DIAGRAMMES

C. LAIR

Sur les genres d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides)

Diagrammes, tome 35 (1996), p. 53-90

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1996__35__53_0>

SUR LES GENRES D'ESQUISSABILITE DES CATEGORIES MODELABLES (ACCESSIBLES [1]) POSSEDANT LES LIMITES D'INDEXATIONS FINIES (RESP. FINIES ET NON VIDES, FINIES ET CONNEXES, FINIES ET CONNEXES ET NON VIDES [2])

C. Lair

1. Introduction.

Dans le présent travail, nous prouvons que les catégories modelables (accessibles) possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) sont exactement (à l'équivalence près) *aussi bien* les catégories de modèles d'esquisses petites où les co-cônes "co-distingués" sont tous d'indexations *filtrantes* (resp. *"essentiellement" filtrantes*, *"simplement" filtrantes*, *"simplement et essentiellement" filtrantes*) que les catégories de modèles d'esquisses petites où les co-cônes "distingués" sont tous d'indexations des *ordres* filtrants (resp. essentiellement filtrants, simplement filtrants, simplement et essentiellement filtrants) : on retrouve et raffine, de la sorte, les résultats (et certaines des méthodes) de [C.A.L.F.].

---

[1] En américain, "catégories modelables" semble devoir se traduire par "accessible categories of Makkaï-Paré" ...

[2] Dans toute la suite, pour simplifier les énoncés, nous considérons la catégorie vide comme connexe.

Pour obtenir ces résultats, il *suffit* d'utiliser *systématiquement* (comme préconisé en [C.Q.C.E.], notamment en son Appendice) les notions et méthodes générales antérieurement introduites en [C.M.C.F.] et/ou [C.M.C.E.] et/ou [C.Q.C.E.], fondamentalement

- celle de *diagramme* (d'indexation petite mais non nécessairement discrète) *localement co-limite* (évidemment dérivée de celle de *diagramme localement libre*),

- celle d'objet d'une catégorie (localement petite) *satisfaisant* un cône (d'indexation petite mais non nécessairement discrète) de cette catégorie,

- celle d'*invariance* (éventuelle), à la dualité près, du *genre* d'indexation tant des cônes à satisfaire que de certains (parmi tous les possibles) diagrammes localement co-limites dans la sous-catégorie pleine des objets satisfaisant ces cônes,

- celle de *modification* (ici : par "saturation" puis par "calcul de limites" - quand c'est possible) d'un diagramme localement co-limite en un autre, plus adéquat.

Nous nous sommes donc évertué à les rappeler (une fois de plus ...), tout au long du texte, avec le degré de généralité approprié, exactement là où leur usage s'impose.

2. Sur l'existence des limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) dans certaines catégories qualifiables.

2.1. Catégories qualifiables.

Suppososons que $\boldsymbol{I}$ est une catégorie

On note $\mathrm{C}(\boldsymbol{I})$ la catégorie (*cône type d'indexation* $\boldsymbol{I}$) obtenue en adjoignant à $\boldsymbol{I}$ un objet initial (*sommet type*) $\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})$ et, par conséquent, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, une unique flèche (*projection type en* I) $\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}) : \mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}) \to \mathrm{I}$.

Alors, on désigne par $\mathrm{B}(\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \mathrm{C}(\boldsymbol{I})$ le foncteur (*base type*) injection canonique.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie, un foncteur $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est appelé *cône d'indexation* $\boldsymbol{I}$, de *base* $U \circ \mathrm{B}(\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$, de *sommet* $U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}))$ et ayant $U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I})) : U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})) \to U(\mathrm{I})$ pour *projection en* I, quand $\mathrm{I} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{I})$

En particulier, un tel cône peut évidemment être un *cône limite*.

Supposons que $\boldsymbol{J}$ est une catégorie.

On désigne par $\mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) = \mathrm{C}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ la catégorie (*co-cône type de co-indexation* $\boldsymbol{J}$) obtenue en adjoignant à $\boldsymbol{J}$ un objet terminal (*co-sommet type*) $\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J}) = \mathrm{Sm}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}})$ et, par conséquent, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, une unique flèche (*co-projection type en* J) $\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J}) = \mathrm{p}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}})(\mathrm{J}) : \mathrm{J} \to \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J})$.

Alors, on désigne par $\mathrm{CB}(\boldsymbol{J}) : \boldsymbol{J} \to \mathrm{CC}(\boldsymbol{J})$ le foncteur (*co-base type*) injection canonique.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie, un foncteur $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{X}$ est appelé *co-cône de co-indexation* $\boldsymbol{J}$, de *co-base* $V \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, de *co-sommet* $V(\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J}))$ et ayant $V(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J})) : V(\mathrm{J}) \to V(\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J}))$ pour *co-projection en* J, quand $\mathrm{J} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J})$.

En particulier, un tel co-cône peut évidemment être un *co-cône co-limite*.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie *localement petite*.

Comme en [C.Q.C.E.], si $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône d'indexation petite et si X est un objet de $\boldsymbol{X}$, on dit que X *satisfait* U [3] si :

- le co-cône $\boldsymbol{X}(U(\text{-}),\mathrm{X}) : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{C}(\boldsymbol{I})^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{Ens}$ est un co-cône co-limite

Compte tenu du calcul des co-limites dans ***Ens***, il est facile de voir que X satisfait U si, et seulement si :

- (SAT 1) pour toute flèche $\mathrm{x} : U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$, il existe un objet I de $\boldsymbol{I}$ et une flèche $\mathrm{y} : U(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telle que $\mathrm{y}.U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I})) = \mathrm{x}$ (alors, on pourra dire que y est une *factorisation de* x *par* U),
- (SAT 2) pour tous objets I' et I" de $\boldsymbol{I}$ et pour toutes flèches $\mathrm{y}' : U(\mathrm{I}') \to \mathrm{X}$ et $\mathrm{y}'' : U(\mathrm{I}'') \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telles que $\mathrm{y}'.U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}')) = \mathrm{y}''.U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}''))$, il existe un entier $\mathrm{n} \geq 1$, un *zigzag* de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^\circ = (\mathrm{z}^\circ_k)_{1 \leq k \leq 2n} : \mathrm{I}' = \mathrm{Z}^\circ_1 \xleftarrow[\mathrm{z}^\circ_1]{} \mathrm{Z}^\circ_2 \xrightarrow[\mathrm{z}^\circ_2]{} \mathrm{Z}^\circ_3 \ldots$$
$$\ldots \mathrm{Z}^\circ_{2n-1} \xleftarrow[\mathrm{z}^\circ_{2n-1}]{} \mathrm{Z}^\circ_{2n} \xrightarrow[\mathrm{z}^\circ_{2n}]{} \mathrm{Z}^\circ_{2n+1} = \mathrm{I}''$$

  et une famille $\mathrm{y}^\circ = (\mathrm{y}^\circ_k : U(\mathrm{Z}^\circ_k) \to \mathrm{X})_{1 \leq k \leq 2n+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ telles que

  - $\mathrm{y}' = \mathrm{y}^\circ_1$ et $\mathrm{y}^\circ_{2n+1} = \mathrm{y}''$,
  - $\mathrm{y}^\circ_{2h-1}.\mathrm{U}(\mathrm{z}^\circ_{2h-1}) = \mathrm{y}^\circ_{2h} = \mathrm{y}^\circ_{2h+1}.\mathrm{U}(\mathrm{z}^\circ_{2h})$, pour tout entier $1 \leq \mathrm{h} \leq \mathrm{n}$,

  (alors, on pourra dire que la famille y° *connecte* y' *à* y" *le long de* ξ°).

---

[3] Evidemment, la notion de *satisfaction* généralise aux cas de cônes d'indexations non nécessairement discrètes tant la notion d'*orthogonalité* que celle d'*objet injectif* (voir [C.Q.C.E.] pour une discussion plus complète sur ce thème).

Si $\mathcal{U}$ est un ensemble de cônes de $\boldsymbol{X}$ d'indexations petites et si X est un objet de $\boldsymbol{X}$, on dit qu'il *satisfait* $\mathcal{U}$ si :

- X satisfait tout cône appartenant à $\mathcal{U}$.

Comme en [C.Q.C.E.], on dit alors que $\mathcal{U}$ est une *qualification interne à* $\boldsymbol{X}$, on note Satisf($\mathcal{U}$,$\boldsymbol{X}$) *la sous-catégorie pleine de* $\boldsymbol{X}$ *qualifiable (ou qualifiée) par* $\mathcal{U}$, i.e. la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{X}$ dont les objets sont ceux qui satisfont $\mathcal{U}$, et on note :

$$\mathrm{inj}(\mathcal{U},\boldsymbol{X}) : \mathrm{Satisf}(\mathcal{U},\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$$

le foncteur injection canonique.

2.2. Genres et qualifications.

On appelle *genre de catégories* (*petites*) toute classe $\mathcal{G}$ de catégories petites.

Supposons que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories et que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite.

On dit qu'une qualification $\mathcal{U}$, interne à $\boldsymbol{X}$, est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est une *$\mathcal{G}$-qualification* si :

- pour tout cône $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ appartenant à $\mathcal{U}$, on a $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{G}$

2.3. Existence des limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) dans certaines catégories qualifiables.

On dit qu'une catégorie $\boldsymbol{I}$ est *co-filtrante* (resp. *essentiellement co-filtrante*, *simplement co-filtrante*, *simplement et essentiellement co-filtrante*) si :

- pour toute catégorie *finie* (resp. *finie et non vide*, *finie et connexe*, *finie et connexe et non vide*) $\boldsymbol{\Gamma}$ et tout foncteur $\Phi : \boldsymbol{\Gamma} \to \boldsymbol{I}$, il existe un cône $\mathrm{C}(\boldsymbol{\Gamma}) \to \boldsymbol{I}$ de base Φ.

Alors, on dit qu'une catégorie est *filtrante* (resp. *essentiellement filtrante*, *simplement filtrante*, *simplement et essentiellement filtrante*) si sa duale est co-filtrante (resp. essentiellement co-filtrante, simplement co-filtrante, simplement et essentiellement co-filtrante) et on désigne par $\mathcal{Fil}$ (resp. $\mathcal{Filess}$, $\mathcal{Filspl}$, $\mathcal{Filspless}$) la classe de toutes les catégories *petites et filtrantes* (resp. *petites et essentiellement filtrantes, petites et simplement filtrantes, petites et simplement et essentiellement filtrante*): c'est donc un genre particulier.

Si X est une catégorie localement petite et si $\mathcal{U}$ est une qualification interne à X, il est clair que $\mathcal{U}$ est une $\mathcal{F}il$-qualification (resp. une $\mathcal{F}il_{less}$-qualification, une $\mathcal{F}il_{spl}$-qualification, une $\mathcal{F}il_{splless}$-qualification) si, et seulement si :

- l'indexation I de tout cône $U : \mathrm{C}(I) \to X$ appartenant à $\mathcal{U}$ est une catégorie co-filtrante (resp. essentiellement co-filtrante, simplement co-filtrante, simplement et essentiellement co-filtrante).

Plus concrètement, nous dirons donc que $\mathcal{U}$ est à *indexations co-filtrantes* (resp. *à indexations essentiellement co-filtrantes, simplement co-filtrantes, simplement et essentiellement co-filtrantes*).

Vérifions que :

LEMME *Si X est une catégorie localement petite et si $\mathcal{U}$ est une qualification interne à X et à indexations co-filtrantes (resp. essentiellement co-filtrantes, simplement co-filtrantes, simplement et essentiellement co-filtrantes), i.e. si $\mathcal{U}$ est une $\mathcal{F}il$-qualification (resp. une $\mathcal{F}il_{less}$-qualification, une $\mathcal{F}il_{spl}$-qualification, une $\mathcal{F}il_{splless}$-qualification), alors le foncteur injection canonique :*

$$\mathrm{inj}(\mathcal{U},X) : \mathrm{Satisf}(\mathcal{U},X) \to X$$

crée les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) [4].

---

[4] On déduit immédiatement du LEMME de 2.3 que :

COROLLAIRE. *Si I' est une catégorie petite et filtrante (resp. petite et essentiellement filtrante, petite et simplement filtrante, petite et simplement et essentiellement filtrante), alors les co-limites de co-indexation I' commutent, dans **Ens**, avec les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides).*

PREUVE. Désignons par $\mathrm{CoCones}(I') = \mathrm{Fonct}(\mathrm{CC}(I'),\boldsymbol{Ens})$ la catégorie des co-cônes de ***Ens*** de co-indexation I' et par $\mathrm{CoLim}(I')$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{CoCones}(I')$ ayant pour objets les co-cônes co-limites.

Notons $\mathrm{Yon}(\mathrm{CC}(I')) : \mathrm{C}(I'^{op}) = \mathrm{CC}(I')^{op} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{CC}(I'),\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{CoCones}(I')$ le plongement de Yoneda (il s'agit donc d'un *cône* de $\mathrm{CoCones}(I')$, d'indexation I'^{op}) et posons $\mathcal{U}(I') = \{\mathrm{Yon}(\mathrm{CC}(I')\}$.

Il est clair que $\mathrm{CoLim}(I') = \mathrm{Satisf}(\mathcal{U}(I'),\mathrm{CoCones}(I'))$ et le LEMME de 2.3 s'applique donc, puisque $(I')^{op}$ est - par définition - co-filtrante (resp. essentiellement co-filtrante, simplement co-filtrante, simplement et essentiellement co-filtrante). Mais $\mathrm{CoCones}(I')$ *possède* les limites considérées (qui se calculent, évidemment, "point par point"), ce qui permet de conclure facilement. FIN DE LA PREUVE.

