DIAGRAMMES

ELIE KOUDSI
YVES DIERS

Booloïdes

Diagrammes, tome 23 (1990), p. 15-41
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1990__23__15_0>

DIAGRAMMES VOLUME 23, 1990
ACTES DES JOURNEES E.L.I.T.
(UNIV. PARIS 7, 27 JUIN-2 JUILLET 1988)

BOOLOIDES

par Elie KOUDSI et Yves DIERS

Département de Mathématiques - Institut des Sciences et Techniques - Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis - 59326 Valenciennes Cedex - France.

ABSTRACT

The theory of boolean algebras is well known. Its applications are numerous, various, concrete, in many fields : mathematics, computer science, electronics, automata, electrotechnic, operational research, etc.

We propose here to develop the theory of "non commutative Boolean algebras" with the hope that it can be applyed in some of the preveous fields. We have found some applications in mathematics in the representation of sheaves of simple algebras on boolean topological spaces. They are defined by means of two constants denoted 0 and 1 and three operations : the "non commutative intersection", the "non commutative union" and the "symetric difference". The boolean algebras, are precisely those whose operations are commutatives.

0. Introduction

La théorie des algèbres de Boole est bien connue. Ses applications sont multiples, variées, concrètes, dans de nombreuses disciplines : mathématiques, informatique, électronique, automatique, électrotechnique, gestion, recherche opérationnelle, etc.

Nous proposons ici de développer la théorie des "algèbres de Boole non commutatives" en présumant qu'elle puisse s'appliquer dans les disciplines précédemment citées. Nous avons effectivement trouvé des applications dans la représentation des faisceaux d'algèbres simples sur les espaces topologiques booléens.

A la vérité, l'idée des algèbres de Boole non commutatives vient de Y. DIERS qui a suggéré que les algèbres à comparaison qu'il avait introduites dans son livre "Categories of Boolean sheaves of simple algebras" étaient une sorte d'algèbres de Boole non commutatives. Il a aussi suggéré que l'opération quaternaire qui décrit ces algèbres à comparaison pouvait être écrite par plusieurs opérations binaires. Ces opérations sont précisément celles qui décrivent la structure d'algèbres de Boole non commutatives. Dans la suite, nous utilisons le mot "booloïde"pour décrire cette structure.

Les booloïdes sont définis à partir de deux éléments distingués notés 0 et 1 et de trois opérations qui représentent respectivement l'"intersection non commutative", la "réunion non commutative" et la "différence symétrique" commutative. Les algèbres de Boole sont précisément les booloïdes pour lequels les deux opérations : intersection et réunion sont commutatives.

Comme dans les algèbres de Boole, chaque élément a possède une sorte d'élément complémentaire a' vérifiant les lois de De Morgan. Nous définissons sur un booloïde A une

reçu le 21/11/1989

relation de préordre qui est l'analogue de la relation d'ordre dans les d'algèbres de Boole. Les propriétés de ce préordre peuvent être résumées par les deux propositions suivantes :

a) A est un prétreillis borné distributif où l'"intersection" et la "réunion" de deux éléments sont respectivement les bornes inférieures et supérieures dans A et les éléments distingués 0 et 1 sont respectivement borne inférieure et supérieure de A.

b) a et a' sont deux éléments précomplémentaires, c'est-à-dire : 0 est borne inférieure de a et a' , et 1 est borne supérieure de a et a'.

Cette relation de préordre sur A permet de définir une relation d'équivalence dont le quotient est l'algèbre de Boole couniverselle $\overline{A}$ associée à A.

Les éléments symétriques d'un booloïde A sont les éléments qui commutent pour les deux opérations "intersection" et "réunion". Ils forment une algèbre de Boole isomorphe à l'algèbre de Boole couniverselle $\overline{A}$.

Dans les booloïdes, on définit les notions d'idéaux, de filtres et de congruences. Nous démontrons qu'il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux, l'ensemble des filtres et l'ensemble des congruences. On introduit les idéaux premiers (resp. filtres premiers). Un booloïde simple est un booloïde qui n'admet que $\{0\}$ et lui-même comme idéaux. On montre qu'ils sont exactement les ensembles bipointés : ensemble ayant deux éléments distingués distincts 0 et 1.

Les anneaux commutatifs qui sont munis d'une structure de booloïde compatible avec la structure d'anneaux sont étudiés sous le nom d'anneaux booloïdes. Pour obtenir un anneau booloïde, il suffit de munir la structure d'anneau commutatif d'une seule opération binaire supplémentaire. Cette structure est équivalente à la notion de E-anneaux définie par J.F. KENNISON [6].

1. Booloïdes

1-1 Définition.

Un **booloïde** est un ensemble A muni de deux éléments distingués, notés 0 et 1, et trois opérations binaires notées respectivement : $\cdot, *, +$ satisfaisant les axiomes suivants :

1) L'opération $\cdot$ est associative, symétrique (c'est-à-dire : $a \cdot b \cdot c = b \cdot a \cdot c$), et admet 1 comme unité à gauche.
2) L'opération $*$ est associative et admet 0 comme unité à gauche.
3) L'opération $+$ est commutative et vérifie : $a + a = 0$.
4) L'opération $\cdot$ est distributive par rapport à $*$ et distributive à gauche par rapport à $+$.
5) $a \cdot (a * b) = a$
6) $(a + b) * 1 = 1$
7) $(a + b) * a = (a + b) * b$

1-2 Définition. Soient A et B deux booloïdes. Une application f de A dans B est un **morphisme de booloïdes**, si f préserve les opérations $\cdot, *$ et $+$ et vérifie: $f(1) = 1$.

Un morphisme des booloïdes f vérifie : $f(0) = 0$ car $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 0$.

1-3 Définition. Soit A un booloïde. Un **sous-booloïde** de A, est un sous-ensemble de A stable pour les trois opérations $\cdot, *$ et $+$ et contenant 1.

Un sous-booloïde B de A contient 0 car $0 = 1 + 1 \in B$, c'est un booloïde et le morphisme d'inclusion $B \to A$ est un morphisme de booloïdes.

2. Exemples de booloïdes

2-1 Les ensembles bipointés.

Un ensemble **bipointé** est un ensemble A ayant deux éléments distingués distincts 0 et 1. Montrons que A est un booloïde pour les trois opérations :

$$a \cdot b = \begin{cases} a & \text{si } a = 0 \\ b & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \qquad a * b = \begin{cases} b & \text{si } a = 0 \\ a & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \qquad a + b = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

Démonstration :

En effet,

$$a \cdot (b \cdot c) = \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a \neq 0, b = 0 \\ c & \text{si } a \neq 0, b \neq 0 \end{matrix} \right\} = (a \cdot b) \cdot c$$

D'autre part

$$a \cdot b \cdot c = \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{si } a = 0, \\ 0 & \text{si } a \neq 0, b = 0 \\ c & \text{si } a \neq 0, b \neq 0 \end{matrix} \right\} = b \cdot a \cdot c$$

Donc l'opération $\cdot$ est associative et symétrique.

$$\text{Remarquons que : } \quad a * (b * c) = \left\{ \begin{array}{ll} b & \text{si } a = 0, b \neq 0 \\ c & \text{si } a = 0, b = 0 \\ a & \quad \text{si } a \neq 0 \end{array} \right\} = (a * b) * c$$

Donc $*$ est associative. Par la définition des opérations, on vérifie immédiatement : 1 est élément unité à gauche pour l'opération $\cdot$ et 0 est unité à gauche pour l'opération $*$ et en plus : $a + a = 0, a + b = b + a$.
Pour la distributivité, à gauche de $\cdot$ par rapport à $*$, on a :

$$a{\cdot}b * a{\cdot}c = \begin{cases} a \cdot c & \text{si } a = 0 \text{ ou } b = 0 \\ a \cdot b & \text{si } a \neq 0, b \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ c & \text{si } b = 0, a \neq 0 \\ b & \text{si } a \neq 0, b \neq 0 \end{cases}$$

