DIAGRAMMES

FLORENCE CURY

Graphes multiplicatis enrichis. Partie I

Diagrammes, tome 51-52 (2004), exp. nº 1, p. 1-46

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2004__51-52__A1_0>

DIAGRAMMES VOLUMES 51 + 52 , 2004

GRAPHES MULTIPLICATIS ENRICHIS

PARTIE I

Florence Cury

A.M.S. Sub. Class : 18 D 05 , 18 D 20

«... On ne naît pas femme :
on le devient...»
Simone de Beauvoir

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Madame Andrée Ehresmann et à Monsieur Charles Ehresmann qui ont dirigé ce travail et n'ont jamais hésité à m'accorder, largement, de leur temps.

Qu'il me soit, aussi, permis de remercier Messieurs François Norguet et François Foltz qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir participer au Jury de cette Thèse.

INTRODUCTION.

C. Ehresmann a défini la notion d'esquisse (E.T.S.A.) pour décrire les différents genres de structures algébriques usuelles par des procédés de nature catégorique.
Une telle description consiste en la donnée d'un diagramme (i.e. de "flèches"), de composés de certains couples de flèches consécutives de ce diagramme, d'égalités entre ces composés et de "propriétés universelles" (au sens de la Théorie des Catégories) qui décrivent les axiomes et les données du genre de structure considéré.
On peut, ainsi, construire une esquisse pour le genre "structure de groupe" (resp. pour le genre "structure d'anneau" , le genre "structure de catégorie", ...) et un foncteur de l'esquisse des groupes (resp. des anneaux, des catégories, ...) vers la catégorie des applications entre ensembles, qui "respecte" les propriétés universelles, s'identifie à un groupe (resp. à un anneau, à une catégorie, ...).
Comme, dans la pratique, la définition d'une structure algébrique est donnée de la manière la plus économique possible (i.e. sans axiomes surabondants), l'idée fondamentale de la théorie des esquisses est de respecter cette conception "minimaliste".En ce sens, elle se distingue des autres descriptions, de nature catégorique, des structures algébriques (par exemple, à l'aide de triples ou de "théories" de Lawvere).
C'est pourquoi C. Ehresmann a été amené à affaiblir la notion de catégorie (où tous les couples de flèches consécutives ont un composé) en celle de graphe multiplicatif (où deux flèches consécutives ne sont pas néces-

sairement composables).

Dans le même ordre d'idées, notre but initial était d'appliquer la méthode de C. Ehresmann à la description des structures enrichies dans les catégories enrichies (par exemple, au sens de S. Eilenberg et G. M. Kelly (C.L.C.A.)).
Ainsi, dans le cas des structures 2-algébriques dans une 2-catégorie, il s'agit d'enrichir les diagrammes à utiliser en introduisant des 2-morphismes entre leurs (1-)morphismes (i.e. des $\overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\Downarrow}}$).
Plus généralement, pour conserver l'idée fondamentale de C. Ehresmann, il apparaît nécessaire de développer une théorie préliminaire des graphes multiplicatifs enrichis: c'est l'objet du présent travail.
Ce texte peut être, aussi, considéré (indépendamment des motivations précédentes) comme une théorie formelle autonome généralisant celle des catégories enrichies.Néanmoins, nous n'avons jamais perdu de vue notre objectif initial (et plus lointain), que ce soit dans le choix des propositions et théorèmes énoncés ou dans le choix de certains exemples.En particulier, les théorèmes d'adjonction des Chapitres III et IV (qui permettent, notamment, d'associer une 2-catégorie libre à un 2-graphe multiplicatif) posent les bases théoriques nécessaires au passage futur d'une esquisse enrichie à son type enrichi libre (au même titre qu'une esquisse usuelle engendre un type libre).De même, l'exemple du 2-graphe multiplicatif "esquisse des triples", utilisé à plusieurs reprises, a été choisi (ainsi que son nom!) pour donner un premier exemple simple d'esquisse enrichie (il ne fait que reprendre, d'ailleurs, une idée bien répandue (C.D.S.T.) et (A.M.C.A.), cependant, seul notre contexte lui donne un sens rigoureux).

Dans le Chapitre I, nous donnons les définitions précises de graphe multiplicatif enrichi et de néofoncteur enrichi.On définit ainsi la catégorie des graphes multiplicatifs enrichis (associés à un univers donné) et des foncteurs d'oubli vers les catégories de structures sous-jacentes.On y trouve comme exemples le 2-graphe multiplicatif "esquisse des triples", cité ci-dessus, et la construction du graphe multiplicatif enrichi (par les catégories) des spans d'une catégorie qui n'a pas nécessairement tous les produits fibrés, ce qui interprète et prolonge le point de vue de J. Bénabou (I.N.B.I.).
Le Chapitre II est consacré à l'étude des limites dans la catégorie des graphes multiplicatifs enrichis (associés à un univers donné).Nous y donnons, tout d'abord, une construction explicite des limites projectives (relatives à cet univers) dans cette catégorie.Utilisant, ensuite, une version légèrement raffinée du Théorème d'existence de limites inductives de C. Ehresmann (C.O.S.L.), nous prouvons que la catégorie des graphes multiplicatifs enrichis en question est à limites inductives (relatives à l'univers donné).Par exemple, nous montrons que la somme fibrée (qui existe donc a priori) de l'esquisse de triples et de l'esquisse de paires de foncteurs, au-dessus de l'esquisse d'endofoncteurs, est l'esquisse de paires d'adjoints, comme on pouvait s'y attendre.
Dans le Chapitre III, nous construisons explicitement la catégorie enrichie libre engendrée par un graphe multiplicatif enrichi.On démontre ainsi un premier théorème d'adjonction: le foncteur d'oubli de la catégorie des catégories enrichies (associées à un univers donné) vers la catégorie des graphes multiplicatifs enrichis (associés à cet univers) admet un adjoint, sous des hypothèses simples concernant la catégorie qui sert à enrichir et qui sont toujours vérifiées dans la pratique.
Dans le Chapitre IV, nous étudions le problème du "changement d'enrichis-

sement".Si V et W sont deux catégories qui permettent l'enrichissement (i.e. si elles sont monoïdales), à certains foncteurs $Q: V \longrightarrow W$ (i.e. à de bons foncteurs monoïdaux) on associe des foncteurs d'oubli, admettant des adjoints, de la catégorie des graphes multiplicatifs enrichis (resp. des catégories enrichies) par V vers la catégorie des graphes multiplicatifs enrichis (resp. des catégories enrichies) par W.On démontre ainsi un second théorème d'adjonction, et ce à l'aide du Théorème d'existence de structures libres de C. Ehresmann (C.O.S.L.).

On applique en particulier ce résultat et celui du Chapitre III lorsque V est la catégorie des catégories (ensemblistes) et W celle des graphes multiplicatifs (ensemblistes): tout 2-graphe multiplicatif engendre une 2-catégorie libre, comme nous l'avons déjà signalé.

On s'est efforcé de rendre le texte aussi abordable que possible (malgré d'inévitables passages "techniques"):

- en tête de chaque Chapitre, figure un sommaire résumant ce qui y est traité,
- dans l'énoncé de chaque proposition ou théorème, sont systématiquement données les hypothèses nécessaires à sa démonstration,
- dans le Chapitre 0 sont rappelées les quelques définitions utiles qui permettent de préciser la terminologie employée et de fixer les notations systématiques qui y afférent.

o

o o

CHAPITRE O: TERMINOLOGIE ET NOTATIONS.

0.0. On appelle <u>univers</u> tout ensemble $\mathcal{U}_0$ d'ensembles contenant ((M.M.A.G.) et (T.E.N.S.)):

- avec un ensemble A, toute partie A' de A ainsi que $\mathcal{P}(A)$,
- avec deux ensembles, leur produit cartésien,
- avec une famille d'ensembles indexée par un élément de l'univers, sa réunion,
- l'ensemble des entiers.

Dans ces conditions, on désigne par $\mathcal{U}$ la catégorie pleine d'applications entre les ensembles appartenant à $\mathcal{U}_o$.

0.1. Une structure de graphe orienté (parfois appelée, dans la "littérature", graphe) sur un ensemble A est systématiquement notée $[A] = (A_o ,A,\underline{\alpha}_{[A]},\beta_{[A]})$ (car on ne considérera jamais deux structures de graphes orientés sur le même ensemble), c'est dire que:

- A_o est l'ensemble des objets du graphe orienté $[A]$ (c'est donc une partie de A),
- $\underline{\alpha}_{[A]}$ (resp. $\underline{\beta}_{[A]}$) est l'application "source" (resp. "but") de A vers A_o .

Si $[A]$ est un graphe orienté, si a et a' sont deux objets de $[A]$ (i.e. deux éléments de A_o),l'ensemble de tous les morphismes $z: a \longrightarrow a'$ (i.e. des $z \in A$ tels que $\underline{\alpha}_{[A]}(z) = a$ et $\underline{\beta}_{[A]}(z) = a'$) est noté $\mathrm{Hom}_{[A]}(a',a)$ ou, dans certains cas, $[A](a',a)$.
Si $[A]$ et $[B]$ sont deux graphes orientés, une application orientée (i.e. un homomorphisme) de $[A]$ vers $[B]$ est notée $[F] = ([B],f,[A])$ si $f: A \longrightarrow B$ est son application sous-jacente.
Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, on dit qu'un graphe orienté $[A]$ est relatif à $\mathcal{U}_o$ si, et seulement si, A appartient à $\mathcal{U}_o$.Alors $\Gamma_{\mathcal{U}_o}$ désigne la catégorie pleine d'applications orientées relatives à $\mathcal{U}_o$, i.e. entre graphes orientés relatifs à $\mathcal{U}_o$.De plus, $P_{\Gamma_{\mathcal{U}_o}} : \Gamma_{\mathcal{U}_o} \longrightarrow \mathcal{U}$ désignera le foncteur d'oubli qui,à un $[A]$,associe son ensemble sous-jacent A.
Lorsque le contexte ne présente pas d'ambiguïté, on posera $\Gamma_{\mathcal{U}_o} = \Gamma$ et $P_{\Gamma_{\mathcal{U}_o}} = P_{\Gamma}$ (et $\Gamma_{\mathcal{U}'_o} = \Gamma'$ si $\mathcal{U}'_o$ est un autre univers).

0.2. Une structure de catégorie sur un ensemble A est systématiquement notée $A^{\cdot} = (A^{\cdot}_o,A,\underline{\alpha}_{A^{\cdot}},\underline{\beta}_{A^{\cdot}},k_{A^{\cdot}})$ quand "." est son symbole de composition (et on n'aura jamais à considérer deux structures de catégories différentes sur un même ensemble) et ceci signifie, en particulier, que:

- $A^{\bullet}_{o}$ est l'<u>ensemble de ses objets</u> (on le regardera toujours comme une partie de A, à une identification éventuelle près),

- $\underline{\alpha}_{A^{\bullet}}$ (resp. $\underline{\beta}_{A^{\bullet}}$) est son application <u>source</u> (resp. <u>but</u>) de A vers $A^{\bullet}_{o}$ (et $(A^{\bullet}_{o}, A, \underline{\alpha}_{A^{\bullet}}, \underline{\beta}_{A^{\bullet}})$ est un graphe orienté, dit <u>sous-jacent à</u> $A^{\bullet}$, et noté $[A^{\bullet}]$ ou même $[A]$),

- $A^{\bullet} * A^{\bullet}$ est l'<u>ensemble de ses couples composables</u>, i.e. la partie de $A \times A$ dont les éléments sont les couples (z',z) tels que $\underline{\alpha}_{A^{\bullet}}(z') = \underline{\beta}_{A^{\bullet}}(z)$,

- $k_{A^{\bullet}} : A^{\bullet} * A^{\bullet} \longrightarrow A$ est son application "<u>composition</u>" (et l'on pose, quand cela a un sens, $k_{A^{\bullet}}(z',z) = z'.z$) .

Pour tout couple (a',a) d'objets d'une catégorie $A^{\bullet}$, on pose:

$$\mathrm{Hom}_{[A^{\bullet}]}(a',a) = \mathrm{Hom}_{A^{\bullet}}(a',a) \quad .$$

Si $A^{\bullet}$ et $B^{\bullet}$ sont deux catégories, un <u>foncteur de</u> $A^{\bullet}$ <u>vers</u> $B^{\bullet}$, dont l'<u>application sous-jacente</u> est $f: A \longrightarrow B$, est noté $F^{\bullet} = (B^{\bullet},f,A^{\bullet})$. Pour tout morphisme z de $A^{\bullet}$, nous noterons, indifféremment (selon le degré de précision ou de commodité requis), $f(z) = F^{\bullet}(z)$.

Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, on dit qu'une catégorie $A^{\bullet}$ est <u>relative à</u> $\mathcal{U}_o$ si, et seulement si, A appartient à $\mathcal{U}_o$ (ceci équivaut à dire que le graphe orienté sous-jacent à $A^{\bullet}$ est, aussi, relatif à $\mathcal{U}_o$). Alors $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}_o}$ désigne la catégorie pleine de <u>foncteurs relatifs à</u> $\mathcal{U}_o$, i.e. entre catégories relatives à $\mathcal{U}_o$. De plus, $P_{\mathfrak{F}_{\mathcal{U}_o}} : \mathfrak{F}_{\mathcal{U}_o} \longrightarrow \mathcal{U}$ désignera alors le foncteur d'<u>oubli</u> qui, à $A^{\bullet}$, associe son <u>ensemble sous-jacent</u> A. Comme précédemment, on posera, pour plus de simplicité, $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}_o} = \mathfrak{F}$ et $P_{\mathfrak{F}_{\mathcal{U}_o}} = P_{\mathfrak{F}}$ (et $\mathfrak{F}_{\mathcal{U}'_o} = \mathfrak{F}'$ si $\mathcal{U}'_o$ est un autre univers).

On dit que $\vec{V} = (V^{\bullet},i)$ est une <u>catégorie pointée</u> si, et seulement si, $V^{\bullet}$ est une catégorie et i est un objet de $V^{\bullet}$ (en fait nous n'aurons à considérer que des catégories pointées sous-jacentes à des catégories monoïdales où l'objet "qui pointe" est l'unité du produit tensoriel, voir 0.5).

Si $\mathcal{U}_o$ est un univers et $\vec{V} = (V^{\bullet},i)$ est une catégorie pointée, on dit que $\vec{V}$ est une <u>catégorie pointée au-dessus de</u> $\mathcal{U}_o$ si, et seulement si, pour tout objet a de $\vec{V}$ (i.e. de $V^{\bullet}$) l'ensemble $Hom_{V^{\bullet}}(a,i)$ appartient à $\mathcal{U}_o$. Dans ces conditions, on a donc un foncteur $Hom_{V^{\bullet}}(-,i): V^{\bullet} \longrightarrow \mathcal{U}$. Par exemple, si $1 = \{0\}$, la catégorie pointée $\vec{\mathcal{U}} = (\mathcal{U},1)$ est au-dessus de $\mathcal{U}_o$. De même, si $\mathbb{1}$ est la catégorie n'ayant qu'un seul objet 0 et aucun morphisme <u>non trivial</u> (i.e. qui n'est pas un objet), alors $\vec{\mathcal{J}} = (\mathcal{J},\mathbb{1})$ est une catégorie pointée au-dessus de l'univers $\mathcal{U}_o$.

0.3. Une structure de <u>graphe multiplicatif</u> sur un ensemble A est notée, comme pour une structure de catégorie, $A^{\bullet}=(A_o^{\bullet},A,\alpha_{A^{\bullet}},\beta_{A^{\bullet}},k_{A^{\bullet}})$ et les symboles utilisés y ont le même sens qu'en 0.2 (voir aussi I.3). Il s'agit d'une structure plus faible que celle de catégorie, en ce sens que la loi de composition n'y est pas supposée associative et que, si $z: a \longrightarrow a'$ et $z': a' \longrightarrow a''$ sont deux morphismes "consécutifs" d'un graphe multiplicatif $A^{\bullet}$, ils n'y sont pas nécessairement composables (i.e. le couple (z',z) n'est pas nécessairement élément de $A^{\bullet} * A^{\bullet}$). Sans oublier cette distinction, nous reprendrons donc des notations analogues à celles de 0.2.

