DIAGRAMMES

J. PENON

Convergence de suites de fonctions tangentiables

Diagrammes, tome S67-68 (2012), p. 249-256

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2012__S67-68__249_0>

DIAGRAMMES , SUPPLEMENT AUX VOLUMES 67 + 68 , 2012, PARIS, pp. 249-256

CONVERGENCE DE SUITES DE FONCTIONS TANGENTIABLES

J. PENON

EDITE PAR L. COPPEY , F. FOLTZ , R. GUITART, C. HENRY , C. LAIR

Convergence de suites de fonctions tangentiables

Jacques Penon

Cet article est dédié à Madame Andrée Ehresmann.

Je suis reconnaissant envers Madame Ehresmann, lors de mes premiers pas dans la recherche, d'avoir su maintenir un climat de confiance dans le séminaire de Charles Ehresmann qu'elle dirigeait avec lui à l'époque, laissant à chacun d'entre nous la possibilité de creuser son sillon en théorie des catégories. Ce climat me convenait tout à fait. Aujourd'hui, je lui suis à nouveau reconnaissant d'avoir cru en notre travail, à Elisabeth et moi-même, et d'en avoir permis une publication rapide.

Introduction

On prolonge les théorèmes classiques de convergence de suites de fonctions différentiables à des fonctions qui sont seulement tangentiables . On s'intéresse ensuite au cadre plus restrictif des fonctions contactables. Mais alors, des problèmes de complétude apparaissent. C'est pourquoi on se contente de fonctions semi-contactables pour obtenir de bons théorèmes de convergence. Enfin les fonctions continûment contactables s'avèrent être un outil suffisamment stable pour permettre encore un bon théorème de convergence.
Bien entendu cet article fait suite aux différents travaux réalisés conjointement avec E. Burroni comme [2], [3] et [6]. On en trouvera aussi exposé l'essentiel, de façon plus condencé dans [7].

1 Le cas des fonctions tangentiables

On se donne des espaces vectoriels normés (= e.v.n) E et E', où E' est complet, et un ouvert U de E. On se donne aussi une suite (f_n) d'applications $U \longrightarrow E'$ et

$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{J}\text{et}((E,0),(E',0))$ une dernière application.