PREUVE. Il suffit de montrer que, si $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône d'indexation co-filtrante (resp. essentiellement co-filtrante, simplement co-filtrante, simplement et essentiellement co-filtrante), si $C : \mathrm{C}(\boldsymbol{G}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône *limite* d'indexation une catégorie finie (resp. finie et non vide, finie et connexe, finie et connexe et non vide) et si, pour tout objet G de $\boldsymbol{G}$, $C(\mathrm{G})$ satisfait U, alors $C(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{G}))$ satisfait U (à cet effet, pour tout autre cône $C' : \mathrm{C}(\boldsymbol{G}) \to \boldsymbol{X}$, de même base que C, on notera $[C'] : C'(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{G})) \to C(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{G}))$ l'unique flèche de $\boldsymbol{X}$ permettant de factoriser C' au travers de C).

a) Supposons, tout d'abord, que $\mathrm{x} : U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})) \to C(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{G}))$ est une flèche de $\boldsymbol{X}$.

En conséquence :

- pour tout objet G de $\boldsymbol{G}$, il existe (en vertu de (SAT 1), puisque $C(\mathrm{G})$ satisfait U) un objet $\mathrm{I_G}$ de $\boldsymbol{I}$ et une flèche $\mathrm{y_G} : U(\mathrm{I_G}) \to C(\mathrm{G})$ de $\boldsymbol{X}$ telle que $\mathrm{y_G}.U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I_G})) = C(\mathrm{p}(\boldsymbol{G})(\mathrm{G}))$,
- pour toute flèche $\mathrm{g} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ de $\boldsymbol{G}$, il existe (en vertu de (SAT 2), puisque $C(\mathrm{G}')$ satisfait U) un entier $\mathrm{n_g} \geq 1$, un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^\circ{}_{\mathrm{g}} = (\mathrm{z}^\circ{}_{\mathrm{g,k}})_{1\le k\le 2\mathrm{n_g}} : \mathrm{I_G} = \mathrm{Z}^\circ{}_{\mathrm{g},1} \xleftarrow[\mathrm{z}^\circ{}_{\mathrm{g},1}]{} \mathrm{Z}^\circ{}_{\mathrm{g},2} \xrightarrow[\mathrm{z}^\circ{}_{\mathrm{g},2}]{} \mathrm{Z}^\circ{}_{\mathrm{g},3} \cdots$$
$$\cdots \mathrm{Z}^\circ{}_{\mathrm{g},2\mathrm{n_g}-1} \xleftarrow[\mathrm{z}^\circ{}_{\mathrm{g},2\mathrm{n_g}-1}]{} \mathrm{Z}^\circ{}_{\mathrm{g},2\mathrm{n_g}} \xrightarrow[\mathrm{z}^\circ{}_{\mathrm{g},2\mathrm{n_g}}]{} \mathrm{Z}^\circ{}_{\mathrm{g},2\mathrm{n_g}+1} = \mathrm{I_{G'}}$$

  et une famille $\mathrm{y}^\circ{}_{\mathrm{g}} = (\mathrm{y}^\circ{}_{\mathrm{g,k}} : U(\mathrm{Z}^\circ{}_{\mathrm{g,k}}) \to C(\mathrm{G}'))_{1\le k\le 2\mathrm{n_g}+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ qui connecte $C(\mathrm{g}).\mathrm{y_G}$ à $\mathrm{y_{G'}}$ le long de $\xi^\circ{}_{\mathrm{g}}$.

Ainsi, on obtient un "diagramme de zigzags de $\boldsymbol{I}$" dont l'indexation (que nous laissons au lecteur le soin de formaliser) est évidemment finie (resp. finie et non vide, finie et connexe, finie et connexe et non vide). Mais, $\boldsymbol{I}$ étant co-fitrante (resp essentiellement co-filtrante, simplement co-filtrante, simplement et essentiellement co-filtrante), il existe un objet S de $\boldsymbol{I}$ et une famille $((\mathrm{s_G})_{\mathrm{G} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{G})}, (\mathrm{s_{g,h}} : \mathrm{S} \to \mathrm{Z}^\circ{}_{\mathrm{g},2\mathrm{h}})_{\mathrm{g} \in \mathrm{Fl}(\boldsymbol{G}), 1\le \mathrm{h} \le \mathrm{n_g}})$ de flèches de $\boldsymbol{I}$ de sorte que :

- pour toute flèche $\mathrm{g} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ de $\boldsymbol{G}$, on a $\mathrm{s_G} = \mathrm{z}^\circ{}_{\mathrm{g},1} . \mathrm{s_{g,1}}$ et $\mathrm{z}^\circ{}_{\mathrm{g},2\mathrm{n_g}} . \mathrm{s_{g,n_g}} = \mathrm{s_{G'}}$,
- pour toute flèche $\mathrm{g} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ de $\boldsymbol{G}$ et tout entier $1 \le \mathrm{h} \le \mathrm{n_g}\text{-}1$, on a $\mathrm{z}^\circ{}_{\mathrm{g},2\mathrm{h}} . \mathrm{s_{g,h}} = \mathrm{z}^\circ{}_{\mathrm{g},2\mathrm{h}+1} . \mathrm{s_{g,h+1}}$.

On en déduit que la famille $(\mathrm{y_G}.U(\mathrm{s_G}) : U(\mathrm{S}) \to C(\mathrm{G}))_{\mathrm{G} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{G})}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ est la famille des projections d'un cône $C' : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{X}$ de même base que C.

Dès lors, il est facile de constater (par unicité) que $[C'].U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{S}) = \mathrm{x}$, autrement dit que $C(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{G}))$ vérifie (SAT 1).

b) Supposons, maintenant, que I' et I'' sont deux objets de $\boldsymbol{I}$ et que $\mathrm{y}' : U(\mathrm{I}') \to C(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{G}))$ et $\mathrm{y}'' : U(\mathrm{I}'') \to C(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{G}))$ sont deux flèches de $\boldsymbol{X}$ telles que $\mathrm{y}'.U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}')) = \mathrm{y}''.U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}''))$.

On en déduit que :

- pour tout objet G de $\mathbf{G}$, il existe (en vertu de (SAT 2), puisque $\mathcal{C}$(G) satisfait U) un entier $n_G \geq 1$, un zigzag de flèches de $\mathbf{I}$:

$$\xi^\circ{}_G = (z^\circ{}_{G.k})_{1\leq k\leq 2n_G} : I' = Z^\circ{}_{G.1} \xleftarrow[z^\circ{}_{G.1}]{} Z^\circ{}_{G.2} \xrightarrow[z^\circ{}_{G.2}]{} Z^\circ{}_{G.3} \cdots$$
$$\cdots Z^\circ{}_{G.2n_G-1} \xleftarrow[z^\circ{}_{G.2n_G-1}]{} Z^\circ{}_{G.2n_G} \xrightarrow[z^\circ{}_{G.2n_G}]{} Z^\circ{}_{G.2n_G+1} = I''$$

et une famille $y^\circ{}_G = (y^\circ{}_{G.k} : U(Z^\circ{}_{G.k}) \to \mathcal{C}(G'))_{1\leq k\leq 2n_G+1}$ de flèches de $\mathbf{X}$ qui connecte $\mathcal{C}(p(\mathbf{G})(G)).y'$ à $\mathcal{C}(p(\mathbf{G})(G)).y''$ le long de $\xi^\circ{}_G$.

Ainsi, on obtient un "diagramme de zigzags de $\mathbf{I}$" dont l'indexation (que nous laissons au lecteur le soin de formaliser) est évidemment finie - et même connexe ! - (resp. finie - et même connexe ! - et non vide, finie et - évidemment - connexe, finie et - évidemment - connexe et non vide). Mais, $\mathbf{I}$ étant co-fitrante (resp. essentiellement co-filtrante, simplement co-filtrante, simplement et essentiellement co-filtrante), il existe un objet S de $\mathbf{I}$ et une famille $((s',s''),(s_{G.h} : S \to Z^\circ{}_{G.2h})_{G\in Ob(\mathbf{G}),1\leq h\leq n_G})$ de flèches de $\mathbf{I}$ de sorte que :

- pour tout objet G de $\mathbf{G}$, on a $s' = z^\circ{}_{G.1}.s_{G.1}$ et $z^\circ{}_{G.2n_G}.s_{G.n_G} = s''$,
- pour tout objet G de $\mathbf{G}$ et tout entier $1 \leq h \leq n_G-1$, on a $z^\circ{}_{G.2h}.s_{G.h} = z^\circ{}_{G.2h-1}.s_{G.h-1}$

On en déduit (par connexité) que .

- pour tout objet G de $\mathbf{G}$, on a :

$$\mathcal{C}(p(\mathbf{G})(G)).y'.s' = y^\circ{}_{G.1}.s' = y_{G.2n_G}.s'' = \mathcal{C}(p(\mathbf{G})(G)).y''.s'',$$

et donc (par unicité) que :

$$y'.s' = y''.s''$$

(et on note $y \,.\, U(S) \to \mathcal{C}(Sm(\mathbf{G}))$ cette valeur commune).

Ainsi, la famille de flèches de $\mathbf{X}$ ·

$$(y' : U(I') \to \mathcal{C}(Sm(\mathbf{G})), y : U(S) \to \mathcal{C}(Sm(\mathbf{G})), y'' \cdot U(I'') \to \mathcal{C}(Sm(\mathbf{G}))$$

connecte y' à y'' le long du zigzag de $\mathbf{I}$:

$$I' \xleftarrow{s'} S \xrightarrow{s''} I'',$$

par conséquent $\mathcal{C}(Sm(\mathbf{G}))$ vérifie aussi (SAT 2). FIN DE LA PREUVE.

3. Sur l'existence des limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) dans les catégories de modèles de certaines esquisses.

3.1. Esquisses.

Comme en [E.T.S.A.] et en [C.Q.C.E.] (notamment), on dit que $\boldsymbol{E} = (\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E}),\mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E}))$ est une *esquisse* si :

- $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ est une catégorie [5], appelée le *support* de $\boldsymbol{E}$,
- $\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})$ est une classe de cônes de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, dits *distingués dans* $\boldsymbol{E}$,
- $\mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})$ est une classe de co-cônes de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, dits *co-distingués* dans $\boldsymbol{E}$.

Alors, on dit que $\boldsymbol{E}$ est *petite* si "tout y est petit", i.e si

- $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ est une catégorie *petite*,
- $\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})$ est un *ensemble* et l'indexation de tout cône distingué est une catégorie *petite*,
- $\mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})$ est un *ensemble* et la co-indexation de tout co-cône co-distingué est une catégorie *petite*.

Si $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}'$ sont deux esquisses, on dit qu'un foncteur $H : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ *définit un homomorphisme* (encore noté) $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ *de* $\boldsymbol{E}$ *vers* $\boldsymbol{E}'$ et de *support* (le foncteur) H si :

- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le cône composé $H{\circ}P : \mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ est distingué dans $\boldsymbol{E}'$,
- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le co-cône composé $H{\circ}Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ est co-distingué dans $\boldsymbol{E}'$.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, on dit qu'un foncteur $M : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{X}$ *définit* un *modèle* (encore noté) $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{X}$ *de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{X}$ et de *support* (le foncteur) M si :

---

[5] Nous supposons (pour simplifier l'exposé - et la lecture), que les supports des esquisses sont des catégories et non des "présentations de catégories", i.e. des *graphes multiplicatifs* (voir [E.T.S.A.]). Cependant, il est clair que, dans ce cadre plus général, les différents résultats énoncés ici demeurent tout aussi valables (à une simple adaptation près concernant le "plongement" - qui, en général, n'en est plus un - de Yoneda).

- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le cône composé $M{\circ}P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône limite dans $\boldsymbol{X}$,
- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le co-cône composé $M{\circ}Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{X}$ est un co-cône co-limite dans $\boldsymbol{X}$

Alors, on note $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$ la catégorie de ces modèles, i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{X})$ ayant pour objets les modèles de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{X}$.

Si $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ est un homomorphisme entre deux esquisses et si $M' : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{X}$ est un modèle de $\boldsymbol{E}'$, il est clair que $M'{\circ}H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{X}$ est un modèle de $\boldsymbol{E}$. Ainsi, on dispose d'un foncteur "composition à droite par H " :

$$\mathrm{Mod}(H,\boldsymbol{X}) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{X}) \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}).$$

Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite.

On note $\mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})) : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le plongement de Yoneda.