En particulier, un <u>néofoncteur</u> d'un graphe multiplicatif $A^{\bullet}$ vers un graphe multiplicatif $B^{\bullet}$, dont l'application sous-jacente est $f: A^{\bullet} \longrightarrow B^{\bullet}$, est encore noté $F^{\bullet} = (B^{\bullet},f,A^{\bullet})$ (voir M.M.A.G.).

De même, si $\mathcal{U}_o$ est un univers, on dit que $A^{\bullet}$ est un <u>graphe multiplicatif relatif à</u> $\mathcal{U}_o$ si, et seulement si, A appartient à $\mathcal{U}_o$. Alors $\mathcal{N}'_{\mathcal{U}_o}$ est la catégorie pleine de <u>néofoncteurs relatifs à</u> $\mathcal{U}_o$ (i.e. entre graphes multiplicatifs relatifs à $\mathcal{U}_o$) et $P_{\mathcal{N}'_{\mathcal{U}_o}} : \mathcal{N}'_{\mathcal{U}_o} \longrightarrow \mathcal{U}$ est le foncteur d'<u>oubli</u>.

On pose aussi, pour simplifier, $\mathcal{N}'_{\mathcal{U}_o} = \mathcal{N}'$ et $P_{\mathcal{N}'_{\mathcal{U}_o}} = P_{\mathcal{N}'}$ (et $\mathcal{N}'_{\mathcal{U}'_o} = \mathcal{N}''$

si $\mathcal{U}'_o$ est un autre univers). Alors, $P_{nf}: \mathfrak{J} \longrightarrow \mathcal{N}'$ (resp. $P'_{nf}: \mathfrak{J}' \longrightarrow \mathcal{N}''$) est le foncteur d'oubli injection canonique qui, à une catégorie $A^{\bullet}$, associe le graphe multiplicatif ... $A^{\bullet}$ (on vérifie aisément que $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{J}'$) est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}'$ (resp. $\mathcal{N}''$), c'est ce qui formalise l'analogie entre ces deux types de structures).

De même, $P_{an}: \mathcal{N}' \longrightarrow \Gamma^{-}$ est le foncteur d'oubli qui, à un graphe multiplicatif, associe son graphe orienté sous-jacent.

0.4. Si $F^{\bullet}: A^{\bullet} \longrightarrow B^{\bullet}$ et $G^{\bullet}: A^{\bullet} \longrightarrow B^{\bullet}$ sont deux foncteurs, une transformation naturelle θ ,de $F^{\bullet}$ vers $G^{\bullet}$, est un triplet : $\theta = (G^{\bullet}, \underline{\theta}, F^{\bullet})$, où $\underline{\theta}$ est son application sous-jacente (i.e. l'application $\underline{\theta}: A^{\bullet}_o \longrightarrow B$ qui, à tout objet a de $A^{\bullet}$, associe un morphisme $\underline{\theta}(a) = \theta(a): F^{\bullet}(a) \longrightarrow G^{\bullet}(a)$ et qui vérifie les conditions de commutation usuelles). On note, alors, $B^{\bullet(A^{\bullet})}$ la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs allant de $A^{\bullet}$ vers $B^{\bullet}$ et "$\boxminus$" sa loi de composition (pour bien la distinguer de la composition "." de $A^{\bullet}$ et $B^{\bullet}$). C'est dire que, si $\theta : F^{\bullet} \Longrightarrow G^{\bullet}$ et $\theta' : F'^{\bullet} \Longrightarrow G'^{\bullet}$ sont deux transformations naturelles, morphismes de $B^{\bullet(A^{\bullet})}$, elles sont composables si, et seulement si, $G^{\bullet} = F'^{\bullet}$ et leur composé est une transformation naturelle

$$\theta' \boxminus \theta \quad : F^{\bullet} \Longrightarrow G'^{\bullet} \quad .$$

Si $F^{\bullet}: A^{\bullet} \longrightarrow B^{\bullet}$ est un foncteur et b un objet de $B^{\bullet}$, on appelle cône projectif (resp. inductif), de base $F^{\bullet}$ et de sommet b, toute transformation naturelle: $\mathrm{Const}(b) \Longrightarrow F^{\bullet}$ (resp. $F^{\bullet} \Longrightarrow \mathrm{Const}(b)$), où $\mathrm{Const}(b): A^{\bullet} \longrightarrow B^{\bullet}$ est le foncteur constant sur l'objet b de $B^{\bullet}$ (i.e. dont l'application sous-jacente est l'application constante sur b). En particulier, une limite projective (resp. inductive) naturalisée (il nous arrivera d'omettre ce qualificatif par commodité) de $F^{\bullet}$ est un cône projectif (resp. inductif) de base $F^{\bullet}$ vérifiant la condition universelle bien connue. Si, de plus, b est son sommet, on dira aussi qu'il s'agit d'une limite projective (resp. inductive) de $F^{\bullet}$.

Si $B^{\bullet}$ est une catégorie et $\mathcal{R}$ un ensemble dont les éléments sont des catégories, nous dirons que $B^{\bullet}$ est une <u>catégorie à $\mathcal{R}$-limites projectives</u> (resp. <u>inductives</u>) si, et seulement si:

- pour tout élément (i.e. toute catégorie) $A^{\bullet}$ appartenant à $\mathcal{R}$, tout foncteur $F^{\bullet}: A^{\bullet} \longrightarrow B^{\bullet}$ admet une limite projective (resp. inductive).

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles et si $B^{\bullet}$ est une catégorie, nous dirons que $B^{\bullet}$ <u>est à $\mathcal{E}$-produits</u> (resp.-<u>sommes</u>) si, et seulement si:

- pour tout élément (i.e. tout ensemble) E de $\mathcal{E}$, tout foncteur $F^{\bullet}: E^{d} \longrightarrow B^{\bullet}$ admet une limite projective (resp. inductive), lorsque E^{d} désigne la structure de <u>catégorie discrète</u> (i.e. "où il n'y a que des objets") sur E.

0.5. Une structure de <u>catégorie monoïdale</u> sur un ensemble V est systématiquement notée $V^{\wedge} = (V^{\bullet}, \boxtimes, i, \Phi, \Psi, \omega)$, c'est dire que:

- $V^{\bullet}$ est une structure de catégorie, dite <u>sous-jacente à</u> $V^{\wedge}$, sur V,
- $\boxtimes: V^{\bullet} \times V^{\bullet} \longrightarrow V^{\bullet}$ est un foncteur (que l'on notera aussi $-\boxtimes-$) appelé <u>produit tensoriel de</u> $V^{\wedge}$,
- i est un objet de $V^{\bullet}$ appelé <u>unité de</u> $V^{\wedge}$ <u>ou de</u> $\boxtimes$,
- $\Phi: Id_{V^{\bullet}} \Longrightarrow -\boxtimes i$ (resp. $\Psi : Id_{V^{\bullet}} \Longrightarrow i\boxtimes-$) est une transformation naturelle inversible (i.e. une <u>équivalence naturelle</u>) dite <u>d'unitarité à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>),
- $\omega: -\boxtimes(-\boxtimes-) \Longrightarrow (-\boxtimes-)\boxtimes-$ est une équivalence dite <u>d'associativité</u>,
- $\Phi(i): i \longrightarrow i\boxtimes i$ est un morphisme de $V^{\bullet}$ égal à $\Psi(i): i \longrightarrow i\boxtimes i$

(nous ne rappellerons pas les autres <u>axiomes de "cohérence"</u> que doivent vérifier les transformations naturelles Φ , Ψ et ω car nous ne les utiliserons pas explicitement dans la suite, on pourra cependant les trouver en (C.L.C.A.)).

0.6. Désignons par $V^{\wedge}$ une catégorie monoïdale.

Une structure de $V^{\wedge}$-catégorie (ou catégorie enrichie par $V^{\wedge}$) est systématiquement notée $A^{\wedge}= (A^{\wedge}_{o},\underline{A}^{\wedge},j_{A^{\wedge}},k_{A^{\wedge}})$, c'est dire que:

- $A^{\wedge}_{o}$ est un ensemble, dit ensemble des objets de $A^{\wedge}$,
- $\underline{A}^{\wedge}$: $A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o} \longrightarrow V^{\bullet}_{o}$ est une application,
- $j_{A^{\wedge}}$: $A^{\wedge}_{o} \longrightarrow V$ est une application qui, à tout objet a de $A^{\wedge}$, associe un morphisme (de $V^{\bullet}$)de la forme:

$$j_{A^{\wedge}}(a): i \longrightarrow \underline{A}^{\wedge}(a,a) \ ,$$

- $k_{A^{\wedge}}$: $A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o} \longrightarrow V$ est une application qui, à tout triplet (a'',a',a) d'objets de $A^{\wedge}$, associe un morphisme (de $V^{\bullet}$) de la forme:

$$k_{A^{\wedge}}(a'',a',a): \underline{A}^{\wedge}(a'',a')\otimes\underline{A}^{\wedge}(a',a) \longrightarrow \underline{A}^{\wedge}(a'',a) \ ,$$

- pour tout couple (a',a) d'objets de $A^{\wedge}$ les deux diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}^{\wedge}(a',a)\otimes i \arrow[rr, "\underline{A}^{\wedge}(a',a)\otimes j_{A^{\wedge}}(a)"] \arrow[dr, "\Phi^{-1}(\underline{A}^{\wedge}(a',a))"'] & & \underline{A}^{\wedge}(a',a)\otimes\underline{A}^{\wedge}(a,a) \arrow[dl, "k_{A^{\wedge}}(a',a,a)"] \\
& \underline{A}^{\wedge}(a',a) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
i\otimes\underline{A}^{\wedge}(a',a) \arrow[rr, "j_{A^{\wedge}}(a')\otimes\underline{A}^{\wedge}(a',a)"] \arrow[dr, "\Psi^{-1}(\underline{A}^{\wedge}(a',a))"'] & & \underline{A}^{\wedge}(a',a')\otimes\underline{A}^{\wedge}(a',a) \arrow[dl, "k_{A^{\wedge}}(a',a',a)"] \\
& \underline{A}^{\wedge}(a',a) &
\end{tikzcd} \quad ,$$

- pour tout quadruplet (a''',a'',a',a) d'objets de $A^{\wedge}$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}^\wedge(a''',a'') \boxtimes \underline{A}^\wedge(a'',a) \arrow[d, "k_{A^\wedge}(a''',a'',a)"'] & & \underline{A}^\wedge(a''',a'')\boxtimes(\underline{A}^\wedge(a'',a')\boxtimes\underline{A}^\wedge(a',a)) \arrow[ll, "\underline{A}^\wedge(a''',a'') \boxtimes k_{A^\wedge}(a'',a',a)"'] \arrow[dd, "\omega(\underline{A}^\wedge(a''',a''),\underline{A}^\wedge(a'',a'),\underline{A}^\wedge(a',a))"] \\
\underline{A}^\wedge(a''',a) & & \\
\underline{A}^\wedge(a''',a') \boxtimes \underline{A}^\wedge(a',a) \arrow[u, "k_{A^\wedge}(a''',a',a)"] & & (\underline{A}^\wedge(a''',a'')\boxtimes\underline{A}^\wedge(a'',a'))\boxtimes\underline{A}^\wedge(a',a) \arrow[ll, "k_{A^\wedge}(a''',a'',a') \boxtimes \underline{A}^\wedge(a',a)"]
\end{tikzcd}$$

Pour justifier très brièvement la terminologie et la notation utilisées, nous rappelons qu'à toute $V^\wedge$-catégorie $A^\wedge$ on peut associer une catégorie $A^\bullet$ (ce qui donne la signification du "A" de $A^\wedge$), dite <u>sous-jacente à</u> $A^\wedge$, pour laquelle, en particulier:

- A est l'ensemble réunion disjointe (i.e. somme) des $\mathrm{Hom}_{V^\bullet}(\underline{A}^\wedge(a',a),i)$, où (a',a) varie dans $A_o^\wedge \times A_o^\wedge$,
- $A_o^\bullet$ est l'ensemble réunion disjointe des $\{j_{A^\wedge}(a)\}$, où a varie dans $A_o^\wedge$ (il est donc isomorphe à $A_o^\wedge$)

(pour une construction complète, le lecteur pourra s'inspirer, par exemple, de la construction plus générale du graphe multiplicatif sous-jacent à un $V^\wedge$-graphe multiplicatif, donnée en I.14).

Si $A^\wedge$ et $B^\wedge$ sont deux $V^\wedge$-catégories, un $V^\wedge$-<u>foncteur de</u> $A^\wedge$ <u>vers</u> $B^\wedge$ est systématiquement noté $F^\wedge = (B^\wedge, (F,\underline{F}^\wedge), A^\wedge)$, c'est dire que:

- $F\colon A^\wedge_o \longrightarrow B^\wedge_o$ est une application,
- $\underline{F}^\wedge\colon A^\wedge_o \times A^\wedge_o \longrightarrow V$ est une application qui, à tout couple (a',a) d'objets de $A^\wedge$, associe un morphisme de la forme:

$$\underline{F}^\wedge(a',a)\colon \underline{A}^\wedge(a',a) \longrightarrow \underline{B}^\wedge(F(a'),F(a)),$$

- pour tout objet a de $A^\wedge$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}^\wedge(a,a) \arrow[rr, "\underline{F}^\wedge(a,a)"] & & \underline{B}^\wedge(F(a),F(a)) \\ & i \arrow[ul, "j_{A^\wedge}(a)"] \arrow[ur, "j_{B^\wedge}(F(a))"'] & \end{tikzcd},$$

- pour tout triplet (a'',a',a) d'objets de $A^\wedge$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}^\wedge(a'',a) \arrow[rr, "\underline{F}^\wedge(a'',a)"] & & \underline{B}^\wedge(F(a''),F(a)) \\ \underline{A}^\wedge(a'',a') \otimes \underline{A}^\wedge(a',a) \arrow[u, "k_{A^\wedge}(a'',a',a)"] \arrow[rr, "\underline{F}^\wedge(a'',a')\otimes\underline{F}^\wedge(a',a)"'] & & \underline{B}^\wedge(F(a''),F(a')) \otimes \underline{B}^\wedge(F(a'),F(a)) \arrow[u, "k_{B^\wedge}(F(a''),F(a'),F(a))"'] \end{tikzcd}$$

Comme plus haut, on sait qu'à tout $V^\wedge$-foncteur $F^\wedge\colon A^\wedge \longrightarrow B^\wedge$ on peut associer un foncteur $F^\bullet\colon A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$, dit <u>sous-jacent à</u> $F^\wedge$, entre les catégories sous-jacentes à $A^\wedge$ et $B^\wedge$ (pour le construire explicitement, on peut s'inspirer, par exemple, de la construction plus générale de I.14).

Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, nous désignons par $V^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}$-fonc la catégorie pleine de $V^{\wedge}$-foncteurs entre $V^{\wedge}$-catégories dont les ensembles d'objets sont éléments de $\mathcal{U}_o$. Si la catégorie pointée $\vec{V} = (V^{\bullet},i)$, <u>sous-jacente à</u> $V^{\wedge}$, est au-dessus de $\mathcal{U}_o$ (et nous dirons alors que $V^{\wedge}$ est une <u>catégorie monoïdale au-dessus de</u> $\mathcal{U}_o$), on en déduit un foncteur d'<u>oubli</u> $V^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}$-fonc $\longrightarrow \mathcal{F}$ qui, à tout objet $A^{\wedge}$, associe sa catégorie sous-jacente $A^{\bullet}$.

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, nous poserons $V^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}$-fonc=$V^{\wedge}$-fonc. En particulier, on vérifie que $\mathcal{U}^{\wedge}$-fonc est une catégorie équivalente à $\mathcal{F}$, lorsque $\mathcal{U}^{\wedge}$ est la structure cartésienne usuelle sur $\mathcal{U}$.

