Gilles Christol

Prolongements des éléments algébriques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. nº 7, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A6_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 7, 4 p.
13 janvier 1975

PROLONGEMENTS DES ÉLÉMENTS ALGÉBRIQUES

par Gilles CHRISTOL

0. Notations.

$\underset{\sim}{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$, $\mathfrak{A}$ son anneau des entiers, $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{A}$.

Une fonction analytique bornée sur $\mathfrak{M}$ sera notée :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f\langle n\rangle\, x^n ,$$

et nous ferons la convention $f\langle n\rangle = 0$ si n non entier positif ou nul, on a ainsi

$$(xf)\langle n\rangle = f\langle n - 1\rangle \quad \text{et} \quad (df/dx)\langle n\rangle = (n + 1)f\langle n + 1\rangle .$$

Si α appartient au corps des restes $\overline{\underset{\sim}{F}}_p$ de $\underset{\sim}{C}_p$ (c'est-à-dire à la clôture algébrique du corps à p éléments), nous notons encore α le représentant multiplicatif de cet élément dans $\mathfrak{A}$, de telle sorte que $B(\alpha , 1^-)$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{A}$ qui sont égaux à α modulo $\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ désigne l'ensemble des éléments algébriques à coefficients dans $\mathfrak{A}$ (voir [3]), $\mathfrak{H}$ le sous-espace des éléments analytiques sur $\mathfrak{M}$ (à coefficients dans $\mathfrak{A}$).

Nous nous proposons de prolonger à $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ l'application linéaire δ_a $(a \in \mathfrak{A})$, définie sur les fonctions analytiques dans $\mathfrak{A}$ par

$$\langle \delta_a , f\rangle = f(a) = \sum f\langle n\rangle\, a^n .$$

L'intérêt est de trouver des prolongements qui possèdent un maximum de propriétés et qui sont nuls le "moins souvent possible". Le prolongement "à la Krasner" des éléments analytiques répond à ces exigences, la manière dont on peut l'obtenir [2], à partir des coefficients $f\langle n\rangle$, va nous permettre de le généraliser.

Nous dirons qu'une suite d'entiers h tend multiplicativement vers l'infini, si h devient multiple (non nul) de tout nombre fixé, et nous le noterons $h \times\!\!\longrightarrow \infty$.

1. Partie polaire.

LEMME 1. - *Si* f *appartient à* $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, *pour tout* n *entier positif ou négatif et pour tout* α *de* $\overline{F}_p$, *la suite*

$$\sum_{k=1}^{p^h-1} \alpha^k f\langle n + kp^h\rangle = f_\alpha(n , h)$$

converge quand h *tend multiplicativement vers l'infini.*

(Voir [3] pour la démonstration de ce genre de résultat.)

Nous posons

$$f_\alpha\langle n\rangle = \lim_{h\times\to\infty} f_\alpha(n , h) .$$

Si f est un élément analytique, $f_\alpha^+(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_\alpha\langle n\rangle x^n$ n'est autre que la partie singulière du théorème de Mittag-Leffler associée au trou $B(\alpha , 1^-)$. On vérifie de même que, dans ce cas, $f_\alpha^-(x) = \sum_{n=-1}^{-\infty} f_\alpha\langle n\rangle x^n$ est le développement à l'infini de cette même partie singulière, multipliée par $(- x/\alpha)$.

PROPOSITION 2. - Soit L un opérateur différentiel linéaire

$$L = \sum P_i(x)(d/dx)^i ,$$

nous notons $m(L) = \inf[\text{degré } (P_i) - i]$. Si $f_\alpha\langle n\rangle = 0$, pour $- m(L) \leq n < 0$, alors

$$(Lf)_\alpha = L(f_\alpha) .$$

Un calcul élémentaire montre qu'en général $L(f_\alpha)$ et $(Lf)_\alpha$ diffèrent d'un polynôme de degré $m(L) - 1$.

