim}{K}} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha}$ est atteint pour un polynôme P. Voici en fait un résultat plus précis dont nous aurons besoin dans la démonstration de la deuxième partie du théorème 1.

PROPOSITION 2. - Quel que soit $\alpha > 0$, il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $A > 0$ et pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n, on ait :

$$p^{-A^\alpha} \sup_{x\in\underset{\sim}{K},\, |x|_p > Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} \leq \sup_{x\in\underset{\sim}{K},\, p^{[e \log_p A]/e} \leq |x|_p \leq Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} \, .$$

Le cas particulier $A = 0$ répond à la question posée plus haut.

THÉORÈME 2. - Quel que soit $\alpha > 0$, il existe une constante $K > 0$ telle que la borne supérieure de $|P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha}$, lorsque x parcourt $\underset{\sim}{K}$, est atteinte sur le

<u>disque</u> $|x|_p \leqslant Kn^{1/\alpha}$ <u>pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à</u> n .

Pour démontrer la proposition 2, nous utiliserons les lemmes suivants :

LEMME 3. - <u>Pour tout</u> A <u>et</u> B , $0 < A < B$, <u>et pour tout polynôme de degré au plus</u> n ,

$$\sup_{x\in \underset{\sim}{K}, p^{(1/e)[e \log_p A]} \leqslant |x|_p \leqslant B} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} \geqslant p^{-np^f/e(p^f-1)} \sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, A\leqslant |x|_p \leqslant B} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} .$$

En effet, soit R compris entre A et B tel que $R \in |\underset{\sim}{C}_p|$,

$$\sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, |x|_p=R} |P(x)|_p \leqslant p^{n/e} \sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, |x|_p=p^{(1/e)[e \log_p R]}} |P(x)|_p .$$

D'où, d'après le lemme 2,

$$\sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, |x|_p=R} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} \leqslant p^{n(1+(1/(p^f-1)))/e} (\sup_{x\in \underset{\sim}{K}, |x|_p \leqslant p^{[e \log_p R]/e}} |P(x)|_p) p^{-p^{\alpha[e \log_p R]/e}} .$$

Lorsque R varie de A à B , $p^{[e \log_p R]/e}$ est compris entre $p^{[e \log_p A]/e}$ et B ; d'où,

$$\sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, A\leqslant |x|_p \leqslant B} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} \leqslant p^{np^f/e(p^f-1)} \sup_{[e \log_p A]\leqslant k \leqslant [e \log_p B]} p^{-p^{\alpha k/e}} (\sup_{x\in \underset{\sim}{K}, |x|_p \leqslant p^{k/e}} |P(x)|_p) .$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$\sup_{k_0 \leqslant k \leqslant k_1} (\sup_{x\in \underset{\sim}{K}, |x|_p=p^{k/e}} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha}) = \sup_{k_0 \leqslant k \leqslant k_1} p^{-p^{\alpha k/e}} (\sup_{x\in \underset{\sim}{K}, |x|_p \leqslant p^{k/e}} |P(x)|_p) .$$

En effet, le membre de gauche est évidemment inférieur au membre de droite : montrons l'inégalité dans l'autre sens : soit k' l'indice pour lequel

$$\sup_{k_0 \leqslant k \leqslant k_1} p^{-p^{\alpha k/e}} (\sup_{x\in \underset{\sim}{K}, |x|_p \leqslant p^{k/e}} |P(x)|_p)$$

est atteint, et soit $p^{j/e}$ la valeur absolue du x où $\sup_{x\in \underset{\sim}{K}, |x|_p \leqslant p^{k'/e}} |P(x)|_p$ est atteint. On a :

$$\sup_{k_0 \leqslant k \leqslant k_1} p^{-p^{\alpha k/e}} (\sup_{x\in \underset{\sim}{K}, |x|_p \leqslant p^{k/e}} |P(x)|_p) = p^{-p^{\alpha k'/e}} \sup_{x\in \underset{\sim}{K}, |x|_p=p^{j/e}} |P(x)|_p \leqslant p^{-p^{\alpha j/e}} \sup_{x\in \underset{\sim}{K}, |x|_p=p^{j/e}} |P(x)|_p ;$$

d'où le résultat.