0.7. Soit $\vec{V} = (V^{\bullet},i)$ une catégorie pointée.

Un $\vec{V}$-<u>graphe orienté</u> (ou <u>graphe orienté enrichi par</u> $\vec{V}$) est systématiquement noté $\vec{A} = (\vec{A}_o,\underline{\vec{A}},j_{\vec{A}})$, c'est dire que :

- $\vec{A}_o$ est un ensemble, dit ensemble <u>des objets de</u> $\vec{A}$,
- $\underline{\vec{A}}$: $\vec{A}_o \times \vec{A}_o \longrightarrow V^{\bullet}_o$ est une application,
- $j_{\vec{A}}$: $\vec{A}_o \longrightarrow V$ est une application qui, à tout objet a de $\vec{A}$, associe un morphisme (de $V^{\bullet}$) de la forme:

$$j_{\vec{A}}(a): i \longrightarrow \underline{\vec{A}}(a,a).$$

Une telle notion a été introduite par F. Foltz dans le cas où $\vec{V} = (V^{\bullet},i)$ est la catégorie pointée sous-jacente à une catégorie monoïdale $V^{\wedge}$.

Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons aussi qu'un $\vec{V}$-graphe orienté est un <u>$V^{\wedge}$-graphe orienté.</u>

Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux $\vec{V}$-graphes orientés, une <u>$\vec{V}$-application orientée de</u> $\vec{A}$ vers $\vec{B}$ est notée $\vec{F} = (\vec{B}, (F,\underline{\vec{F}}), \vec{A})$, c'est dire que:

- F: $\vec{A}_o \longrightarrow \vec{B}_o$ est une application,
- $\underline{\vec{F}}$: $\vec{A}_o \times \vec{A}_o \longrightarrow V$ est une application qui, à tout couple (a',a) d'objets de $\vec{A}$, associe un morphisme de la forme:

$$\underline{\vec{F}}(a',a): \underline{\vec{A}}(a',a) \longrightarrow \underline{\vec{B}}(F(a'),F(a)) ,$$

- pour tout objet a de $\vec{A}$, le diagramme ci-dessous est commutatif:

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\vec{A}}(a,a) \arrow[rr, "\underline{\vec{F}}(a,a)"] & & \underline{\vec{B}}(F(a),F(a)) \\
& i \arrow[ul, "j_{\vec{A}}(a)"] \arrow[ur, "j_{\vec{B}}(F(a))"'] &
\end{tikzcd}
$$

Si $\vec{V}$ est sous-jacente à une catégorie monoïdale $V^\wedge$, nous dirons aussi qu'une $\vec{V}$-application orientée est une $V^\wedge$-<u>application orientée</u> (et il s'agit alors des <u>homomorphismes de</u> $V^\wedge$-<u>graphes orientés de</u> (C.O.C.A.)).
Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, nous désignons par $\vec{V}_{\mathcal{U}_o}$-apor la catégorie pleine de $\vec{V}$-applications orientées entre $\vec{V}$-graphes orientés dont l'ensemble d'objets est élément de $\mathcal{U}_o$.Si $\vec{V}$ est sous-jacente à une catégorie monoïdale, nous posons $\vec{V}_{\mathcal{U}_o}$-apor $= V^\wedge_{\mathcal{U}_o}$-apor.Nous poserons, pour plus de simplicité, $\vec{V}_{\mathcal{U}_o}$-apor $= \vec{V}$-apor et $V^\wedge_{\mathcal{U}_o}$-apor $= V^\wedge$-apor (quand $\vec{V}$ est sous-jacente à une $V^\wedge$) lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre.
En particulier, on vérifie que $\mathcal{U}^\wedge$-apor est une catégorie équivalente à la catégorie Γ.

0.8. Soit $F^\bullet: A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ un foncteur.

Un morphisme $z: a \longrightarrow a'$ de $A^\bullet$ est appelé un $F^\bullet$-<u>monomorphisme</u> si, et seulement si:

- $f(z)$ est un monomorphisme de $B^\bullet$,
- pour tout $z': a'' \longrightarrow a'$ dans $A^\bullet$ et tout $\bar{z}'': f(a'') \longrightarrow f(a)$ dans $B^\bullet$ vérifiant $f(z).\bar{z}'' = f(z')$, il existe un unique morphisme $z'': a'' \longrightarrow a$ de $A^\bullet$ tel que $z.z'' = z'$ (on pourra se reporter au diagramme ci-dessous) et $f(z'') = \bar{z}''$ puisque $f(z)$ est un monomorphisme.

Nous dirons, dans ces conditions, que a <u>définit une</u> $F^\bullet$-<u>sous-structure de</u> a'.

Remarquons également qu'un $F^\bullet$-monomorphisme est, en particulier, un monomorphisme.

$$
\begin{tikzcd}
 & a' \\
a'' \arrow[ur, "z'"] \arrow[r, "z''"'] & a \arrow[u, "z"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & f(a') \\
f(a'') \arrow[ur, "f(z')"] \arrow[r, "\overline{z}''"'] & f(a) \arrow[u, "f(z)"']
\end{tikzcd}
$$

$$A^\bullet \xrightarrow[F^\bullet]{} B^\bullet$$

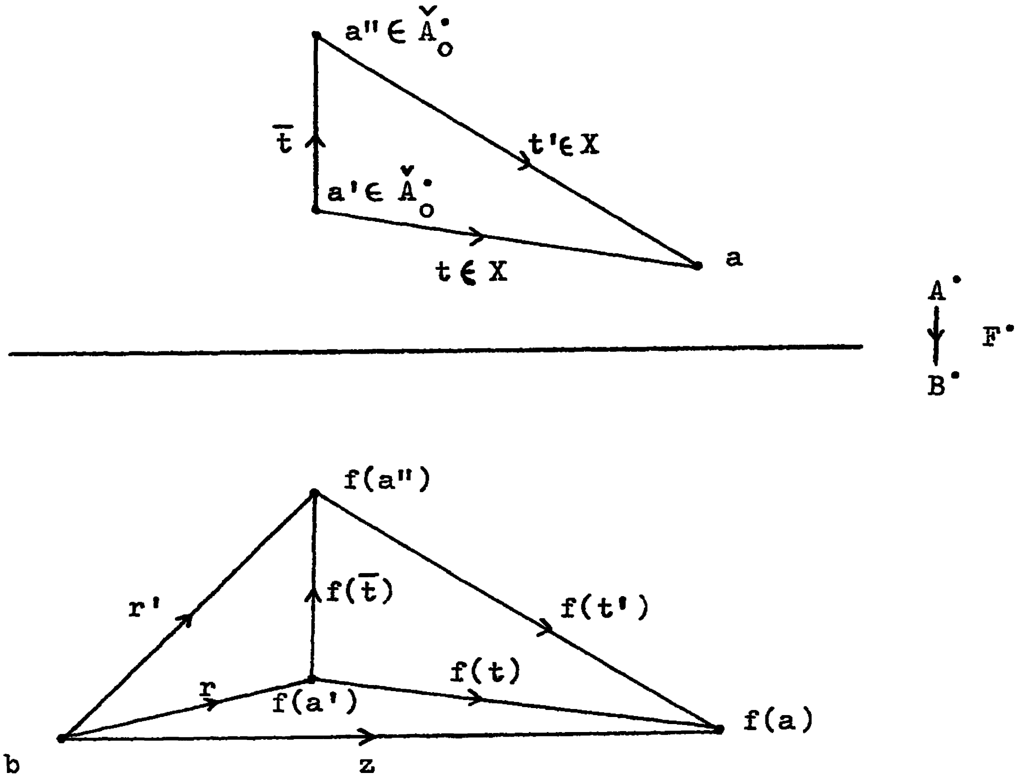
0.9. Soit $F^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ un foncteur, X une partie de A et $\check{A}^\bullet_o$ une partie de $A^\bullet_o$.

Si a est un objet de $A^\bullet$ et $z : b \longrightarrow f(a)$ est un morphisme de $B^\bullet$, nous dirons que le morphisme $t : a' \longrightarrow a$ est un $(X.\check{A}^\bullet_o,F^\bullet)$-morphisme (ou un $(X.\check{A}^\bullet_o,F^\bullet)$-sous-morphisme de a) engendré par z (C.O.S.L.) si, et seulement si:

- a' est élément de $\check{A}^\bullet_o$,
- t est élément de X,
- il existe un morphisme $r : b \longrightarrow f(a')$ dans $B^\bullet$ tel que $z = f(t).r$,
- pour tout triplet (a'',t',r') "analogue" au triplet (a',t,r) (voir le diagramme ci-dessous), il existe un unique morphisme $\overline{t} : a' \longrightarrow a''$ de $A^\bullet$ tel que $t'.\overline{t} = t$ et $f(\overline{t}).r = r'$

(remarquons que cette dernière égalité est automatiquement vérifiée, lorsque la première l'est, si $f(t')$ est un monomorphisme de $B^\bullet$ et donc, en particulier, si X est une classe de $F^\bullet$-monomorphismes).

La notion de sous-morphisme engendré étant, en général, associée à une classe X de monomorphismes de $A^\bullet$ ou de $F^\bullet$-monomorphismes, nous désignerons par Monos($A^\bullet$) l'ensemble des monomorphismes de $A^\bullet$.



0.10. Soit $F^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ un foncteur, X une partie de A, $\check{A}^\bullet_o$ une partie de $A^\bullet_o$ et $\check{B}^\bullet_o$ une partie de $B^\bullet_o$.

Nous dirons que $F^\bullet$ est un <u>foncteur</u> $(\check{B}^\bullet_o, X.\check{A}^\bullet_o)$-<u>engendrant</u> (C.O.S.L.), <u>si</u> et seulement si:

- pour tout objet a de $A^\bullet$ et tout morphisme $z : b \longrightarrow f(a)$ de $B^\bullet$ tel que b soit élément de $\check{B}^\bullet_o$, il existe un $(X.\check{A}^\bullet_o, F^\bullet)$-morphisme engendré par z, au sens de 0.9.

0.11. Soit $A^\bullet$ une catégorie et X une partie de A.

Nous dirons que le morphisme $z : a \longrightarrow a'$ de $A^\bullet$ <u>admet pour</u> X-<u>reflet</u> le morphisme $t : a'' \longrightarrow a'$ de $A^\bullet$ si, et seulement si:

- t est élément de X,

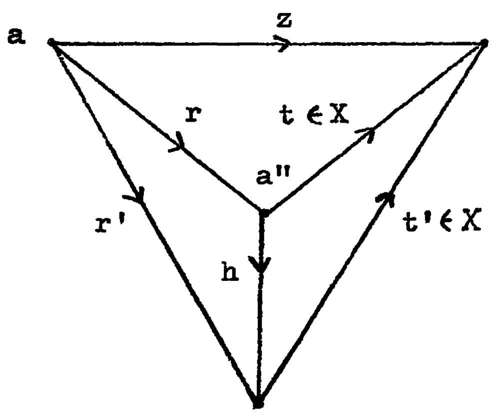
- il existe un morphisme $r: a \longrightarrow a''$ de $A^{\bullet}$ tel que $t.r = z$,
- pour tout couple (t',r') de deux morphismes de $A^{\bullet}$ tels que
  + t' est élément de X,
  + $t'.r' = z$,

il existe un unique morphisme h de $A^{\bullet}$ tel que $t'.h = t$ et $h.r = r'$ (on pourra se reporter au diagramme ci-dessous).

Nous dirons aussi, avec ces notations, que a'' est un X-*reflet de* z.

Au sens de 0.9, on constatera qu'un X-reflet de z est aussi un $(X.A^{\bullet}_{o},Id_{A^{\bullet}})$-morphisme engendré par z.

En général, on prend pour X une partie de $Monos(A^{\bullet})$.Par exemple, si $X = Monos(A^{\bullet})$, un X-reflet de z est une *image de* z, au sens usuel.



0.12. Dans toute la suite on raisonne dans un *bon modèle de la théorie des ensembles avec axiome des univers* (T.E.N.S.).

o

o o

CHAPITRE I: GRAPHES MULTIPLICATIFS ENRICHIS.

I.1. Définition. Si $V^{\wedge} = (V^{\bullet}, \boxtimes, i, \phi, \psi, \omega)$ est une catégorie monoïdale, nous dirons que $A^{\wedge} = (A^{\wedge}_{o}, \underline{A}^{\wedge}, j_{A^{\wedge}}, m_{A^{\wedge}}, k_{A^{\wedge}}, \alpha_{A^{\wedge}}, \beta_{A^{\wedge}})$ est un $V^{\wedge}$-graphe multiplicatif si, et seulement si:

- $(A^{\wedge}_{o}, \underline{A}^{\wedge}, j_{A^{\wedge}})$ est un $V^{\wedge}$-graphe orienté, dit sous-jacent à $A^{\wedge}$,
- $m_{A^{\wedge}}: A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o} \longrightarrow V$ est une application telle que, pour tout $(a'', a', a) \in A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o}$, le morphisme $m_{A^{\wedge}}(a'', a', a)$ est un monomorphisme, dit monomorphisme des composables, de but $\underline{A}^{\wedge}(a'', a') \boxtimes \underline{A}^{\wedge}(a', a)$ et dont la source, notée $\underline{A}^{\wedge}(a'', a') * \underline{A}^{\wedge}(a', a)$, sera appelée l'objet des couples composables de $A^{\wedge}$ relatif à (a'', a', a),
- $k_{A^{\wedge}}: A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o} \longrightarrow V$ est une application où, pour tout $(a'', a', a) \in A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o}$, le morphisme

$$k_{A^\wedge}(a'',a',a) : \underline{A}^\wedge(a'',a') \ast \underline{A}^\wedge(a',a) \longrightarrow \underline{A}^\wedge(a'',a)$$

sera appelé <u>morphisme de composition de</u> $A^\wedge$ <u>relatif à</u> (a'',a',a),

- $\alpha_{A^\wedge} : A^\wedge_o \times A^\wedge_o \longrightarrow V$ est une application pour laquelle, quel que soit $(a',a) \in A^\wedge_o \times A^\wedge_o$, le morphisme

$$\alpha_{A^\wedge}(a',a) : \underline{A}^\wedge(a',a) \boxtimes i \longrightarrow \underline{A}^\wedge(a',a) \ast \underline{A}^\wedge(a,a)$$

sera appelé <u>morphisme d'unitarité à droite de</u> $A^\wedge$ <u>relatif à</u> (a',a),

- $\beta_{A^\wedge} : A^\wedge_o \times A^\wedge_o \longrightarrow V$ est une application pour laquelle, quel que soit $(a',a) \in A^\wedge_o \times A^\wedge_o$, le morphisme

$$\beta_{A^\wedge}(a',a) : i \boxtimes \underline{A}^\wedge(a',a) \longrightarrow \underline{A}^\wedge(a',a') \ast \underline{A}^\wedge(a',a)$$

sera appelé <u>morphisme d'unitarité à gauche de</u> $A^\wedge$ <u>relatif à</u> (a',a),

- (<u>axiome d'unitarité à droite</u>) pour tout $(a',a) \in A^\wedge_o \times A^\wedge_o$ le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{A}^\wedge(a',a) \boxtimes \underline{A}^\wedge(a,a) & \\
\underline{A}^\wedge(a',a) \boxtimes i \arrow[ur, "\underline{A}^\wedge(a',a) \boxtimes j_{A^\wedge}(a)"] \arrow[rr, "\alpha_{A^\wedge}(a',a)"] \arrow[dr, "\phi^{-1}(\underline{A}^\wedge(a',a))"'] & & \underline{A}^\wedge(a',a) \ast \underline{A}^\wedge(a,a) \arrow[ul, "m_{A^\wedge}(a',a,a)"'] \arrow[dl, "k_{A^\wedge}(a',a,a)"] \\
 & \underline{A}^\wedge(a',a) &
\end{tikzcd}$$

,

- (<u>axiome d'unitarité à gauche</u>) pour tout $(a',a) \in A^\wedge_o \times A^\wedge_o$ le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{A}^\wedge(a',a') \boxtimes \underline{A}^\wedge(a',a) & \\
i \boxtimes \underline{A}^\wedge(a',a) \arrow[ur, "j_{A^\wedge}(a') \boxtimes \underline{A}^\wedge(a',a)"] \arrow[rr, "\beta_{A^\wedge}(a',a)"] \arrow[dr, "\psi^{-1}(\underline{A}^\wedge(a',a))"'] & & \underline{A}^\wedge(a',a') \ast \underline{A}^\wedge(a',a) \arrow[ul, "m_{A^\wedge}(a',a',a)"'] \arrow[dl, "k_{A^\wedge}(a',a',a)"] \\
 & \underline{A}^\wedge(a',a) &
\end{tikzcd}$$

(On remarquera que, pour tout $(a',a) \in A^\wedge_o \times A^\wedge_o$, les morphismes $\alpha_{A^\wedge}(a',a)$ et $\beta_{A^\wedge}(a',a)$ sont les seuls rendant commutatifs les deux diagrammes ci-dessus du fait que $m_{A^\wedge}(a',a,a)$ et $m_{A^\wedge}(a',a',a)$ sont des monomorphismes.)