PROPOSITION 3. - Si f est un élément algébrique, il en est de même de f_α^+ et de $f_\alpha^-(1/x)$.

On construit explicitement les automates associés à f_α^+ et f_α^- à partir de celui qui définit f.

2. Prolongements.

LEMME 4. - Si f appartient à $\mathfrak{Q}(\mathfrak{a})$, la limite

$$(f , a , h) = - \lim_{\ell\times\to\infty} \sum_{k=1}^{p^\ell-1} [xf(ax)/(1 - x)]\langle kp^h\rangle$$

existe pour tout a tel que $|a| = 1$, et la fonction

$$(f , a)(x) = \sum_{h=0}^{\infty}(f , a , h)x^h$$

est un élément analytique.

On dira que deux fonctions analytiques sur $B(0 , 1^-)$ sont congrues modulo H si elles diffèrent d'un élément analytique sur $B(0 , 1^+)$.

Si f appartient à $\mathcal{H}$, on vérifie que

$$(f , a)(x) = \frac{(f - f_\alpha)(a)}{1 - x} \text{ modulo H pour } a \in B(\alpha , 1^-)$$

c'est-à-dire que le comportement de (f , a , h), pour h grand, nous donne le prolongement de f au point a, si celui-ci existe $(f_\alpha = 0)$.

PROPOSITION 5. - Si $L_x = \sum P_i(x)(d/dx)^i$ est un opérateur différentiel tel que $m(L) \leq 0$, alors pour tout f de $\mathfrak{Q}(\mathfrak{a})$, on a :

$$(L_x f , a) = L_a(f , a) \text{ mod } H) ;$$

en fait, si $m(L) > 0$, $(L_x f , a) - L_a(f , a)$ est un polynôme en a de degré au plus $m(L) - 1$.

PROPOSITION 6. - On a en outre :

$$(f(x^p) , a) = x(f , a^p) \pmod{H} .$$

A partir des propositions précédentes, on voit qu'on peut construire un prolongement respectant les équations différentielles à partir d'une forme linéaire $\mathfrak{L}$ sur $\mathcal{H}$, nulle sur les fonctions analytiques de $B(0 , 1^+)$ en posant $f(a) = \mathfrak{L}((f , a))$. Pour que ce prolongement respecte le "Frobenius", il faudra en outre que $\mathfrak{L}(xf) = \mathfrak{L}(f)$.

Si f est prolongeable dans une couronne suffisante du disque $B(1 , 1^-)$, on sait [1] que la suite $1/h \sum_{n=h}^{2h-1} f\langle n\rangle$ converge quand h tend multiplicativement vers l'infini, cette application linéaire nous donnera un prolongement respectant le Frobenius, malheureusement elle n'est pas partout définie et pas bornée.

Il semble (voir exemple 1) qu'il est impossible de trouver un prolongement borné (et donc partout défini) qui respecte le Frobenius. Si on ne tient pas à cette dernière propriété, il suffit de prendre

$$\mathfrak{L}(f) = \lim_{h\times\to\infty} f\langle h\rangle ;$$

c'est ce prolongement que nous avons utilisé dans le cas des éléments analytiques [2]. Mais on peut faire d'autre choix, par exemple :

$$\mathfrak{L}(f) = [(1 - x)(f - f_\infty)](1)$$

où le deuxième membre s'entend au sens du prolongement des éléments analytiques : la partie singulière se prolongeant par 0 .

3. Exemples.

Nous utilisons un prolongement borné.