De même :

$$a \cdot (b * c) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ c & \text{si } a \neq 0, b = 0 \\ b & \text{si } a \neq 0, b \neq 0 \end{cases}$$

donc $a \cdot (b * c) = a{\cdot}b * a{\cdot}c$.
Pour la distributivité à droite de $\cdot$ par rapport à $*$, on a :

$$(b * c) \cdot a = \begin{cases} 0 & \text{si } b * c = 0 \\ a & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } b = c = 0 \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b{\cdot}a * c{\cdot}a = \begin{cases} c \cdot a & \text{si } a = 0 \text{ ou } b = 0 \\ b \cdot a & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } (a = 0 \text{ ou } b = 0) \text{ et } c = 0 \\ a & \text{si } (a = 0 \text{ ou } b = 0) \text{ et } c \neq 0 \\ a & \text{si } a \neq 0, b \neq 0 \end{cases}$$

Donc $(b * c) \cdot a = b{\cdot}a * c{\cdot}a$.

$$\text{Remarquons que : } a \cdot (b + c) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a \neq 0, b = c \\ 1 & \text{si } a \neq 0, b \neq c \end{array} \right\} = a{\cdot}b + a{\cdot}c.$$

Il reste à démontrer les trois derniers axiomes. On a en effet :

$$a \cdot (a * b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ a * b & \text{si } a \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ a & \text{si } a \neq 0 \end{cases} = a$$

En outre :

$$(a + b) * 1 = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ a + b & \text{si } a \neq b \end{cases} = 1$$

Enfin, on a :

$$(a + b) * a = \begin{cases} a & \text{si } a = b \\ a + b & \text{si } a \neq b \end{cases} = \begin{cases} a & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

De même :

$$(a+b)*b = \begin{cases} b & \text{si } a = b \\ a+b & \text{si } a \neq b \end{cases} = \begin{cases} b & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \neq b \end{cases}.$$

Donc $(a+b)*a = (a+b)*b$.

2-2 Les algèbres à comparaison.[2]

2-2-0 Rappel : Définition. Une algèbre à comparaison est un ensemble A muni de deux éléments distingués notés 0 et 1 et d'une opération quaternaire c vérifiant les six axiomes suivants :

(C_1) $c(a,a,x,y) = x$

(C_2) $c(a,b,x,x) = x$

(C_3) $c(a,b,x,y) = c(b,a,x,y)$

(C_4) $c(a,b,a,b) = b$

(C_5) $c(0,1,x,y) = y$

(C_6) $c(a,b,c(x_1,x_2,x_3,x_4),c(y_1,y_2,y_3,y_4))$
$= c(c(a,b,x_1,y_1),c(a,b,x_2,y_2),c(a,b,x_3,y_3),c(a,b,x_4,y_4))$.

2-2-1 Lemme [2]. Dans une algèbre à comparaison les identités suivantes sont vérifiées

(i) $c(a,b,x,y) = c(a,b,c(a,b,x,z),y)$

(ii) $c(a,b,x,y) = c(a,b,x,c(a,b,z,y))$

Démonstration.

(i) : $c(a,b,c(a,b,x,z),y) = c(a,b,c(a,b,x,z),c(a,a,y,y)) = c(a,a,c(a,b,x,y), c(a,b,z,y)) = c(a,b,x,y)$

(ii) : $c(a,b,x,c(a,b,z,y)) = c(a,b,c(a,a,x,y),c(a,b,z,y)) = c(c(a,b,a,a), c(a,b,a,b)c(a,b,x,z),c(a,b,y,y)) = c(a,b,x,y)$.

2-2-2 Proposition. Une algèbre à comparaison $(A,0,1,c)$ est un booloïde pour les trois opérations : $a\cdot b = c(0,a,0,b), a*b = c(0,a,b,a)$ et $a+b = c(a,b,0,1)$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} a\cdot(b\cdot x) &= c(0,a,0,c(0,b,0,x)) = c(0,a,c(0,0,0,x),c(0,b,0,x)) \\ &= c(c(0,a,0,0),c(0,a,0,b),c(0,a,0,0),c(0,a,x,x)) \\ &= c(0,c(0,a,0,b),0,x) = (a\cdot b)\cdot x \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned} a\cdot(b\cdot x) &= c(0,a,c(0,b,0,0),c(0,b,0,x)) \\ &= c(c(0,a,0,0),c(0,a,b,b),c(0,a,0,0),c(0,a,0,x)) \\ &= c(0,b,0,c(0,a,0,x)) = b\cdot(a\cdot x). \end{aligned}$$

En plus $1\cdot a = c(0,1,0,a) = a$. En vertu du lemme précédent, il vient :

$$\begin{aligned} a*(b*x) &= c(0,a,c(0,b,x,b),a) = c(0,a,c(0,b,x,b),c(0,a,x,a)) \\ &= c(c(0,a,0,0),c(0,a,b,a),c(0,a,x,x),c(0,a,b,a)) \\ &= c(0,c(0,a,b,a),x,c(0,a,b,a)) = (a*b)*x. \end{aligned}$$

De plus $0 * a = c(0,0,a,0) = a$. L'opération $+$ est commutative et vérifie $a + a = c(a,a,0,1) = 0$. L'opération $\cdot$ est distributive par rapport à $*$ car :

$$\begin{aligned} a \cdot (b * x) &= c(0,a,0,c(0,b,x,b)) = c(0,c(0,a,0,b),c(0,a,0,x),c(0,a,0,b)) \\ &= a{\cdot}b * a{\cdot}x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b{\cdot}a * x{\cdot}a &= c(0,c(0,b,0,a),c(0,x,0,a),c(0,b,0,a)) \\ &= c(c(0,b,0,0),c(0,b,0,a),c(0,b,c(0,x,0,a),c(0,x,0,a)),c(0,b,0,a)) \\ &- c(0,b,c(0,x,0,a),c(0,a,c(0,x,0,a),a)) = c(0,b,c(0,x,0,a),c(0,x,a,a)) \\ &= c(0,b,c(0,x,0,a),a) = c(0,b,c(0,x,0,a),c(0,b,0,a)) \\ &= c(0,c(0,b,x,b),0,a) = (b * x) \cdot a. \end{aligned}$$

L'opération $\cdot$ est distributive à gauche par rapport à $+$ car :

$$\begin{aligned} a \cdot (b + x) &= c(0,a,0,c(b,x,0,1)) \\ &= c(c(0,a,0,b),c(0,a,0,x),c(0,a,0,0),c(0,a,1,1)) \\ &= c(c(0,a,0,b),c(0,a,0,x),0,1) = a{\cdot}b + a{\cdot}x. \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, on a : $a \cdot (a * b) = c(0,a,0,c(0,a,b,a)) = c(0,a,0,a) = a$.
En outre

$$\begin{aligned} (a+b) * 1 &= c(0,c(a,b,0,1),1,c(a,b,0,1)) = c(0,c(a,b,0,1),c(a,b,1,1),c(a,b,0,1)) \\ &= c(a,b,1,1) = 1. \end{aligned}$$

Enfin, on a d'une part :

$$\begin{aligned} (a+b) * a &= c(0,c(a,b,0,1),a,c(a,b,0,1)) = c(0,c(a,b,0,1),c(a,b,b,a),c(a,b,0,1)) \\ &= c(a,b,b,1), \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} (a+b) * b &= c(0,c(a,b,0,1),b,c(a,b,0,1)) = c(0,c(a,b,0,1),c(a,b,b,b),c(a,b,0,1)) \\ &= c(a,b,b,1). \end{aligned}$$

Donc $(a+b) * a = (a+b) * b$.

2-3 Les anneaux commutatifs réguliers. [10]

2-3-0 Rappel. D'après J.von Neumann, un anneau commutatif régulier est un anneau commutatif unitaire, vérifiant la propriété suivante : pour tout $a \in A$, il existe $\overline{a} \in A$ tel que : $a\overline{a}a = a$ et $\overline{a}a\overline{a} = \overline{a}$.