Pour tout *cône* $P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, distingué dans $\boldsymbol{E}$, on note successivement :

- $\mathrm{CCA}(P) = \mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})){\circ}P^{\mathrm{op}} : \mathrm{CC}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{C}(\boldsymbol{A})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *co-cône associé* (par dualité, puis composition avec le plongement de Yoneda) au cône P,
- $\mathrm{CSCCA}(P)$ le co-sommet du co-cône associé à P,
- $\mathrm{CLA}(P)$ le *co-cône co-limite associé à* P, i.e. un co-cône co-limite arbitrairement choisi parmi ceux de même co-base que le co-cône associé à P (il en existe au moins un puisque $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ est, évidemment, co-complète),
- $\mathrm{CSCLA}(P)$ le co-sommet du co-cône co-limite $\mathrm{CLA}(P)$ associé à P,
- $\mathrm{f}(P) : \mathrm{CSCLA}(P) \to \mathrm{CSCCA}(P)$ l'unique flèche de $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ permettant de factoriser le co-cône $\mathrm{CCA}(P)$ au travers du co-cône co-limite $\mathrm{CLA}(P)$ (puisqu'ils ont même co-base),
- $\mathrm{U}(P) : \mathrm{C}(\boldsymbol{1}) \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *cône associé à* P, d'indexation la catégorie $\boldsymbol{1}$ (à un seul objet 0 et une seule flèche id(0)) et ayant pour (seule) projection la flèche :

$$\mathrm{U}(P)(\mathrm{p}(\boldsymbol{1})(0)) = \mathrm{f}(P) : \mathrm{CSCLA}(P) \to \mathrm{CSCCA}(P).$$

Maintenant, pour tout *co-cône* $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, co-distingué dans $\boldsymbol{E}$, on note :

- $\mathrm{U}(Q) = \mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})){\circ}Q^{\mathrm{op}} : \mathrm{C}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{CC}(\boldsymbol{B})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *cône associé* (par dualité, puis composition avec le plongement de Yoneda) au co-cône Q.

De la sorte, on obtient une qualification interne à $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ *canoniquement associée à* $\boldsymbol{E}$:

$$\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}) = \{\mathrm{U}(P) \mid P \in \mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})\} \cup \{\mathrm{U}(Q) \mid Q \in \mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})\}$$

et, comme en [C.Q.C.E.], il est facile de constater (compte tenu des propriétés du plongement de Yoneda) que :

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{Satisf}(\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}),\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens}))\,.$$

3.2. Genres et esquisses.

Supposons que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories.

On dit qu'une esquisse $\boldsymbol{E}$ est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est une *$\mathcal{G}$-esquisse* si :

- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, on a $\boldsymbol{B} \in \mathcal{G}$.

3.3. Existence des limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) dans les catégories de modèles de certaines esquisses.

Il est clair (en reprenant les notations de 2.3) qu'une esquisse petite $\boldsymbol{E}$ est une $\mathcal{F}il$-esquisse (resp. une $\mathcal{F}iless$-esquisse, une $\mathcal{F}ilspl$-esquisse, une $\mathcal{F}ilspless$-esquisse) si, et seulement si :

- la co-indexation $\boldsymbol{B}$ de tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$ est une catégorie filtrante (resp. essentiellement filtrante, simplement filtrante, simplement et essentiellement filtrante).

Plus concrètement, nous dirons donc que $\boldsymbol{E}$ est à *co-indexations filtrantes* (resp. à *co-indexations essentiellement filtrantes*, à *co-indexations simplement filtrantes*, à *co-indexations simplement et essentiellement filtrantes*).

On vérifie immédiatement que :

PROPOSITION. *Si* $\boldsymbol{E}$ *est une esquisse petite à co-indexations filtrantes (resp. essentiellement filtrantes, simplement filtrantes, simplement et essentiellement filtrantes), i.e. si* $\boldsymbol{E}$ *est une* $\mathcal{F}il$*-esquisse (resp. une* $\mathcal{F}iless$*-esquisse, une* $\mathcal{F}ilspl$*-esquisse, une* $\mathcal{F}ilspless$*-esquisse) petite, alors la catégorie de ses modèles dans* **Ens** *possède les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides).*

PREUVE. Clairement, si $\boldsymbol{E}$ est petite et à co-indexations filtrantes (resp. essentiellement filtrantes, simplement filtrantes, simplement et essentiellement filtrantes), alors sa qualification associée Qualif($\boldsymbol{E}$) est à indexations co-filtrantes (resp. essentiellement co-filtrantes, simplement co-filtrantes, simplement et essentiellement co-filtrantes) puisque, par construction, si $\boldsymbol{I}$ est une indexation d'un cône de Qualif($\boldsymbol{E}$), on a $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{1}$ ou $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{op}}$, où $\boldsymbol{B}$ est une co-indexation d'au moins un co-cône co-distingué dans $\boldsymbol{E}$. Par conséquent, le LEMME de 2.3 s'applique le foncteur injection canonique :

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{Satisf}(\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}),\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})) \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$$

crée les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides). Mais la catégorie Fonct(Supp($\boldsymbol{E}$),$\boldsymbol{Ens}$) *possède* ces limites (qui se calculent, évidemment, "point par point"). FIN DE LA PREUVE.

4. Sur les diagrammes localement co-limites dans les catégories possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides).

4.1. Diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites.

Si $\boldsymbol{J}'$ est une petite catégorie, si $F' : \boldsymbol{J}' \to \boldsymbol{Ens}$ est un foncteur et si Λ' est un ensemble, on dit (évidemment) que Λ' est une (ou un *objet*) *limite* de F' si :

- il existe un cône $U' : \mathrm{C}(\boldsymbol{J}') \to \boldsymbol{Ens}$ tel que :
    - U' a pour sommet Λ' et pour base F',
    - U' est un cône limite.

Alors, on note (bien entendu) :

$$\Lambda' = \operatorname*{Lim}_{\mathrm{J}' \in \boldsymbol{J}'} F'(\mathrm{J}') .$$

Si $\boldsymbol{I}'$ est une petite catégorie, si $D' : \boldsymbol{I}' \to \boldsymbol{Ens}$ est un foncteur et si Λ'' est un ensemble, on dit (évidemment) que Λ'' est une (ou un *objet*) *co-limite de* D' si :

- il existe un co-cône $V' : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}') \to \boldsymbol{Ens}$ tel que :
    - V' a pour co-sommet Λ'' et pour co-base D',
    - V' est un co-cône co-limite.

Alors, on note (bien entendu) :

$$\Lambda'' = \operatorname*{CoLim}_{I' \in \boldsymbol{I}'} D'(I') .$$

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie *localement petite* et que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories *petites*.

On dit qu'un foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ *admet pour (petit) diagramme localement co-limite* le foncteur $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ si :

- naturellement en tout objet X de $\boldsymbol{X}$, on a (dans ***Ens***).

$$\operatorname*{CoLim}_{I \in \boldsymbol{I}^{op}} \boldsymbol{X}(D(I),X) \cong \operatorname*{Lim}_{J \in \boldsymbol{J}^{op}} \boldsymbol{X}(F(J),X) .$$

Supposons que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites

On désigne par TCC($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) la catégorie (*tronc de co-cône type de co-indexation* $\boldsymbol{J}$ *et d'indexation* $\boldsymbol{I}$) obtenue en adjoignant à la réunion de $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ (supposées disjointes, pour simplifier) une unique flèche (*co-projection type en* (J,I)) cp($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$)(J,I) : J $\to$ I et, ce, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$ et pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$.

Alors, on désigne par CB($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) : $\boldsymbol{J} \to$ TCC($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) et CSm($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) : $\boldsymbol{I} \to$ TCC($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) les foncteurs (*co-base type* et *diagramme co-sommital type*) injections canoniques.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite, un foncteur W · TCC($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) $\to \boldsymbol{X}$ est appelé un (*petit*) *tronc de co-cône de* $\boldsymbol{X}$, *de co-indexation* $\boldsymbol{J}$, *d'indexation* $\boldsymbol{I}$, *de co-base* W∘CB($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) : $\boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, *de diagramme co-sommital* W∘CSm($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ et ayant W(cp($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$)(J,I)) : W(J) $\to$ W(I) pour *co-projection en* (J,I), quand J $\in$ Ob($\boldsymbol{J}$) et I $\in$ Ob($\boldsymbol{I}$).

En particulier, on dit qu'il s'agit d'un *tronc de co-cône localement co-limite* si :

- (LCOLIM 1) pour tout objet X de $\boldsymbol{X}$ et tout co-cône V : CC($\boldsymbol{J}$) $\to \boldsymbol{X}$ de co-sommet X et de même co-base V∘CB($\boldsymbol{J}$) = W∘CB($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) : $\boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ que le tronc de co-cône W : TCC($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) $\to \boldsymbol{X}$, il existe (au moins) un objet I de $\boldsymbol{I}$ et (au moins) une flèche y : W(I) $\to$ X de $\boldsymbol{X}$ telle que :
  - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a y.W(cp($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$)(J,I)) = V(cp($\boldsymbol{J}$)(J)),
- (LCOLIM 2) pour tout objet X de $\boldsymbol{X}$, tous objets I' et I" de $\boldsymbol{I}$ et toutes flèches y' : W(I') $\to$ X et y" : W(I") $\to$ X de $\boldsymbol{X}$ telles que :
  - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a y'.W(cp($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$)(J,I')) = y".$W$(cp($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$)(J,I")),

  alors il existe un entier n ≥ 1, un *zigzag* de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^\circ = (z^\circ_k)_{1 \le k \le 2n} : I' = Z^\circ_1 \xleftarrow[z^\circ_1]{} Z^\circ_2 \xrightarrow[z^\circ_2]{} Z^\circ_3 \ldots$$
$$\ldots Z^\circ_{2n-1} \xleftarrow[z^\circ_{2n-1}]{} Z^\circ_{2n} \xrightarrow[z^\circ_{2n}]{} Z^\circ_{2n+1} = I''$$

et une famille $y^\circ = (y^\circ_k : W(Z^\circ_k) \to X)_{1 \leq k \leq 2n+1}$ de flèches de X telles que :

- $y' = y^\circ_1$ et $y^\circ_{2n+1} = y''$,
- $y^\circ_{2h-1}.W(z^\circ_{2h-1}) = y^\circ_{2h} = y^\circ_{2h+1}.W(z^\circ_{2h})$, pour tout entier $1 \leq h \leq n$.

Compte tenu du calcul des co-limites dans ***Ens***, il est facile de voir que :

LEMME. *Si* X *est une catégorie localement petite et si* I *et* J *sont deux catégories petites, alors :*

- *si* $W : \mathrm{TCC}(J,I) \to X$ *est un tronc de co-cône localement co-limite, le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W \circ \mathrm{CSm}(J,I) : I \to X$ *est un diagramme localement co-limite du foncteur (co-base de* W*)* $F = W \circ \mathrm{CB}(J,I) : J \to X$,
- *si* $D : I \to X$ *est un diagramme localement co-limite du foncteur* $F : J \to X$, *il leur est associé un tronc de co-cône localement co-limite* $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(J,I) \to X$, *de co-base le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CB}(J,I) = F : J \to \boldsymbol{Ens}$ *et de diagramme co-sommital le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CSm}(J,I) = D : I \to X$.

4.2. Genres, diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites.

Supposons que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories, que X est une catégorie localement petite et que I et J sont deux catégories petites.

Si le foncteur $F : J \to X$ admet le foncteur $D : I \to X$ pour diagramme localement co-limite, on dit (par simple souci d'homogénéïté avec les terminologies précédentes) que D est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est un *$\mathcal{G}$-diagramme* localement co-limite de F si :

- $I^{\mathrm{op}} \in \mathcal{G}$.

De même, si $W : \mathrm{TCC}(J,I) \to X$ est un tronc de co-cône localement co-limite, on dit qu'il est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est un *$\mathcal{G}$-tronc de co-cône* localement co-limite si :

- $I^{\mathrm{op}} \in \mathcal{G}$.

Il est évidemment parfaitement trivial de constater (par simple souci d'homogénéïté avec l'énoncé du LEMME de 4.1) que :

LEMME. *Si* $\mathcal{G}$ *est un genre de catégories, si* $\boldsymbol{X}$ *est une catégorie localement petite et si* $\boldsymbol{I}$ *et* $\boldsymbol{J}$ *sont deux catégories petites, alors :*

- *si* $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ *est un* $\mathcal{G}$*-tronc de co-cône localement co-limite, le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un* $\mathcal{G}$*-diagramme localement co-limite du foncteur (co-base de* W*)* $F = W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})$ $\boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,
- *si* $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un* $\mathcal{G}$*-diagramme localement co-limite du foncteur* $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, *il leur est associé un* $\mathcal{G}$*-tronc de co-cône localement co-limite* $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, *de co-base le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ *et de diagramme co-sommital le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$.

4.3. Diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites saturés.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite.

