Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Daniel Barsky

Prolongement analytique p-adique effectif

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. nº 3, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A3_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 3, 10 p.
4 novembre et 16 décembre 1974

PROLONGEMENT ANALYTIQUE p-ADIQUE EFFECTIF

par Daniel BARSKY

0. Introduction.

Soit $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ une série de Taylor convergeant dans un disque $B(0 , \rho)$ de $\underset{\sim}{C}_p$ (complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$). KRASNER [6] a défini une classe d'ensembles, les quasi connexes, et une famille de fonctions, les éléments analytiques, pour pouvoir effectuer le prolongement analytique de F sur un ensemble plus grand que $B(0 , \rho)$. Mais, jusqu'à maintenant, étant donné un point $a \notin B(0,\rho)$, on ne peut pas savoir, en règle générale, s'il existe un quasi connexe contenant $B(0 , \rho)$ et a , et un élément analytique sur ce quasi connexe coïncidant avec F sur $B(0 , \rho)$ (AMICE [1] et CHRISTOL [3] ont donné des réponses partielles à cette question). Je donne un procédé régulier qui, en un nombre fini d'étapes, permet de savoir si F est prolongeable en a , et de donner sa valeur en ce point. Ce procédé consiste en fait à rendre effectif une forme faible du théorème de Mittag-Löffler ([6] et [7]). On donne ensuite, d'une part, une indication sur l'utilisation de ce procédé de prolongement analytique pour étudier les propriétés du produit de Hadamard de deux éléments analytiques, et d'autre part, une généralisation de ce procédé à certain type d'infra-connexes [7]. On montre enfin, dans le dernier paragraphe, comment les calculs faits dans les paragraphes précédents peuvent être utilisés pour trouver des congruences entre coefficients de séries de Taylor.

1. Notations.

La lettre p désigne un nombre premier, $\underset{\sim}{C}_p$, $\underset{\sim}{Q}_p$, $\underset{\sim}{Z}_p$, $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}$ ont leur signification habituelle. On note $\binom{x}{n}$ le polynôme $(x(x - 1) \ldots (x - n + 1))/n!$ Si $x \in \underset{\sim}{C}_p$ et $\rho \in \underset{\sim}{R}$; $B(x , \rho^-) = \{z \in \underset{\sim}{C}_p ; |x - z| < \rho\}$ on l'appellera le <u>disque ouvert</u> de centre x et de rayon ρ ; $B(x , \rho^+) = \{z \in \underset{\sim}{C}_p ; |x - z| \leq \rho\}$ on l'appellera le <u>disque fermé</u> de centre x et de rayon ρ ;

$$U(x , \rho) = \{z \in \underset{\sim}{C}_p ; |x - z| = \rho\}$$

on l'appellera la <u>couronne</u> de centre x et de rayon ρ . Les valeurs absolues sur $\underset{\sim}{C}_p$, $\underset{\sim}{Q}_p$, $\underset{\sim}{Z}_p$ sont normalisées par $|p| = p^{-1}$. Les lettres grecques désignent des nombres réels. Si F est une application de $\mathcal{C} \subset \underset{\sim}{C}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$, on note

$$\|F\|_{\mathcal{C}} = \sup_{X\in\mathcal{C}} |F(X)| .$$

2. Rappels.

DÉFINITION 1 [6]. - <u>Un sous-ensemble</u> $\mathcal{C}$ <u>de</u> $\underset{\sim}{C}_p$ <u>est quasi connexe si, pour tout point</u> $a \in \mathcal{C}$, <u>l'application de</u> $(\underset{\sim}{C}_p - \mathcal{C}) \cap B(a , \rho)$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{R}_+$ <u>définie par</u>

$y \longrightarrow |y-a|$ a pour image un ensemble de la forme $\{\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n\} \cup [\alpha_n , \rho]$ (où $\{\alpha_1 , \dots , \alpha_n\}$ est l'ensemble fini constitué par $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$ avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ et $[\alpha_n , \rho] = \{x \in \mathbb{R} ; \ \alpha_n \leq x \leq \rho\}$).

Les couronnes $U(a , \alpha_i)$ sont appelées les couronnes exceptionnelles de $\mathcal{C}$ relativement à a .

DÉFINITION 2 [6]. - Un élément analytique $F(X)$ sur le quasi connexe $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}_p$ est la limite uniforme sur $\mathcal{C}$ d'une suite de fractions rationnelles sans pôles dans $\mathcal{C}$.