Théorème 1.1 : On suppose que :
1) U est convexe,
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est tangentiable sur U,
3) Il existe $a \in U$ tel que la suite $(f_n(a))$ converge dans E',
4) La suite des tangentielles $(\mathrm{t}f_n)$ converge uniformément vers φ sur U.
Alors, pour tout $x \in U$, la suite $(f_n(x))$ converge dans E' et, si on pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, l'application $f : x \mapsto f(x)$ est tangentiable sur U et $\forall x \in U, \quad \mathrm{t}f_x = \varphi(x)$.
Preuve :
Comme $(\mathrm{t}f_n)$ converge uniformément vers g sur U, il existe une suite (b_n) de nombres positifs telle que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in U \parallel \mathrm{t}f_{nx} - \varphi(x) \parallel \leq b_n$. On en déduit que , pour tout $n, m \in N$, si on pose $f_{nm} = f_n - f_m$, f_{nm} est tangentiable sur U et vérifie $\forall x \in U \ \|\mathrm{t}f_{nmx}\| \leq b_n + b_m$. On applique alors une généralisation du théorème des accroissements finis donnée dans [2], prop.5.8. On obtient :
$\forall x \in U \parallel f_{nm}(x) - f_{nm}(a) \parallel \leq (b_n + b_m) \parallel x - a \parallel$ (car U est convexe). D'où : $\parallel f_n(x) - f_m(x) \parallel = \parallel f_{nm}(x) \parallel \leq \parallel f_{nm}(x) - f_{nm}(a) \parallel + \parallel f_{nm}(a) \parallel \leq$ $(b_n + b_m) \parallel x - a \parallel + \parallel f_n(a) - f_m(a) \parallel$. On en déduit que, pour tout $x \in U$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de E'. Or, comme E' est complet, cette suite converge. On pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Montrons que $f : x \mapsto f(x)$ est tangentiable sur U et que $\forall x \in U \ \mathrm{t}f_x = \varphi(x)$. Fixons $x_0 \in U$ et choisissons $g \in \varphi(x_0)$ ainsi que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathrm{t}f_{x_0}$. Pour chaque $x \in U$ on a les inégalités :
$\parallel f(x) - f(x_o) - g(x - x_0) \parallel \leq \parallel f(x) - f(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0)) \parallel + \parallel f_n(x) - f_n(x_0) - g_n(x - x_0) \parallel + \parallel g_n(x - x_0) - g(x - x_0) \parallel$. Mais $\parallel f(x) - f(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0)) \parallel \leq b_n \parallel x - x_0 \parallel$ (On l'obtient à partir de l'inégalité $\parallel f_{nm}(x) - f_{nm}(x_0) \parallel \leq$ $(b_n + b_m) \parallel x - x_0 \parallel$ en faisant tendre $m \longrightarrow \infty$). Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $0 \leq b_n < \varepsilon/3$. Alors n étant maintenant fixé, on a : $\parallel f(x) - f(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0)) \parallel \leq (\varepsilon/3) \parallel x - x_0 \parallel$. Mais aussi, par définition de la norme sur $\mathbb{J}\text{et}((E,0),(E',0))$, il existe $r_0 > 0$ tel que :
$\parallel x - x_0 \parallel < r_0 \Rightarrow \parallel g_n(x - x_0) - g(x - x_0) \parallel \leq (\varepsilon/3) \parallel x - x_0 \parallel$ (car $\|\mathrm{t}f_{nx} - \varphi(x)\| \leq b_n \leq \varepsilon/3$). Enfin f_n étant tangentiable en x_0, il existe $r_1 > 0$ tel que :
$\forall x \in U \ \ \parallel x - x_0 \parallel < r_1 \Rightarrow \parallel f_n(x) - f_n(x_0) - g_n(x - x_0) \parallel \leq (\varepsilon/3) \parallel x - x_0 \parallel$. Ainsi $\forall x \in U \ \ \parallel x - x_0 \parallel < \inf(r_0, r_1) \Rightarrow \parallel f(x) - f(x_0) - g(x - x_0) \parallel \leq \varepsilon \parallel x - x_0 \parallel$, ce qui nous assure que f est tangentiable en x_0 et que $g \in \mathrm{t}f_{x_0}$ ou encore $\mathrm{t}f_{x_0} = \varphi(x_0)$.

Corollaire 1.2 : On suppose cette fois que :
1) U est connexe,

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est tangentiable sur U,
3) Il existe $a \in U$ tel que la suite $(f_n(a))$ converge dans E',
4) Pour tout $x_0 \in U$, il existe une boule ouverte B de centre x_0 contenue dans U sur laquelle la suite $(\mathrm{t}f_n)$ converge uniformément vers φ.
Alors, pour tout $x \in U$, la suite $(f_n(x))$ converge dans E' et, si on pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ l'application $f : x \mapsto f(x)$ est tangentiable sur U et $\forall x \in U, \quad \mathrm{t}f_x = \varphi(x)$.
<u>Preuve</u> :
On montre que l'ensemble V des $x \in U$ tels que $(f_n(x))$ converge dans E' est une partie ouverte et fermée de U en appliquant le théorème précédent à la suite $(f_n|_B)$.

Remarque 1.3 : Si, dans l'hypothèse du Corollaire 1.2 on impose, à la place du (2) que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \ f_n$ est tangentiellement linéaire (en abrégé TL) sur U (voir [6]) alors, dans la conclusion du Corollaire, l'application f est TL sur U (cela provient du fait que $\Lambda(E, E')$ est une partie fermée de $\mathbb{J}\mathrm{et}((E, 0), (E', 0))$).

2 Le cas semi-contactable

Soit Σ un monoïde gradué et M, M' deux espaces métriques Σ-contractants (voir [3]). Notons Σ-Hom(M, M') l'ensemble des applications Σ-homogènes qui sont semi-lipschitziennes en ω (en abrégé SL_ω).
Pour $h, h' \in \Sigma$-Hom(M, M'), on considère l'application $C : M \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $C(x) = \frac{d(h(x),h'(x))}{d(x,\omega)}$ si $x \neq \omega$ et $C(\omega) = 0$, et on pose $d(h, h') = \sup\{C(x) \mid x \in M\}$.