Si $\boldsymbol{I}$ est une catégorie petite et si $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un foncteur, on dira que $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un *(petit) diagramme saturé* si :

- (DSATUR 1) D est fidèle,
- (DSATUR 2) pour tous objets I, Z et Z' de $\boldsymbol{I}$, pour toutes flèches $\mathrm{i} : \mathrm{Z} \to \mathrm{I}$ et $\mathrm{z} : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}'$ de $\boldsymbol{I}$ et pour toute flèche $\mathrm{f} : D(\mathrm{Z}') \to D(\mathrm{I})$ de $\boldsymbol{X}$ telles que $\mathrm{f}.D(\mathrm{z}) = D(\mathrm{i})$, il existe une (nécessairement unique, par fidélité) flèche i' $\mathrm{Z}' \to \mathrm{I}$ de $\boldsymbol{I}$ telle que $D(\mathrm{i}') = \mathrm{f}$ (d'où l'on déduit, par fidélité, que $\mathrm{i}'.\mathrm{z} = \mathrm{i}$)

Si $\boldsymbol{I}''$ est une catégorie petite et si D'' . $\boldsymbol{I}'' \to \boldsymbol{X}$ est un foncteur, notons $\mathrm{Satur}(D'')$ la catégorie, évidemment petite, telle que :

- ses objets sont ceux de $\boldsymbol{I}''$,
- ses flèches sont les $(\mathrm{Z}',\mathrm{f},\mathrm{I}) : \mathrm{Z}' \to \mathrm{I}$ tels que :
  - I et Z' sont deux objets de $\boldsymbol{I}''$,
  - $\mathrm{f} : D''(\mathrm{Z}') \to D''(\mathrm{I})$ est une flèche de $\boldsymbol{X}$,
  - il existe un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}''$:

$$\xi^{\#} = (\mathrm{z}^{\#}_{\mathrm{k}})_{1 \le \mathrm{k} \le 2\mathrm{n}} : \mathrm{Z}' = \mathrm{Z}^{\#}_{1} \xleftarrow[\mathrm{z}^{\#}_{1}]{} \mathrm{Z}^{\#}_{2} \xrightarrow[\mathrm{z}^{\#}_{2}]{} \mathrm{Z}^{\#}_{3} \ldots$$
$$\ldots \mathrm{Z}^{\#}_{2\mathrm{n}-1} \xleftarrow[\mathrm{z}^{\#}_{2\mathrm{n}-1}]{} \mathrm{Z}^{\#}_{2\mathrm{n}} \xrightarrow[\mathrm{z}^{\#}_{2\mathrm{n}}]{} \mathrm{Z}^{\#}_{2\mathrm{n}+1} = \mathrm{I}$$

et une famille $\mathrm{f}^{\#} = (\mathrm{f}^{\#}_{\mathrm{k}} : D''(\mathrm{Z}^{\#}_{\mathrm{k}}) \to D''(\mathrm{I}))_{1 \le \mathrm{k} \le 2\mathrm{n}+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ permettant de connecter f à $\mathrm{id}(D''(\mathrm{I}))$ le long de $\xi^{\#}$.

Alors, on dispose du foncteur canonique :

$$\begin{aligned} \mathrm{satur}(D'') : \mathrm{Satur}(D'') &\to \boldsymbol{X} \\ (Z',f,I) &\mapsto f \end{aligned}$$

et il est facile de constater que satur(D'') est un diagramme saturé.

De plus, on vérifie aisément que, si $\boldsymbol{J}$ est une catégorie petite, si $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ est un foncteur et si D'' en est un petit diagramme localement co-limite, alors satur(D'') en est *aussi* un petit diagramme localement co-limite, évidemment saturé.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite.

Si $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites et si W : TCC($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) $\to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône, on dira qu'il est *(co-sommitalement) saturé* si :

- (TSATUR 1) son diagramme co-sommital W∘CSm($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$) : $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est fidèle,
- (TSATUR 2) pour tous objets I et Z' de $\boldsymbol{I}$ et toute flèche f : W(Z') $\to$ W(I) de $\boldsymbol{X}$ tels que :
    - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a f.W(cp($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$)(J,Z')) = W(cp($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}$)(J,I)) ,

  il existe une (nécessairement unique, par fidélité) flèche i' : Z' $\to$ I de $\boldsymbol{I}$ telle que W(i') = f .

Si $\boldsymbol{I}''$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites et si W'' : TCC($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}''$) $\to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône, notons Satur(W'') la catégorie, évidemment petite, telle que :

- ses objets sont ceux de $\boldsymbol{I}$,
- ses flèches sont les (Z',f,I) : Z' $\to$ I tels que :
    - I et Z' sont deux objets de $\boldsymbol{I}''$,
    - f : W''(Z') $\to$ W''(I) est une flèche de $\boldsymbol{X}$,
    - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a f.W''(cp($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}''$)(J,Z')) = W''(cp($\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}''$)(J,I)) .

Alors, on dispose du foncteur canonique :

$$\begin{aligned} \mathrm{satur}(W'') : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\mathrm{Satur}(W'')) &\to \boldsymbol{X} \\ j &\mapsto W''(j) \\ \mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\mathrm{Satur}(W''))(J,I) &\mapsto W''(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}'')(J,I)) \\ (Z',f,I) &\mapsto f \end{aligned}$$

et il est facile de constater que satur(W'') est un tronc de co-cône saturé de même co-base que le tronc de co-cône W'' .

De plus, on vérifie aisément que, si W'' est un petit tronc de co-cône localement co-limite, alors satur(W'') est *aussi* un petit tronc de co-cône localement co-limite, évidemment saturé, de même co-base que le tronc de co-cône W'' .

Compte tenu du LEMME de 4.1, il est facile de voir que :

LEMME. *Si* X *est une catégorie localement petite et si* I *et* J *sont deux catégories petites, alors :*

- *si* $W : \mathrm{TCC}(J,I) \to X$ *est un petit tronc de co-cône localement co-limite et saturé, le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W \circ \mathrm{CSm}(J,I) : I \to X$ *est un petit diagramme localement co-limite et saturé du foncteur (co-base de* W*)* $F = W \circ \mathrm{CB}(J,I) : J \to X$,
- *si* $D\ I \to X$ *est un petit diagramme localement co-limite et saturé du foncteur* $F \cdot J \to X$, *le tronc de co-cône associé* $W_{F,D}\ : \mathrm{TCC}(J,I) \to X$ *est un petit tronc de co-cône localement co-limité et saturé (de co-base le foncteur* F *et de diagramme co-sommital le foncteur* D*).*

4.4. Genres, diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites saturés.

Il est évidemment parfaitement trivial de constater (par simple souci d'homogénéïté avec les énoncés des LEMMES de 4.1, 4 2 et 4.3) que :

LEMME. *Si* $\mathcal{G}$ *est un genre de catégories, si* X *est une catégorie localement petite et si* I *et* J *sont deux catégories petites, alors :*

- *si* $W : \mathrm{TCC}(J,I) \to X$ *est un* $\mathcal{G}$*-tronc de co-cône localement co-limite et saturé, le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W \circ \mathrm{CSm}(J,I) . I \to X$ *est un* $\mathcal{G}$*-diagramme localement co-limite saturé du foncteur (co-base de* W*)* $F = W \circ \mathrm{CB}(J,I) : J \to X$,
- *si* $D : I \to X$ *est un* $\mathcal{G}$*-diagramme localement co-limite saturé du foncteur* $F : J \to X$, *il leur est associé un* $\mathcal{G}$*-tronc de co-cône localement co-limite et saturé* $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(J,I) \to X$, *de co-base le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CB}(J,I) = F : J \to \mathbf{Ens}$ *et de diagramme co-sommital le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CSm}(J,I) = D : I \to X$.

4.5. Diagrammes localement co-limites saturés dans les catégories possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides).

Supposons que X est une catégorie localement petite et que I et J sont deux catégories petites.

Il est clair (en reprenant la notation de 2.3) qu'un foncteur $F\ \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ admet un foncteur $D \cdot \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ pour $\mathcal{F}il$-diagramme localement co-limite (resp pour $\mathcal{F}iless$-diagramme localement co-limite, pour $\mathcal{F}ilspl$-diagramme localement co-limite, pour $\mathcal{F}ilspless$-diagramme localement co-limite) si, et seulement si :

- $\boldsymbol{I}$ est co-filtrante (resp. essentiellement co-filtrante, simplement co-filtrante, simplement et essentiellement co-filtrante).

Plus concrètement, nous dirons donc que D est *d'indexation co-filtrante* (resp. *d'indexation essentiellement co-filtrante*, *d'indexation simplement co-filtrante*, *d'indexation simplement et essentiellement co-filtrante*).

De même, il est clair que $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un $\mathcal{F}il$-tronc de co-cône localement co-limite (resp. un $\mathcal{F}iless$-tronc de co-cône localement co-limite, un $\mathcal{F}ilspl$-tronc de co-cône localement co-limite, un $\mathcal{F}ilspless$-tronc de co-cône localement co-limite) si, et seulement si :

- $\boldsymbol{I}$ est co-filtrante (resp. essentiellement co-filtrante, simplement co-filtrante, simplement et essentiellement co-filtrante).

Plus concrètement, nous dirons donc aussi que W est *d'indexation co-filtrante* (resp. *d'indexation essentiellement co-filtrante*, *d'indexation simplement co-filtrante*, *d'indexation simplement et essentiellement co-filtrante*).

Etablissons (en reprenant les notations de 2.3) que :

PROPOSITION. *Si* $\boldsymbol{X}$ *est une catégorie localement petite et possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides), si* $\boldsymbol{J}$ *est une catégorie petite, si* $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ *est un foncteur et si* $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *en est un petit diagramme localement co-limite et saturé, alors* $\boldsymbol{I}$ *est nécessairement co-filtrante (resp. essentiellement co-filtrante, simplement co-filtrante, simplement et essentiellement co-filtrante). Autrement dit, tout diagramme localement co-limite et saturé dans* $\boldsymbol{X}$ *est d'indexation co-filtrante (resp. essentiellement co-filtrante, simplement co-filtrante, simplement et essentiellement co-filtrante), i.e. est un* $\mathcal{F}il$*-diagramme localement co-limite (resp. un* $\mathcal{F}iless$*-diagramme localement co-limite, un* $\mathcal{F}ilspl$*-diagramme localement co-limite, un* $\mathcal{F}ilspless$*-diagramme localement co-limite).*

PREUVE. En vertu du LEMME de 4.4, il suffit de prouver que, si $W . \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône localement co-limite *saturé* (de co-base $W_{\circ}\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{J}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ et de diagramme co-sommital $W_{\circ}\mathrm{CS}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$), alors $\boldsymbol{I}$ est co-filtrante (resp. essentiellement co-filtrante, simplement co-filtrante, simplement et essentiellement co-filtrante).

Supposons donc que Γ est une catégorie finie (resp. finie et non vide, finie et connexe, finie et connexe et non vide) et que $\Phi : \Gamma \to \boldsymbol{I}$ est un foncteur.

On dispose tout d'abord :

- du foncteur :

$$\Psi_\Phi : \mathit{\Gamma} \xrightarrow[\Phi]{} \boldsymbol{I} \xrightarrow[D]{} \boldsymbol{X},$$

- d'un cône limite (arbitrairement choisi, puisqu'il en existe au moins un, par hypothèse) de base Ψ_Φ :

$$\mathrm{ConeLim}(\Psi_\Phi) : \mathrm{C}(\mathit{\Gamma}) \to \boldsymbol{X},$$

(dont on note $\mathrm{Lim}(\Psi_\Phi)$ le sommet et $\pi(\Psi_\Phi)_\Gamma : \mathrm{Lim}(\Psi_\Phi) \to \Psi_\Phi(\Gamma) = D(\Phi(\Gamma))$ la projection en tout objet Γ de $\mathit{\Gamma}$).

On dispose ensuite :

- du foncteur (*extension* de Φ aux cônes types) :

$$\begin{aligned} \mathrm{C}(\Phi) : \mathrm{C}(\mathit{\Gamma}) &\to \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \\ (\gamma : \Gamma \to \Gamma') &\mapsto (\Phi(\gamma) : \Phi(\Gamma) \to \Phi(\Gamma')) \\ \mathrm{p}(\mathit{\Gamma})(\Gamma) &\mapsto \mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\Phi(\Gamma)), \end{aligned}$$

et, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$:

- du foncteur (*extraction* du cône d'indexation $\boldsymbol{I}$ et de sommet J) :

$$\begin{aligned} \mathrm{ext}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J}) : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) &\to \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \\ (\mathrm{i} : \mathrm{I} \to \mathrm{I}') &\mapsto (\mathrm{i} : \mathrm{I} \to \mathrm{I}') \\ \mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}) &\mapsto \mathrm{p}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}), \end{aligned}$$

- du cône (composé), de sommet $F(\mathrm{J})$ et de base Ψ_Φ :

$$\Omega(\mathrm{J},\Phi) : \mathrm{C}(\mathit{\Gamma}) \xrightarrow[\mathrm{C}(\Phi)]{} \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \xrightarrow[\mathrm{ext}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J})]{} \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \xrightarrow[W]{} \boldsymbol{X}.$$

- de l'unique flèche de $\boldsymbol{X}$, permettant de factoriser le cône $\Omega(\mathrm{J},\Phi)$ au travers du cône limite $\mathrm{ConeLim}(\Psi_\Phi)$ (de même base) :

$$[\Omega(\mathrm{J},\Phi)] : F(\mathrm{J}) \to \mathrm{Lim}(\Psi_\Phi).$$

Il en résulte (par unicité) que :

- pour toute flèche $\mathrm{j} : \mathrm{J} \to \mathrm{J}'$ de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$[\Omega(\mathrm{J}',\Phi)].W(\mathrm{j}) = [\Omega(\mathrm{J},\Phi)].$$

En d'autres termes, on dispose ainsi d'un *co-cône* $V(\Phi) : \mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{X}$, de *co-sommet* $\mathrm{Lim}(\Psi_\Phi)$, de même *co-base* que W et ayant pour famille de *co-projections* :

$$(V(\Phi)(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J})))_{\mathrm{J} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J})} = ([\Omega(\mathrm{J},\Phi)])_{\mathrm{J} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J})}.$$

En vertu de (LCOLIM 1), il existe donc (au moins) un objet $\mathrm{S}(\Phi)$ de $\boldsymbol{I}$ et (au moins) une flèche $\mathrm{f}(\Phi) : D(\mathrm{S}(\Phi)) \to \mathrm{Lim}(\Psi_\Phi)$ de $\boldsymbol{X}$ telle que :

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$f(\Phi).W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{S}(\Phi))) = [\Omega(\mathrm{J},\Phi)] .$$