DÉFINITION 3 ([6] et [7]). - Une fonction analytique sur un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}_p$ est la donnée d'une suite croissante de quasi connexes $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et pour chaque $\mathcal{C}_n$ d'un élément analytique F_n sur $\mathcal{C}_n$, tels que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ et $F_n = F_m$ sur $\mathcal{C}_n \cap \mathcal{C}_m$.

DÉFINITION 4 [7]. - Soit $\mathcal{C}$ un quasi connexe de $\mathbb{C}_p$. La famille $\mathcal{T}$ des trous de $\mathcal{C}$ est l'ensemble des disques T contenus dans $\mathbb{C}_p - \mathcal{C}$ tels que, si D est un disque vérifiant $T \subset D \subset \mathbb{C}_p - \mathcal{C}$, alors $T = D$.

On note $H(\mathcal{C})$ l'ensemble des éléments analytiques sur le quasi connexe $\mathcal{C}$, qui sont nuls à l'infini si $\mathcal{C}$ n'est pas borné. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux sous-ensembles de $\mathbb{C}_p$ tels que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset$. Soient F une fonction analytique sur $\mathcal{C}$, et F' une fonction analytique sur $\mathcal{C}'$. On dit que F' est le prolongement analytique de F à $\mathcal{C}'$ si $F = F'$ sur $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$. On montre [6] que, comme dans le cas complexe, le prolongement est unique si $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est un voisinage.

DÉFINITION 5 ([6] et [7]). - Soit $\mathcal{C}$ un quasi connexe. Un trou intérieur T de $\mathcal{C}$ est, soit un trou réduit à un point, soit un disque ouvert maximal contenu dans un trou de $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{T}^0$ la famille des trous intérieurs de $\mathcal{C}$.

THÉORÈME (A) ([6] et [7]). - Soit $\mathcal{C}$ un quasi connexe de $\mathbb{C}_p$, et soit $F \in H(\mathcal{C})$. Soit $\mathcal{T}^0$ la famille des trous intérieurs de $\mathcal{C}$. A chaque trou intérieur T , on associe un élément analytique $F_T \in H(\mathbb{C}_p - T)$, caractérisé par la propriété : $F - F_T$ se prolonge analytiquement sur T . Alors on a $F = \sum_{T \in \mathcal{T}^0} F_T$, la série du second membre converge uniformément sur $\mathcal{C}$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies et, de plus, $\|F\|_{\mathcal{C}} = \sup_{T \in \mathcal{T}^0} \|F\|_{\mathbb{C}_p - T}$.

Autrement dit $H(\mathcal{C})$ est la somme directe topologique des $H(\mathbb{C}_p - T)$ pour $T \in \mathcal{T}^0$.

THÉORÈME (B) [7]. - Soit $B = B(0 , 1^-)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $F(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ soit un élément analytique sur B est que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ soit presque périodique. C'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - a_{n+T}| \leq \varepsilon$.

On dit que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est <u>purement presque-périodique</u> si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $n_0 = 0$.

THÉORÈME (C) [7]. - <u>Si la série</u> $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ <u>converge dans</u> $B(0, \rho^+)$, <u>c'est-à-dire si</u> $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/\rho$ <u>et si</u> $\lim_{n\to+\infty} |a_n| \rho^n = 0$, <u>alors</u> F <u>n'est pas prolongeable analytiquement au-delà du disque</u> $B(0, \rho^+)$.

THÉORÈME (D) [7]. - <u>Si la série</u> $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ <u>a pour rayon de convergence</u> $\rho = 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, <u>et si</u> $(\log(\rho)/\log(p)) \notin \mathbb{Q}$, <u>alors</u> F <u>n'est pas prolongeable analytiquement au-delà de son disque de convergence</u> $B(0, \rho)$.

THÉORÈME (E) [7]. - <u>Si</u> F <u>est un élément analytique sur un quasi connexe</u> $\mathcal{C} \supset B$, <u>alors</u> F <u>est un élément analytique sur</u> B.

3. Prolongement analytique effectif.

Soit $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in \mathbb{C}_p[[X]]$. On cherche si F est prolongeable analytiquement en dehors du disque de convergence de F. On peut supposer que le disque de convergence de F est $B(0, \rho^-)$ et que $(\log(\rho)/\log(p)) \in \mathbb{Q}$, sinon, d'après les théorèmes (C) et (D), F ne serait pas prolongeable analytiquement au-delà de son disque de convergence. On peut donc supposer que F a pour disque de convergence $B = B(0, 1^-)$. On se propose de résoudre le problème suivant : Soit $b \in \mathbb{C}_p - B$, existe-t-il un quasi connexe $\mathcal{C}$ contenant b et B, et un élément analytique $\tilde{F}$ sur $\mathcal{C}$ tels que $F = \tilde{F}$ sur B.