2-3-1 Proposition. Un anneau commutatif régulier est un booloïde pour les opérations suivantes : $a{\cdot}b = a\overline{a}b$, $\quad a{*}b = a{+}(1-a\overline{a})b$ et $a \dashv b = (a-b)(\overline{a-b})$.

Démonstration. Remarquons d'abord que : $(a\overline{a})^2 = a\overline{a}$ et $(a+(1-a\overline{a})b)(\overline{a+(1-a\overline{a})b}) = a\overline{a}+(1-a\overline{a})b\overline{b}$. On a $(a \cdot b) \cdot c = a\overline{a}ba\overline{a}bc = a\overline{a}b\overline{b}c = a \cdot (b \cdot c)$ et $a \cdot b \cdot c = a\overline{a}b\overline{b}c = a\overline{a}(b\overline{b})^2 c = b\overline{b}ab\overline{b}ac = b \cdot a \cdot c$. De plus $1 \cdot b = b$. Il est clair que : $0 * a = a$. L'opération $*$ est associative, car : $(a * b) * c = a + (1 - a\overline{a})b + (1 - a\overline{a} - (1 - a\overline{a})b\overline{b})c = a + (1 - a\overline{a})b + (1 - a\overline{a})(1 - b\overline{b})c = a + (1 - a\overline{a})(b + (1 - b\overline{b})c) = a * (b * c)$.

Pour la distributivité de $\cdot$ par rapport à $*$, on a :

$$a \cdot b * a \cdot c = a\overline{a}b + (1 - a\overline{a}b\overline{b})a\overline{a}c = a\overline{a}b + a\overline{a}(1 - b\overline{b})c = a\overline{a}\left(b + \left(1 - b\overline{b}\right) c\right) = a \cdot (b * c)$$

et

$$b \cdot a * c \cdot a = b\overline{b}a + (1 - a\overline{a}b\overline{b})c\overline{c}a = b\overline{b}a + a(1 - b\overline{b})c\overline{c} = [b\overline{b} + \left(1 - b\overline{b}\right) c\overline{c}]a = (b * c) \cdot a.$$

En outre $a \cdot (b \dashv c) = a\overline{a}(b-c)(\overline{b-c}) = (ab-ac)(\overline{ab-ac}) = a \cdot b \dashv a \cdot c$. D'autre part, il résulte immédiatement des définitions que l'opération $\dashv$ est commutative et vérifie : $a \dashv a = 0$. En outre $a \cdot (a * b) = a\overline{a}(a+b-a\overline{a}b) = a$ et $(a \dashv b) * 1 = (a-b)(\overline{a-b})+1-(a-b)(\overline{a-b}) = 1$. Enfin, $(a \dashv b) * a = (a-b)(\overline{a-b})+a-(a-b)(\overline{a-b})a = (a-b)(\overline{a-b})+a-(a-b)(\overline{a-b})(a-b+b) = (a-b)(\overline{a-b}) + b - (a-b)(\overline{a-b})b = (a \dashv b) * b$. Notons que $1 \cdot a = a = 0 * a$.

2-4 Les anneaux de Baer commutatifs. [5]

Un anneau de Baer commutatif est un anneau commutatif unitaire A muni d'une opération unaire e satisfaisant les axiomes suivants : 1) $e(0) = 0$, 2) $e(x^2) = e(x)$ 3) $xe(x) = x$ 4) $e(xy) = e(x)e(y)$. Nous montrons qu'un anneau de Baer commutatif est un booloïde pour les opérations suivantes : $x \cdot y = e(x)y$, $x * y = x + (1 - e(x))y$ et $x \dashv y = e(x - y)$.

2-5 Tout anneau unitaire non nécessairement commutatif vérifiant les deux conditions : 1) $a^3 = a$ 2) $a^2b = ba^2$.
est un booloïde pour les opérations suivantes : $a \cdot b = a^2b$, $a * b = a + b - a^2b$, $a \dashv b = (a-b)^2$.

2-6 Tout anneau non nécessairement commutatif unitaire à gauche, idempotent et symétrique i.e. :

1) $1a = a$
2) $a^2 = a$
3) $abc = bac$

est un booloïde pour les opérations suivantes : $a \cdot b = ab$, $a*b = a+b-ab$, $a \dashv b = a-b$.

3. Règles de calcul dans un booloïde.

Considérons un booloïde quelconque A dont les éléments seront notés $a, b, c, \ldots$.

3-1 Proposition. $a + b = 0$ si et seulement si $a = b$.

Démonstration. La condition est suffisante d'après l' axiome (3). Inversement, si $a+b=0$, l'axiome (7) donne : $a = 0 * a = (a+b) * a = (a+b) * b = 0 * b = b$.

3-2 Proposition.
(1) 1 est un élément absorbant à gauche pour l'opération $*$.
(2) 0 est un élément absorbant pour l'opération $\cdot$.
(3) 0 est un élément unité pour l'opération $*$.

Démonstration. La première vient directement de l'axiome (5), car : $1 * a = 1 \cdot (1 * a) = 1$. L'axiome (3) implique : $a \cdot 0 = a \cdot (a+a) = a{\cdot}a + a{\cdot}a = 0$. En outre, on a : $0 \cdot a = 0 \cdot (0 * a) = 0$. Enfin, la dernière se déduit des deux premières car : $a * 0 = 1{\cdot}a * 0{\cdot}a = (1 * 0) \cdot a = 1 \cdot a = a$.

3-3 Proposition. Les deux opérations $\cdot$ et $*$ sont idempotentes.

Démonstration. On a $a * a = 1{\cdot}a * 1{\cdot}a = (1 * 1) \cdot a = 1{\cdot}a = a$. Suivant l'axiome (5) et le fait que l'opération $*$ est idempotente, $a \cdot a = a \cdot (a * a) = a$.

3-4 Proposition.
(1) $(a+b) \cdot 1 = a+b$
(2) $(a+1) * a = 1$

Démonstration. Il suffit d'appliquer successivement l'axiome (6) et l'axiome (5), il vient $(a+b) \cdot 1 = (a+b) \cdot ((a+b) * 1) = a+b$. Pour prouver (2) il suffit d'utiliser successivement l'axiome (7) et l'axiome (6), il vient : $(a+1) * a = (a+1) * 1 = 1$.

3-5 Proposition. $a + 0 = a \cdot 1$

Démonstration. On a : $a \cdot (a+0) = a \cdot a + a \cdot 0 = a + 0$ et de même : $(a+0)*a = (a+0)*0 = a+0$. On en déduit en appliquant les axiomes (6), (4) successivement, que : $a \cdot 1 = a \cdot ((a+0) * 1) = (a+0) * a{\cdot}1 = ((a+0) * a) \cdot 1 = (a+0) \cdot 1 = a+0$.

3-6 Corollaire. $1 + 0 = 1$.

Démonstration. Il suffit de prendre $a = 1$.

3-7 Proposition.
(1) $(a * b) \cdot a = (b * a) \cdot a = a$
(2) $(a * b) \cdot (a+b) = a+b$

Démonstration. D'une part de la proposition (3-2) et de l'axiome (4), on déduit : $(a * b) \cdot a = 1{\cdot}a * b{\cdot}a = (1 * b) \cdot a = 1{\cdot}a = a$. D'autre part de la proposition (3-5) et de l'axiome (6), on déduit :

$$(b * a) \cdot a = b{\cdot}a * 1{\cdot}a = b{\cdot}1{\cdot}a * 1{\cdot}a = (b+0) \cdot a * 1{\cdot}a = ((b+0) * 1) \cdot a = 1 \cdot a = a$$

L'égalité (2) se démontre au moyen de (1), car : $(a*b)\cdot(a+b)=(a*b)\cdot a+(a*b)\cdot b=a+b$.