I.2. Le premier exemple (formel) de $V^\wedge$-graphe multiplicatif que nous allons donner est celui ... des $V^\wedge$-catégories.

Supposons que $A^\wedge = (A^\wedge_o\,,\ \underline{A}^\wedge\,,\ j_{A^\wedge},\ k_{A^\wedge})$ soit une $V^\wedge$-catégorie.

Pour tout $(a'',a',a) \in A^\wedge_o \times A^\wedge_o \times A^\wedge_o$, nous posons:

- $\underline{A}^\wedge(a'',a') \times \underline{A}^\wedge(a',a) = \underline{A}^\wedge(a'',a') \boxtimes \underline{A}^\wedge(a',a)$,
- $m_{A^\wedge}(a'',a',a) = \underline{A}^\wedge(a'',a') \boxtimes \underline{A}^\wedge(a',a)$,
- $\alpha_{A^\wedge}(a',a) = \underline{A}^\wedge(a',a) \boxtimes j_{A^\wedge}(a)$,
- $\beta_{A^\wedge}(a',a) = j_{A^\wedge}(a') \boxtimes \underline{A}^\wedge(a',a)$.

Il est alors clair que $(A^\wedge_o,\ \underline{A}^\wedge,\ j_{A^\wedge},\ m_{A^\wedge},\ k_{A^\wedge},\ \alpha_{A^\wedge},\ \beta_{A^\wedge})$ est un $V^\wedge$-graphe multiplicatif dont nous dirons qu'il est <u>associé</u>, ou <u>sous-jacent</u>, <u>à la</u> $V^\wedge$-<u>catégorie</u> $A^\wedge$.

Pour plus de commodité, nous identifierons fréquemment une $V^\wedge$-catégorie à son $V^\wedge$-graphe multiplicatif sous-jacent.

Ainsi, une $V^\wedge$-catégorie $A^\wedge$ est un $V^\wedge$-graphe multiplicatif où:

- pour tout triplet d'objets $(a'',a',a) \in A^\wedge_o \times A^\wedge_o \times A^\wedge_o$, l'objet des couples composables de $A^\wedge$ relatif à (a'',a',a) est le plus grand sous-objet possible de $\underline{A}^\wedge(a'',a') \boxtimes \underline{A}^\wedge(a',a)$ (i.e. lui est égal), alors que, dans un $V^\wedge$-graphe multiplicatif, il peut n'être qu'un sous-objet propre (i.e. non isomorphe),
- la composition est associative.

Ces deux points sont évidemment ceux qui différencient, dans le cas ensembliste, la structure de catégorie de celle de graphe multiplicatif.

I.3. Le deuxième exemple qui s'impose provient du cas ensembliste (ne serait-ce que pour justifier de nouveau la définition de I.1 et la terminologie qui y est adoptée).

Soit $\mathcal{U}_o$ un univers (voir 0.0) et $\mathcal{U}$ la catégorie pleine d'applications entre les éléments de $\mathcal{U}_o$ .Bien entendu, nous munissons alors $\mathcal{U}$ de sa structure cartésienne (donc monoïdale) canonique notée $\mathcal{U}^\wedge$.

Rappelons que $A^\bullet = (A^\bullet_o, A, \underline{\alpha}_{A^\bullet}, \underline{\beta}_{A^\bullet}, k_{A^\bullet})$ est un <u>graphe multiplicatif</u> (<u>relatif à</u> $\mathcal{U}_o$) si, et seulement si:

- A est un ensemble, élément de $\mathcal{U}_o$, dont $A^\bullet_o$ est une partie que l'on appelle l'<u>ensemble des objets de</u> $A^\bullet$,
- $\underline{\alpha}_{A^\bullet} : A \longrightarrow A^\bullet_o$ est une application, appelée <u>application source de</u> $A^\bullet$, vérifiant $\underline{\alpha}_{A^\bullet}(a) = a$ pour tout objet $a \in A^\bullet_o$,
- $\underline{\beta}_{A^\bullet} : A \longrightarrow A^\bullet_o$ est une application, appelée <u>application but de</u> $A^\bullet$, vérifiant $\underline{\beta}_{A^\bullet}(a) = a$ pour tout objet $a \in A^\bullet_o$,
- $k_{A^\bullet}$ est une application de but A et dont la source, notée $A^\bullet * A^\bullet$ et appelée l'<u>ensemble des couples composables de</u> $A^\bullet$, est une partie de $A \times A$,
- si (z',z) est un couple composable de $A^\bullet$ (i.e. est élément de $A^\bullet * A^\bullet$), alors on a nécessairement $\underline{\beta}_{A^\bullet}(z) = \underline{\alpha}_{A^\bullet}(z')$ (la réciproque étant fausse),
- pour tout $z \in A$, le couple $(z, \underline{\alpha}_{A^\bullet}(z))$ est composable (i.e. est élément de $A^\bullet * A^\bullet$) et $k_{A^\bullet}(z, \underline{\alpha}_{A^\bullet}(z)) = z$,
- pour tout $z \in A$, le couple $(\underline{\beta}_{A^\bullet}(z), z)$ est composable (i.e. est élément de $A^\bullet * A^\bullet$) et $k_{A^\bullet}(\underline{\beta}_{A^\bullet}(z), z) = z$.

A un tel graphe multiplicatif (relatif à $\mathcal{U}_o$) nous associons un $\mathcal{U}^\wedge$-graphe multiplicatif $A^\wedge = (A^\wedge_o, \underline{A}^\wedge, j_{A^\wedge}, m_{A^\wedge}, k_{A^\wedge}, \underline{\alpha}_{A^\wedge}, \underline{\beta}_{A^\wedge})$ de la manière suivante:

- $A^\wedge_o = A^\bullet_o$, ce qui signifie que les objets de $A^\wedge$ sont exactement les objets de $A^\bullet$,
- $\underline{A}^\wedge : A^\wedge_o \times A^\wedge_o \longrightarrow \mathcal{U}_o$ est l'application qui, à tout couple (a',a) de deux objets de $A^\wedge$(ou de $A^\bullet$), associe l'ensemble $\underline{A}^\wedge(a',a)$ de tous les morphismes de $A^\bullet$ de source a et de but a', ce qui signifie que $\underline{A}^\wedge(a',a)$ est très exactement l'ensemble $\mathrm{Hom}_{A^\bullet}(a',a)$,
- pour tout objet a de $A^\wedge$ (ou de $A^\bullet$) ,$j_{A^\wedge}(a): 1 \longrightarrow \underline{A}^\wedge(a,a)$ est l'application qui distingue, bien entendu, l'objet a (i.e. telle que $j_{A^\wedge}(a)(0) = a$) et ceci définit bien une application $j_{A^\wedge} : A^\wedge_o \longrightarrow \mathcal{U}$,
- pour tout triplet (a'',a',a) d'objets de $A^\wedge$, l'ensemble

$\underline{A}^\wedge(a'',a') \ast \underline{A}^\wedge(a',a)$ est <u>la partie de $A^\bullet \ast A^\bullet$ dont les éléments sont</u> les couples composables (z',z) de $A^\bullet$ vérifiant

$$\underline{\beta}_{A^\bullet}(z') = a'' \ ; \ \underline{\alpha}_{A^\bullet}(z') = \underline{\beta}_{A^\bullet}(z) = a' \ ; \ \underline{\alpha}_{A^\bullet}(z) = a \ ;$$

il en résulte que $\underline{A}^\wedge(a'',a') \ast \underline{A}^\wedge(a',a)$ est aussi une partie de l'ensemble produit cartésien $\underline{A}^\wedge(a'',a') \times \underline{A}^\wedge(a',a)$,

- pour tout triplet (a'',a',a) d'objets de $A^\wedge$, on désigne alors par $m_{A^\wedge}(a'',a',a) : \underline{A}^\wedge(a'',a') \ast \underline{A}^\wedge(a',a) \hookrightarrow \underline{A}^\wedge(a'',a') \times \underline{A}^\wedge(a',a)$ l'application injection canonique, ce qui définit bien une application

$$m_{A^\wedge} : A^\wedge_o \times A^\wedge_o \times A^\wedge_o \longrightarrow \mathcal{U} \ ,$$

- <u>pour un quelconque triplet (a'',a',a) d'objets de $A^\wedge$, nous désignons</u> par $k_{A^\wedge}(a'',a',a) : \underline{A}^\wedge(a'',a') \ast \underline{A}^\wedge(a',a) \longrightarrow \underline{A}^\wedge(a'',a)$ (composition de $A^\wedge$ relative à (a'',a',a)) la restriction de la composition de $A^\bullet$, $k_{A^\bullet} : A^\bullet \ast A^\bullet \longrightarrow A$, à $\underline{A}^\wedge(a'',a') \ast \underline{A}^\wedge(a',a)$ (partie de $A^\bullet \ast A^\bullet$) et à $\underline{A}^\wedge(a'',a)$ (partie de A), et ceci définit bien une application

$$k_{A^\wedge} : A^\wedge_o \times A^\wedge_o \times A^\wedge_o \longrightarrow \mathcal{U} \ ,$$

- pour tout couple (a',a) d'objets de $A^\wedge$, nous désignons enfin par

$$\underline{\alpha}_{A^\wedge}(a',a) : \underline{A}^\wedge(a',a) \times 1 \longrightarrow \underline{A}^\wedge(a',a) \ast \underline{A}^\wedge(a,a)$$

(resp. $\underline{\beta}_{A^\wedge}(a',a) : 1 \times \underline{A}^\wedge(a',a) \longrightarrow \underline{A}^\wedge(a',a') \ast \underline{A}^\wedge(a',a)$)

l'application qui à tout $(z,0)$ (resp. $(0,z)$),élément de sa source, associe le couple composable (par hypothèse) (z,a) (resp. (a',z)) et ceci définit bien une application $\underline{\alpha}_{A^\wedge} : A^\wedge_o \times A^\wedge_o \longrightarrow \mathcal{U}$ (resp. $\underline{\beta}_{A^\wedge} : A^\wedge_o \times A^\wedge_o \longrightarrow \mathcal{U}$).

Evidemment,si, en particulier, $A^\bullet$ est une catégorie (relative à $\mathcal{U}_o$), le $\mathcal{U}^\wedge$-graphe multiplicatif qui lui est ainsi associé s'identifie (par la méthode de I.2) à la $\mathcal{U}^\wedge$-catégorie qu'une méthode bien connue permet d'associer directement à la catégorie $A^\bullet$.

En toute généralité, nous dirons que le $\mathcal{U}^\wedge$-graphe multiplicatif $A^\wedge$ que nous venons de construire est canoniquement associé au graphe multiplicatif (relatif à $\mathcal{U}_o$) $A^\bullet$.

Nous donnerons en I.14 le moyen de construire un graphe multiplicatif associé à un graphe multiplicatif enrichi, en particulier à un $\mathfrak{U}^\wedge$-graphe multiplicatif.

A l'aide de la notion de néofoncteur enrichi (que nous définissons en I.6), on pourra en déduire que ces constructions sont "réciproques" l'une de l'autre en ce sens que la catégorie des néofoncteurs entre graphes multiplicatifs relatifs à $\mathfrak{U}_o$ est équivalente à celle des $\mathfrak{U}^\wedge$-néofoncteurs entre $\mathfrak{U}^\wedge$-graphes multiplicatifs dont l'ensemble des objets appartient à l'univers $\mathfrak{U}_o$.

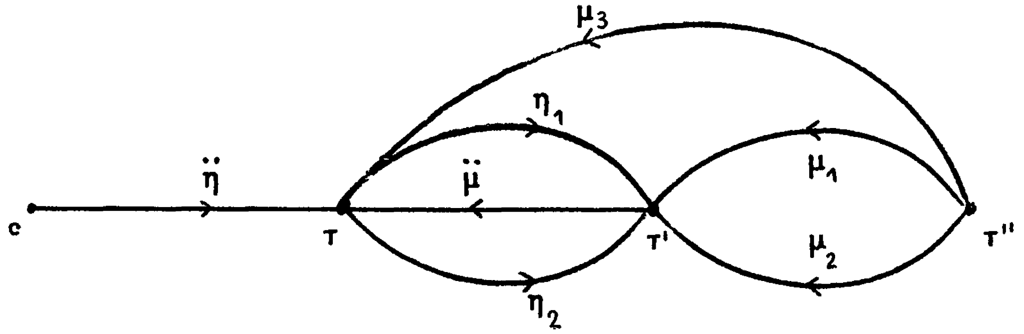
I.4. On pourrait obtenir de nombreux autres exemples en choisissant pour catégorie monoïdale $V^\wedge$ une des nombreuses catégories monoïdales "usuelles" . Signalons, notamment, que, si $\mathcal{N}'^\wedge$ désigne la structure cartésienne (donc monoïdale) de la catégorie $\mathcal{N}'$ pleine de néofoncteurs entre graphes multiplicatifs (ensemblistes) relatifs à un univers donné $\mathfrak{U}_o$, on peut exhiber un $\mathcal{N}'^\wedge$-graphe multiplicatif

$$\mathbf{T}^\wedge = (\mathbf{T}^\wedge_o\ ,\ \underline{\mathbf{T}}^\wedge\ ,\ j_{\mathbf{T}^\wedge},\ m_{\mathbf{T}^\wedge}\ ,\ k_{\mathbf{T}^\wedge},\ \overline{\alpha}_{\mathbf{T}^\wedge},\ \beta_{\mathbf{T}^\wedge})$$

qui contient exactement toutes les informations (et seulement celles-là) nécessaires à la définition d'un triple $(T^\bullet; \eta, \mu)$ sur une catégorie $C^\bullet$ (objet de la catégorie $\mathfrak{F}$ pleine de foncteurs entre catégories relatives à l'univers $\mathfrak{U}_o$).En effet, nous prouverons en I.9 que la donnée d'un triple sur $C^\bullet$ est équivalente à celle d'un $\mathcal{N}'^\wedge$-néofoncteur (notion définie en I.6) de $\mathbf{T}^\wedge$ vers la $\mathcal{N}'^\wedge$-catégorie sous-jacente à la structure de 2-catégorie canonique, notée $\mathfrak{F}^\wedge$, de $\mathfrak{F}$.