D'après le théorème (E), si F est prolongeable analytiquement au-delà de B, F est un élément analytique sur B. Donc, d'après le théorème (A), il existe deux éléments analytiques $F_1 \in H(\mathbb{C}_p - U(0, 1))$ et $F_2 \in H(B(0, 1^+))$ tels que $F = F_1 + F_2$ sur B et

$$\|F\|_B = \max(\|F_1\|_{\mathbb{C}_p - U(0,1)}, \|F_2\|_{B(0,1^+)}).$$

En effet, les trous intérieurs de B sont d'une part le trou à l'infini $\mathbb{C}_p - B(0, 1^+)$, d'autre part les disques disjoints $B(a, 1^-)$ où $|a| = 1$. Soit T un trou intérieur de B de la forme $B(a, 1^-)$ avec $|a| = 1$, et soit $F_T \in H(\mathbb{C}_p - T)$. On a alors,

$$F_T(X) = F_a(X) = \sum_{n\geq 1} \ell_{n,a} (X - a)^{-n}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \ell_{n,a} = 0$ et $\sup_{n>0} |\ell_{n,a}| = \|F_T\|_{\mathbb{C}_p - T}$.

LEMME 1. - <u>Soit</u> $F_i(X) = (X - a)^{-i}$, <u>où</u> $i \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ <u>et</u> $a \in U = U(0, 1)$. <u>Posons</u>

$$F_i(X) = \sum_{n\geq 0} a_n(i) X^n \quad \underline{\text{si}} \quad |X| < 1$$

<u>et</u>

$$F_i(X) = \sum_{n\geq 1} a_{-n}(i) X^{-n} \quad \underline{\text{si}} \quad |X| > 1.$$

Soit $\mathfrak{M}$ *le filtre des complémentaires des parties multiplicativement finies* $\mathbb{N}^*$ *,* $\mathfrak{M}$ *est le filtre engendré par les* $n\mathbb{N}^*$ *, où* $n \in \mathbb{N}^*$ *. Soit* σ *l'application de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\{1 , -1\}$ *définie par* $\sigma(n) = 1$ *si* $n \geq 0$ *, et* $\sigma(n) = -1$ *si* $n < 0$ *. On a alors uniformément en* n :

$$a_n(i) = \lim_{m-\times\to+\infty} a_{n+m}(i)\,\sigma(n+m)\,\sigma(n)$$

$$a_{-n}(i) = \lim_{m-\times\to+\infty} a_{-n+m}(i)\,\sigma(-n+m)\,\sigma(-n)$$

$$a_n(i) = \lim_{m-\times\to+\infty} a_{n-m}(i)\,\sigma(n-m)\,\sigma(n)$$

$$a_{-n}(i) = \lim_{m-\times\to+\infty} a_{-n-m}(i)\,\sigma(-n-m)\,\sigma(-n)$$

où la notation $\lim_{m-\times\to+\infty}$ *désigne la limite suivant le filtre* $\mathfrak{M}$.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $h \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|\sigma(n)\,a_n - \sigma(n+kh)\,a_{n+kh}| \leq \varepsilon$. En effet, on a

$$a_n(i) = (-1)^i\, a^{-n-i}\binom{n+i-1}{i-1} \quad \text{et} \quad a_{-n}(i) = a^{n-i}\binom{n-1}{i-1}$$

ou encore

$$a_{-n}(i) = (-1)^i\,\sigma(-n)^{-i+n}\binom{-n+i-1}{i-1}$$

Soit $\varepsilon > 0$, choisissons $h_0 \in \mathbb{N}^*$ de telle sorte que, pour $k \in \mathbb{Z}$, on ait $|1 - a^{kh_0}| \leq \varepsilon$. C'est toujours possible, car le corps résiduel de $\mathbb{C}_p$ est la clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathbb{F}_p$ (corps à p éléments). Choisissons un entier $h_1 > 0$ de telle sorte que

$$\left|\binom{x+kh_0h_1}{i-1} - \binom{x}{i-1}\right| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{Z}_p ,$$

c'est possible car la fonction $x \to \binom{x}{n}$ est une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$, donc uniformément continue, et même lipschitzienne [2]. On a alors, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$|a_{n+kh_0h_1}(i)\,\sigma(n+kh_0h_1) - a_n(i)\,\sigma(n)|$$
$$= \left|(\sigma(n+kh_0h_1))^2(-1)^i\, a^{-n-kh_0h_1-i}\binom{-n-kh_0h_1+i-1}{i-1} - (\sigma(n))^2(-1)^i\, a^{n-i}\binom{-n+i-1}{i-1}\right|$$
$$\leq \max\left\{\left|\binom{-n-kh_0h_1+i-1}{i-1} - \binom{-n+i-1}{i-1}\right| , \left|\binom{-n+i-1}{i-1}\right|\,\left|a^{n-i} - a^{n+kh_0h_1-i}\right|\right\} \leq \varepsilon .$$