On en déduit que :

- pour tout objet Γ de $\boldsymbol{\Gamma}$ et pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$(\pi(\Psi_\Phi)_\Gamma.f(\Phi)).W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{S}(\Phi))) = \pi(\Psi_\Phi)_\Gamma.[\Omega(\mathrm{J},\Phi)] = W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\Phi(\Gamma)) .$$

Mais, comme W est (par hypothèse) saturé, on peut affirmer que :

- pour tout objet Γ de $\boldsymbol{\Gamma}$, il existe (en vertu de (TSATUR 2)) une flèche $s(\Phi)_\Gamma : \mathrm{S}(\Phi) \to \Phi(\Gamma)$ de $\boldsymbol{I}$ telle que $D(s(\Phi)_\Gamma) = W(s(\Phi)_\Gamma) = \pi(\Psi_\Phi)_\Gamma.f(\Phi)$,
- pour toute flèche $\gamma : \Gamma \to \Gamma'$ de $\boldsymbol{\Gamma}$, on a (en vertu de (TSATUR 1)) :

$$\Phi(\gamma).s(\Phi)_\Gamma = s(\Phi)_{\Gamma'}$$

(puisque :

$$\begin{aligned} D(\Phi(\gamma).s(\Phi)_\Gamma) = W(\Phi(\gamma).s(\Phi)_\Gamma) &= (W(\Phi(\gamma)).\pi(\Psi_\Phi)_\Gamma.f(\Phi) \\ &= \Psi_\Phi(\gamma).\pi(\Psi_\Phi)_\Gamma.f(\Phi) \\ &= \pi(\Psi_\Phi)_{\Gamma'}.f(\Phi) \\ &= W(s(\Phi)_{\Gamma'}) = D(s(\Phi)_{\Gamma'})). \end{aligned}$$

En d'autres termes, la famille $(s(\Phi)_\Gamma : \mathrm{S}(\Phi) \to \Phi(\Gamma))_{\Gamma \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{\Gamma})}$ de flèches de $\boldsymbol{I}$ est la famille des projections d'un cône $\Delta(\Phi) : \mathrm{C}(\boldsymbol{\Gamma}) \to \boldsymbol{I}$ de base Φ (et de sommet $\mathrm{S}(\Phi)$). FIN DE LA PREUVE.

4.6. Modification de diagrammes localement co-limites dans les catégories possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides).

On désigne par $\mathcal{OFil}$ (resp. $\mathcal{OFiless}$, $\mathcal{OFilspl}$, $\mathcal{OFilspless}$) la classe de tous les ordres (identifiés à des catégories) petits et filtrants (resp. petits et essentiellement filtrants, petits et simplement filtrants, petits et simplement et essentiellement filtrants): c'est donc un genre particulier.

Si $\boldsymbol{I}$ est une catégorie petite, on note $\mathrm{SsCatFin}(\boldsymbol{I})$ (resp. $\mathrm{SsCatFin}_{\mathrm{nv}}(\boldsymbol{I})$, $\mathrm{SsCatFin}_{\mathrm{cx}}(\boldsymbol{I})$, $\mathrm{SsCatFin}_{\mathrm{cxnv}}(\boldsymbol{I})$) l'ordre (pour l'inclusion) de ses sous-catégories finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) : évidemment, c'est un ordre petit et filtrant (resp. petit et essentiellement filtrant, petit et simplement filtrant, petit et simplement et essentiellement filtrant), i.e. un élément de $\mathcal{OFil}$ (resp. $\mathcal{OFiless}$, $\mathcal{OFilspl}$, $\mathcal{OFilspless}$).

Supposons que X est une catégorie localement petite et que I' et J sont deux catégories petites.

Il est clair (en reprenant la notation de 2.3) qu'un foncteur $F: J \to X$ admet un foncteur $D': I' \to X$ pour $\mathcal{OFil}$-diagramme localement co-limite (resp. pour $\mathcal{OFiless}$-diagramme localement co-limite, pour $\mathcal{OFilspl}$-diagramme localement co-limite, pour $\mathcal{OFilspless}$-diagramme localement co-limite) si, et seulement si :

- I' est un ordre co-filtrant (resp. essentiellement co-filtrant, simplement co-filtrant, simplement et essentiellement co-filtrant)

Plus concrètement, nous dirons donc que D' est *d'indexation un ordre co-filtrant* (resp. *d'indexation un ordre essentiellement co-filtrant*, *d'indexation un ordre simplement co-filtrant*, *d'indexation un ordre simplement et essentiellement co-filtrant*).

De même, il est clair que $W': \mathrm{TCC}(J,I') \to X$ est un $\mathcal{OFil}$-tronc de co-cône localement co-limite (resp. un $\mathcal{OFiless}$-tronc de co-cône localement co-limite, un $\mathcal{OFilspl}$-tronc de co-cône localement co-limite, un $\mathcal{OFilspless}$-tronc de co-cône localement co-limite) si, et seulement si :

- I' est un ordre co-filtrant (resp. essentiellement co-filtrant, simplement co-filtrant, simplement et essentiellement co-filtrant).

Plus concrètement, nous dirons donc aussi que W' est *d'indexation un ordre co-filtrant* (resp. *d'indexation un ordre essentiellement co-filtrant*, *d'indexation un ordre simplement co-filtrant*, *d'indexation un ordre simplement et essentiellement co-filtrant*).

Prouvons que :

PROPOSITION. *Si* X *est une catégorie localement petite et possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides), si* J *est une catégorie petite, si* $F: J \to X$ *est un foncteur admettant un petit diagramme localement co-limite et saturé* $D: I \to X$, *alors il admet aussi un petit diagramme localement co-limite* $\mathrm{Mdf}(D): \mathrm{MDF}(I) \to X$ *d'indexation un ordre petit et co-filtrant (resp. petit et essentiellement co-filtrant, petit et simplement co-filtrant, petit et simplement et essentiellement co-filtrant). Plus précisément, tout diagramme localement co-limite et saturé dans* X *peut être modifié, par limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) en un diagramme localement co-limite d'indexation un ordre petit et co-filtrant (resp. petit et essentiellement co-filtrant, petit et simplement co-filtrant, petit et simplement et essentiellement co-filtrant), i.e. en un* $\mathcal{OFil}$*-diagramme localement co-limite (resp. en un* $\mathcal{OFiless}$*-diagramme localement co-limite, en un* $\mathcal{OFilspl}$*-diagramme localement co-limite, en un* $\mathcal{OFilspless}$*-diagramme localement co-limite).*

PREUVE. En vertu du LEMME de 4.4, il suffit de prouver que, si $W: \mathrm{TCC}(J,I) \to X$ est un tronc de co-cône localement co-limite *saturé* (de co-base

$W_\circ\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{J}) = F \cdot \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ et de diagramme co-sommital $W_\circ\mathrm{CS}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D \cdot \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$), alors le foncteur :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mdf}(D) : \mathrm{MDF}(\boldsymbol{I}) &\to \boldsymbol{X} \\ \Gamma &\mapsto \mathrm{Lim}(\Psi_{\Phi(\Gamma)}) \\ (\Gamma \to \Gamma') &\mapsto [\Gamma' \subseteq \Gamma] \end{aligned}$$

est aussi un diagramme localement co-limite de F, évidemment d'indexation un ordre petit et co-filtrant (resp. petit et essentiellement co-filtrant, petit et simplement co-filtrant, petit et simplement et essentiellement co-filtrant) losqu'on pose :

$$\mathrm{MDF}(\boldsymbol{I}) = \mathrm{SsCatFin}(\boldsymbol{I})^{\mathrm{op}}$$

(resp.
$$\mathrm{MDF}(\boldsymbol{I}) = \mathrm{SsCatFin}_{\mathrm{nv}}(\boldsymbol{I})^{\mathrm{op}},$$
$$\mathrm{MDF}(\boldsymbol{I}) = \mathrm{SsCatFin}_{\mathrm{cx}}(\boldsymbol{I})^{\mathrm{op}},$$
$$\mathrm{MDF}(\boldsymbol{I}) = \mathrm{SsCatFin}_{\mathrm{cxnv}}(\boldsymbol{I})^{\mathrm{op}}\ )$$

et si on note successivement, pour toute sous-catégorie finie (resp. finie et non vide, finie et connexe, finie et connexe et non vide) Γ de $\boldsymbol{I}$:

- $\Phi(\Gamma) : \Gamma \to \boldsymbol{I}$ le foncteur injection canonique,
- $\Psi_{\Phi(\Gamma)} : \Gamma \xrightarrow[\Phi(\Gamma)]{} \boldsymbol{I} \xrightarrow[D]{} \boldsymbol{X}$ le foncteur restriction de D à Γ,
- $\mathrm{ConeLim}(\Psi_{\Phi(\Gamma)}) : \mathrm{C}(\Gamma) \to \boldsymbol{X}$ un cône limite (arbitrairement choisi, puisqu'il en existe au moins un, par hypothèse) de base $\Psi_{\Phi(\Gamma)}$,
- $\mathrm{Lim}(\Psi_{\Phi(\Gamma)})$ le sommet de $\mathrm{ConeLim}(\Psi_{\Phi(\Gamma)})$,
- $\pi(\Psi_{\Phi(\Gamma)})_{\Gamma} : \mathrm{Lim}(\Psi_{\Phi(\Gamma)}) \to \Psi_{\Phi(\Gamma)}(\Gamma) = D(\Phi(\Gamma)(\Gamma))$ la projection en tout objet Γ de Γ,
- pour toute sous-catégorie (resp. toute sous-catégorie non vide, toute sous-catégorie connexe, toute sous-catégorie connexe et non vide) Γ' de Γ (donc, nécessairement finie) :

  $$\mathrm{C}(\Gamma' \subseteq \Gamma) : \mathrm{C}(\Gamma') \to \mathrm{C}(\Gamma),$$

  l'extension aux cônes types de l'injection canonique $\Gamma' \to \Gamma$,
- pour toute sous-catégorie (resp. toute sous-catégorie non vide, toute sous-catégorie connexe, toute sous-catégorie connexe et non vide) Γ' de Γ (donc, nécessairement finie) :

  $$[\Gamma' \subseteq \Gamma] = [\mathrm{ConeLim}(\Psi_{\Phi(\Gamma)})_\circ \mathrm{C}(\Gamma' \subseteq \Gamma)] : \mathrm{Lim}(\Psi_{\Phi(\Gamma)}) \to \mathrm{Lim}(\Psi_{\Phi(\Gamma')})$$

  l'unique flèche de $\boldsymbol{X}$ permettant de factoriser le cône :

  $$\mathrm{C}(\Gamma') \xrightarrow[\mathrm{C}(\Gamma' \subseteq \Gamma)]{} \mathrm{C}(\Gamma) \xrightarrow[\mathrm{ConeLim}(\Psi_{\Phi(\Gamma)})]{} \boldsymbol{X}$$

  au travers du cône limite (de même base) :

$$\mathrm{ConeLim}(\Psi_{\Phi(\Gamma')}) : \mathrm{C}(\Gamma') \to \boldsymbol{X},$$

(on utilise donc des notations tout à fait analogues à celles de la PREUVE de la PROPOSITION de 4.5 - qui s'applique - pourvu qu'on y remplace Φ par $\Phi(\Gamma)$ et on dispose donc aussi :

- d'un cône $\Delta(\Phi(\Gamma)) : \mathrm{C}(\Gamma) \to \boldsymbol{I}$, de base l'injection canonique $\Phi(\Gamma) : \Gamma \to \boldsymbol{I}$ et de projection $\mathrm{s}(\Phi(\Gamma))_\Gamma : \mathrm{S}(\Phi(\Gamma)) \to \Phi(\Gamma)(\Gamma)$ en tout objet Γ de Γ,
- de la flèche $\mathrm{f}(\Phi(\Gamma)) : D(\mathrm{S}(\Phi(\Gamma))) \to \mathrm{Lim}(\Psi_{\Phi(\Gamma)}) = \mathrm{Mdf}(D)(\Gamma)$, dont on vérifie facilement qu'elle est l'unique flèche de $\boldsymbol{X}$ permettant de factoriser le cône :

  $$D_\circ\Delta(\Phi(\Gamma)) : \mathrm{C}(\Gamma) \to \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$$

  au travers du cône limite (de même base) :

  $$\mathrm{ConeLim}(\Psi_{\Phi(\Gamma)})) : \mathrm{C}(\Gamma) \to \boldsymbol{X},$$

- de la famille de flèches $([\Omega(\mathrm{J}, \Phi(\Gamma))] : F(\mathrm{J}) \to \mathrm{Lim}(\Psi_{\Phi(\Gamma)}) = \mathrm{Mdf}(D)(\Gamma))_{\Gamma \in \mathrm{Ob}(\Gamma)}$ dont on vérifie sans peine qu'elle est la famille des co-projections d'un tronc de co-cône $\mathrm{mdf}(W) : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J}, \mathrm{MDF}(\boldsymbol{I})) \to \boldsymbol{X}$, de base $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ et de diagramme co-sommital $\mathrm{Mdf}(D) : \mathrm{MDF}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$).

a) Supposons donc, tout d'abord, que X est un objet de $\boldsymbol{X}$ et que $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{X}$ est un co-cône de base $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$.

Comme D est un diagramme localement co-limite de F, il existe (en vertu de (LCOLIM 1)) au moins un objet I de $\boldsymbol{I}$ et au moins une flèche $\mathrm{y} : D(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telle que, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $\mathrm{y}.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I})) = V(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J}))$.