3-8 Proposition.
L'opération $*$ est distributive à gauche par rapport à l'opération $\cdot$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
(a*b)\cdot(a*c) &= a*((a*b)\cdot c) && \text{par axiome (4) et proposition (3-7)}\\
&= a*a\cdot c*b\cdot c && \text{par axiome (4)}\\
&= a*b\cdot c && \text{par axiome (5).}
\end{aligned}
$$

3-9 Proposition.
(1) $a\cdot b=b$ **si et seulement si** $a*b=a$
(2) $(a\cdot b=a$ **et** $b\cdot a=b)\Longrightarrow a=b$
(3) $a\cdot b=0$ **si et seulement si** $b\cdot a=0$

Démonstration.
(1) Si : $a\cdot b=b$, alors : $a*b=a*(a\cdot b)=a$ (axiome 5). Inversement, $a*b=a$ entraîne par la proposition (3-7) : $a\cdot b=(a*b)\cdot b=b$.
(2) Supposons : $a\cdot b=a$ et $b\cdot a=b$. L'opération $\cdot$ étant symétrique et idempotente, il vient : $a=a\cdot b=a\cdot b\cdot a=b\cdot a=b$.
(3) Supposons : $a\cdot b=0$. On a : $b\cdot a=a\cdot b\cdot a=0\cdot a=0$, à cause de la symétrie et l'idempotence de l'opération $\cdot$. On en déduit que : $a\cdot b=0$ si et seulement si $b\cdot a=0$.

3-10 Proposition.
(1) $a*b=0\Longleftrightarrow(a=0$ et $b=0)$
(2) $a\cdot b=b\cdot a=1\Longleftrightarrow(a=1$ et $b=1)$.

Démonstration. Supposons : $a*b=0$. On a : $0=a\cdot 0=a\cdot(a*b)=a$ et $0=0\cdot b=(a*b)\cdot b=b$ (proposition 3-7). Supposons maintenant : $a\cdot b=1=b\cdot a$. On a : $a=(b*a)\cdot a=1*a=1$ et $b=(a*b)\cdot b=1*b=1$.

4. Booloïdes commutatifs et algèbres de Boole

4-1 Définition. Un booloïde A est dit **commutatif** , si les deux opérations $*$ et $\cdot$ sont commutatives.

4-2 Proposition. Les booloïdes commutatifs sont exactement les algèbres de Boole.

Démonstration. Nous allons montrer que tout booloïde commutatif A est une algèbre de Boole pour les opérations :

$$\begin{cases} a\triangle b & = a \cdot b \\ a\nabla b & = a * b \\ a' & = 1 + a \end{cases}$$

En outre, dans cette algèbre l'opération de différence symétrique est l'opération $+$. Les deux opérations $\triangle, \nabla$ sont commutatives, associatives, unitaires et distributives l'une par rapport à l'autre. En outre,

$$\begin{cases} a'\triangle a & = a\triangle a' & = a \cdot (1 + a) & = a + a & = 0 \\ a\nabla a' & = a'\nabla a & = (1 + a) * a & = (1 + a) * 1 & = 1. \end{cases}$$

Donc A est une algèbre de Boole. De plus, on a :

$$\begin{aligned} a + b = (a * b) \cdot (a + b) &= a{\cdot}(a + b) * b{\cdot}(a + b) \\ &= (a{\cdot}a + a{\cdot}b) * (b{\cdot}a + b{\cdot}b) = (a{\cdot}a + a{\cdot}b) * (b{\cdot}a + b) \\ &= (a{\cdot}1 + a{\cdot}b) * (b{\cdot}a + b{\cdot}1) = a \cdot (1 + b) * b \cdot (a + 1) \\ &= (a\triangle b')\nabla(b\triangle a') \end{aligned}$$

Inversement, on peut vérifier immédiatement que toute algèbre de Boole A est un booloïde commutatif pour les opérations :

$$\begin{cases} a \cdot b & = a\triangle b \\ a * b & = a\nabla b \\ a + b & = (a\triangle b')\nabla(a'\triangle b). \end{cases}$$

5. Complémentation dans un booloïde

5-1 Définition. On appelle **complément** d'un élément x de A, l'élément x' défini par : $x' = 1 + x{\cdot}1$.

5-2 Propositions.

1) $a \cdot a' = a' \cdot a = 0$
2) $(a + 0)' = a'$
3) $a + a' = 1$
4) **0 et 1 sont des éléments compléments l'un de l'autre.**

Démonstration. En effet : $a{\cdot}a' = a{\cdot}(1{+}a{\cdot}1) = a{\cdot}1{+}a{\cdot}1 = 0$ et $a'{\cdot}a = a{\cdot}a'{\cdot}a = 0 \cdot a = 0$. En outre $a + 0 = a \cdot 1$ (proposition 3-5) donc $(a + 0)' = 1 + a \cdot 1 \cdot 1 = 1 + a \cdot 1 = a'$. D'autre part $a' + a = (a' * a) \cdot (a' + a)$ (proposition 3-7) donc

$$\begin{aligned} a' + a &= (a' \cdot (a' + a)) * (a \cdot (a' + a)) = (a' + a' \cdot a) * (a \cdot a' + a) \\ &= (a' + 0) * (a + 0) = a' * (a + 0) = (1 + a \cdot 1) * a \cdot 1 = 1 \text{ (proposition 3-4).} \end{aligned}$$

Enfin :

$$0' = 1 \quad \text{car :} \quad 0' = 1 + 0 \cdot 1 = 1 + 0 = 1$$
$$1' = 0 \quad \text{car :} \quad 1' = 1 + 1 = 0$$

5-3 Proposition :
1) $(a * b) \cdot 1 = (b * a) \cdot 1$
2) $a' * b' = b' * a'$.

Démonstration. Appliquant la proposition (3-7) on a : $(b * a) \cdot 1 = ((a * b) \cdot b * (a * b) \cdot a) \cdot 1 = (a * b) \cdot (b * a) \cdot 1 = (b * a) \cdot (a * b) \cdot 1 = (a * b) \cdot 1$. En outre $a' * b' = (a' \cdot 1 * b' \cdot 1) = (a' * b') \cdot 1 = (b' * a') \cdot 1 = b' * a'$.

5-4 Lemme.

$$\left.\begin{array}{ll} a \cdot b & = 0 \\ a * b & = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow a = b'$$

Démonstration. D'une part, $a = a * 0 = a * (b \cdot b') = (a * b) \cdot (a * b') = 1 \cdot (a * b') = a * b'$. D'autre part, on a : $a \cdot 1 = a \cdot (a * b) = a$ (axiome 5). On déduit que : $a = a \cdot 1 = a \cdot (1 + b \cdot 1) = a \cdot b' = b'$ (proposition (3-9)).

5-5 Proposition. Les lois de De Morgan sont vérifiées :

$$(a \cdot b)' = a' * b' \quad , \quad (a * b)' = a' \cdot b'$$

Démonstration.

(1) En fait : $(a' * b') \cdot a \cdot b = (a' \cdot a * b' \cdot a) \cdot b = b' \cdot a \cdot b = a \cdot b' \cdot b = a \cdot 0 = 0$. Donc, on a aussi $(a' * b') \cdot a \cdot b \cdot 1 = 0$. En outre $(a' * b') * (a \cdot b \cdot 1) = (a' * b') * (b \cdot 1 \cdot a \cdot 1) = a' * b' * ((b \cdot 1) \cdot (a \cdot 1)) = a' * (b' * b \cdot 1) \cdot (b' * a \cdot 1)$. Or $b' * b \cdot 1 = (1 + b \cdot 1) * b \cdot 1 = 1$ (proposition 3-4). Donc $(a' * b') * (a \cdot b \cdot 1) = a' * 1 \cdot (b' * a \cdot 1) = a' * b' * a \cdot 1 = b' * 1 = (1 + b \cdot 1) * 1 = 1$ (axiome 6). On déduit par le lemme précédent que : $a' * b' = (a \cdot b + 0)' = (a \cdot b)'$, (proposition 5-2).