LEMME 2. - *Soit* F *un élément analytique sur* $\mathbb{C}_p - U$ *, nul à l'infini. Si*

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \quad \textit{pour} \quad |X| < 1 \quad \textit{et} \quad F(X) = \sum_{n\geq 1} a_{-n} X^{-n} \quad \textit{pour} \quad |X| > 1 ,$$

on a uniformément, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{m-\times\to+\infty} a_{m-n}\,\sigma(m-n) = a_{-n}\,\sigma(-n)$$

$$\lim_{m-\times\to+\infty} a_{m+n}\,\sigma(m+n) = a_n\,\sigma(n)$$

$$\lim_{m-\times\to+\infty} a_{-n-m}\,\sigma(-n-m) = a_{-n}\,\sigma(-n)$$

$$\lim_{m-\times\to+\infty} a_{n-m}\,\sigma(n-m) = a_n\,\sigma(n) .$$

Réciproquement, si deux séries de Taylor,

$$F_1(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \quad \textit{pour} \quad |X| < 1 \quad \textit{et} \quad F_2(X) = \sum_{n\geq 1} a_{-n} X^{-n} \quad \textit{pour} \quad |X| > 1 ,$$

vérifient les conditions ci-dessus, alors il existe un élément analytique F sur $\underset{\sim}{C}_p - U$ tel que $F = F_1$ sur B et $F = F_2$ sur $\underset{\sim}{C}_p - B(0, 1^+)$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe une fraction rationnelle $R_\varepsilon(X)$ n'ayant que des pôles de norme 1 telle que $\|R - F\|_{\underset{\sim}{C}_p - U} \leqslant \varepsilon$. Si

$R_\varepsilon(X) = \sum_{n\geq 0} a_n(\varepsilon)X^n$ pour $|X| < 1$, $R_\varepsilon(X) = \sum_{n\geq 1} a_{-n}(\varepsilon)X^{-n}$ pour $|X| > 1$,

alors, d'après le lemme 1, il existe un entier $h > 0$ tel que, pour tout $t \in \underset{\sim}{Z}$ et pour tout $k \in \underset{\sim}{Z}$, on ait :

$$|\sigma(t)\, a_t(\varepsilon) - \sigma(t+kh)\, a_{t+kh}(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon .$$

Comme on a aussi, pour tout $n \in \underset{\sim}{Z}$, $|a_n - a_n(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$, la première partie du lemme est démontrée.

Réciproquement, si les séries,

$F_1(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ pour $|X| < 1$ et $F_2(X) = \sum_{n\geq 1} a_{-n} X^{-n}$ pour $|X| > 1$,

vérifient les conditions du lemme 2, alors il existe un entier $h > 0$ tel que la fraction rationnelle $R_h(X) = (a_0 + a_1 X + \dots + a_{h-1} X^{h-1})/1 - X^h$ vérifie $\|R_h - F_1\|_B \leqslant \varepsilon$ et $\|R_h - F_2\|_{C_p - B(0,1^+)} \leqslant \varepsilon$ (évident).

LEMME 3. - $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est un élément analytique sur $B(0, 1^+)$ si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

C'est clair

THÉORÈME 1. - Soit $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ un élément analytique sur B, et soit $F = F_1 + F_2$ sa décomposition suivant $H(\underset{\sim}{C}_p - U)$ et $H(B(0, 1^+))$. Si

$F_1(X) = \sum_{n\geq 0} a_n(1)X^n$ pour $|X| < 1$ et $F_1(X) = \sum_{n\geq 1} a_{-n}(1)X^{-n}$ pour $|X| > 1$,

$$F_2(X) = \sum_{n\geq 0} a_n(2)X^n \quad \text{pour} \quad |X| \leqslant 1 ,$$

alors on a :

(i) $\sigma(t)\, a_t(1) = \lim_{m \to +\infty} \sigma(t+m)\, a_{t+m}$ uniformément pour $t \in \underset{\sim}{Z}$,

(ii) $a_n(2) = a_n - a_n(1)$ pour $n \in \underset{\sim}{N}$.