En prenant $\Gamma = \{\mathrm{I}\}$ - qui est bien finie (resp. finie et non vide, finie et connexe, finie et connexe et non vide) ! - et $\mathrm{z} = \mathrm{y}.\pi(\Psi_{\Phi(\{\mathrm{I}\})})_\mathrm{I} : \mathrm{Mdf}(D)(\{\mathrm{I}\}) \to \mathrm{X}$, on voit que, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a .

$$\begin{aligned}
\mathrm{z}.\mathrm{mdf}(W)(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\mathrm{MDF}(\boldsymbol{I}))(\mathrm{J},\Gamma))) &= \mathrm{y}.\pi(\Psi_{\Phi(\{\mathrm{I}\})})_\mathrm{I}.[\Omega(\mathrm{J}, \Phi(\{\mathrm{I}\}))] \\
&= \mathrm{y}.\Omega(\mathrm{J}, \Phi(\{\mathrm{I}\}))(\mathrm{p}(\{\mathrm{I}\})(\mathrm{I})) \\
&= \mathrm{y}.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I})) \\
&= V(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J}))
\end{aligned}$$

et, par conséquent, le tronc de co-cône $\mathrm{mdf}(W) : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\mathrm{MDF}(\boldsymbol{I})) \to \boldsymbol{X}$ vérifie, lui aussi, (LCOLIM 1).

b) Supposons toujours que X est un objet de $\boldsymbol{X}$, que $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{X}$ est un co-cône de base $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ et, maintenant, que Γ' et Γ'' sont deux objets de $\mathrm{MDF}(\boldsymbol{I})$ et que $\mathrm{z}' : \mathrm{Mdf}(D)(\Gamma') \to \mathrm{X}$ et $\mathrm{z}'' : \mathrm{Mdf}(D)(\Gamma'') \to \mathrm{X}$ sont deux flèches de $\boldsymbol{X}$ telles que, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$\mathrm{z}'.\mathrm{mdf}(W)(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\mathrm{MDF}(\boldsymbol{I}))(\mathrm{J},\Gamma'))) = \mathrm{z}''.\mathrm{mdf}(W)(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\mathrm{MDF}(\boldsymbol{I}))(\mathrm{J},\Gamma''))).$$

Posant :

$$y' = z'.f(\Phi(\Gamma')) : D(S(\Phi(\Gamma'))) \to X$$

et

$$y'' = z''.f(\Phi(\Gamma'')) . D(S(\Phi(\Gamma''))) \to X ,$$

on voit que, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$\begin{aligned}
y'.W(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S(\Phi(\Gamma')))) &= z'.f(\Phi(\Gamma')).W(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S(\Phi(\Gamma')))) \\
&= z'.V(\Phi(\Gamma'))(p(\boldsymbol{J})(J)) \\
&= z'.[\Omega(J,\Phi(\Gamma'))] \\
&= z'.mdf(W)(cp(\boldsymbol{J},MDF(\boldsymbol{I}))(J,\Gamma')) \\
&= z''.mdf(W)(cp(\boldsymbol{J},MDF(\boldsymbol{I}))(J,\Gamma'')) \\
&= z''.[\Omega(J,\Phi(\Gamma''))] \\
&= z''.V(\Phi(\Gamma''))(p(\boldsymbol{J})(J)) \\
&= z''.f(\Phi(\Gamma'')).W(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S(\Phi(\Gamma'')))) \\
&= y''.W(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S(\Phi(\Gamma'')))) .
\end{aligned}$$

Comme D est un diagramme localement co-limite de F, il existe (en vertu de (LCOLIM 2) et de la PROPOSITION de 4.5 - qui s'applique) un zigzag "court" (obtenu en co-filtrant un zigzag "long") de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$S(\Phi(\Gamma')) \xleftarrow[i']{} I \xrightarrow[i'']{} S(\Phi(\Gamma''))$$

telles que $y'.D(i') = y''.D(i'')$.

Désignant par Γ la plus petite sous-catégorie de $\boldsymbol{I}$ - évidemment finie (resp finie et non vide, finie et connexe, finie et connexe et non vide) - contenant Γ', Γ'', les flèches $i' : I \to S(\Phi(\Gamma'))$ et $i'' : I \to S(\Phi(\Gamma'')$ ainsi que $s(\Phi(\Gamma'))(\Gamma') : S(\Phi(\Gamma')) \to \Gamma'$, pour tout objet Γ' de Γ', et $s(\Phi(\Gamma'))(\Gamma') : S(\Phi(\Gamma')) \to \Gamma'$, pour tout objet Γ' de Γ', on voit facilement (par unicité) que :

$$f(\Phi(\Gamma')).\pi(\Psi_{\Phi(\Gamma)})_{S(\Phi(\Gamma'))} = [\Gamma' \subseteq \Gamma]$$

et :

$$f(\Phi(\Gamma'')).\pi(\Psi_{\Phi(\Gamma)})_{S(\Phi(\Gamma''))} = [\Gamma'' \subseteq \Gamma] ,$$

d'où il résulte que :

$$\begin{aligned}
z'.[\Gamma' \subseteq \Gamma] &= z'.f(\Phi(\Gamma')).\pi(\Psi_{\Phi(\Gamma)})_{S(\Phi(\Gamma'))} \\
&= z'.f(\Phi(\Gamma')).D(i').\pi(\Psi_{\Phi(\Gamma)})_I \\
&= y'.D(i').\pi(\Psi_{\Phi(\Gamma)})_I \\
&= y''.D(i'').\pi(\Psi_{\Phi(\Gamma)})_I
\end{aligned}$$

$$= z''.f(\Phi(\Gamma'')).D(i'').\pi(\Psi_{\Phi(\Gamma)})_{I}$$

$$= z''.f(\Phi(\Gamma'')).\pi(\Psi_{\Phi(\Gamma)})_{S(\Phi(\Gamma''))}$$

$$= z''.[\Gamma'\subseteq\Gamma],$$

autrement dit, le tronc de co-cône $\mathrm{mdf}(W) : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\mathrm{MDF}(\boldsymbol{I})) \to X$ vérifie également (LCOLIM 2). FIN DE LA PREUVE.

5. Sur les genres d'esquissabilité des catégories modelables et/ou modélisables possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides).

5.1. Catégories modelables et catégories modélisables.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite, que θ est un ordinal inaccessible et que $\beta < \theta$ est un ordinal régulier.

Comme en [C.M.C.E.], on dit que $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-*modelable* si :

- $\boldsymbol{M}$ possède les co-limites de co-indexations petites et β-filtrantes,
- $\boldsymbol{M}$ contient une sous-catégorie $\boldsymbol{M}'$ telle que :
  - $\boldsymbol{M}'$ est pleine dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ est dense dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ est θ-petite,
  - tout objet de $\boldsymbol{M}'$ est un objet β-présentable dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ possède les θ-petits diagrammes localement co-limites de co-indexations β-petites et le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$ les préserve (autrement dit, pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, il existe une catégorie θ-petite $\boldsymbol{I}$ et un diagramme $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}'$, localement co-limite de F, de sorte que $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})\circ D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}$ est aussi un diagramme localement co-limite de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})\circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$).

Plus précisément encore, on dit que $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-*modélisable* si :

- $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-modelable,

- la catégorie Fonct($\boldsymbol{M},\boldsymbol{Ens}$) contient un *ensemble* $\mathcal{N}$ d'objets tels que (en reprenant les notations précédentes) :
  - tout foncteur $N : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{Ens}$ appartenant à $\mathcal{N}$ est co-limite θ-petite de foncteurs représentés par des objets de $\boldsymbol{M}'$,
  - un objet M de $\boldsymbol{M}$ est β-présentable si, et seulement si, il est β-*petit pour* $\mathcal{N}$ (i.e. si, et seulement si, pour tout foncteur $N : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{Ens}$ appartenant à $\mathcal{N}$, l'ensemble N(M) est β-petit).

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite.

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est θ-*modelable* (resp θ-*modélisable*) s'il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-modelable (resp (θ,β)-*modélisable*) [6].

Enfin, on dit que $\boldsymbol{M}$ est *modelable* (resp. *modélisable*) s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est θ-modelable (resp. θ-modélisable) [7].

5.2. Genres, catégories modelables et catégories modélisables.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite, que θ est un ordinal inaccessible, que $\beta < \theta$ est un ordinal régulier et que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories.

On dit que $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta,\beta)$-*modelable* si :

- $\boldsymbol{M}$ possède les co-limites de co-indexations petites et β-filtrantes,
- $\boldsymbol{M}$ contient une sous-catégorie $\boldsymbol{M}'$ telle que .
  - $\boldsymbol{M}'$ est pleine dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ est dense dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ est θ-petite,

---

[6] Par définition, les catégories (θ,β)-modélisables sont évidemment (θ,β)-modelables. De plus, on peut montrer (voir la Note 10) que les catégories (θ,β)-modelables sont (θ,γ)-modélisables, où $\beta \leq \gamma < \theta$ est un certain ordinal régulier : autrement dit, il y a parfaite identité entre catégories θ-modelables et catégories θ-modélisables (mais pas, bien entendu, entre catégories (θ,β)-modelables et catégories (θ,β)-modélisables).

[7] Si β est un ordinal régulier, il est facile de voir que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie β-*accessible* ("au sens de Makkaï-Paré") si, et seulement si, il existe un ordinal inaccessible $\theta > \beta$ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-modelable. : autrement dit, il y a parfaite identité entre catégories accessibles et catégories modelables et donc (revoir la Note 6) entre catégories accessibles, catégories modelables et catégories modélisables.

- tout objet de $\boldsymbol{M}'$ est un objet β-présentable dans $\boldsymbol{M}$,

- $\boldsymbol{M}'$ possède les θ-petits $\mathcal{G}$-diagrammes localement co-limites de co-indexations β-petites et le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) . \boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$ les préserve (autrement dit, pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, il existe une catégorie θ-petite $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{G}$ et un diagramme $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}'$ localement co-limite de F, de sorte que $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}$ est aussi un diagramme localement co-limite de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$).

Plus précisément encore, on dit que $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta,\beta)$-*modélisable* si :

- $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta,\beta)$-modelable,
- la catégorie $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{Ens})$ contient un *ensemble* $\mathcal{N}$ d'objets tels que (en reprenant les notations précédentes) :
  - tout foncteur $N : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{Ens}$ appartenant à $\mathcal{N}$ est co-limite θ-petite de foncteurs représentés par des objets de $\boldsymbol{M}'$,
  - un objet M de $\boldsymbol{M}$ est β-présentable si, et seulement si, il est β-*petit pour* $\mathcal{N}$ (i.e. si, et seulement si, pour tout foncteur $N : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{Ens}$ appartenant à $\mathcal{N}$, l'ensemble $N(\mathrm{M})$ est β-petit).

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite et que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories.

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta)$-*modelable* (resp $(\mathcal{G},\theta)$-*modélisable*) s'il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta,\beta)$-modelable (resp. $(\mathcal{G},\theta,\beta)$-modélisable).

On dit que $\boldsymbol{M}$ est $\mathcal{G}$-*modelable* (resp. $\mathcal{G}$-*modélisable*) s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta)$-modelable (resp. $(\mathcal{G},\theta)$-modélisable).

5.3. Catégories esquissables.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{E}$ est θ-*petite* si "tout y est θ-petit", i.e. si :

- l'ensemble $\mathrm{Ob}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}))$ des objets (du support) de $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,
- l'ensemble $\mathrm{Fl}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}))$ des flèches (du support) de $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,
- l'ensemble $\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})$ des cônes distingués dans $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,

- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, la catégorie d'indexation $\boldsymbol{A}$ est θ-petite,
- l'ensemble $\mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})$ des co-cônes co-distingués dans $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,
- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, la catégorie d'indexation $\boldsymbol{B}$ est θ-petite.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est une *catégorie θ-esquissable*, s'il existe une esquisse θ-petite dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à la catégorie $\boldsymbol{M}$.

On dit que $\boldsymbol{M}$ est une *catégorie esquissable*, s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est θ-esquissable (autrement dit, s'il existe une esquisse *petite* dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à $\boldsymbol{M}$).

5.4. Genres et catégories esquissables.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite et que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories.

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est *$(\mathcal{G},\theta)$-esquissable* s'il existe une $\mathcal{G}$-esquisse θ-petite dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à la catégorie $\boldsymbol{M}$.

On dit que $\boldsymbol{M}$ est *$\mathcal{G}$-esquissable* s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta)$-esquissable (autrement dit, s'il existe une $\mathcal{G}$-esquisse petite dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à $\boldsymbol{M}$).

5.5. Esquissabilité des catégories modelables et des catégories modélisables.

Rappelons (en nous contentant d'une ... "esquisse" de preuve) le résultat fondamental suivant, établi (pour les seules catégories modelables - mais cela suffit puisque les catégories (θ,β)-modélisables sont au moins - par définition - (θ,β)-modelables) en [C.M.C.E.] (où on trouvera une preuve complète) :

LEMME. *Les catégories modelables (resp. modélisables) sont des catégories esquissables. Plus précisément encore, si* θ *est un ordinal inaccessible, les catégories* θ*-modelables (resp.* θ*-modélisables) sont des catégories* θ*-esquissables* [8].