3.1. $e^{\pi x}$ appartient à $\mathfrak{O}(\mathfrak{A})$, et est solution de l'équation différentielle $f' - \pi f = 0$, qui a un $m(L)$ nul. Dans un disque $B(\alpha , 1^-)$, le prolongement devra donc satisfaire à $f(a) = c\, e^{\pi(a-\alpha)}$. Comme $e^{\pi x} = 1 \pmod{\pi}$, on trouve que $c = 1 \pmod{\pi}$.

modulo π^2 , on a

$$e^{\pi x} = 1 + \pi\varphi(x) , \text{ avec } \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{p^n} ;$$

on trouve alors

$$(\varphi , a , h) = \sum_{n=0}^{\ell+h}(a^{p^n} - \alpha^{p^n}) + (\varphi , \alpha , h) \pmod{p} ,$$

ce qui donne

$$\varphi(a) = \varphi(\alpha) + \sum_n (a^{p^n} - \alpha^{p^n}) .$$

En particulier, si on choisi $\mathcal{L}(f) = \lim_{h \to \infty} f\langle h\rangle$, on trouve $\varphi(\alpha) = 0$.

Remarque. - On a $\varphi(x^p) = \varphi(x) - x$, or ici $\varphi(a^p) = \varphi(a) - a + \alpha \pmod p$: notre prolongement ne respecte pas le Frobenius ! Une technique du genre envisagé ne peut donner de résultat : l'équation $\varphi^p - \varphi = 1$ n'ayant pas de solution dans F_p .

3.2. La fonction $F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1/2}{j}^2 x^j$ est l'unique solution bornée dans le disque $B(0 , 1^-)$ de l'équation différentielle :

$$x(1 - x)f'' + (1 - 2x)f' - (1/4)f = 0 ,$$

dont le $m(L)$ est nul. D'autre part, $F(x)$ appartient à $\mathfrak{D}(\mathfrak{a})$ comme carré d'Hadamard d'une fonction algébrique. Son prolongement $F(a)$ est donc solution dans le disque $B(\alpha , 1^-)$ de la même équation. Or dans chacun de ces disques il n'y a qu'une solution bornée au plus. $F(a)$ est donc cette solution à une constante multiplicative près. Il faut vérifier que cette constante n'est pas nulle. DWORK a démontré [4]

$$F(x) = g(x)\ F(x^p) \pmod p \text{ , où } g(x) = \sum_{j=0}^{(p-1)/2} \binom{1/2}{j}^2 x^j$$

c'est-à-dire, en posant $P(x) = g(x)\ g(x^p) \ldots g(x^{p^h})$,

$$F(x) = P(x)\ P(x^{p^h})\ F(x^{p^{2h}}) \pmod p ,$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$F\langle n + mp^h\rangle = P\langle n\rangle\ P\langle m\rangle \quad \text{pour} \quad n \quad \text{et} \quad m < p^h .$$

Il vient alors, pour h assez grand multiplicativement :

$$F(a) = P(a)[P(a^{p^h}) + a^{p^h}\ P(a^{p^h})] \pmod p ,$$

c'est-à-dire que $F(a)$ n'est nul modulo p que si $P(a) = 0 \pmod p$ ou si $P(a^{p^h}) + a^{p^h}\ P(a^{p^h}) = 0 \pmod p$, la première condition correspond au cas $g(\alpha)=0$ ou $g(\alpha^p) = 0$, c'est-à-dire aux points singuliers ou à leur puissance p-ième, car ces points sont dans F_{p^2} . La deuxième correspond au cas $P(\alpha) + \alpha P'(\alpha) = 0$, c'est-à-dire à $g(\alpha) + \alpha g'(\alpha) = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASSOU-NOGUÈS (Pierrette). - Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique, Thèse 3e cycle, math., Univ. Bordeaux-I, 1971.

[2] CHRISTOL (G.). - Eléments analytiques uniformes et multiformes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 15e année, 1973/74, n° 16, 18 p.

[3] CHRISTOL (G.). - Eléments algébriques, Groupe de travail d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 14, 10 p.

[4] DWORK (B.). - p-adic cycles. - Paris, Presses universitaires de France, 1969 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 37, p. 27-115).

(Texte reçu le 7 juillet 1975)

Gilles CHRISTOL
5 allée des Gradins
91350 GRIGNY