(2) On a : $a' \cdot b' \cdot (a * b) = (a' \cdot b' \cdot a) * (a' \cdot b' \cdot b) = (a' \cdot b' \cdot a) * 0 = a' \cdot b' \cdot a = b' \cdot a' \cdot a = b' \cdot 0 = 0$. Donc $a' \cdot b' \cdot (a * b) \cdot 1 = 0$. Egalement, par la proposition (5-3), on a : $a' \cdot b' * (a * b) \cdot 1 = a' \cdot b' * a \cdot 1 * b \cdot 1 = a \cdot 1 * a' \cdot b' * b \cdot 1 = [(a \cdot 1 * a') \cdot (a \cdot 1 * b')] * b \cdot 1 = [(a \cdot 1 * a') \cdot 1 \cdot (a \cdot 1 * b')] * b \cdot 1 = [(a' * a \cdot 1) \cdot 1 \cdot (a \cdot 1 * b')] * b \cdot 1 = a \cdot 1 * b' * b \cdot 1 = a \cdot 1 * 1 = 1$. Ce qui entraîne en utilisant le lemme précédent : $(a * b)' = (a * b + 0)' = a' \cdot b'$.

5-6 Proposition. $(a')' = a \cdot 1$.

Démonstration. En effet, $(a \cdot 1) \cdot a' = 1 \cdot a \cdot a' = 1 \cdot 0 = 0$ et $(a \cdot 1) * a' = (a \cdot 1 * a') \cdot 1 = a' * a \cdot 1 = 1$. En conséquence : $(a')' = a \cdot 1$ (lemme 5-4).

5-7 Corollaire. $a' + b' = b{\cdot}a' * a{\cdot}b'$.

Démonstration. En effet : $a'+b' = (a'*b')\cdot(a'+b') = a'{\cdot}(a'+b')*b'{\cdot}(a'+b') = a'{\cdot}(1+b')*b'{\cdot}(1+a') = a'{\cdot}(1+b'{\cdot}1) * b'{\cdot}(1+a'{\cdot}1) = a'{\cdot}b''*b'{\cdot}a'' = a'{\cdot}b{\cdot}1*b'{\cdot}a{\cdot}1 = b{\cdot}a'{\cdot}1*a{\cdot}b'{\cdot}1 = b{\cdot}a' * a{\cdot}b'$.

5-8 Proposition. $(a + b)' \cdot a = (a + b)' \cdot b$.

Démonstration. On a : $0 = (a + b)' \cdot (a + b) = (a + b)'{\cdot}a + (a + b)'{\cdot}b$. Ce qui entraîne : $(a + b)' \cdot a = (a + b)' \cdot b$.

5-9 Proposition. $a{\cdot}b * a'{\cdot}c = a'{\cdot}c * a{\cdot}b$.

Démonstration. On a : $(a{\cdot}b * a'{\cdot}c) \cdot (a'{\cdot}c * a{\cdot}b) = a{\cdot}b * a'{\cdot}c$. De même : $(a{\cdot}b * a'{\cdot}c) \cdot (a'{\cdot}c * a{\cdot}b) = a'{\cdot}c * a{\cdot}b$. On en déduit que : $a{\cdot}b * a'{\cdot}c = a'{\cdot}c * a{\cdot}b$.

5-10 Proposition. On a l'implication

$$\left.\begin{aligned} a\cdot b &= a\cdot c \\ a'\cdot b &= a'\cdot c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow b = c$$

Démonstration. En effet : $b = 1 \cdot b = (a' * a{\cdot}1){\cdot}b = a'{\cdot}b * a{\cdot}1{\cdot}b = a'{\cdot}c * a{\cdot}c = a'{\cdot}c * a{\cdot}1{\cdot}c = (a' * a{\cdot}1) \cdot c = 1 \cdot c = c$.

6. Relation de préordre dans les booloïdes.

6-1 Définition. Dans un booloïde A nous définirons la relation binaire notée $a \leqslant b$ par $a = b \cdot a$.

6-2 Proposition. Les relations suivantes sont équivalentes

(1) $a \leqslant b$.
(2) $a \cdot b \cdot 1 = a \cdot 1$.
(3) $a \cdot b' = 0$.
(4) $b' \cdot a' = b'$.

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) : Si $a = b \cdot a$ alors $a \cdot 1 = b \cdot a \cdot 1 = a \cdot b \cdot 1$.
2) $\Longrightarrow$ 3) : Si $a \cdot b \cdot 1 = a \cdot 1$ on a $a \cdot b' = a{\cdot}1 + a{\cdot}b{\cdot}1 = 0$.
3) $\Longrightarrow$ 4) : En effet, $b' \cdot a' = b' \cdot (1 + a{\cdot}1) = b'{\cdot}1 + b'{\cdot}a{\cdot}1 = b'{\cdot}1 + a{\cdot}b'{\cdot}1 = b'{\cdot}1 + 0 = b' \cdot 1 = b'$.
4) $\Longrightarrow$ 1) : les formules de De Morgan et la proposition (5-6) entraînent : $(b * a) \cdot 1 = b \cdot 1$ par suite : $a = (b * a) \cdot a = (b * a) \cdot 1 \cdot a = b \cdot 1 \cdot a = b \cdot a$ (proposition 3-7).

6-3 Propriétés. La relation $\leqslant$ est une relation de préordre dans A.

Démonstration. Comme $a \cdot a = a$, on a $a \leqslant a$, cette relation est réflexive. En outre, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, alors $a \cdot 1 = a \cdot b \cdot 1 = a \cdot b \cdot c \cdot 1 = a \cdot 1 \cdot c \cdot 1 = a \cdot c \cdot 1$ donc $a \leqslant c$.

6-4 Remarque. Dans le cas d'un booloïde commutatif, la relation $a \leqslant b$ signifie $a \cdot b = a$ c'est donc la relation d'ordre habituelle.

6-5 Proposition. A est un prétreillis distributif borné où $a \cdot b$ est une borne inférieure de a et b, $a * b$ est une borne supérieure de a et b, 0 est borne inférieure de A et 1 est borne supérieure de A.

Démonstration. 1) $a \cdot b = \inf(a,b)$: En effet, $a \cdot b \leqslant a$ et $a \cdot b \leqslant b$ car : $a \cdot a \cdot b = a \cdot b$ et $b \cdot a \cdot b = a \cdot b$. En outre, si $c \leqslant a$ et $c \leqslant b$, alors $a \cdot b \cdot c = a \cdot c = c$ donc $c \leqslant a \cdot b$.
2) $a * b = \sup(a,b)$: En effet, $a \leqslant a * b$ et $b \leqslant a * b$ car : $(a * b) \cdot a = a$ et $(a * b) \cdot b = b$ (proposition 3-7). En outre, si $a \leqslant c$ et $b \leqslant c$, alors $c \cdot (a * b) = c \cdot a * c \cdot b = a * b$ donc $a * b \leqslant c$. Aussi, $0 \leqslant a$ car : $a \cdot 0 = 0$ et $a \leqslant 1$ car : $1 \cdot a = a$ pour tout élément a de A. Par conséquent, A est un prétreillis borné. Ce prétreillis est distributif. Pour cela il suffit de vérifier que $a \cdot (b * c) \leqslant a \cdot b * a \cdot c$. En effet, on a $(a \cdot b * a \cdot c) \cdot a \cdot (b * c) = a \cdot (b * c) \cdot a \cdot (b * c) = a \cdot (b * c)$.

6-6 Proposition. Pour tout élément a de A, a et a' sont deux éléments précomplémentaires, c'est-à-dire :

- **0 est une borne inférieure de a et a'.**
- **1 est une borne supérieure de a et a'.**

Démonstration. D'une part : $a \cdot a' = 0$ (proposition 5-2) donc 0 est une bonne inférieure de a et a'. D'autre part, $(a' * a) \cdot 1 = a' \cdot 1 * a \cdot 1 = a' * a \cdot 1 = 1$ (proposition 3-4). Donc $1 \leqslant a' * a$ qui implique qu'une borne supérieure de a' et a est 1.