LEMME 4. - Pour tout A et B, $0 < A < B$, et pour tout polynôme $P \in \underset{\sim}{C}_p[X]$,

$$\sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, A\leq |x|_p\leq B} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} \geq p^{-A^\alpha} \sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, |x|_p\leq B} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} .$$

C'est une conséquence immédiate du principe du maximum. Venons-en maintenant à la démonstration de la proposition 2. Soit P un polynôme à coefficients dans $\underset{\sim}{C}_p$: $P(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$. Notons $|||P|||_\alpha = \sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha}$, et soit

$$M_j = |||x^j|||_\alpha = p^{(\log(j/\alpha \log p)-1)j/\alpha \log p} .$$

On a

$$|||P|||_\alpha = \sup_{0\leq j\leq n} |b_j|_p M_j . \tag{1}$$

En effet, les inégalités ultramétriques donnent $|||P|||_\alpha \leq \sup_{0\leq j\leq n} |b_j|_p M_j$, et les inégalités de Cauchy sur $\underset{\sim}{C}_p$ donnent $\sup_{0\leq j\leq n} |b_j|_p M_j \leq |||P|||_\alpha$. Soit K une constante que nous fixerons plus tard. Les lemmes 3 et 4 permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in \underset{\sim}{K}, p^{[e \log_p A]/e}\leq |x|_p\leq Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} \\ &\qquad \geq p^{-A^\alpha-(np^f/e(p^f-1))} \sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, |x|_p\leq Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} . \end{aligned} \tag{2}$$

Nous allons déterminer K de façon que

$$p^{-np^f/e(p^f-1)} |||P|||_\alpha > |b_j|_p \, |x^j|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} \quad \text{pour } 0\leq j\leq n \text{ et } |x|_p > Kn^{1/\alpha} . \tag{3}$$

On aura alors :

$$\sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, |x|_p>Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} < p^{-np^f/e(p^f-1)} \sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} ,$$

et donc

$$\sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, |x|_p\leq Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} = |||P|||_\alpha ;$$

il vient finalement

$$\sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, |x|_p>Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} < p^{-np^f/e(p^f-1)} \sup_{x\in \underset{\sim}{C}_p, |x|_p\leq Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha}$$

et cette dernière inégalité, alliée à (2), entraîne la proposition.

Détermination de K. - Prenons déjà $K > (1/\alpha \log p)^{1/\alpha}$ de façon que la fonction $\rho^j p^{-\rho^\alpha}$ soit décroissante sur l'intervalle $]Kn^{1/\alpha}, +\infty[$; on a alors sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} |b_j|_p \, \rho^j p^{-\rho^\alpha} &\leq |b_j|_p \, p^{(\log K^\alpha n)(j/\alpha \log p)-K^\alpha n} \\ &\leq |b_j|_p \, M_j \, p^{(\log K^\alpha n-\log(j/\alpha \log p)+1)(j/\alpha \log p)-K^\alpha n} \end{aligned}$$

et d'après (1),

$$|b_j|_p \, \rho^j p^{-\rho^\alpha} \leq |||P|||_\alpha \, p^{-\varphi(j)} , \text{ où } \varphi(j) = -(j/\alpha \log p)(\log K^\alpha n-\log(j/\alpha \log p)+1)+K^\alpha n .$$

L'étude de φ montre que $\varphi(j) \geq \varphi(n) = n(K^{\alpha}-(1/\alpha \log p)(\log(\alpha K^{\alpha} \log p) + 1))$.
Il suffit pour réaliser (3) que $\varphi(n) > np^{f}/e(p^{f}-1))$, soit encore :

$$K^{\alpha} - (1/\alpha \log p)(\log(\alpha K^{\alpha} \log p) + 1) > p^{f}/e(p^{f} - 1) ,$$

ce qui est réalisé pour K assez grand.