PREUVE. Supposons que $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-modelable (resp. (θ,β)-modélisable). Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on peut donc choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un diagramme $\mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F) \to \boldsymbol{M}'$ localement co-limite de F, préservé par le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})$. Alors, si on désigne par $\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M})$ l'esquisse (évidemment θ-petite) obtenue comme suit :

- son support est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{Ens})$ dont les objets sont :
  - d'une part les foncteurs (représentés) $\boldsymbol{M}(\mathrm{M}',-) : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{Ens}$, dès que M' est objet de $\boldsymbol{M}'$,
  - d'autre part, les foncteurs (limites β-petites - arbitrairement choisies - de foncteurs représentés) $L(F) = \operatorname{Lim}_{\mathrm{J} \in \boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}} \boldsymbol{M}(F(\mathrm{J}),-)$, dès que $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$ est un foncteur à valeurs dans $\boldsymbol{M}'$, où $\boldsymbol{J}$ est une catégorie β-petite (et en ne choisissant - arbitrairement - qu'une telle catégorie par composante connexe du sous-groupoïde de ***Cat*** ayant pour flèches les seuls foncteurs inversibles),
- ses cônes distingués sont les limites $L(F) = \operatorname{Lim}_{\mathrm{J} \in \boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}} \boldsymbol{M}(F(\mathrm{J}),-)$ précédentes,
- ses co-cônes co-distingués sont les co-limites $L(F) = \operatorname{CoLim}_{\mathrm{I} \in \mathrm{Ch}(F)^{\mathrm{op}}} \boldsymbol{M}(\mathrm{ch}(F)(\mathrm{I}),-)$, dès que $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$ vérifie les conditions précédentes,

on établit que $\boldsymbol{M}$ et $\mathrm{Mod}(\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M}),\boldsymbol{Ens})$ sont équivalentes, ce qui permet de conclure (resp. ce qui permet de conclure et de constater que $\mathcal{N}$ est un ensemble de foncteurs qui correspondent tous, par cette équivalence, à des co-limites θ-petites de foncteurs d'évaluation :

$$\mathrm{ev}_{\mathrm{E}} : \mathrm{Mod}(\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M}),\boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Ens}$$

$$(M : \mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{Ens}) \mapsto M(\mathrm{E})$$

en des objets E de $\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M})$). FIN DE LA PREUVE.

---

[8] La réciproque du LEMME de 5.5 est également valide (voir le LEMME de 5.7).

5.6. Genres et esquissabilité des catégories modelables et des catégories modélisables.

De la PREUVE du LEMME de 5.5, on déduit immédiatement que :

PROPOSITION. *Si $\mathcal{G}$ est un genre de catégories, les catégories $\mathcal{G}$-modelables (resp. $\mathcal{G}$-modélisables) sont des catégories $\mathcal{G}$-esquissables. Plus précisément encore, si θ est un ordinal inaccessible, les catégories $(\mathcal{G},\theta)$-modelables (resp. $(\mathcal{G},\theta)$-modélisables) sont des catégories $(\mathcal{G},\theta)$-esquissables* [9].

PREUVE. Supposons que $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta,\beta)$-modelable (resp. $(\mathcal{G},\theta,\beta)$-modélisable). Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on peut donc tout particulièrement choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un foncteur $\mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F) \to \boldsymbol{M}'$ qui est un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite de F, préservé par le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})$

Alors, comme dans la PREUVE du LEMME de 5.5, $\boldsymbol{M}$ et $\mathrm{Mod}(\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M}),\boldsymbol{Ens})$ sont équivalentes mais, de plus, l'esquisse θ-petite $\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M})$ est (par construction) une $\mathcal{G}$-esquisse. FIN DE LA PREUVE.

5.7. Modelabilité et modélisabilité des catégories esquissables.

Rappelons (en nous contentant de nouveau d'une ... "esquisse" de preuve) le résultat fondamental suivant, établi (pour les seules catégories modelables - mais avec des résultats complémentaires suffisants pour les catégories modélisables) en [C.M.C.E] (où on trouvera les preuves complètes) :

LEMME. *Les catégories esquissables sont des catégories modelables (resp. modélisables). Plus précisément encore, si θ est un ordinal inaccessible, les catégories θ-esquissables sont des catégories θ-modelables (resp. θ-modélisables)* [10].

---

[9] La réciproque de la PROPOSITION de 5.6 *n'est pas*, en général, valide (voir 5.8).

[10] Evidemment, le LEMME de 5.7 est réciproque du LEMME de 5.5 : autrement dit, il y a parfaite identité entre catégories θ-esquissables, catégories θ-modelables et catégories θ-modélisables. (on laisse au lecteur le soin de formaliser une démonstration "intrinsèque" - i.e. ne faisant pas intervenir explicitement leur θ-esquissabilité - de la seule équivalence entre catégories θ-modelables et catégories θ-modélisables).

Il en résulte que, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique" correspondant à la dualité "esquisses-petites vs. catégories-de-modèles-ensemblistes", l'ordinal inaccessible θ est un *invariant* : dans le cas

PREUVE. Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse θ-petite.

a) On établit que $\boldsymbol{M} = \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ est (θ,β)-modelable en désignant par β l'ordinal régulier d'indice sup(α,s,a',b,b')+1 , où :

- α est l'ordinal régulier d'indice a+1 , lorsque :
  - a est la borne supérieure des cardinaux des (ensembles de flèches des) indexations des cônes distingués de $\boldsymbol{E}$,
- s est le cardinal de (l'ensemble des flèches du support de $\boldsymbol{E}$) Supp($\boldsymbol{E}$) ,
- a' est le cardinal de l'ensemble des cônes distingués de $\boldsymbol{E}$,
- b est la borne supérieure des cardinaux des (ensembles de flèches des) co-indexations des co-cônes co-distingués de $\boldsymbol{E}$,
- b' est le cardinal de l'ensemble des co-cônes co-distingués de $\boldsymbol{E}$,

puis en établissant que la sous-catégorie pleine $\boldsymbol{M}_{<\beta}$ de $\boldsymbol{M}$, dont les objets sont les modèles de $\boldsymbol{E}$ à valeurs dans la catégorie des ensembles de cardinaux strictement inférieurs à β , est "essentiellement θ-petite", i.e. équivalente (par l'injection canonique) à une de ses sous-catégories pleines θ-petites $\boldsymbol{M}'$ qui, dès lors, convient.

b) Maintenant, si on désigne par $\boldsymbol{M}_\beta$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{M}$ dont les objets sont *tous* les objets β-présentables de $\boldsymbol{M}$, il est facile de vérifier (vues les propriétés de $\boldsymbol{M}'$ dans la catégorie (θ,β)-modelable $\boldsymbol{M}$) que $\boldsymbol{M}_\beta$ est équivalente (par l'injection canonique) à sa sous-catégorie pleine $\boldsymbol{M}'$. Il en résulte que $\boldsymbol{M}_\beta$ est aussi équivalente (par l'injection canonique) à sa sous-catégorie pleine $\boldsymbol{M}_{<\beta}$: dès lors, on voit que les objets β-présentables de $\boldsymbol{M}$ sont *exactement* les objets β-petits pour l'ensemble $\mathcal{N}$ des foncteurs d'évaluation :

$$\mathrm{ev}_{\mathrm{E}} : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) = \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{Ens}$$
$$(M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}) \mapsto M(\mathrm{E})$$

en les objets E de $\boldsymbol{E}$.

Pour conclure à la (θ,β)-modélisabilité de $\boldsymbol{M}$, il suffit enfin de constater (comme dans l'Appendice de [C.M.C.E.]) que, pour tout objet E de $\boldsymbol{E}$, on a :

$$\mathrm{ev}_{\mathrm{E}} = \underset{\substack{M' \in \boldsymbol{M}' \\ n' : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{M}}(M',-) \Rightarrow \mathrm{ev}_{\mathrm{E}} \,.\, \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{Ens}}}{\mathrm{CoLim}} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{M}}(M',-)$$

(où l'indexation est bien θ-petite). FIN DE LA PREUVE.

---

général, c'est le seul connu à ce jour (et il est donc particulièrement dommageable - pour ceux qui n'écrivent et/ou ne lisent que cette langue - que ce "θ" n'admette aucune traduction en américain ...). Cependant, dans un certain nombre de cas *particuliers*, on dispose aussi d'invariants *spécifiques* plus précis (voir la Note 12).

5.8. Genres et modelabilité et/ou modélisabilité des catégories esquissables.

La réciproque de la PROPOSITION de 5.6 *n'est pas* (en général) valide. Plus précisément, si $\mathcal{G}$ est un *quelconque* genre de catégories et si θ est un ordinal inaccessible, on ne peut affirmer (en général) que, pour *toute* $\mathcal{G}$-esquisse θ-petite $\boldsymbol{E}$, la catégorie $\boldsymbol{M} = \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ de ses modèles est $(\mathcal{G},\theta)$-modelable (resp. $(\mathcal{G},\theta)$-modélisable). D'après le LEMME de 5.7, elle est *seulement* (en général) θ-modelable (resp. θ-modélisable) : c'est que (en reprenant les notations de 5.1 et 5.7), il n'est pas possible (en général) de trouver parmi *tous* les diagrammes $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}' \approx \boldsymbol{M}_{<\beta} \approx \boldsymbol{M}_\beta$, localement co-limites d'un *quelconque* foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, *au moins un* d'entre eux [11] qui soit un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite de F [12].

5.9. Genres d'esquissabilité des catégories modelables et/ou modélisables possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides).

Etablissons (en reprenant les notations de 2.3) que .

---

[11] Sauf cas particulier (voir [D.E.T.G.]), deux diagrammes localement co-limites (même saturés) d'un même foncteur F *ne sont pas* (en général) "isomorphes".

[12] A contrario (et c'est là un point de vue largement initié en [C.Q.C.E.], Appendices 1 et 2), on dispose *automatiquement* d'une réciproque de la PROPOSITION de 5.6, mais *spécifique* d'un genre *particulier* $\mathcal{G}$, *si et seulement si* on peut établir que, pour ce genre $\mathcal{G}$, de tels choix sont rendus possibles (par toute procédure adéquate). Dans ce cas, on peut donc conclure que, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique" correspondant à la dualité "esquisses-petites vs. catégories-de-modèles-ensemblistes", le couple $(\mathcal{G},\theta)$ est un *invariant*

Par exemple, si on désigne par $\mathcal{C}at$ le genre de *toutes* les petites catégories et si on prend $\mathcal{G} = \mathcal{C}at$, on peut aussi dire (revoir la Note 10) que, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique", $(\mathcal{C}at,\theta)$ est un invariant, puisque les LEMMES de 5.5 et 5.7 sont réciproques l'un de l'autre.

De même, des considérations de 5.9 résulte que, lorsque $\mathcal{G} = \mathcal{F}il$ (resp. $\mathcal{F}iless$, $\mathcal{F}ilspl$, $\mathcal{F}ilspless$), la réciproque de la PROPOSITION de 5.6 est valable. Autement dit, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique", $(\mathcal{F}il,\theta)$ (resp. $(\mathcal{F}iless,\theta)$, $(\mathcal{F}ilspl,\theta)$, $(\mathcal{F}ilspless,\theta)$) est aussi un invariant.

Pareillement, des considérations de 5.9 résulte que, lorsque $\mathcal{G} = \mathcal{OF}il$ (resp. $\mathcal{G} = \mathcal{OF}iless$, $\mathcal{G} = \mathcal{OF}ilspl$, $\mathcal{G} = \mathcal{OF}ilspless$), la réciproque de la PROPOSITION de 5.6 est valable. Autement dit, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique", $(\mathcal{OF}il,\theta)$ (resp. $(\mathcal{OF}iless,\theta)$, $(\mathcal{OF}ilspl,\theta)$, $(\mathcal{OF}ilspless,\theta)$) est également un invariant.

THEOREME. P*our toute catégorie localement petite* $\boldsymbol{M}$, *les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie modelable possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides),*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $\mathcal{F}il$*-modelable (resp.* $\mathcal{F}iless$*-modelable,* $\mathcal{F}ilspl$*-modelable,* $\mathcal{F}ilspless$*-modelable),*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $\mathcal{F}il$*-esquissable (resp.* $\mathcal{F}iless$*-esquissable,* $\mathcal{F}ilspl$*-esquissable,* $\mathcal{F}ilspless$*-esquissable),*

ainsi, en particulier, les catégories modelables possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) sont exactement (à équivalence près) les catégories de modèles (dans $\mathbf{Ens}$*) des esquisses petites à co-indexations filtrantes (resp. essentiellement filtrantes, simplement filtrantes simplement et essentiellement filtrantes).*

Plus précisément encore, si θ *est un ordinal inaccessible et si* $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie localement petite, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* θ*-modelable possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides),*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $(\mathcal{F}il,\theta)$*-modelable (resp.* $(\mathcal{F}iless,\theta)$*-modelable,* $(\mathcal{F}ilspl,\theta)$*-modelable,* $(\mathcal{F}ilspless,\theta)$*-modelable),*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $(\mathcal{F}il,\theta)$*-esquissable (resp.* $(\mathcal{F}iless,\theta)$*-esquissable,* $(\mathcal{F}ilspl,\theta)$*-esquissable,* $(\mathcal{F}ilspless,\theta)$*-esquissable),*

ainsi, en particulier, les catégories θ*-modelables possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) sont exactement (à équivalence près) les catégories de modèles (dans* $\mathbf{Ens}$*) des esquisses* θ*-petites à co-indexations filtrantes (resp. essentiellement filtrantes, simplement filtrantes, simplement et essentiellement filtrantes).*

PREUVE. a) Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie (θ,β)-modelable et possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides).

Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on peut donc choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un diagramme θ-petit $\mathrm{ch}'(F) : \mathrm{Ch}'(F) \to \boldsymbol{M}'$, localement co-limite de F et préservé par le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$.

Dès lors, pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on voit (en reprenant les notations de 4.3) que :

- le diagramme :

$$\mathrm{ch}(F) = \mathrm{satur}(\mathrm{ch}'(F)) : \mathrm{Ch}(F) = \mathrm{Satur}(\mathrm{ch}'(F)) \to \boldsymbol{M}'$$

est un diagramme θ-petit (puisque $\boldsymbol{M}'$ est θ-petite) localement co-limite et *saturé* de F,

- le diagramme :

$$\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ \mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F) \xrightarrow[\mathrm{ch}(F)]{} \boldsymbol{M}' \xrightarrow[\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})]{} \boldsymbol{M}$$

  est un diagramme θ-petit localement co-limite et *saturé* de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$ (puisque $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie *pleine* de $\boldsymbol{M}$).

Mais, $\boldsymbol{M}$ possèdant (par hypothèse) les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides), les diagrammes localement co-limites *saturés* dans $\boldsymbol{M}$ *sont* (d'après la PROPOSITION de 4.5) des diagrammes localement co-limites d'indexations co-filtrantes (resp. essentiellement co-filtrantes, simplement co-filtrantes, simplement et essentiellement co-filtrantes). Par conséquent (en reprenant les notations de 5.5) Esquiss(Ch,$\boldsymbol{M}$) est une $\mathcal{F}il$-esquisse (resp une $\mathcal{F}iless$-esquisse, une $\mathcal{F}ilspl$-esquisse, une $\mathcal{F}ilspless$-esquisse) et $\boldsymbol{M}$ est donc ($\mathcal{F}il$,θ,β)-modelable (resp. ($\mathcal{F}iless$,θ,β)-modelable, ($\mathcal{F}ilspl$,θ,β)-modelable, ($\mathcal{F}ilspless$,θ,β)-modelable).

b) Supposons, maintenant, que $\boldsymbol{M}$ est ($\mathcal{F}il$,θ)-modelable (resp. ($\mathcal{F}iless$,θ)-modelable, ($\mathcal{F}ilspl$,θ)-modelable, ($\mathcal{F}ilspless$,θ)-modelable). D'après la PROPOSITION de 5.6, elle est ($\mathcal{F}il$,θ)-esquissable (resp. ($\mathcal{F}iless$,θ)-esquissable, ($\mathcal{F}ilspl$,θ)-esquissable, ($\mathcal{F}ilspless$,θ)-esquissable).

c) Supposons, enfin, que $\boldsymbol{E}$ est une $\mathcal{F}il$-esquisse (resp. $\mathcal{F}iless$-esquisse, $\mathcal{F}ilspl$-esquisse, $\mathcal{F}ilspless$-esquisse) θ-petite.

En vertu du LEMME de 5.7, la catégorie Mod($\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{Ens}$) est θ-modelable.

De plus, en vertu de la PROPOSITION de 3.3, la catégorie Mod($\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{Ens}$) possède les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides). FIN DE LA PREUVE [13].

De même, établissons (en reprenant les notations de 2.3) que :

THEOREME. P*our toute catégorie localement petite* $\boldsymbol{M}$, *les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie modélisable possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides),*

---

[13] De cette PREUVE il ressort que, si $\mathcal{G} = \mathcal{F}il$ (resp. $\mathcal{G} = \mathcal{F}iless$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}ilspl$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}ilspless$), si θ est un ordinal inaccessible et si $\boldsymbol{E}$ est une quelconque $\mathcal{G}$-esquisse θ-petite (et en reprenant les notations de 5.1 et 5.7), il existe une *procédure* (voir la Note 12) permettant de trouver, parmi *tous* les diagrammes $D' : \boldsymbol{I} \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})_{<\beta} = \boldsymbol{M}_{<\beta} \approx \boldsymbol{M}'$ localement co-limites d'un *quelconque* foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, *au moins un* d'entre eux qui soit un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite : elle consiste à en *saturer* un quelconque !

- *$\boldsymbol{M}$ est une catégorie $\mathcal{OFil}$-modélisable (resp. $\mathcal{OFiless}$-modélisable, $\mathcal{OFilspl}$-modélisable, $\mathcal{OFilspless}$-modélisable),*
- *$\boldsymbol{M}$ est une catégorie $\mathcal{OFil}$-esquissable (resp. $\mathcal{OFiless}$-esquissable, $\mathcal{OFilspl}$-esquissable, $\mathcal{OFilspless}$-esquissable),*

ainsi, en particulier, les catégories modélisables possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) sont exactement (à équivalence près) les catégories de modèles (dans **Ens** *) des esquisses petites à co-indexations des ordres filtrants (resp. essentiellement filtrants, simplement filtrants simplement et essentiellement filtrants).*

Plus précisément encore, si θ est un ordinal inaccessible et si $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- *$\boldsymbol{M}$ est une catégorie θ-modélisable possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides),*
- *$\boldsymbol{M}$ est une catégorie $(\mathcal{OFil},\theta)$-modélisable (resp. $(\mathcal{OFiless},\theta)$-modélisable, $(\mathcal{OFilspl},\theta)$-modélisable, $(\mathcal{OFilspless},\theta)$-modélisable),*
- *$\boldsymbol{M}$ est une catégorie $(\mathcal{OFil},\theta)$-esquissable (resp. $(\mathcal{OFiless},\theta)$-esquissable, $(\mathcal{OFilspl},\theta)$-esquissable, $(\mathcal{OFilspless},\theta)$-esquissable),*

ainsi, en particulier, les catégories θ-modélisables possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides) sont exactement (à équivalence près) les catégories de modèles (dans **Ens** *) des esquisses θ-petites à co-indexations des ordres filtrants (resp. essentiellement filtrants, simplement filtrants, simplement et essentiellement filtrants).*

PREUVE. a) Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie (θ,β)-modélisable et possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides).

Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on peut donc choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un diagramme θ-petit $\mathrm{ch}'(F) : \mathrm{Ch}'(F) \to \boldsymbol{M}'$, localement co-limite de F et préservé par le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$.

Alors, on voit (en reprenant les notations de 4.3) que le diagramme :

$$\mathrm{ch}''(F) = \mathrm{satur}(\mathrm{ch}'(F)) : \mathrm{Ch}''(F) = \mathrm{Satur}(\mathrm{ch}'(F)) \to \boldsymbol{M}'$$

est un diagramme θ-petit (puisque $\boldsymbol{M}'$ est θ-petite) localement co-limite et *saturé* de F, tandis que le diagramme :

$$\overline{\mathrm{ch}''}(F) = \mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ \mathrm{ch}''(F) : \mathrm{Ch}''(F) \xrightarrow[\mathrm{ch}''(F)]{} \boldsymbol{M}' \xrightarrow[\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})]{} \boldsymbol{M}$$

est un diagramme θ-petit localement co-limite et *saturé* de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$ (puisque $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie *pleine* de $\boldsymbol{M}$).

Mais, $\boldsymbol{M}$ possède (par hypothèse) les limites d'indexations finies (resp finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides), par conséquent le diagramme :

$$\mathrm{Mdf}(\overline{\mathrm{ch}''}(F)) : \mathrm{MDF}(\mathrm{Ch}''(F)) \to \boldsymbol{M}$$

est aussi (d'après la PROPOSITION de 4.6 - dont on a repris les notations) un diagramme θ-petit localement co-limite de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$ et d'indexation un ordre petit et co-filtrant (resp. petit et essentiellement co-filtrant, petit et simplement co-filtrant, petit et simplement et essentiellement co-filtrant).

Comme, de plus, $\mathrm{Mdf}(\overline{\mathrm{ch}''}(F))$ est obtenu en modifiant par limites *finies* $\overline{\mathrm{ch}''}(F)$, qui est à valeurs dans la sous-catégorie pleine $\boldsymbol{M}_{<\beta}$ de $\boldsymbol{M}$ dont les objets sont les objets β-*petits* pour $\mathcal{U}$, il apparaît que $\mathrm{Mdf}(\overline{\mathrm{ch}''}(F))$ est *aussi* à valeurs dans $\boldsymbol{M}_{<\beta}$.

Par conséquent (puisque $\boldsymbol{M}_{<\beta}$ est équivalente - par l'injection canonique - à $\boldsymbol{M}'$) il existe un :

$$\mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F) = \mathrm{MDF}(\mathrm{Ch}''(F)) \to \boldsymbol{M}'$$

tel que $\mathrm{Mdf}(\overline{\mathrm{ch}''}(F))$ et $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ \mathrm{ch}(F)$ soient naturellement équivalents.

Ainsi, pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F . \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on voit (par construction) que :

- le diagramme :

  $$\mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F) \to \boldsymbol{M}'$$

  est également un diagramme θ-petit localement co-limite de F, d'indexation un ordre petit et co-filtrant (resp. petit et essentiellement co-filtrant, petit et simplement co-filtrant, petit et simplement et essentiellement co-filtrant),

- le diagramme :

  $$\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ \mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F) \xrightarrow[\mathrm{ch}(F)]{} \boldsymbol{M}' \xrightarrow[\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})]{} \boldsymbol{M}$$

  est un diagramme localement co-limite de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$

En conséquence (en reprenant les notations de 5.5), $\mathrm{Esquiss}(\mathrm{Ch},\boldsymbol{M})$ est une OFil-esquisse (resp. une $\mathit{OFiless}$-esquisse, une $\mathit{OFilspl}$-esquisse, une $\mathit{OFilspless}$-esquisse) et $\boldsymbol{M}$ est donc $(\mathit{OFil},\theta,\beta)$-modélisable (resp. $(\mathit{OFiless},\theta,\beta)$-modélisable, $(\mathit{OFilspl},\theta,\beta)$-modélisable, $(\mathit{OFilspless},\theta,\beta)$-modélisable).

b) Supposons, maintenant, que $\boldsymbol{M}$ est (OFil,θ)-modélisable (resp $(\mathit{OFiless},\theta)$-modélisable, $(\mathit{OFilspl},\theta)$-modélisable, $(\mathit{OFilspless},\theta)$-modélisable). D'après la PROPOSITION de 5.6, elle est (OFil,θ)-esquissable (resp. $(\mathit{OFiless},\theta)$-esquissable, $(\mathit{OFilspl},\theta)$-esquissable, $(\mathit{OFilspless},\theta)$-esquissable).

c) Supposons, enfin, que $\boldsymbol{E}$ est une OFil-esquisse (resp. $\mathit{OFiless}$-esquisse, $\mathit{OFilspl}$-esquisse, $\mathit{OFilspless}$-esquisse) θ-petite.

En vertu du LEMME de 5.7, la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ est θ-modélisable.

De plus, puisque $\boldsymbol{E}$ est aussi une $\mathcal{F}il$-esquisse (resp. $\mathcal{F}iless$-esquisse, $\mathcal{F}ilspl$-esquisse, $\mathcal{F}ilspless$-esquisse) θ-petite (particulière), en vertu de la PROPOSITION de 3 3, la catégorie Mod($\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{Ens}$) possède les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides). FIN DE LA PREUVE [14].

6. Bibliographie.

[C.A.L.F.] **P. Ageron**, *Catégories accessibles à limites projectives non vides et catégories accessibles à limites projectives finies*, Diagrammes 34, Paris, 1995.

[C.M.C.E.] **C. Lair**, *Catégories modelables et catégories esquissables*, Diagrammes 6, Paris, 1981.

[C.M.C.F.] **R. Guitart et C. Lair**, *Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes*, Diagrammes 4, Paris, 1980.

[C Q C.E.] **C. Lair**, *Catégories qualifiables et catégories esquissables*, Diagrammes 17, Paris, 1987.

[D.E.T.G.] **C. Lair**, *Diagrammes localement libres, extensions de corps et théorie de Galois*, Diagrammes 10, Paris, 1983.

[E.T.S.A.] **C. Ehresmann**, *Esquisses et types des structures algébriques*, Bul. Instit. Polit. Iasi, XIV, 1968.

7. Table.

---

[14] De cette PREUVE il ressort que, si $\mathcal{G} = \mathcal{OF}il$ (resp. $\mathcal{G} = \mathcal{OF}iless$, $\mathcal{G} = \mathcal{OF}ilspl$, $\mathcal{G} = \mathcal{OF}ilspless$), si θ est un ordinal inaccessible et si $\boldsymbol{E}$ est une quelconque $\mathcal{G}$-esquisse θ-petite (et en reprenant les notations de 5.1 et 5.7), il existe une *procédure* (voir la Note 12) permettant de trouver, parmi *tous* les diagrammes $D' : \boldsymbol{I} \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})_{<\beta} = \boldsymbol{M}_{<\beta} \approx \boldsymbol{M}_{\beta} \approx \boldsymbol{M}'$ localement co-limites d'un *quelconque* foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, *au moins un* d'entre eux qui soit un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite : elle consiste à en *saturer* un quelconque puis à *modifier par limites* le diagramme saturé obtenu !

Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques
Tours 45-55-5ème étage
2, place Jussieu
75251 Paris CEDEX 05
FRANCE

lair@mathp7.jussieu.fr