Remarques 2.1 : 1) d est une distance sur Σ-Hom(M, M').
2) Σ-Contr(M, M') est un sous-espace métrique de Σ-Hom(M, M') (muni de d).
3) Lorsque M' est complet, Σ-Hom(M, M') est lui-même complet.
4) E étant un e.v.n., on le munit de sa structure Σ-contractante canonique (où $\omega = 0$). Alors, pour tout espace Σ-contractant M, l'ensemble Σ-Hom(M, E) a une structure canonique d'e.v.n. où $\forall h \in \Sigma$-Hom$(M, E) \quad \| h \| = d(h, 0)$.

Définition 2.2 : Soient E, E' des e.v.n., $U \subset E$ un ouvert et $f : U \longrightarrow E$ une application. On dit que f est Σ-semi-contactable en $a \in U$ (en abrégé $\Sigma - SCont_a$) si il existe $h \in \Sigma$-Hom(E, E') tel que f est tangente à $A(h)|_U$ en a, où $A(h) : x \mapsto f(a) + h(x - a)$ (ce que l'on note en abrégé $f \asymp_a A(h)|_U$, voir [2]). Un tel h est unique (grâce à la Σ-unicité). On le note alors κf_a (comme dans le cas de la contactibilité en a).

Remarques 2.3 : 1) Lorsque f est $\Sigma - SCont_a$ alors f est LSL_a.

2) Si $f_1, f_2 : U \longrightarrow E'$ sont deux applications $\Sigma - SCont_a$ alors $f_1 + f_2$ est encore $\Sigma - SCont_a$ et $\kappa(f_1 + f_2)_a = \kappa f_{1a} + \kappa f_{2a}$. De même, si $f : U \longrightarrow E'$ est $\Sigma - SCont_a$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est $\Sigma - SCont_a$ et $\kappa(\lambda f)_a = \lambda \kappa f_a$.

Proposition 2.4 : Soient E un e.v.n. , $U \subset E$ un ouvert et $a, b \in U$ tels que $[a, b] \subset U$. Soit aussi $f : U \longrightarrow E'$ une application continue telle que, pour tout $x \in [a, b]$, f est $\Sigma - SCont_x$ et $\| \kappa f_x \| \leq K$ (constante fixée). Alors :

$$\| f(b) - f(a) \| \leq K \| b - a \|$$

<u>Preuve</u> :
On voit que pour tout $\varepsilon > 0$, f est $(K + \varepsilon) - LSL_x$ pour tout $x \in [a, b]$. D'où l'inégalité $\| f(b) - f(a) \| \leq (K + \varepsilon) \| b - a \|$ (en utilisant [2] , prop.1.9). Il suffit ensuite de faire tendre ε vers 0.

Donnons-nous maintenant deux e.v.n. E et E', où E' est complet, et $U \subset E$ un ouvert. Donnons nous aussi une suite (f_n) d'applications $U \longrightarrow E'$.

Théorème 2.5 : On suppose que :
1) U est convexe,
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est Σ-semi-contactable sur U,
3) Il existe $a \in U$ tel que la suite $(f_n(a))$ converge dans E',
4) La suite (κf_n) est uniformément de Cauchy sur U.
Alors, pour tout $x \in U$, la suite $(f_n(x))$ converge dans E' et, si on pose $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, l'application $f : x \mapsto f(x)$ est Σ-semi-contactable sur U et

$$\forall x \in U \quad \kappa f_x = \lim_{n \to \infty} \kappa f_{nx}.$$

<u>Preuve</u> :
La preuve de ce théorème fonctionne comme celle du théorème 1.1 . On utilise seulement la proposition précédente à la place de [2] prop.5.8 , pour montrer que $(f_n(x))$ converge. Ensuite, $x \in U$ étant fixé, comme Σ-Hom(E, E') est complet, on peut définir dans Σ-Hom(E, E') : $h = \lim\limits_{n \to \infty} \kappa f_{nx}$, et montrer, comme au théorème 1.1, que f est $\Sigma - SCont_x$ et que $\kappa f_x = h$.