Démonstration du (ii) du théorème 1. - Dans toute la suite, on suppose $\alpha > \eta$. Les fonctions localement constantes à support compact étant denses dans $\mathcal{C}_{\alpha}$, il suffit d'approcher les fonctions de ce type dans $\mathcal{C}_{\alpha}$ par des polynômes. Nous allons montrer plus généralement qu'une fonction lipschitzienne f à support compact est limite dans $\mathcal{C}_{\alpha}$ d'une suite de polynômes. L'idée de la méthode consiste à approcher f sur le compact $C_n = \{x \in \underset{\sim}{K} ; |x|_p \leq \underset{\sim}{K}n^{1/\alpha}\}$ par son polynôme de meilleure approximation de degré n . Le compact croît "lentement" $(\alpha > \eta)$ si bien qu'on réalise ainsi une approche uniforme sur tout compact de f par des polynômes. La proposition 2 permet alors de contrôler le comportement de ces polynômes à l'extérieur de C_n . Voici les détails : f est lipschitzienne à support dans $\{x \in \underset{\sim}{K} ; |x|_p \leq A\}$, K est la constante de la proposition, n un entier suffisamment grand pour que $Kn^{1/\alpha} > A$, et $x_n \in \underset{\sim}{K}$ tel que

$$|x_n|_p = p^{([e \log_p Kn^{1/\alpha}]+1)/e} .$$

Posons $f_n(x) = f(x_n x)$. f_n est lipschitzienne à support dans l'anneau de valuation de $\underset{\sim}{K}$ et sa constante de Lipschitz est donnée par :

$$\sup_{|x|_p\leq 1, 0<|h|_p\leq 1} |(f_n(x + h) - f_n(x))/h|_p = Mp^{([e \log_p Kn^{1/\alpha}]+1)/e} .$$

si l'on a posé

$$M = \sup_{|x|_p\leq A, 0<|h|_p\leq A} |f(x + h) - f(x))/h|_p .$$

Soit $(Q_j)_{j\geq 0}$ une suite de polynômes qui constitue une base normale de l'espace des fonctions continues sur l'anneau de valuation de $\underset{\sim}{K}$ et à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$ (la suite Q_j est construite à partir d'une suite très bien répartie). On peut écrire $f_n(x) = \sum_{j\geq 0} a_j^{(n)} Q_j(x)$, et nous savons, d'après [2], que

$$\sup_{j\geq 0} |a_j^{(n)}|_p \, p^{[\log j/\log p^{f}]/e} = Mp^{([e \log_p Kn^{1/\alpha}]+1)/e} .$$

Si $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(n)} Q_j(x)$, nous en déduisons que

$$(4) \quad \sup_{x\in\underset{\sim}{K}, |x|_p\leq |x_n|_p} |f(x)-P_n(x_n^{-1} x)|_p \leq Mp^{(1/e)([e \log_p Kn^{1/\alpha}]+1-[(1/f)\log_p(n+1)])}$$

et ceci tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini puisque $\alpha > \eta = ef$. Posons $R_n(x) = P_n(x_n^{-1} x)$. Nous avons

$$\sup_{x\in K, A\leq |x|_p\leq |x_n|_p} |f(x) - R_n(x)|_p = \sup_{x\in K, A\leq |x|_p\leq |x_n|_p} |R_n(x)|_p$$

qui tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$. On utilise la proposition 2 pour en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\underset{\sim}{K},\, |x|_p > Kn^{1/\alpha}} |R_n(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} = 0 \text{ .}$$

Ce dernier résultat et l'inégalité (4) montrent que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\underset{\sim}{K}} |f(x) - R_n(x)|_p \, p^{-|x|_p^\alpha} = 0 \text{ ,}$$

et l'on a prouvé que f est limite dans $\mathcal{C}_\alpha$ d'une suite de polynômes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math., France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[2] HELSMOORTEL (E.). - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, Série A, 1970, p. 546-548.

(Texte reçu le 24 juin 1975)

Michel EMSALEM
99 rue Bobillot
75013 PARIS