Réciproquement, s'il existe des fonctions,

$$F_1(X) = \sum_{n\geq 0} a_n(1)X^n \quad \text{et} \quad F_2(X) = \sum_{n\geq 0} a_n(2)X^n \quad \text{pour} \quad |X| < 1 ,$$

vérifiant les conditions (i) et (ii) pour $t \in \underset{\sim}{N}$, alors $F_1 \in H(\underset{\sim}{C}_p - U)$, $F_2 \in H(B(0, 1^+))$, $F = F_1 + F_2$ sur B, et

$$\|F\|_B = \sup(\|F_1\|_{\underset{\sim}{C}_p - U}, \|F_2\|_{B(0,1^+)}) .$$

La première partie du théorème découle des lemmes 2 et 3. La deuxième partie provient de ce que la condition (i) pour $t \in \underset{\sim}{N}$ implique que $F_1 \in H(B)$ (théorème (B)). Les conditions (i) et (ii), pour $t \in \underset{\sim}{N}$, impliquent que $\lim_{n\to+\infty} a_n(2) = 0$; en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h \in \underset{\sim}{N}^*$ tel que, pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$ et tout

$n \in \underset{\sim}{N}$,

$$|\sigma(n)\ a_n(1) - \sigma(n + kh)\ a_{n+kh}| \leq \varepsilon \ .$$

Donc, pour $k = 1$, on a $|a_{n+h} - a_n(1)| \leq \varepsilon$ et $|a_{n+h}(1) - a_n(1)| \leq \varepsilon$, donc $|a_n(2)| \leq \varepsilon$ pour $n \geq h$, donc $F_2 \in H(B(0\ ,\ 1^+))$. Comme $F_1 \in H(B)$, la première partie du théorème implique que : La limite suivante existe et est uniforme pour $t \in \underset{\sim}{Z}$:

$$\lim_{m \to +\infty} \sigma(t + m)\ a_{t+m}(1) \ .$$

La condition (i) implique que

$$\lim_{m \to +\infty} \sigma(t + m)\ a_{t+m}(1) = \lim_{m \to +\infty} \sigma(t + m)\ a_{t+m}$$

et donc que $F_1 \in H(\underset{\sim}{C}_p - u)$. Le reste du théorème est évident (théorème (A)).

Soit $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ un élément analytique sur B , et soit $b \notin B$. Peut-on prolonger analytiquement F en b , autrement dit existe-t-il un quasi connexe $\mathcal{C}$ contenant B et b , et un élément analytique $\tilde{F}$ sur $\mathcal{C}$ tel que $F = \tilde{F}$? On sait, [6], que tout quasi connexe est transformé en un quasi connexe par une transformation homographique. Si $X \to h(X)$ est une transformation homographique, elle transforme une suite de fractions rationnelles sans pôles dans le quasi connexe $\mathcal{C}$ convergeant uniformément sur $\mathcal{C}$ en une suite de fractions rationnelles sans pôles dans $h(\mathcal{C})$ convergeant uniformément dans $h(\mathcal{C})$ [6]. Le problème est donc invariant par les transformations homographiques. Par conséquent, en faisant le changement de variable $X \to X/(1 - (X/b))$, on se ramène au cas où $\mathcal{C}$ contient le point à l'infini de $\underset{\sim}{C}_p$ et où b est le point à l'infini de $\underset{\sim}{C}_p$. Donc si F est prolongeable analytiquement à l'infini, il doit nécessairement exister un nombre fini de couronnes $U(0\ ,\ \rho_1)$, $U(0\ ,\ \rho_2)$, ... , $U(0\ ,\ \rho_n)$ avec $1 = \rho_1<\rho_2<\ldots<\rho_n<+\infty$ (B est invariant globalement par le changement de variable) et un nombre fini d'éléments analytiques $F_1 \in H(\underset{\sim}{C}_p - U(0\ ,\ \rho_1))$,

$$F_2 \in H(\underset{\sim}{C}_p - U(0\ ,\ \rho_2)) \ ,\ldots,\ F_n \in H(\underset{\sim}{C}_p - U(0\ ,\ \rho_n)) \ ,$$

$F_{n+1} \in H(\underset{\sim}{C}_p \cup \{\infty\})$, c'est-à-dire que F_{n+1} se réduit à une constante (c'est le théorème (A)). En outre, on a $\tilde{F} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n + F_{n+1}$ sur

$$\mathcal{C} = C_p - \bigcup_{1\leq i\leq n} U(0\ ,\ \rho_i) \ ,$$

$\tilde{F} = F$ sur B et

$$\|\tilde{F}\|_{\mathcal{C}} = \sup(\sup_{1\leq i\leq n}(\|F_i\|_{\underset{\sim}{C}_p - U(0,\rho_i)})\ ,\ \|F_{n+1}\|_{\underset{\sim}{C}_p \cup \{\infty\}}) \ .$$

On obtient F_i par application répétée du théorème 1. La valeur de $\tilde{F}$ à l'infini est donnée par F_{n+1} .