Nous définissons $\mathbf{T}^\wedge$ de la manière suivante:

- $\mathbf{T}^\wedge_o = \{c\}$ (l'objet c pourra être regardé comme "représentant" une catégorie),
- le graphe orienté sous-jacent au graphe multiplicatif $\underline{\mathbf{T}}^\wedge(c,c)$ est figuré ci-dessous:



(on pourra regarder ici τ comme étant l'endofoncteur du triple, $\ddot{\eta}$ et $\ddot{\mu}$ comme étant respectivement les transformations naturelles d'unitarité et de multiplication; quant aux équations du triple, elles sont représentées par (i) et (ii) ci-dessous),

- outre les composés triviaux, les seuls composés existant dans le graphe multiplicatif $\mathbf{T}^\wedge(c,c)$ sont définis par les équations:

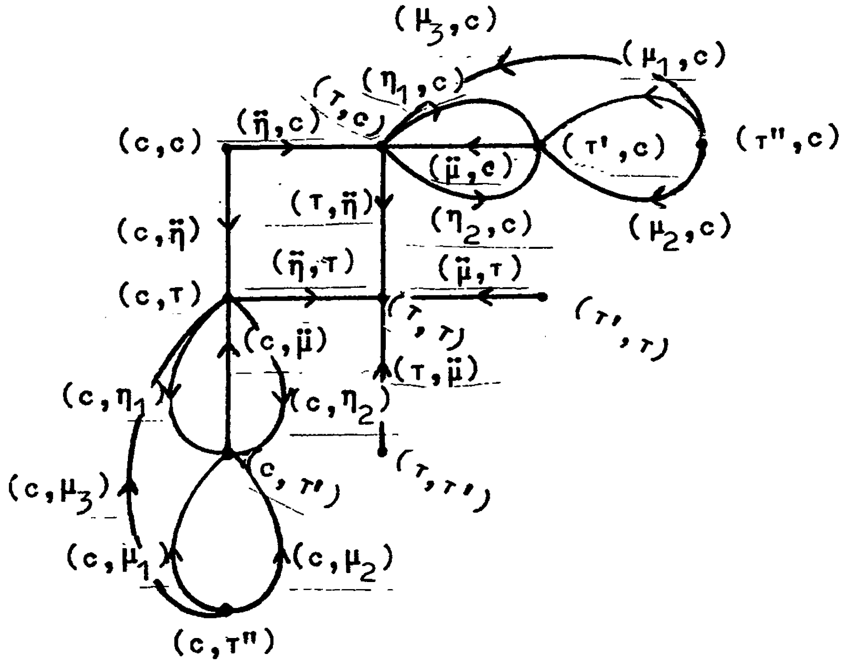
(i). $\ddot{\mu}\cdot\eta_1 = \ddot{\mu}\cdot\eta_2 = \tau$ et $\ddot{\mu}\cdot\mu_1 = \ddot{\mu}\cdot\mu_2 = \mu_3$,

- $j_{\mathbf{T}^\wedge}(c)\colon \mathbb{1} \longrightarrow \mathbf{T}^\wedge(c,c)$ est le néofoncteur qui à 0 associe c,

- le graphe orienté sous-jacent au graphe multiplicatif

$$\mathbf{T}^\wedge(c,c) \times \mathbf{T}^\wedge(c,c)$$

est représenté par le diagramme ci-dessous:



,

- les seuls composés non triviaux de $\mathbf{T}^\wedge(c,c) \times \mathbf{T}^\wedge(c,c)$ sont définis, pour tout (z',z) tel que $z'.z$ est défini dans $\mathbf{T}^\wedge(c,c)$, par les égalités:

$$(z',c)\,.\,(z,c) = (z'.z,\ c\,) \quad\text{et}\quad (c,z')\,.\,(c,z) = (c,z'.z)\ ,$$

- ainsi, $\underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c) \ast \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c)$ apparaît comme un sous-graphe multiplicatif du graphe multiplicatif produit $\underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c) \times \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c)$, nous noterons donc

$$m_{\mathbf{T}^{\wedge}}(c,c,c) \ : \ \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c) \ast \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c) \longrightarrow \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c) \times \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c)$$

le néofoncteur injection canonique,

- nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il existe bien un néofoncteur $k_{\mathbf{T}^{\wedge}}(c,c,c) : \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c) \ast \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c) \longrightarrow \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c)$ dont l'application sous-jacente est définie par:

$$\text{(ii)}\left|\begin{array}{l}
(z,c) \longmapsto z \quad \text{et} \quad (c,z) \longmapsto z, \text{ pour tout } z \in \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c), \\
(\underline{\tilde{T}}, \underline{\tilde{T}}) \longmapsto \underline{\tilde{T}}' , \\
(\bar{T}, \underline{\tilde{T}}') \longmapsto \underline{\tilde{T}}'' \quad \text{et} \quad (\underline{\tilde{T}}', \underline{\tilde{T}}) \longmapsto \tilde{T}'', \\
(\bar{\ddot{\eta}}, \underline{\tilde{T}}) \longmapsto \underline{\eta}_1 \quad \text{et} \quad (\underline{\tilde{T}}, \underline{\ddot{\eta}}) \longmapsto \bar{\ddot{\eta}}_2, \\
(\bar{\ddot{\mu}}, \underline{T}) \longmapsto \bar{\mu}_1 \quad \text{et} \quad (\underline{T}, \underline{\ddot{\mu}}) \longmapsto \underline{\tilde{\mu}}_2,
\end{array}\right.$$

- il est clair que le néofoncteur

$$\underline{\alpha}_{\mathbf{T}^{\wedge}}(c,c) : \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c) \times \mathbf{1} \longrightarrow \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c) \ast \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c)$$

(resp. $\underline{\beta}_{\mathbf{T}^{\wedge}}(c,c) : \mathbf{1} \times \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c) \longrightarrow \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c) \ast \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c)$)

qui associe, pour tout $z \in \underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c)$, le morphisme (z,c) (resp. (c,z)) à $(z,0)$ (resp. $(0,z)$) vérifie l'axiome d'unitarité à droite (resp. à gauche).

Signalons qu'un triple dans une 2-catégorie $D^{\wedge}$(en particulier dans $\mathfrak{J}^{\wedge}$) est regardé, usuellement, comme un 2-foncteur de but $D^{\wedge}$ et de source la 2-catégorie $(\delta^{+}, \delta^{\bullet})$, associée à la catégorie simpliciale, définie, par exemple, en (C.D.S.T.).Cependant, $(\underline{\tilde{\delta}}^{+}, \tilde{\delta}^{\bullet})$ contient des informations surabondantes.C'est pourquoi E. Burroni indique que $(\underline{\tilde{\delta}}^{+}, \underline{\tilde{\delta}}^{\bullet})$ est, en quelque sorte, engendrée par un "graphe multiplicatif double" $(\underline{\tilde{\delta}}'^{+}, \underline{\tilde{\delta}}'^{\bullet})$ (appelé également "<u>esquisse des triples</u>").Or $(\tilde{\delta}'^{+}, \underline{\tilde{\delta}}'^{\bullet})$ s'identifie au $\mathcal{N}'^{\wedge}$-graphe multiplicatif $\mathbf{T}^{\wedge}$ que nous venons de construire.

Au sens des chapitres III et IV, il sera alors clair que $(\underline{\tilde{\delta}}^{+}, \underline{\tilde{\delta}}^{\bullet})$ est une 2-catégorie libre sur le $\mathcal{N}'^{\wedge}$-graphe multiplicatif $\mathbf{T}^{\wedge}$.

(Rappelons à cette occasion que c'est justement pour n'avoir à écrire

que les axiomes et relations nécessaires - et non surabondants - à la description de certaines structures que la théorie des Esquisses a été développée et que l'on étudie maintenant la théorie des graphes multiplicatifs enrichis qui conduira, ultérieurement, à celle des esquisses enrichies.)

I.5. Conservant les notations (et les hypothèses) de I.4, nous allons, pour terminer cette liste non exhaustive d'exemples, munir l'ensemble $S(C^\bullet)$ des spans d'une catégorie $C^\bullet$ relative à $\mathcal{U}_o$, n'ayant pas nécessairement "tous" les produits fibrés (de deux morphismes), d'une structure de $\mathfrak{J}^\wedge$-graphe multiplicatif.

Nous désignons par $S(C^\bullet)^\wedge$ cette structure que nous définissons comme il suit:

- pour tout couple de morphismes de $C^\bullet$ ayant même but et admettant un produit fibré naturalisé, nous choisissons un de ces produits fibrés, que nous appellerons <u>produit fibré canonique</u>, de telle sorte que, pour tout morphisme z de $C^\bullet$, les deux diagrammes ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dr, "z"] & \\
\bullet \arrow[ur, "\alpha_{C^\bullet}(z)"] \arrow[dr, "z"'] & & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur, "\beta_{C^\bullet}(z)"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dr, "\beta_{C^\bullet}(z)"] & \\
\bullet \arrow[ur, "z"] \arrow[dr, "\alpha_{C^\bullet}(z)"'] & & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur, "z"'] &
\end{tikzcd}$$

soient les produits fibrés canoniques de $(z,\beta_{C^\bullet}(z))$ et $(\beta_{C^\bullet}(z),z)$,

- $S(C^\bullet)^\wedge_o = C^\bullet_o$, i.e. les objets de $S(C^\bullet)^\wedge$ sont, comme on pouvait s'y attendre, les objets de $C^\bullet$,
- pour tout couple (c',c) de deux objets de $S(C^\bullet)^\wedge$ (i.e. de $C^\bullet$) <u>$S(C^\bullet)$</u>$^\wedge(c',c)$ est la structure de catégorie usuelle dont les objets sont les spans (z',z) tels que:

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, "z'"'] \arrow[dr, "z"] & \\
c' & & c
\end{tikzcd}$$

et dont les morphismes $((z'_2,z_2),y,(z'_1,z_1)): (z'_1,z_1) \longrightarrow (z'_2,z_2)$ sont tels que le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl, "z'_2"'] \arrow[dr, "z_2"] & \\
c' & & c \\
 & \bullet \arrow[ul, "z'_1"] \arrow[ur, "z_1"'] \arrow[uu, "y"'] &
\end{tikzcd}$$
,

- pour tout objet c de $C^{\bullet}$, le foncteur $j_{\underline{S}(C^{\bullet})^{\wedge}(c)} : \mathbb{1} \longrightarrow \underline{S(C^{\bullet})}^{\wedge}(c,c)$ associe à 0 le span:

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "c"', "="] \arrow[dr, "c", "="'] & \\
c & & c
\end{tikzcd}$$
,

- pour tout triplet (c'',c',c) d'objets de $C^{\bullet}$, la catégorie

$$\underline{S(C^{\bullet})}^{\wedge}(c'',c') \ast \underline{S(C^{\bullet})}^{\wedge}(c',c)$$

est la sous-catégorie pleine de $\underline{S(C^{\bullet})}^{\wedge}(c'',c') \times \underline{S(C^{\bullet})}^{\wedge}(c',c)$ dont les objets sont les couples de spans $((z'_2,z_2),(z'_1,z_1))$ (i.e. les couples de spans "définis" par la figure ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl, "z'_2"'] \arrow[dr, "z_2"] & & \bullet \arrow[dl, "z'_1"'] \arrow[dr, "z_1"] & \\
c'' & & c' & & c
\end{tikzcd}$$
)

pour lesquels le couple (z_2,z'_1) admet un produit fibré dans $C^{\bullet}$;
on désigne alors par $m_{\underline{S}(C^{\bullet})^{\wedge}}(c'',c',c)$ le foncteur injection canonique de cette sous-catégorie pleine dans la catégorie produit

$$\underline{S(C^{\bullet})}^{\wedge}(c'',c') \times \underline{S(C^{\bullet})}^{\wedge}(c',c) \quad ,$$

- pour tout triplet (c'',c',c) d'objets de $C^{\bullet}$, si

$$(\mathring{y}', \mathring{y}) = (((z_2''',z_2''),y',(z_1''',z_1'')) , ((z'_2,z_2),y,(z'_1,z_1)))$$

est le couple de morphismes (entre spans) représenté par le diagramme commutatif ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl, "z_2'''"'] \arrow[dr, "z_2''"] & & \bullet \arrow[dl, "z'_2"'] \arrow[dr, "z_2"] & \\
c'' & & c' & & c \\
 & \bullet \arrow[ul, "z_1'''"] \arrow[ur, "z_1''"'] \arrow[uu, "y'"'] & & \bullet \arrow[ul, "z'_1"] \arrow[ur, "z_1"'] \arrow[uu, "y"'] &
\end{tikzcd}$$
,

nous lui associons les deux produits fibrés canoniques représentés ci-dessous:

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, "p'_2"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
\cdot \arrow[dr, "z''_2"'] & & \cdot \arrow[dl, "z'_2"] \\
 & c' &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & c' & \\
\cdot \arrow[ur, "z''_1"] & & \cdot \arrow[ul, "z'_1"'] \\
 & \cdot \arrow[ul, "p'_1"] \arrow[ur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

et nous désignons par y'' l'unique morphisme de $C^\cdot$ qui rend commutatif le diagramme ci-dessous:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \cdot \arrow[dll, "p'_2"'] \arrow[drr, "p_2"] & & & & \\
 & & \cdot \arrow[dll, "z''{}'_2"'] \arrow[drr, "z''_2"] & & & & \cdot \arrow[dll, "z'_2"'] \arrow[drr, "z_2"] & & \\
c'' & & & & c' & & & & c \\
 & & \cdot \arrow[ull, "z''{}'_1"] \arrow[urr, "z''_1"'] \arrow[uu, "y'"] & & & & \cdot \arrow[ull, "z'_1"] \arrow[urr, "z_1"'] \arrow[uu, "y"'] & & \\
 & & & & \cdot \arrow[ull, "p'_1"] \arrow[urr, "p_1"'] \arrow[uuuu, bend right=30, "y''"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$
,

alors, nous posons:

$k_{S(C^\cdot)^\wedge(c'',c',c)} \left[(\mathring{y}', \mathring{y})\right] = \mathring{y}'' = ((z''{}'_2 . p'_2 \ , \ z_2 . p_2), y'', (z''{}'_1 . p'_1 \ , \ z_1 . p_1))$

et nous laissons le soin au lecteur de vérifier que ceci définit un foncteur (de composition) de la catégorie

$$\underline{S(C^\cdot)}^\wedge(c'',c') \ast \underline{S(C^\cdot)}^\wedge(c',c)$$

vers la catégorie $\underline{S(C^\cdot)}^\wedge(c'',c)$,

- pour tout couple (c',c) d'objets de $C^\cdot$, nous désignons par

$\underline{d}_{S(C^\cdot)^\wedge}(c',c)$: $\underline{S(C^\cdot)}^\wedge(c',c) \times \mathbb{1} \longrightarrow \underline{S(C^\cdot)}^\wedge(c',c) \ast \underline{S(C^\cdot)}^\wedge(c,c)$

(resp.

$\underline{g}_{S(C^\cdot)^\wedge}(c',c)$: $\mathbb{1} \times \underline{S(C^\cdot)}^\wedge(c',c) \longrightarrow \underline{S(C^\cdot)}^\wedge(c',c') \ast \underline{S(C^\cdot)}^\wedge(c',c)$)

le foncteur qui à tout couple $(\mathring{y},0)$ (resp. $(0,\mathring{y})$) associe le couple

$(\overset{\circ}{y}, (c,c))$ (resp. $((c',c'),\overset{\circ}{y})$),

- le lecteur constatera sans difficulté que les axiomes d'unitarité sont vérifiés grâce à l'hypothèse faite sur le choix canonique du produit fibré d'un morphisme de $C^\bullet$ avec son but.

Cette construction est, bien sûr, directement inspirée de celle de la structure de bicatégorie $Sp(C^\bullet)$ sur l'ensemble des spans d'une catégorie $C^\bullet$ à produits fibrés de deux morphismes (de même but), décrite en (I.N.B.I.).Elle est cependant plus générale puisqu'elle est valable pour toute catégorie $C^\bullet$ (sans aucune hypothèse concernant l'existence de produits fibrés).

Ainsi, elle permet, par exemple, de retrouver la notion de catégorie interne à une catégorie $C^\bullet$ qui n'a pas nécessairement tous les produits fibrés.

En effet, on pourra vérifier qu'un $\mathcal{N}'^{\wedge}$-néofoncteur du $\mathcal{N}'^{\wedge}$-graphe multiplicatif $\mathbf{T}^{\wedge}$, construit en I.4 , vers le $\mathcal{N}'^{\wedge}$-graphe multiplicatif sous-jacent au $\mathfrak{Z}^{\wedge}$-graphe multiplicatif $S(C^\bullet)$ s'identifie à une catégorie interne à $C^\bullet$.