6-7 La relation d'équivalence associée à la relation de préordre $a \leqslant b$ est notée $\equiv$, elle est définie par : ($a \leqslant b$ et $b \leqslant a$).

C'est l'égalité dans le cas commutatif.

6-8 Proposition. $a \equiv b$ si et seulement si $a \cdot 1 = b \cdot 1$.

Démonstration. Si $a \equiv b$ alors $a \cdot 1 = a \cdot b \cdot 1 = b \cdot a \cdot 1 = b \cdot 1$. Inversement, si $a \cdot 1 = b \cdot 1$, il vient $a \cdot 1 = a \cdot a \cdot 1 = a \cdot b \cdot 1$ et $b \cdot 1 = b \cdot b \cdot 1 = b \cdot a \cdot 1$, c'est-à-dire $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$.

6-9 Corollaire. $(a * b) \cdot 1 = (b * a) \cdot 1$.

Démonstration : $a * b \equiv b * a$ d'après la proposition (6-5).

6-10 Proposition. La relation d'équivalence associée est compatible avec les opérations $\cdot$ et $*$ et le complémentaire.

Démonstration. En fait, si $a \equiv b$ et $c \equiv d$, alors :

$$a \cdot c \cdot 1 = a \cdot 1 \cdot c \cdot 1 = b \cdot 1 \cdot d \cdot 1 = b \cdot d \cdot 1 \quad \text{donc} \quad a \cdot c \equiv b \cdot d.$$
$$(a * c) \cdot 1 = a \cdot 1 * c \cdot 1 = b \cdot 1 * d \cdot 1 = (b * d) \cdot 1 \quad \text{donc} \quad a * c \equiv b * d.$$
$$a' = 1 + a \cdot 1 = 1 + b \cdot 1 = b'.$$

6-11 Algèbre de Boole quotient. On peut construire l'ensemble $\overline{A}$ quotient de A par la relation $\equiv$. On notera $\overline{a}$ la classe d'un élément a. Dans $\overline{A}$ on peut alors définir : $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$, $\quad \overline{a} * \overline{b} = \overline{a * b}$ et $\overline{a}' = \overline{a'}$

6-12 Proposition. $\overline{A}$ est une algèbre de Boole.

Démonstration. Par les propositions (6-5) et (6-6), $\overline{A}$ est une algèbre de Boole.

7. Eléments symétriques d'un booloïde.

7-1 Proposition. Pour un élément e de A, les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $e + 0 = e$
(2) $e * 1 = 1$
(3) $e \cdot 1 = e$
(4) $e' * e = 1$

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) : Si $e + 0 = e$, par l'axiome (6) il vient : $e * 1 = (e + 0) * 1 = 1$. .
2) $\Longrightarrow$ 3) : Si : $e * 1 = 1$ alors : $e \cdot 1 = e \cdot (e * 1) = e$ par l'axiome (5).
3) $\Longrightarrow$ 1) : Nous avons vu que : $e \cdot 1 = e + 0$.
(3) $\Longrightarrow$ (4) : Si $e \cdot 1 = e$, on a : $e' * e = (1 + e) * e = (1 + e) * 1 = 1$ (axiomes (6) et (7)).
(4) $\Longrightarrow$ (3) : Si : $e' * e = 1$ on a : $e \cdot 1 = e \cdot (e' * e) = 0 * e = e$.

7-2 Définition. Un élément e de A satisfaisant l'une des propriétés précédentes est dit **symétrique.**

7-3 Proposition.
1) **0 et 1 sont deux éléments symétriques.**
2) **Les éléments symétriques de A sont exactement les éléments de la forme $a + b$.**

Démonstration. (1) est immédiate. La nécessité de (2) découle de la proposition (7-1) et la suffisance de l'axiome (6).

7-4 Proposition. L'ensemble des éléments symétriques de A, noté $sym(A)$, forme un sous-booloïde commutatif de A.

Démonstration. En effet, si e et f sont deux éléments symétriques de A on a $(e * f) \cdot 1 = e \cdot 1 * f \cdot 1 = e * f$ et $e \cdot f \cdot 1 = e \cdot f$. En plus : $e * f = (e * f) \cdot 1 = (f * e) \cdot 1 = f * e$ (corollaire 6-9) et $e \cdot f = e \cdot f \cdot 1 = f \cdot e \cdot 1 = f \cdot e$. En outre 1 et $e + f$ sont symétriques d'après la proposition 7-3.

7-5 Proposition. Les éléments symétriques de A sont des représentants des classes d'équivalence de A pour la relation $\equiv$.

Démonstration. Si $\overline{x}$ une classe d'équivalence de A alors $x \cdot 1 \equiv x$ est un élément symétrique de $\overline{x}$. En outre si $y \in \overline{x}$ est symétrique alors $y = y \cdot 1 = x \cdot 1$.

7-6 Proposition. L'algèbre de Boole $sym(A)$ est l'algèbre de Boole couniverselle associée à A.

Preuve : Immédiate.

7-7 Définition. On appelle **élément symétrique associé à** x, l'élément $e(x)$ défini par : $e(x) = x + 0 = x \cdot 1$.

7-8 Proposition.

1) $e(0) = 0$ et $e(1) = 1$
2) $x \cdot e(x) = e(x) = e(x) * x$
3) $e(x) \cdot x = x = x * e(x)$
4) $e(x \cdot y) = e(y \cdot x) = e(x) \cdot e(y)$
5) $e(x * y) = e(y * x) = e(x) * e(y)$
6) $e(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

Démonstration. En effet, $e(0) = 0 + 0 = 0$ et $e(1) = 1 + 0 = 1$. On a : $x \cdot e(x) = x \cdot x \cdot 1 = x \cdot 1 = e(x)$ et $e(x) * x = (x + 0) * x = (x + 0) * 0 = x + 0 = e(x)$. On a aussi : $e(x) \cdot x = x \cdot 1 \cdot x = x \cdot x = x$ et $x * e(x) = x * (x \cdot 1) = (x * x) \cdot (x * 1) = x \cdot (x * 1) = x$ (axiome 5). Il est clair que : $x \cdot y \cdot 1 = y \cdot x \cdot 1 = x \cdot 1 \cdot y \cdot 1$ donc $e(x \cdot y) = e(y \cdot x) = e(x) \cdot e(y)$ Egalement, on a : $e(x * y) = (x * y) \cdot 1 = (y * x) \cdot 1 = x \cdot 1 * y \cdot 1$. Enfin, si : $e(x) = 0$, alors $x = e(x) \cdot x = 0 \cdot x = 0$.

8. Idéaux

8-1 Définition. Un **idéal** I d'un booloïde A est un sous-ensemble de A tel que:

(1) $0 \in I$
(2) $(a \in A \quad \text{et} \quad x \in I) \Longrightarrow x \cdot a \in I$
(3) $(x \in I \quad \text{et} \quad y \in I) \Longrightarrow x * y \in I$

Un idéal propre est caractérisé par la condition supplémentaire : $1 \notin I$.

8-2 Proposition. $x \in I$ **si et seulement si** $e(x) \in I$.

Démonstration. Si $x \in I$, on déduit de la condition (2) ci-dessus que : $e(x) \in I$. Inversement si $e(x) \in I$, on a : $x = e(x) \cdot x \in I$.

8-3 Proposition. $(a \in A \quad \text{et} \quad x \in I) \Longrightarrow a \cdot x \in I$.

Démonstration. Si ($a \in A$ et $x \in I$) alors : $x \cdot a \in I$ et, selon la proposition précédente, on a : $e(x \cdot a) = e(a \cdot x) \in I$ donc $a \cdot x \in I$.

8-4 Proposition. $(x \in I \quad \text{et} \quad y \in I) \Longrightarrow (x + y \in I \quad \text{et} \quad x' + y' \in I)$.

Démonstration. On sait que : $x + y = (x * y) \cdot (x + y)$ et comme : $x * y \in I$, il vient $x + y \in I$. Egalement, l'égalité : $x' + y' = y{\cdot}x' * x{\cdot}y'$ entraîne : $x' + y' \in I$.