De là la règle pratique pour savoir si F est prolongeable analytiquement au point $b \notin B$. On effectue le changement de variable $Y = X/(1 - (X/b))$. On pose

$$F(Y) = F\left(\frac{Y}{1 + Y/b}\right) = \sum_{n\geq 0} a_n Y^n \ .$$

On vérifie que la limite suivante est uniforme en n : $\lim_{m \to +\infty} a_{n+m} = a_n(1)$.

On pose $F_1(Y) = \sum_{n\geq 0} a_n(1)\ Y^n$, puis on pose $b_n(1) = a_n - a_n(1)$. On calcule $\overline{\lim}\sqrt[n]{|b_n(1)|} = 1/\rho_2$, si $\lim_{n\to+\infty} |b_n(1)|\rho_2^n = 0$ ou si $\frac{\log(\rho_2)}{\log(p)} \notin \underset{\sim}{Q}$, $\tilde{F}$ n'est pas prolongeable analytiquement au-delà de $B(0 , \rho_2^+)$. Sinon, soit $r_1 \in \underset{\sim}{C}_p$ tel que $|r_1| = \rho_1$, posons

$$a_n(2) = r_1^{-n} \lim_{m-x->+\infty} b_{n+m}(1)\ r_1^{n+m}$$

si cette limite existe et est uniforme en n . Si la limite n'existe pas ou n'est pas uniforme en n , $\tilde{F}$ n'est pas prolongeable analytiquement au-delà de $B(0,\rho_2^+)$. Sinon on pose

$$F_2(X) = \sum_{n\geq 0} r_1^n\ a_n(2)\ Y^n , \quad F_2 \in H(\underset{\sim}{C}_p - U(0 , \rho_2)) .$$

On pose $b_n(2) = b_n(1) - r_1^n\ a_n(2)$, puis, par récurrence, on définit des nombres $b_n(i)$, ρ_{i+1} , r_{i+1} et $a_n(i + 1)$ et une fonction F_{i+1} de la manière suivante :

$$b_n(i) = b_n(i - 1) - a_n(i)\ r_i^n , \quad 1/\rho_{i+1} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|b_n(i)|} ,$$

ou bien $(\log(\rho_{i+1})/\log(p)) \notin \underset{\sim}{Q}$ et $\tilde{F}$ n'est pas prolongeable analytiquement au-delà du disque $B(0 , \rho_{i+1}^+)$, ou bien $\lim_{n\to+\infty} |b_n(i)|\rho_{i+1}^n = 0$ et $\tilde{F}$ n'est pas prolongeable analytiquement au-delà du disque $B(0 , \rho_{i+1}^+)$. Sinon soit $r_{i+1} \in \underset{\sim}{C}_p$ tel que $|r_{i+1}| = \rho_{i+1}$, ou bien $r_{i+1}^{-n} \lim_{m-x->+\infty} b_{n+m}(i)\ r_{i+1}^{n+m}$ n'existe pas, ou bien cette limite n'est pas uniforme en n , et alors $\tilde{F}$ n'est pas prolongeable analytiquement au-delà du disque $B(0 , \rho_{i+1}^+)$. Si cette limite existe et est uniforme en n , on pose

$$a_n(i + 1) = r_{i+1}^{-n} \lim_{m-x->+\infty} b_{n+m}(i)\ r_{i+1}^{n+m} ,$$

et

$$F_{i+1}(Y) = \sum_{n\geq 0} r_{i+1}^n\ a_n(i + 1)\ Y^n \quad H(\underset{\sim}{C}_p - U(0 , \rho_{i+1})) .$$

Si $\tilde{F}$ est prolongeable à l'infini la récurrence doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'étapes. Donc il doit exister $k \in \underset{\sim}{N}$ tel que $b_n(k + 1) = 0$ si $n \geq 1$, et $b_0(k + 1)$ est la valeur de $\tilde{F}$ à l'infini, c'est-à-dire la valeur de F au point b .