On rapprochera ce point de vue de celui de I.4 et on fera le parallèle avec les descriptions de (I.N.B.I.) d'un triple dans une 2-catégorie (morphisme de la bicatégorie $\mathbb{1}$ vers la bicatégorie associée à cette 2-catégorie) et d'une catégorie interne à une catégorie $C^\bullet$, à produits fibrés (morphisme de la bicatégorie $\mathbb{1}$ vers la bicatégorie des spans $Sp(C^\bullet)$).

I.6. Donnons maintenant la définition d'un néofoncteur enrichi.

<u>Définition</u>. Si $V^{\wedge}$ est une catégorie monoïdale et si $A^{\wedge}$ et $B^{\wedge}$ sont deux $V^{\wedge}$-graphes multiplicatifs, nous dirons que $F^{\wedge} = (B^{\wedge},(F,\underline{F}^{\wedge},M_{F^{\wedge}}),A^{\wedge})$ est un $V^{\wedge}$-<u>néofoncteur de source</u> $A^{\wedge}$ <u>et de but</u> $B^{\wedge}$ si, et seulement si:

- $F: A^{\wedge}_{o} \longrightarrow B^{\wedge}_{o}$ est une application (qu'il serait plus logique mais moins agréable et moins commode de noter $F^{\wedge}_{o}$),

- $\underline{F}^{\wedge}: A_o^{\wedge} \times A_o^{\wedge} \longrightarrow V$ est une application qui, à tout couple $(a',a) \in A_o^{\wedge} \times A_o^{\wedge}$, associe un morphisme (de $V^{\cdot}$)

$$\underline{F}^{\wedge}(a',a): \underline{A}^{\wedge}(a',a) \longrightarrow \underline{B}^{\wedge}(F(a'),F(a)) \quad ,$$

- $M_{F^{\wedge}} : A_o^{\wedge} \times A_o^{\wedge} \times A_o^{\wedge} \longrightarrow V$ est une application qui, à tout $(a'',a',a) \in A_o^{\wedge} \times A_o^{\wedge} \times A_o^{\wedge}$, associe le morphisme (de $V^{\cdot}$)

$M_{F^{\wedge}}(a'',a',a): \underline{A}^{\wedge}(a'',a') * \underline{A}^{\wedge}(a',a) \longrightarrow \underline{B}^{\wedge}(F(a''),F(a')) * \underline{B}^{\wedge}(F(a'),F(a))$,

- (<u>compatibilité avec les morphismes d'unitarité</u>) pour tout $a \in A_o^{\wedge}$ le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
 & i \arrow[dl, "j_{A^{\wedge}}(a)"'] \arrow[dr, "j_{B^{\wedge}}(F(a))"] & \\
\underline{A}^{\wedge}(a,a) \arrow[rr, "\underline{F}^{\wedge}(a,a)"'] & & \underline{B}^{\wedge}(F(a),F(a))
\end{tikzcd} \quad ,$$

- (<u>compatibilité avec les monomorphismes des composables</u>) pour tout $(a'',a',a) \in A_o^{\wedge} \times A_o^{\wedge} \times A_o^{\wedge}$, le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}^{\wedge}(a'',a') \boxtimes \underline{A}^{\wedge}(a',a) \arrow[r, "\underline{F}^{\wedge}(a'',a') \boxtimes \underline{F}^{\wedge}(a',a)"] & \underline{B}^{\wedge}(F(a''),F(a')) \boxtimes \underline{B}^{\wedge}(F(a'),F(a)) \\
\underline{A}^{\wedge}(a'',a') * \underline{A}^{\wedge}(a',a) \arrow[u, "m_{A^{\wedge}}(a'',a',a)"] \arrow[r, "M_{F^{\wedge}}(a'',a',a)"'] & \underline{B}^{\wedge}(F(a''),F(a')) * \underline{B}^{\wedge}(F(a'),F(a)) \arrow[u, "m_{B^{\wedge}}(F(a''),F(a'),F(a))"']
\end{tikzcd} \quad ,$$

- (<u>compatibilité avec les compositions</u>) pour tout triplet $(a'',a',a) \in A_o^{\wedge} \times A_o^{\wedge} \times A_o^{\wedge}$ le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}^{\wedge}(a'',a) \arrow[r, "\underline{F}^{\wedge}(a'',a)"] & \underline{B}^{\wedge}(F(a''),F(a)) \\
\underline{A}^{\wedge}(a'',a') * \underline{A}^{\wedge}(a',a) \arrow[u, "k_{A^{\wedge}}(a'',a',a)"] \arrow[r, "M_{F^{\wedge}}(a'',a',a)"'] & \underline{B}^{\wedge}(F(a''),F(a')) * \underline{B}^{\wedge}(F(a'),F(a)) \arrow[u, "k_{B^{\wedge}}(F(a''),F(a'),F(a))"']
\end{tikzcd} \quad .$$

(On remarquera que, pour tout (a'',a',a), le morphisme $M_{F^\wedge}(a'',a',a)$ est le seul rendant commutatif le deuxième diagramme ci-dessus, du fait que $m_{B^\wedge}(F(a''),F(a'),F(a))$ est un monomorphisme. Ainsi, deux $V^\wedge$-néofoncteurs $F^\wedge$ et $F'^\wedge$, de $A^\wedge$ vers $B^\wedge$, sont égaux si, et seulement si:

- $F = F'$ (égalité des applications entre les ensembles d'objets),
- $\underline{F}^\wedge = \underline{F}'^\wedge$ (égalités des morphismes entre les objets "Hom à valeurs dans $V^\wedge$ ").)

Si $F^\wedge : A^\wedge \longrightarrow B^\wedge$ et $G^\wedge : B^\wedge \longrightarrow C^\wedge$ sont deux $V^\wedge$-néofoncteurs, leur <u>composé</u> $H^\wedge = G^\wedge . F^\wedge$ est le $V^\wedge$-néofoncteur défini, bien entendu, par les diagrammes commutatifs qui suivent:

-

$$\begin{tikzcd}
A_o^\wedge \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "F"'] & & C_o^\wedge \\
& B_o^\wedge \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

,

- pour tout $(a',a) \in A_o^\wedge \times A_o^\wedge$,

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}^\wedge(a',a) \arrow[rr, "\underline{H}^\wedge(a',a)"] \arrow[dr, "\underline{F}^\wedge(a',a)"'] & & \underline{C}^\wedge(G.F(a'),G.F(a)) \\
& \underline{B}^\wedge(F(a'),F(a)) \arrow[ur, "\underline{G}^\wedge(F(a'),F(a))"'] &
\end{tikzcd}$$

,

- pour tout $(a'',a',a) \in A_o^\wedge \times A_o^\wedge \times A_o^\wedge$,

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}^\wedge(a'',a') \ast \underline{A}^\wedge(a',a) \arrow[rr, "M_{H^\wedge}(a'',a',a)"] \arrow[dr, "M_{F^\wedge}(a'',a',a)"'] & & \underline{C}^\wedge(G.F(a''),G.F(a')) \ast \underline{C}^\wedge(G.F(a'),G.F(a)) \\
& \underline{B}^\wedge(F(a''),F(a')) \ast \underline{B}^\wedge(F(a'),F(a)) \arrow[ur, "M_{G^\wedge}(F(a''),F(a'),F(a))"'] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si $\mathcal{U}_o$ est un univers, on définit une catégorie $V^\wedge_{\mathcal{U}_o}$-néof dont

les objets sont les $V^\wedge$-graphes multiplicatifs $A^\wedge$, tels que $A^\wedge_o \in \mathcal{U}_o$, et dont les morphismes sont les $V^\wedge$-néofoncteurs entre ces objets.
En général, dans la suite, $\mathcal{U}_o$ sera un univers fixé une fois pour toutes, c'est pourquoi nous poserons (lorsqu'il n'y aura pas risque d'ambiguité)

$$V^\wedge_{\mathcal{U}_o}\text{-néof} = V^\wedge\text{-néof} \quad .$$

I.7. Le premier exemple (formel) de $V^\wedge$-néofoncteur est celui de $V^\wedge$-foncteur.
Supposons, en effet, que $F^\wedge = (B^\wedge,(F,\underline{F}^\wedge),A^\wedge)$ soit un $V^\wedge$-foncteur de la $V^\wedge$-catégorie $A^\wedge$ vers la $V^\wedge$-catégorie $B^\wedge$.
Si nous identifions $A^\wedge$ et $B^\wedge$ à leurs $V^\wedge$-graphes multiplicatifs sous-jacents, comme il a été fait en I.2 , et si nous posons:
- pour tout $(a'',a',a) \in A^\wedge_o \times A^\wedge_o \times A^\wedge_o$, $M_{F^\wedge}(a'',a',a) = \underline{F}^\wedge(a'',a') \boxtimes \underline{F}^\wedge(a',a)$,
<u>il est clair que $(B^\wedge, (F,\underline{F}^\wedge,M_{F^\wedge}) ,A^\wedge)$ est un $V^\wedge$-néofoncteur, dont nous</u> dirons qu'il est <u>associé</u>, ou <u>sous-jacent</u>, au $V^\wedge$-foncteur $F^\wedge$ (et que nous identifierons à $F^\wedge$).
Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, nous obtenons, ainsi, un foncteur d'<u>oubli</u> injectif et plein $\quad P_{V^\wedge\text{-nf}}: V^\wedge\text{-fonc} \longrightarrow V^\wedge\text{-néof}$

I.8. Le deuxième exemple de $V^\wedge$-néofoncteur provient, comme en I.3 dont nous reprenons les données et les constructions, du cas ensembliste.
Rappelons que $F^\bullet = (B^\bullet,f,A^\bullet)$ est un <u>néofoncteur, relatif à l'univers</u> $\mathcal{U}_o$, du graphe multiplicatif $A^\bullet$, relatif à $\mathcal{U}_o$, vers le graphe multiplicatif $B^\bullet$, relatif à $\mathcal{U}_o$, si, et seulement si, $f: A \longrightarrow B$ est une application qui vérifie:
- $f(A^\bullet_o) \subseteq B^\bullet_o$, nous noterons alors $f_o: A^\bullet_o \longrightarrow B^\bullet_o$ sa restriction,
- si $(z',z) \in A^\bullet * A^\bullet$ est un couple composable de $A^\bullet$, son "image" $(f(z'),f(z))$ est un couple composable de $B^\bullet$ (i.e. appartient à l'ensemble $B^\bullet * B^\bullet$) et l'on a, de plus, $f(z').f(z) = f(z'.z)$.

(On remarquera que ces conditions impliquent que $\underline{\alpha}_{B^\bullet}(f(z)) = f(\underline{\alpha}_{A^\bullet}(z))$ et $\underline{\beta}_{B^\bullet}(f(z)) = f(\underline{\beta}_{A^\bullet}(z))$, pour tout $z \in A$.)

A un tel néofoncteur, relatif à $\mathcal{U}_o$, nous associons le $\mathcal{U}^\wedge$-néofoncteur $F^\wedge = (B^\wedge, (F, \underline{F}^\wedge, M_{F^\wedge}), A^\wedge)$ défini de la manière suivante:

- $F: A^\wedge_o \longrightarrow B^\wedge_o$ est la restriction f_o de l'application f aux objets de $A^\bullet$ et $B^\bullet$ (i.e. aux objets de $A^\wedge$ et $B^\wedge$),
- pour tout $(a',a) \in A^\wedge_o \times A^\wedge_o$, l'application

$$\underline{F}^\wedge(a',a): \underline{A}^\wedge(a',a) \longrightarrow \underline{B}^\wedge(F(a'),F(a))$$

(i.e $\qquad \underline{F}^\wedge(a',a): \mathrm{Hom}_{A^\bullet}(a',a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B^\bullet}(f(a'),f(a))$)

est la restriction de l'application f aux ensembles $\mathrm{Hom}_{A^\bullet}(a',a)$ et $\mathrm{Hom}_{B^\bullet}(f(a'),f(a))$ dont l'existence est assurée par la remarque ci-dessus,

- pour tout $(a'',a',a) \in A^\wedge_o \times A^\wedge_o \times A^\wedge_o$, l'application

$$M_{F^\wedge}(a'',a',a): \underline{A}^\wedge(a'',a') * \underline{A}^\wedge(a',a) \longrightarrow \underline{B}^\wedge(F(a''),F(a')) * \underline{B}^\wedge(F(a'),F(a))$$

associe à tout couple composable (z',z), appartenant à sa source, le couple composable $(f(z'),f(z))$ appartenant à son but.

Moyennant les constructions de I.3, si $\mathcal{U}_o$ est un univers, nous obtenons un foncteur: $\mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{U}^\wedge$-néof .

I.9. Reprenons, maintenant, les hypothèses et les notations de I.4 et prouvons le résultat qui y est annoncé, à savoir: l'ensemble des $\mathcal{N}'^\wedge$-néofoncteurs de $\mathcal{T}^\wedge$ vers $\mathcal{J}^\wedge$ (i.e. vers le $\mathcal{N}'^\wedge$-graphe multiplicatif sous-jacent à la 2-catégorie $\mathcal{J}^\wedge$) est en bijection avec l'ensemble des triples définis dans la 2-catégorie $\mathcal{J}^\wedge$.(On pourrait généraliser ce résultat au cas d'une 2-catégorie quelconque.)

Soit $F^\wedge: \mathcal{T}^\wedge \longrightarrow \mathcal{J}^\wedge$ un $\mathcal{N}'^\wedge$-néofoncteur. Notons $F(c) = C^\bullet$. Il en résulte que $\underline{F}^\wedge(c,c)$ est un néofoncteur de la forme:

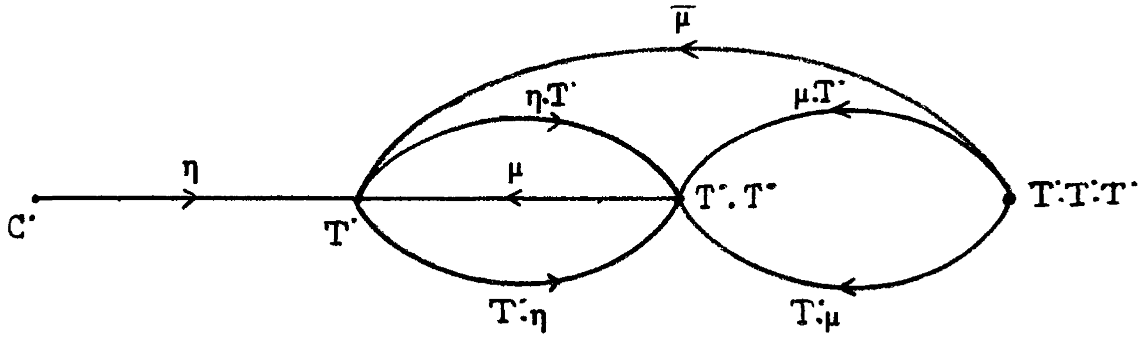
$$\underline{F}^\wedge(c,c): \underline{T}^\wedge(c,c) \longrightarrow C^{\bullet C^\bullet} .$$

Si l'on pose:

- $\underline{F}^\wedge(c,c)(\underline{[illegible]}) = T^\bullet$, alors $T^\bullet: C^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ est un endofoncteur,
- $\underline{F}^\wedge(c,c)(\underline{\eta}) = \eta$, alors $\eta: \mathrm{Id}_{C^\bullet} \Longrightarrow T^\bullet$ est une transformation naturelle,

- $\underline{F}^{\wedge}(c,c)(\,\underline{\ddot{\mu}}\,) = \underline{\mu}$, alors μ est une transformation naturelle de but l'endofoncteur $T^{\bullet}$;

les axiomes de compatibilité que $F^{\wedge}$ vérifie, par définition (voir I.6), assurent alors que le reflet de $\underline{\mathbf{T}}^{\wedge}(c,c)$ dans la catégorie $C^{\bullet C^{\bullet}}$ est de la forme ci-dessous, où $\vec{\mu}$ désigne la valeur commune de $\mu \circ \mu.T^{\bullet}$ et $\mu \circ T^{\bullet}.\mu$:



et que ($T^{\bullet}$, η , μ) vérifie bien les axiomes d'un triple.