8-5 Proposition. Si I **est un idéal d'un booloïde** A**, le sous-ensemble :** $sym(I) = \{x \in I : e(x) = x\} = sym(A) \cap I$ **est un idéal de l'algèbre de Boole** $sym(A)$.

Démonstration. En effet $0 \in sym(I)$. Si $a \in sym(A)$ et $x \in sym(I)$, alors $a \cdot x \in Sym(A)$ (proposition 7-4) donc $a \cdot x \in Sym(I)$. Si $x \in Sym(I)$ et $y \in Sym(I)$, alors $x * y \in Sym(A)$ (proposition 7-4) donc $x * y \in Sym(I)$.

8-6 Notation.

1) **L'idéal engendré par un sous-ensemble** G de A est le plus petit idéal qui contient G, il sera noté I_G.
2) **Un idéal finiment engendré** est un idéal engendré par un sous-ensemble fini de A.
3) **Un idéal principal** est un idéal engendré par un seul élément.
4) **L'idéal principal engendré** par a est noté (a).

8-7 Proposition. Tout idéal de A **est engendré par l'ensemble de ses éléments symétriques.**

Démonstration. Soit I un idéal de A et $x \in I$. Alors $e(x) \in sym(I)$. En outre x appartient à l'idéal engendré par $e(x)$ d'après la relation $x = e(x) \cdot x$. Donc x appartient à l'idéal engendré par $sym(I)$.

8-8 Proposition. Pour un idéal J **de** $sym(A)$, $I_J = \{x : e(x) \in J\}$.

Démonstration . En effet : posons $I_J = \{x : e(x) \in J\}$.$0 \in I_J$ car $e(0) = 0 \in J$. Si $x \in I_J$ et $a \in A$, alors $e(x \cdot a) = e(x) \cdot e(a) \in J$ (proposition 7-8) donc $x \cdot a \in I_J$. En outre si $x \in I_J$ et $y \in I_J$, on a : $e(x * y) = e(x) * e(y) \in J$ d'où $x * y \in I_J$. Donc I_J est un idéal de A. C'est manifestement le plus petit idéal de A contenant J.

8-9 Proposition. Il y a un isomorphisme entre l'ensemble ordonné des idéaux de A et l'ensemble ordonné des idéaux de $sym(A)$.

Démonstration. Conséquence des trois propositions précédentes.

8-10 Proposition. L'idéal de A engendré par un élément $a \in A$ est $(a) = \{x \in A : a \cdot x = x\}$.

Démonstration. En effet soit $[a] = \{x : a \cdot x = x\}$. Alors $0 \in [a]$. Si $b \in A$ et $x \in [a]$, alors $a \cdot (b \cdot x) = b \cdot a \cdot x = b \cdot x$ donc $b \cdot x \in [a]$. En outre, si $x \in [a]$ et $y \in [a]$, on a : $a \cdot (x * y) = a \cdot x * a \cdot y = x * y$ d'où $x * y \in [a]$. Par suite $[a]$ est un idéal de A contenant a et c'est clairement le plus petit. Donc $[a] = (a)$.

8-11 Proposition. Tout idéal finiment engendré est principal.

Démonstration. Considérons I_G où G est un ensemble fini. Si $G = \emptyset, I_G = (0) = \{0\}$. Si $G = \{g_1, g_2 \cdots g_q\}$, posons : $g = g_1 * g_2 * \cdots * g_q$ alors $I_G = (g)$ car $(g_1 * \ldots * g_q) \cdot g_i = g_i$ (proposition 3-7) donc $g_i \in (g)$ et (g) est clairement le plus petit idéal contenant $g_1, \ldots, g_q$.

9. Idéaux et congruences.

9-1 Définition. Soit I un idéal de A, on définit sur A la **relation modulo I** par : $x \equiv y(modI) \Longleftrightarrow x + y \in I$.

9-2 Proposition. La relation modulo I est une relation d'équivalence compatible avec la structure du booloïde i.e. une congruence de booloïde.

Démonstration. Il est aisé de vérifier que cette relation est réflexive et symé-trique. En outre, si $x \equiv y(modI)$ et $y \equiv z(modI)$, on a : $(x + y) * (y + z) \in I$ et $(x+y)' \cdot (y+z)' \cdot (x+z) = 0$. [Car $(x+y)' \cdot (y+z)' \cdot x = (y+z)' \cdot (x+y)' \cdot y = (x+y)' \cdot (y+z)' \cdot z$ d'où $(x+y)' \cdot (y+z)' \cdot (x+z) = 0$ selon la proposition (3-1)]donc $((x + y) * (y + z))' \cdot (x + z) = 0$, et $(x+y) * (y+z) \in I$ ce qui entraîne $(x+z) \cdot ((x + y) * (y + z)) = x+z$ et $(x+y) * (y+z) \in I$ donc $x + z \in I$ et la relation est donc une relation d'équivalence.
Supposons : $x \equiv y(modI)$ et $x_1 \equiv y_1(modI)$. On a $(x + y) * (x_1 + y_1) \in I$ et $(x + y)' \cdot (x_1 + y_1)' \cdot (x \cdot x_1 + y \cdot y_1) = 0$. [Car $(x + y)' \cdot (x_1 + y_1)' \cdot x \cdot x_1 = (x_1 + y_1)' \cdot (x + y)' \cdot x \cdot x_1 = (x + y)' \cdot (x_1 + y_1)' \cdot y \cdot y_1$ d'où $(x + y)' \cdot (x_1 + y_1)' \cdot (x \cdot x_1 + y \cdot y_1) = 0$ selon la proposition (3-1) donc $(x + y) * (x_1 + y_1) \in I$ et $((x + y) * (x_1 + y_1))' \cdot (x \cdot x_1 + y \cdot y_1) = 0$ cela signifie que : $(x+y) * (x_1+y_1) \in I$ et $((x + y) * (x_1 + y_1)) \cdot (x \cdot x_1 + y \cdot y_1) = x \cdot x_1 + y \cdot y_1$ donc $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 \in I$, c'est-à-dire : $x \cdot x_1 \equiv y \cdot y_1(modI)$
Nous allons montrer que : $x * x_1 \equiv y * y_1(modI)$. Par l'hypothèse on a : $(x+y) * (x_1+y_1) \in I$.
D'autre part :

$$\begin{aligned}(x + y)' \cdot (x_1 + y_1)' \cdot (x * x_1) &= (x + y)' \cdot (x_1 + y_1)' \cdot x \, * \, (x + y)' \cdot (x_1 + y_1)' \cdot x_1 \\ &= (x + y)' \cdot (x_1 + y_1)' \cdot y \, * \, (x + y)' \cdot (x_1 + y_1)' \cdot y_1 \\ &= (x + y)' \cdot (x_1 + y_1)' \cdot (y * y_1)\end{aligned}$$

donc $(x+y)' \cdot (x_1+y_1)' \cdot (x*x_1+y*y_1) = 0$ ce qui entraîne par De Morgan : $((x+y)*(x_1+y_1))' \cdot (x*x_1+y*y_1) = 0$ alors $((x+y)*(x_1+y_1)) \cdot (x*x_1+y*y_1) = x*x_1 + y*y_1$ donc $x*x_1+y*y_1 \in I$

Enfin, montrons que : $x+x_1 \equiv y+y_1 (mod I)$. On a par l'hypothèse : $(x+y)*(x_1+y_1) \in I$. D'autre part, d'une façon similaire, on peut montrer que : $(x+y)' \cdot (x_1+y_1)' \cdot (x+x_1) = (x+y)' \cdot (x_1+y_1)' \cdot (y+y_1)$ donc $((x+y)*(x_1+y_1))' \cdot ((x+x_1)+(y+y_1)) = 0$, ce qui entraîne $((x+y)*(x_1+y_1)) \cdot ((x+x_1)+(y+y_1)) = (x+x_1)+(y+y_1)$ donc $(x+x_1)+(y+y_1) \in I$.