Les couronnes $U(0 , \rho_i)$ $(1 \leq i \leq k)$ sont appelées les couronnes exceptionnelles de F (relativement à 0). On voit donc que l'on a rendu effectif le théorème (A) (de Mittag-Löffler) pour des quasi connexes du type $\underset{\sim}{C}_p - \bigcup_{1\leq i\leq k} U(0 , \rho_i)$, et que ces quasi connexes sont suffisants pour effectuer le prolongement analytique de F . On tire des considérations précédentes le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - <u>Pour que</u> $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n\ X^n$ $(\overline{\lim}|a_n|^{1/n} = 1)$ <u>soit prolongeable analytiquement au point</u> $b \notin B$, <u>il faut et il suffit que</u>

$$G(Y) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{Y^n}{(1 + Y/b)^n} = \sum_{n\geq 0} b_n\ Y^n$$

<u>soit prolongeable analytiquement à l'infini, et pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on puisse décomposer, pour tout</u> $n \geq 0$, b_n <u>en une somme de</u>

$k+1$ termes (k ne dépend pas de n) :

$$b_n = b_{0,n} + b_{1,n} + \dots + b_{k,n} + b_{k+1,n} ,$$

avec $\overline{\lim}|b_{i,n}|^{1/n} = \rho_i \quad (1 \leq i \leq k)$, où $\log(\rho_i)/\log(p) \in \mathbb{Q}$, $1=\rho_1<\rho_2<\dots<\rho_k<+\infty$, $\overline{\lim}\ \rho_i^n|b_{i,n}| \neq 0$, si $r_i \in \mathbb{C}_p$ avec $|r_i| = \rho_i$, la suite $(b_{i,n}/r_i^n)_{n\geq 0}$ est purement presque-périodique, et $b_{k+1,n} = 0$ si $n \geq 1$.

Remarque 1. - Ce corollaire permet de donner des propriétés du produit de Hadamard de deux éléments analytiques F et G . Rappelons que, si $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et $G(X) = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$, le produit de Hadamard $F \odot G$ de F , et G est défini par $F \odot G(X) = \sum_{n\geq 0} a_n b_n X^n$. Supposons que F et G soient prolongeables analytiquement à l'infini, que $a_n = a_{0,n}+\dots+a_{k,n}+a_{k+1,n}$, $b_n=b_{0,n}+\dots+b_{k',n}+b_{k'+1,n}$. Si $\rho_i \quad (1 \leq i \leq k)$ (resp. $\rho'_i \quad (1 \leq i \leq k')$) désigne les rayons des couronnes exceptionnelles de F (resp. G) relativement à zéro, supposons que l'on ait $\overline{\lim}(|a_{i,n}|.|b_{j,n}|)^{1/n} = 1/\rho_i.\rho'_j$ et $\rho_i\ \rho'_j \neq \rho_{i'}\ \rho'_{j'}$ si $i \neq i'$ ou $j \neq j'$. Alors $F \odot G$ est prolongeable analytiquement à l'infini, et les circonférences exceptionnelles de $F \odot G$ sont $U(0\ ,\ \rho_i\ \rho'_j) \quad (1 \leq i \leq k\ ,\ \ 1 \leq j \leq k')$.

Remarque 2. - On voit que le procédé précédent permet de donner un sens à $F(\infty)$ aussi dans le cas suivant. Il y a une infinité de couronnes exceptionnelles $U(0\ ,\ \rho_i)$, pour chaque ρ_i , on a, avec les notations précédentes,

$$\log(\rho_i)/\log(p) \in \mathbb{Q} , \quad \overline{\lim}\ \rho_i^n|b_{i,n}| \neq 0 ,$$

la suite $(b_{i,n}/r_i^n)_{n\geq 0}$ est purement presque-périodique, en outre si F_i est l'élément analytique sur $\mathbb{C}_p - U(0\ ,\ \rho_i)$ associé à F , on a

$$\lim_{i\to+\infty} \|F_i\|_{\mathbb{C}_p - U(0,\rho_i)} = 0 \quad \text{et} \quad b_n - \sum_{i\geq 1} b_{i,n} = 0 \quad \text{sauf si} \quad n = 0 .$$

Alors, on posera encore $F(\infty) = b_0 - \sum_{i\geq 1} b_{i,n}$. Ceci correspond, par exemple, au cas où F est un élément analytique sur un infra-connexe $\mathcal{C}$ [7] contenant le point à l'infini de $\mathbb{C}_p$ et tel que $\mathcal{C} \cap B(0\ ,\ \rho)$ est quasi connexe pour tout ρ fini.