Inversement, il est clair qu'à tout triple ($T^{\bullet}$, $\underline{\eta}$, $\underline{\mu}$) de la 2-catégorie $\mathfrak{J}^{\wedge}$ est associé un $\mathcal{N}'^{\wedge}$-néofoncteur $F^{\wedge}$: $\mathbf{T}^{\wedge} \longrightarrow \mathfrak{J}^{\wedge}$.

I.10. Rappelons (voir I.5), mais nous en laisserons la vérification (fastidieuse) au lecteur (qui s'inspirera de I.9 et (I.N.B.I.)), que, si $\mathcal{U}_o$ est un univers et $C^{\bullet}$ une catégorie (n'ayant pas nécessairement tous les produits fibrés) relative à $\mathcal{U}_o$, tout $\mathcal{N}'^{\wedge}$-néofoncteur $F^{\wedge}$: $\mathbf{T}^{\wedge} \longrightarrow S(C^{\bullet})^{\wedge}$ définit une catégorie interne à $C^{\bullet}$.

Inversement, à toute catégorie interne à $C^{\bullet}$ est associé un choix de produits fibrés canoniques dans $C^{\bullet}$ de telle sorte que cette catégorie interne soit celle "définie" par un $\mathcal{N}'^{\wedge}$-néofoncteur $F^{\wedge}$: $\mathbf{T}^{\wedge} \longrightarrow S(C^{\bullet})^{\wedge}$, où $S(C^{\bullet})^{\wedge}$ est la $\mathcal{N}'^{\wedge}$-catégorie construite grâce à ce choix de produits fibrés.

Dans cette optique, il pourrait d'ailleurs s'agir d'un inconvénient par rapport à la description, par morphismes de bicatégories, des catégories internes (dans cette description, le choix de produits fibrés utilisé est indépendant de la catégorie interne que l'on décrit); cependant notre point de vue (qui sera développé ultérieurement),qui consiste à décrire les structures (algébriques) à l'aide d'esquisses enrichies, supprime cette difficulté puisque les catégories internes à une catégorie sont entièrement décrites à l'aide de la théorie des esquisses (purement ensemblistes) développée, par exemple, en (E.T.S.A.) .

I.11. Rappelons (voir I.1) que, si $A^{\wedge}$ est un $V^{\wedge}$-graphe multiplicatif, $\vec{A} = (A_0^{\wedge}, \underline{A}^{\wedge}, j_{A^{\wedge}})$ est un $V^{\wedge}$-graphe orienté.
De même, il est clair, par définition (voir I.6), que, si $F^{\wedge}: A^{\wedge} \longrightarrow B^{\wedge}$ est un $V^{\wedge}$-néofoncteur, alors $\vec{F} = (\vec{B}, (F, \underline{F}^{\wedge}), \vec{A})$ est une $V^{\wedge}$-application orientée, dont nous dirons qu'elle est <u>sous-jacente à</u> $F^{\wedge}$.
Ainsi, si $\mathcal{U}_0$ est un univers, l'application, qui à tout $V^{\wedge}$-néofoncteur associe sa $V^{\wedge}$-application orientée sous-jacente, définit, évidemment, un foncteur d'<u>oubli</u> $P_{V^{\wedge}\text{-an}}$: $V^{\wedge}$-néof $\longrightarrow$ $V^{\wedge}$-apor. On en déduit le foncteur d'<u>oubli</u> composé $P_{V^{\wedge}\text{-an}} \cdot P_{V^{\wedge}\text{-nf}} = P_{V^{\wedge}\text{-af}}$: $V^{\wedge}$-fonc $\longrightarrow$ $V^{\wedge}$-apor .
En vertu des conditions remarquées en I.6 , déterminant l'égalité de deux $V^{\wedge}$-néofoncteurs, il apparaît que $P_{V^{\wedge}\text{-an}}$ et $P_{V^{\wedge}\text{-af}}$ sont fidèles.

I.12. Les remarques que nous faisons ici et en I.13 <u>sont</u> un prélude à I.14 où nous construirons le néofoncteur sous-jacent à un néofoncteur enrichi.
Supposons que $\vec{A} = (\vec{A}_0, \underline{\vec{A}}, j_{\vec{A}})$ est un $V^{\wedge}$-graphe orienté. Nous dirons que $[A] = (A_0, A, [illegible]_{[A]}, [illegible]_{[A]})$ est le <u>graphe orienté sous-jacent à</u> $\vec{A}$ si, et seulement si:

- A est l'ensemble réunion disjointe des ensembles

$$\mathrm{Hom}_{V^{\cdot}}(\underline{\vec{A}}(a', a), i),$$

lorsque (a', a) décrit $\vec{A}_0 \times \vec{A}_0$,

- A_0 est l'ensemble (isomorphe à $\vec{A}_0$) réunion disjointe des $\{j_{\vec{A}}(a)\}$, où a décrit $\vec{A}_0$,

- l'application $\underline{\alpha}_{[A]} : A \longrightarrow A_o$ (resp. $\underline{\beta}_{[A]} : A \longrightarrow A_o$) associe $j_{\vec{A}}(a)$ (resp. $j_{\vec{A}}(a')$) à tout morphisme $z : i \longrightarrow \underline{\vec{A}}(a',a)$, lorsque $(a',a) \in \vec{A}_o \times \vec{A}_o$.

Supposant maintenant que $\vec{F} = (\vec{B}, (F,\underline{\vec{F}}), \vec{A})$ est une $V\hat{}$-application orientée (de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$), nous dirons que $[F] = ([B], f, [A])$ est son <u>application orientée sous-jacente</u> si, et seulement si:

- $[A]$ et $[B]$ sont les graphes orientés sous-jacents à $\vec{A}$ et $\vec{B}$,
- $f : A \longrightarrow B$ est l'application qui, à tout morphisme $z : i \longrightarrow \underline{\vec{A}}(a',a)$, associe le morphisme composé

$$i \xrightarrow{\ z\ } \underline{\vec{A}}(a',a) \xrightarrow{\ \underline{\vec{F}}(a',a)\ } \underline{\vec{B}}(F(a'),F(a)),$$

lorsque $(a',a) \in \vec{A}_o \times \vec{A}_o$.

Donc, si $\mathcal{U}_o$ est un univers et $V\hat{}$ une catégorie monoïdale au-dessus, l'application, qui associe à toute $V\hat{}$-application orientée son application orientée sous-jacente, définit un foncteur d'<u>oubli</u>

$$V\hat{}\text{-apor} \longrightarrow \Gamma .$$

I.13. Au total, si $A\hat{}$ est un $V\hat{}$-graphe multiplicatif, nous désignerons par $[A]$ son <u>graphe orienté sous-jacent</u> (i.e. le graphe orienté sous-jacent à son $V\hat{}$-graphe orienté sous-jacent $\vec{A}$).
De même, si $F\hat{}$ est un $V\hat{}$-néofoncteur, $[F]$ désignera son <u>application orientée sous-jacente</u> (i.e. l'application orientée sous-jacente à sa $V\hat{}$-application orientée sous-jacente $\vec{F}$).
Si $\mathcal{U}_o$ est un univers et $V\hat{}$ une catégorie monoïdale au-dessus, ceci correspond au foncteur d'oubli composé $V\hat{}\text{-néof} \longrightarrow V\hat{}\text{-apor} \longrightarrow \Gamma$.

I.14. Supposons que $A\hat{}$ est un $V\hat{}$-graphe multiplicatif.
Nous dirons que $A^{\bullet} = (\underline{A^{\bullet}_o, A, \alpha_{A^{\bullet}}}, \underline{\beta}_{A^{\bullet}}, k_{A^{\bullet}})$ est le <u>graphe multiplicatif sous-jacent à</u> $A\hat{}$ si, et seulement si:

- $A^{\bullet}$ et $A\hat{}$ ont même graphe orienté sous-jacent (i.e. lorsque

$(A^\bullet_o, A, [illegible]_{A^\bullet}, [illegible]_{A^\bullet}) = \boxed{A}$),

- pour tout $(a'',a',a) \in A^\wedge_o \times A^\wedge_o \times A^\wedge_o$, si $z' : i \longrightarrow \underline{A}^\wedge(a'',a')$ et $z : i \longrightarrow \underline{A}^\wedge(a',a)$ sont deux morphismes de $V^\bullet$(et donc deux éléments de A) le couple (z',z) est composable dans $A^\bullet$ (i.e. appartient à $A^\bullet * A^\bullet$) à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe un morphisme $\kappa_{z',z}$ de $V^\bullet$ rendant commutatif le diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & i \boxtimes i \arrow[dl, "\kappa_{z',z}"'] \arrow[dr, "z' \boxtimes z"] & \\ \underline{A}^\wedge(a'',a') * \underline{A}^\wedge(a',a) \arrow[rr, "m_{A^\wedge}(a'',a',a)"'] & & \underline{A}^\wedge(a'',a') \boxtimes \underline{A}^\wedge(a',a) \end{tikzcd}$$

(remarquons que $\kappa_{z',z}$, s'il existe, est unique car $m_{A^\wedge}(a'',a',a)$ est un monomorphisme) ,

- dans les conditions et avec les notations précédentes, le composé $k_{A^\bullet}(z',z)$, dans $A^\bullet$, du couple composable (z',z) est le morphisme de $V^\bullet$ qui rend le diagramme ci-dessous commutatif:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}^\wedge(a'',a) & \underline{A}^\wedge(a'',a') * \underline{A}^\wedge(a',a) \arrow[l, "k_{A^\wedge}(a'',a',a)"'] \\ i \arrow[u, "k_{A^\bullet}(z',z)"] \arrow[r, "\sim", "\phi(i) \doteq \psi(i)"'] & i \boxtimes i \arrow[u, "\kappa_{z',z}"'] \end{tikzcd}$$

Si $F^\wedge : A^\wedge \longrightarrow B^\wedge$ est un $V^\wedge$-néofoncteur, on vérifie facilement alors que $F^\bullet = (B^\bullet, f, A^\bullet)$ est un néofoncteur, dit sous-jacent à $F^\wedge$, lorsque $(\boxed{B}, f, \boxed{A})$ est l'application orientée $\boxed{F}$ sous-jacente à $F^\wedge$.

Donc, si $\mathcal{U}_o$ est un univers et $V^\wedge$ une catégorie monoïdale au-dessus, l'application, qui à tout $V^\wedge$-néofoncteur associe son néofoncteur sous-jacent, définit un foncteur d'oubli $V^\wedge$-néof $\longrightarrow \mathcal{N}'$.

Le lecteur vérifiera sans peine, dans ces conditions, que les foncteurs $\mathcal{N}' \longrightarrow \mathfrak{U}^{\wedge}$-néof (voir I.8) et $\mathfrak{U}^{\wedge}$-néof $\longrightarrow \mathcal{N}'$ définissent une équivalence de catégories.

I.15. Ce paragraphe est un rappel d'une construction classique, dans le cas ensembliste, destiné à introduire celle que nous donnons en I.16 , dans le cas enrichi.

Si $F^{\bullet}: A^{\bullet} \longrightarrow B^{\bullet}$ est un foncteur (on pose $F^{\bullet}=(B^{\bullet},f,A^{\bullet})$), l'ensemble $f(A)$ n'est pas, en général, muni d'une structure de catégorie. C'est justement la notion de graphe multiplicatif qui permet facilement de munir $f(A)$ d'une structure (de graphe multiplicatif) "reflétant bien" celle de A. Cette structure $F^{\bullet}(A^{\bullet}) = \widetilde{B}^{\bullet}$ est définie de la manière qui suit:

- l'ensemble de ses objets est l'ensemble image $f(A^{\bullet}_{o})$,
- quel que soit le couple (b',b) de deux objets de $\widetilde{B}^{\bullet}$, si l'on pose

$$E_{(b',b)} = \left\{ (a',a) \in A^{\bullet}_{o} \times A^{\bullet}_{o} \;/\; f(a') = b' \text{ et } f(a) = b \right\} ,$$

l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b',b)$ est l'image de l'unique application $t(b',b)$ rendant commutatif, pour tout $(a',a) \in E_{(b',b)}$, le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{(a',a)\in E_{(b',b)}} \mathrm{Hom}_{A^{\bullet}}(a',a) \arrow[rr, "t(b'{,}b)"] & & \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b',b) \\
& \mathrm{Hom}_{A^{\bullet}}(a',a) \arrow[ul, "\text{coprojection}"] \arrow[ur, "f_{(a',a)}"'] &
\end{tikzcd}$$

où $f_{(a',a)}$ est la restriction de f,

- $\widetilde{B}^{\bullet}$ est un sous-graphe multiplicatif de $B^{\bullet}$, ce qui équivaut à écrire que les conditions

$$\left| \begin{array}{l} (z',z) \in \widetilde{B} \times \widetilde{B} \\ (z',z) \in B^{\bullet} * B^{\bullet} \\ z'.z \in \widetilde{B} \end{array} \right.$$

impliquent alors que $(z',z) \in \widetilde{B}^{\bullet} * \widetilde{B}^{\bullet}$.

Plus généralement, mais de la même façon, tout néofoncteur $F^{\bullet}:A^{\bullet} \longrightarrow B^{\bullet}$ définit un graphe multiplicatif $F^{\bullet}(A^{\bullet}) = \widetilde{B}^{\bullet}$ qui "reflète bien", dans le graphe multiplicatif $B^{\bullet}$, la structure de graphe multiplicatif $A^{\bullet}$. En particulier, le néofoncteur injectif $\widetilde{B}^{\bullet} \hookrightarrow B^{\bullet}$ vérifie la propriété:

(x'): les conditions

$$\left|\begin{array}{l} (z',z) \in \widetilde{B} \times \widetilde{B} \\ (z',z) \in B^{\bullet} \ast B^{\bullet} \\ z'.z \in \widetilde{B} \end{array}\right.$$

impliquent $(z',z) \in \widetilde{B}^{\bullet} \ast \widetilde{B}^{\bullet}$.

On vérifie immédiatement que le néofoncteur injectif $\widetilde{B}^{\bullet} \hookrightarrow B^{\bullet}$ vérifie la propriété (x') si, et seulement si, il vérifie la condition équivalente:

(x): pour tout triplet (b'',b',b) d'objets de $\widetilde{B}^{\bullet}$, si le diagramme ci-dessous définit un produit fibré d'applications

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b'',b') \ast \mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b',b) \arrow[r, "x_{(b'',b',b)}"] \arrow[d, "y_{(b'',b',b)}"'] & \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b'',b') \ast \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b',b) \arrow[d, "\text{composition}"] \\ \mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b'',b) \arrow[r, "\text{inclusion}"'] & \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b'',b) \end{tikzcd}$$

,

alors $\mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b'',b') \ast \mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b',b)$ (i.e. l'ensemble des couples composables de $\widetilde{B}^{\bullet}$ qui "relient" b, b' et b") est un produit fibré dont on définit les projections à l'aide du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b'',b') \ast \mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b',b) \arrow[rr, "\text{inclusion}"] \arrow[d, "z_{(b'',b',b)}"'] & & \mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b'',b') \times \mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b',b) \arrow[d, "\text{inclusion}"] \\ \mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b'',b') \overline{\ast} \mathrm{Hom}_{\widetilde{B}^{\bullet}}(b',b) \arrow[r, "x_{(b'',b',b)}"] & \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b'',b') \ast \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b',b) \arrow[r, "\text{inclusion}"] & \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b'',b') \times \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b',b) \end{tikzcd}$$

.

Il résulte de ces considérations liminaires que, si $\mathcal{U}_o$ est un univers, si $P_{\mathcal{N}'} : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{U}$ est le foncteur d'oubli usuel et si X est l'ensemble des néofoncteurs injectifs $G^\bullet : B'^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ de $\mathcal{N}'$ qui vérifient (à l'identification près des éléments de B' à leurs images dans B) la propriété (x), on peut énoncer:

(i). tout néofoncteur $F^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$, appartenant à $\mathcal{N}'$, admet pour X-reflet le néofoncteur injection canonique $F^\bullet(A^\bullet) \hookrightarrow B^\bullet$,

(ii). tout morphisme de $\mathcal{N}'$ appartenant à X définit sa source comme une $P_{\mathcal{N}'}$-sous-structure de son but.