Corollaire 2.6 : On suppose que :
1) U est connexe,
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est Σ-semi-contactable sur U,
3) Il existe $a \in U$ tel que la suite $(f_n(a))$ converge dans E',
4) Pour tout $x_0 \in U$, il existe une boule ouverte B de centre x_0 contenue dans U

sur laquelle la suite (κf_n) est uniformément de Cauchy.
Alors, pour tout $x \in U$, la suite $(f_n(x))$ converge dans E' et, si on pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, l'application $f : x \mapsto f(x)$ est Σ-semi-contactable sur U et
$\forall x \in U \quad \kappa f_x = \lim_{n\to\infty} \kappa f_{nx}$.

3 Le cas des fonctions continûment contactables

Définition 3.1 : Soient E, E' des e.v.n. , $U \subset E$ un ouvert et $f : U \longrightarrow E'$ une application. On dit que f est Σ-continûment contactable sur U (en abrégé $\Sigma - CC$ sur U) si f est Σ-contactable sur U et si l'application $\kappa f : U \longrightarrow \Sigma\text{-Cont}(E, E')$ est continue.

Proposition 3.2 : Soit $f : U \longrightarrow E'$ une application Σ-semi-contactable sur U et telle que l'application $\kappa f : U \longrightarrow \Sigma\text{-Hom}(E, E')$ soit continue. Alors f est $\Sigma - CC$ sur U.
Preuve :
Fixons $x_0 \in U$. Comme κf est continue en x_0, il existe une boule ouverte B contenue dans U et centrée en x_0 telle que $\forall x \in B \ \ \| \kappa f_x \| \leq \| \kappa f_{x_0} \| + 1$ et donc, grâce à la prop.2.4, f est LL_{x_0}. Mais $A(\kappa f_{x_0})|_U \asymp_{x_0} f$ et donc $A(\kappa f_{x_0})$ est L_{x_0} (voir [3] prop. 1.18) ou encore κf_{x_0} est L_0 . Ainsi $\kappa f_{x_0} \in \Sigma\text{-Cont}(E, E')$.

Théorème 3.3 : Soit (f_n) une suite d'applications $U \longrightarrow E'$. On suppose que :
1) U est connexe.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\Sigma - CC$ sur U,
3) Il existe $a \in U$ tel que la suite $(f_n(a))$ converge dans E',
4) Pour tout $x_0 \in U$, il existe une boule ouverte B de centre x_0 contenue dans U sur laquelle la suite (κf_n) est uniformément de Cauchy.
Alors, pour tout $x \in U$, la suite $(f_n(x))$ converge dans E' et, si on pose
$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, l'application $f : x \mapsto f(x)$ est $\Sigma - CC$ sur U et $\forall x \in U \ \kappa f_x = \lim_{n\to\infty} \kappa f_{nx}$.
Preuve :
On sait déjà, par le Coro. 2.6, que f existe et est Σ-semi-contactable sur U. Alors, comme pour tout x_0, (κf_n) converge uniformément vers κf localement en x_0, $\kappa f : U \longrightarrow \Sigma{-}\mathrm{Hom}(E, E')$ est continue au voisinage de x_0. On applique alors la prop. 3.2 pour conclure.

Références

[1] E.Burroni and J.Penon, *Elements for a metric tangential calculus*, http ://fr.arxiv.org/abs/0912.1012

[2] E.Burroni and J.Penon, *A metric tangential calculus*, TAC 2010 Vol 23 (10)

[3] E.Burroni and J.Penon, *Representation of metric jets*, Cahiers Top.Géo.Diff.Cat Vol LI-3

[4] E.Burroni and J.Penon, *Calcul différentiel revisité à la lumière d'une fonction insolite*, Conférence au SIC à Paris (Oct 2009), http ://people.math.jussieu.fr/ guitart/docpp/ sic24octobre2009paris.pdf

[5] E.Burroni and J.Penon, *Revisiting Differential Calculus in the light of an Uncanny function*, Conférence au CT2010 à Genève (June 2010), http ://ct2010.disi.unige.it/index.php ?page=4

[6] E.Burroni and J.Penon, *Revisiting Differential Calculus in the light of an Uncanny function*, JPAA 4572 .

[7] E.Burroni, *In the heart of representable metric jets* Dans ce même volume des Cahiers Top.Géo.Diff.Cat .
.