5. Congruences de coefficients de séries de Taylor.

Les calculs effectués au lemme 1 permettent de donner, dans certains cas, des congruences entre coefficients de série de Taylor ; même si la série de Taylor ne représente pas un élément analytique. Par exemple, soit

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{X^{p^{n!}}}{(1 - X)^{np^{n!}}} ,$$

posons

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \quad \text{pour} \quad |X| < 1 \quad \text{et} \quad F(X) = \sum_{n\geq 0} a_{-n} X^{-n} \quad \text{pour} \quad |X| > 1 .$$

Soit

$$F_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (X^{p^{k!}})/((1 - X)^{kp^{k!}}) .$$

On a

$$F_n(X) - F(X) = X^{p^{(k+1)!}} G_n(X) \quad \text{si} \quad |X| < 1$$

$$\text{et} \quad F_n(X) - F(X) = X^{-(n+1)p^{(n+1)!}} G_n'(X) \quad \text{pour} \quad |X| > 1 \,,$$

où G_n est une fonction analytique bornée sur B , et G_n' une fonction analytique bornée sur $\underset{\sim}{C}_p - B(0\,,\,1^+)$. On pose

$$F_n(X) = \sum_{k\geq 0} a_k(n)X^k \quad \text{pour} \quad |X|<1 \quad \text{et} \quad F_n(X) = \sum_{k\geq 0} a_{-k}(n)X^{-k} \quad \text{pour} \quad |X|>1 \,.$$

De [2] ou [4], on tire facilement que

$$|a_{p^{n(n!)}(p^{n!}-1)-k}(n) + a_{-k}(n)| \leqslant p^{-n(n!)+n!+\ell(n)}$$

(on a posé $\ell(n) = [\log(n)/\log(p)]$), or on a

$$a_{-k}(n) = a_{-k} \quad \text{si} \quad k < (n+1)p^{(n+1)!}$$

et

$$a_{p^{n(n!)}(p^{n!}-1)-k}(n) = a_{p^{n(n!)}(p^{n!}-1)-k} \quad \text{si} \quad k < p^{(n+1)!} - p^{(n!)n} \,.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{p^{n(n!)}(p^{n!}-1)-k} + a_{-k}) = 0$$

(remarquons que la suite $n \longrightarrow p^{n(n!)}(p^{n!} - 1)$ tend multiplicativement vers zéro). En effet,

$$a_{p^{n(n!)}(p^{n!}-1)-k}(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{p^{n(n!)}(p^{n!}-1) - k - p^{j!} + jp^{j!} - 1}{jp^{j!} - 1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{-k - p^{j!} + jp^{j!} - 1}{jp^{j!} - 1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{jp^{j!}-1} \binom{k + p^{j!} - 1}{jp^{j!} - 1} + r_j$$

$$= -a_{-k}(n) + \sum_{j=0}^{n} r_j$$

avec $|r_j| \leqslant p^{-n(n!)+j!+\ell(j)} \leqslant p^{-(n-1)n!+\ell(n)}$ pour $j \leqslant n$. Mais par contre, on montre que l'on a

$$|a_{p^{n(n!)}(p^{n!}-1)+k} - a_k| = 1 \,, \quad \text{si} \quad k = p^{N!} \quad (N > n) \,,$$

donc F n'est pas un élément analytique sur B (théorème (B)). En effet :

$$a_k = \sum_{i\geq 1}\binom{p^{N!} - p^{i!} + ip^{i!} - 1}{ip^{i!} - 1} = 1 + R_N$$

$$a_{p^{n(n!)}(p^{n!}-1)+p^{N!}} = \sum_{i\geq 1}\binom{p^{(n+1)!}-p^{n!}+p^{N!}-p^{i!}+ip^{i!}-1}{ip^{i!} - 1} = R_N'$$

avec $|R_N| < 1$ et $|R_N'| < 1$.

On peut bien entendu construire sur le même modèle des exemples plus compliqués.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels, Acta Arith., Warszawa, t. 20, 1970, p. 353-384.

[2] BARSKY (D.). - Fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local, et polynômes à valeurs entières, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1974, p. 397-411.

[3] CHRISTOL (G.). - Eléments analytiques uniformes et multiformes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 15e année, 1973/74, n° 6, 18 p.

[4] DWORK (B.). - p-adic cycles. - Paris, Presses universitaires de France, 1969 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 37, p. 27-116).

[5] HELSMOORTEL (E.). - Comportement local des fonctions continues sur un compact valué régulier d'un corps local, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, Série A, p. 546-548.

[6] KRASNER (M.). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, "Colloque international du CNRS, 143 : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [1964. Clermont-Ferrand]", p. 97-141. - Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1966.

[7] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués complets ultramétriques, Astérisque 1973, n° 10, p. 109-220.

(Texte reçu le 24 juin 1975)

Daniel BARSKY
36 rue de Penthièvre
75008 PARIS