(Remarquons que le point (ii) est équivalent à la propriété (x). Cependant, la propriété (x) caractérise les morphismes de X d'une manière géométrique dans $\mathcal{U}$, en ce sens que $\mathcal{N}'$ est une catégorie de structures descriptibles dans $\mathcal{U}$, alors que (ii) les caractérise relativement au foncteur d'oubli $P_{\mathcal{N}'}$ qui laisse - ou rend - "extérieurs" à $\mathcal{U}$ les objets et les morphismes de $\mathcal{N}'$. On verra l'intérêt de cette double présentation dans le cas plus général, que nous avons en vue, des néofoncteurs enrichis.)

I.16. En nous inspirant de la construction précédente, nous allons montrer, très brièvement, que tout $V^\wedge$-néofoncteur $F^\wedge : A^\wedge \longrightarrow B^\wedge$ définit canoniquement, moyennant des conditions simples sur $V^\wedge$, un $V^\wedge$-graphe multiplicatif $F^\wedge(A^\wedge)$ dont on pourra dire qu'il est effectivement le reflet de $A^\wedge$ dans $B^\wedge$ par $F^\wedge$.

Pour ce faire, nous supposons que:

- $\mathcal{U}_o$ est un univers,
- $V^\wedge$ est une catégorie monoïdale dont la catégorie sous-jacente $V^\bullet$ est à $\mathcal{U}_o$-sommes et à produits fibrés de deux morphismes où l'on dispose par conséquent d'un choix de sommes et de produits fibrés que nous dirons <u>canoniques</u>,

- X' est une classe de monomorphismes de $V^{\bullet}$ telle que tout morphisme de $V^{\bullet}$ admet un X'-reflet.

Si $F^{\wedge}: A^{\wedge} \longrightarrow B^{\wedge}$ est un $V^{\wedge}$-néofoncteur, morphisme de $V^{\wedge}$-néof ,
nous désignons par $\widetilde{B}^{\wedge} = F^{\wedge}(A^{\wedge})$ le $V^{\wedge}$-graphe multiplicatif défini comme suit:

- les objets de $\widetilde{B}^{\wedge}$ sont les images par F des objets de $A^{\wedge}$ (i.e. on a l'égalité $\widetilde{B}^{\wedge}_{o} = \{ F(a) \ / \ a \in A^{\wedge}_{o} \}$),
- pour tout couple $(b',b) \in \widetilde{B}^{\wedge}_{o} \times \widetilde{B}^{\wedge}_{o}$, si:
  + $E_{(b',b)} = \{ (a',a) \in A^{\wedge}_{o} \times A^{\wedge}_{o} \ / \ F(a') = b' \text{ et } F(a) = b \}$

(alors $E_{(b',b)} \in \mathcal{U}_{o}$),

  + $\widetilde{\underline{A}}^{\wedge}(b',b)$ est la somme canonique, dans $V^{\bullet}$, de la famille d'objets $(\underline{A}^{\wedge}(a',a))_{(a',a) \in E_{(b',b)}}$,
  + pour tout $(a',a) \in E_{(b',b)}$, $\underline{\gamma}(a',a): \underline{A}^{\wedge}(a',a) \longrightarrow \widetilde{\underline{A}}^{\wedge}(b',b)$ est la co-projection canonique,
  + $t(b',b)$ est l'unique morphisme de $V^{\bullet}$ rendant commutatif, pour tout $(a',a) \in E_{(b',b)}$, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\underline{A}}^{\wedge}(b',b) \arrow[rr, "t(b',b)"] & & \underline{B}^{\wedge}(b',b) \\
& \underline{A}^{\wedge}(a',a) \arrow[ul, "\gamma(a',a)"] \arrow[ur, "\underline{F}^{\wedge}(a',a)"'] &
\end{tikzcd}$$

,

alors $\widetilde{\underline{B}}^{\wedge}(b',b)$ est le X'-reflet de $t(b',b)$, ce qui signifie que, dans $V^{\bullet}$, on a un diagramme commutatif (et "universel") de la forme

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\underline{A}}^{\wedge}(b',b) \arrow[rr, "t(b',b)"] \arrow[dr, "\widetilde{t}(b',b)"'] & & \underline{B}^{\wedge}(b',b) \\
& \widetilde{\underline{B}}^{\wedge}(b',b) \arrow[ur, "\underline{I}^{\wedge}(b',b) \in X'"'] &
\end{tikzcd}$$

,

- pour tout $(b'',b',b) \in \widetilde{B}^{\wedge}_{o} \times \widetilde{B}^{\wedge}_{o} \times \widetilde{B}^{\wedge}_{o}$, si le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{\tilde{B}}^{\wedge}(b'',b') \ast \underline{\tilde{B}}^{\wedge}(b',b) \arrow[r, "x_{(b'',b',b)}"] \arrow[d, "y_{(b'',b',b)}"'] & \underline{B}^{\wedge}(b'',b') \ast \underline{B}^{\wedge}(b',b) \arrow[d, "k_{B^{\wedge}}(b'',b',b)"] \\
\underline{\tilde{B}}^{\wedge}(b'',b) \arrow[r, "\underline{I}^{\wedge}(b'',b)"'] & \underline{B}^{\wedge}(b'',b)
\end{tikzcd}$$

est un produit fibré canonique dans $V^{\bullet}$ (et alors $x_{(b'',b',b)}$ est un monomorphisme), le diagramme ci-dessous définit $\underline{\tilde{B}}^{\wedge}(b'',b') \ast \underline{\tilde{B}}^{\wedge}(b',b)$ comme un produit fibré canonique dans $V^{\bullet}$

$$\begin{tikzcd}
\underline{\tilde{B}}^{\wedge}(b'',b') \ast \underline{\tilde{B}}^{\wedge}(b',b) \arrow[rr, "m_{\tilde{B}^{\wedge}}(b'',b',b)"] \arrow[d, "z_{(b'',b',b)}"'] & & \underline{\tilde{B}}^{\wedge}(b'',b') \boxtimes \underline{\tilde{B}}^{\wedge}(b',b) \arrow[d, "\underline{I}^{\wedge}(b'',b') \boxtimes \underline{I}^{\wedge}(b',b)"] \\
\underline{\tilde{B}}^{\wedge}(b'',b') \ast \underline{\tilde{B}}^{\wedge}(b',b) \arrow[r, "x_{(b'',b',b)}"'] & \underline{B}^{\wedge}(b'',b') \ast \underline{B}^{\wedge}(b',b) \arrow[r, "m_{B^{\wedge}}(b'',b',b)"'] & \underline{B}^{\wedge}(b'',b') \boxtimes \underline{B}^{\wedge}(b',b)
\end{tikzcd}$$

(et alors $m_{\tilde{B}^{\wedge}}(b'',b',b)$ est un monomorphisme car $m_{B^{\wedge}}(b'',b',b) . x_{(b'',b',b)}$ en est un), et le morphisme de composition de $\tilde{B}^{\wedge}$ relatif à (b'',b',b) est

$$k_{\tilde{B}^{\wedge}}(b'',b',b) = y_{(b'',b',b)} \cdot z_{(b'',b',b)} \quad ,$$

(- nous laissons au lecteur le soin de définir les applications $j_{\tilde{B}^{\wedge}}$, $\alpha_{\tilde{B}^{\wedge}}$ et $\beta_{\tilde{B}^{\wedge}}$).

Alors, il est clair que le $V^{\wedge}$-néofoncteur $F^{\wedge}$: $A^{\wedge} \longrightarrow B^{\wedge}$ se décompose en deux $V^{\wedge}$-néofoncteurs:

$$\begin{tikzcd}
A^{\wedge} \arrow[rr, "F^{\wedge}"] \arrow[dr, "\tilde{F}^{\wedge}"'] & & B^{\wedge} \\
& \tilde{B}^{\wedge} \arrow[ur, "I^{\wedge}"'] &
\end{tikzcd}$$

tels que, en particulier:

- I: $\tilde{B}^\wedge_o \longrightarrow B^\wedge_o$ est l'injection canonique,
- pour tout triplet $(b'',b',b) \in \tilde{B}^\wedge_o \times \tilde{B}^\wedge_o \times \tilde{B}^\wedge_o$, on a

$$M_{I^\wedge}(b'',b',b) = {}^{x}(b'',b',b) \cdot {}^{z}(b'',b',b) \ ,$$

- $\tilde{F} : A^\wedge_o \longrightarrow \tilde{B}^\wedge_o$ est la restriction de F: $A^\wedge_o \longrightarrow B^\wedge_o$.

Cette construction (et celle de I.15) suggère, pour donner la signification universelle d'un reflet à $F^\wedge(A^\wedge) = \tilde{B}^\wedge$, de désigner par X l'ensemble de tous les $V^\wedge$-néofoncteurs $G^\wedge$: $B'^\wedge \longrightarrow B^\wedge$, appartenant à $V^\wedge$-néof , tels que:

- G: $B'^\wedge_o \longrightarrow B^\wedge_o$ est une application injective,
- pour tout $(b',b) \in B'^\wedge_o \times B'^\wedge_o$, le morphisme $\underline{G}^\wedge(b',b)$ appartient à X',
- pour tout $(b'',b',b) \in B'^\wedge_o \times B'^\wedge_o \times B'^\wedge_o$, si le diagramme ci-dessous définit un produit fibré canonique dans $V^\cdot$

$$\begin{tikzcd}
\underline{B}'^\wedge(b'',b') \circledast \underline{B}'^\wedge(b',b) \arrow[r, "{}^{x}(b'',b',b)"] \arrow[d, "{}^{y}(b'',b',b)"'] & \underline{B}^\wedge(b'',b') \circledast \underline{B}^\wedge(b',b) \arrow[d, "k_{B^\wedge}(b'',b',b)"] \\
\underline{B}'^\wedge(b'',b) \arrow[r, "\underline{G}^\wedge(b'',b)"'] & \underline{B}^\wedge(b'',b)
\end{tikzcd} ,$$

alors le diagramme suivant est un produit fibré dans $V^\cdot$

$$\begin{tikzcd}
\underline{B}'^\wedge(b'',b') \circledast \underline{B}'^\wedge(b',b) \arrow[rr, "m_{B'^\wedge}(b'',b',b)"] \arrow[d, "{}^{z}(b'',b',b)"'] & & \underline{B}'^\wedge(b'',b') \boxtimes \underline{B}'^\wedge(b',b) \arrow[d, "\underline{G}^\wedge(b'',b') \boxtimes \underline{G}^\wedge(b',b)"] \\
\underline{B}'^\wedge(b'',b') \circledast \underline{B}'^\wedge(b',b) \arrow[r, "{}^{x}(b'',b',b)"'] & \underline{B}^\wedge(b'',b') \circledast \underline{B}^\wedge(b',b) \arrow[r, "m_{B^\wedge}(b'',b',b)"'] & \underline{B}^\wedge(b'',b') \boxtimes \underline{B}^\wedge(b',b)
\end{tikzcd}$$

(cette condition est l'analogue de la condition (x) de I.15 et, dans ces deux derniers diagrammes, on a identifié les objets de $B'^\wedge$ à leurs images dans $B^\wedge_o$),

- pour tout $(b'',b',b) \in B'^\wedge_o \times B'^\wedge_o \times B'^\wedge_o$, on a

$$M_{G^\wedge}(b'',b',b) = x_{(b'',b',b)} \cdot z_{(b'',b',b)} \quad .$$

Dans ces conditions, on vérifie immédiatement la validité de la proposition suivante:

Proposition. Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, si $V^\wedge$ est une catégorie monoïdale au-dessus, à produits fibrés (de deux morphismes) et à $\mathcal{U}_o$-sommes, si X' est une classe de monomorphismes de $V^\cdot$ telle que tout morphisme de $V^\cdot$ admet un X'-reflet et si $P_{V^\wedge\text{-néof}}$: $V^\wedge$-néof $\longrightarrow \mathcal{U}$ est le foncteur d'oubli composé des foncteurs d'oubli $V^\wedge$-néof $\longrightarrow \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{U}$, alors:

(i). tout $V^\wedge$-néofoncteur $F^\wedge : A^\wedge \longrightarrow B^\wedge$, appartenant à $V^\wedge$-néof , admet pour X-reflet le $V^\wedge$-néofoncteur $I^\wedge : F^\wedge(A^\wedge) \longrightarrow B^\wedge$,

(ii). si tout morphisme de X' définit sa source comme une $\mathrm{Hom}_V.(-,i)$-sous-structure de son but, tout morphisme de X définit sa source comme une $P_{V^\wedge\text{-néof}}$ -sous-structure de son but.

Ainsi, l'analogie avec le cas ensembliste de I.15 est-elle totale.
De plus, on peut remarquer que dans $\mathcal{F}$ (catégorie pleine des foncteurs relatifs à un univers $\mathcal{U}_o$) si Y désigne l'ensemble des foncteurs injectifs alors:

- tout foncteur de $\mathcal{F}$ admet un Y-reflet,
- tout morphisme de Y définit sa source comme une $P_{\mathcal{F}}$-sous-structure de son but, si $P_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{U}$ est le foncteur d'oubli usuel. En conséquence la proposition précédente n'est pas inhérente à (ou caractéristique de) la structure de graphe multiplicatif (enrichi). Cependant, c'est dans $\mathcal{N}'$ que le reflet d'un foncteur (ou d'un néofoncteur) vérifie:

- l'ensemble des objets du reflet est le reflet (i.e. l'image ensembliste) de l'ensemble des objets de la source de ce foncteur,

- pour deux objets quelconques du reflet, le "Hom" entre ces deux objets est la réunion des reflets (i.e. des images ensemblistes) des "Hom" entre objets de la source qui s'envoient sur ces deux objets, ce qui n'est pas du tout le cas dans $\mathfrak{J}$.

Ainsi, c'est la notion de graphe multiplicatif qui (du point de vue de la notion, très naturelle, de reflet) se prête le mieux à, et suscite en fait, la notion d'enrichissement.Mais alors, ce sont les graphes multiplicatifs qu'il faut enrichir ... et pas seulement les catégories, ce qui motive, au moins formellement, notre étude!

BIBLIOGRAPHIE.

(A.D.E.C.) G. M. Kelly, Adjunction for enriched categories, Lect. Notes in Math. 106, Springer, 1969.

(A.M.C.A.) C. Auderset, Adjonctions et monades au niveau des 2-catégories, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. XV,1, Paris 1974.

(C.D.S.T.) E. Burroni, Catégories discrètement structurées et triples, Esquisses mathématiques 4, Paris 1970.

(C.L.C.A.) S. Eilenberg et G. M. Kelly, Closed categories, Proc. of the Conf. on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Springer, New-York 1966.

(C.O.C.A.) F. Foltz, Complétion des V-catégories, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol XIV,1, Paris 1973.

(C.O.S.L.) C. Ehresmann, Construction de structures libres, Lect. Notes in Math. 92, Springer, 1969.

(D.L.A.W.) J. Beck, Distributive laws, Lect. Notes in Math. 80, Springer, 1969.

(E.G.C.Ē.) C. Lair, Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses mathématiques 23, Paris 1975.

(E.N.F.C.) B. J. Day et G. M. Kelly, Enriched functor categories, Lect. Notes in Math. 106, Springer, 1969.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types des structures algébriques, Bul. Inst. Polit. Iaşi, XIV, 1968.

(I.N.B.I.) J. Bénabou, Introduction to bi-categories, Lect. Notes in Math. 47, Springer, 1967.

(M.M.A.G.) C. Ehresmann, Maîtrise de mathématiques: Algèbre et Géométrie (1ère partie: Algèbre), C.D.U., Paris 1968.

(T.E.N.S.) A. Bastiani, Théorie des ensembles, C.D.U., Paris 1970.

o

o o