9-3 Notation. La congruence modulo l'idéal engendré par un élément symétrique e s'appelle **la congruence modulo e et se note** $mod(e)$.

9-4 Proposition. $x \equiv y(mod(e))$ si et seulement si $e \cdot (x+y) = x+y$.

Démonstration. En effet, $x \equiv y(mod(e)) \Longleftrightarrow x+y \in (e) \Longleftrightarrow e \cdot (x+y) = x+y$ (proposition 8-10).

9-5 Proposition. Pour tout booloïde A, l'application qui associe à un idéal I de A, la congruence modulo I, établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux de A et l'ensemble des congruences sur A.

Démonstration. Soit I un idéal de A, on sait que la relation modulo I définie dans le booloïde A est une congruence. Réciproquement, si R est une relation de congruence sur $A, I_R = \{x \in A : x \equiv 0 \cdot (R)\}$ est un idéal de A. On a $x \in I \Longleftrightarrow x+0 \in I \Longleftrightarrow x \equiv 0 \cdot (mod(I)) \Longleftrightarrow x \in I_{mod(I)}$, donc $I = I_{mod(I)}$. En outre, on a d'une part : $x \equiv y \cdot (R) \Longrightarrow x+y \equiv (y+y) \cdot (R) \Longrightarrow x+y \equiv 0 \cdot (R) \Longrightarrow x+y \in I_R \Longrightarrow x \equiv y \cdot (mod(I_R))$ et d'autre par $x \equiv y \cdot (mod(I_R)) \Longrightarrow x+y \equiv 0 \cdot (R) \Longrightarrow (0*x \equiv [(x+y)*x] \cdot (R)$ et $0*y \equiv [(x+y)*y] \cdot (R)) \Longrightarrow x \equiv y \cdot (R)$ (axiome (7)). Il en résulte $R = mod(I_R)$.

10. Filtres

10-1 Définition. Un filtre F d'un booloïde A est un sous-ensemble de A tel que :

1) $1 \in F$
2) ($a \in A$ et $x \in F$) $\Longrightarrow a*x \in F$
3) $x \in F, y \in F \Longrightarrow x \cdot y \in F$

Un filtre propre est caractérisé par la condition supplémentaire : $0 \notin F$.

10-2 Proposition. $x \in F$ si et seulement si $e(x) \in F$

Démonstration. Si $x \in F$, $e(x) = x \cdot 1 \in F$. Si $e(x) \in F, x = x*e(x) \in F$.

10-3 Proposition. ($x \in F$ **et** $a \in A$) $\Longrightarrow x*a \in F$.

Démonstration. Si $x \in F$ et $a \in A, a * x \in F$, donc $e(a * x) = e(x * a) \in F$, alors $x * a \in F$ (propostion 10-2).

10-4 Proposition. $x \in F, y \in F \Longrightarrow x + y' \in F$.

Démonstration. Par la proposition (3-8), on a : $(x+y')*(x \cdot y) = ((x + y') * x) \cdot ((x + y') * y) = ((x + y') * y') \cdot ((x + y') * y) = (x + y') * (y' \cdot y) = (x + y') * 0 = x + y'$. On en déduit $x + y' \in F$.

10-5 Proposition. Si F est un filtre d'un booloïde A, le sous-ensemble $sym(F) = \{x \in F : e(x) = x\} = F \cap sym(A)$ est un filtre de l'algèbre de Boole $sym(A)$.

Démonstration. En fait, $1 \in sym(F)$ car : $e(1) = 1 \in F$, et si ($a \in sym(A)$ et $x \in sym(F)$) on a : $x * a = e(x * a) = e(a * x) = a * x \in F$. Enfin, si $x \in sym(F)$ et $y \in sym(F)$ il résulte que : $y \cdot x = e(y \cdot x) = e(x \cdot y) = x \cdot y \in F$.

10-6 Notation.

(1) Un **filtre engendré par un sous-ensemble** G de A est le plus petit filtre qui contient G, il sera noté F_G.
(2) Un **filtre finiment engendré** est un filtre engendré par un sous-ensemble fini.
(3) Un **filtre principal** est un filtre engendré par un seul élément.
(4) Le **filtre principal engendré** par a est noté $)a($.

10-7 Proposition. Tout filtre de A est engendré par l'ensemble de ses éléments symétriques.

Démonstration. Soit F un filtre de A, et $x \in F$. Alors $e(x) \in sym(F)$. En outre x appartient au filtre engendré par $e(x)$, d'après la relation $x = x * e(x)$. Donc $x \in F_{sym(F)}$.

10-8 Proposition. Pour un filtre J de $sym(A), F_J = \{x : e(x) \in J\}$ est un filtre de A.

Démonstration. En effet : $1 \in F_J$, car $e(1) = 1$. Si $a \in A$ et $x \in F_J$, alors : $e(a * x) = e(a) * e(x) \in J$ (Proposition 7-8) donc $a * x \in F_J$. Enfin, si $x \in F_J$ et $y \in F_J$, alors $e(x \cdot y) = e(x) \cdot e(y) \in J$ d'où $x \cdot y \in F_J$.

10-9 Proposition. Il y a un isomorphisme entre l'ensemble ordonné des filtres de A, et l'ensemble ordonné des filtres de $sym(A)$.

Démonstration. Conséquence des trois propositions précédentes.

10-10 Proposition. Le filtre de A engendré par un élément $a \in A$ est

$)a(= \{x \in A : x \cdot a = a\}$.

Démonstration. Soit $]a[= \{x \in A : x \cdot a = a\}$. En effet : $1 \in]a[$, car $1 \cdot a = a$. Si $b \in A$ et $x \in]a[$, alors : $(b * x) \cdot a = b{\cdot}a * x{\cdot}a = b{\cdot}a * a = (b * a) \cdot a = a$ (proposition 3-7) donc $b * x \in]a[$. Enfin, si $x \in]a[$ et $y \in]a[$, on a : $x \cdot y \cdot a = x \cdot a = a$ d'où $x \cdot y \in]a[$. Par suite $]a[$ est un filtre de A contenant a et c'est clairement le plus petit. Donc $]a[=)a($.

10-11 Proposition. Tout filtre finiment engendré est un filtre principal.

Démonstration. Considérons F_G où G un ensemble fini. Si $G = \varnothing, F_G = \{1\} =)1($. Si $G = \{g_1, g_2, \dots g_q\}$, posons $g = g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_q$ alors $F_G =)g($ car $g_i \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \dots g_q = g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_q$ donc $g_i \in)g($ et $)g($ est clairement le plus petit filtre contenant $g_1, g_2, \dots g_q$.

11. Relation entre filtres et idéaux.

11-1 Proposition. Si I un idéal de A, l'ensemble $F(I) = \{x \in A : \exists a \in I, a * e(x) = 1\}$ est un filtre de A.

Démonstration. Il est clair que $1 \in F(I)$. Si $x \in F(I)$ et $y \in F(I)$: $a_1 * e(x) = 1$ et $a_2 * e(y) = 1$ avec $a_1 \in I, a_2 \in I$, donc $a_1 * a_2 * e(x \cdot y) = a_1 * a_2 * (e(y) \cdot e(x)) = a_1 * (a_2 * e(y)) \cdot (a_2 * e(x)) = a_1 * a_2 * e(x)$. Or $a_2 \in sym(I)$, car $a_2 \in I$ et $a_2 \cdot 1 = a_2 \cdot (a_2 * e(y)) = a_2$ (axiome 5). Donc $a_1 * a_2 * e(x \cdot y) = a_1 * a_2 * e(x) = a_1 * e(x) * a_2 = 1 * a_2 = 1$ d'où $x \cdot y \in F(I)$. Si maintenant $a \in A$ et $x \in F(I)$: $a_1 * e(x) = 1$ avec $a_1 \in I$, alors : $a_1 * e(a * x) = a_1 * e(x) * e(a) = 1$, d'où $a * x \in F(I)$.

11-2 Proposition. $x \in I \Longrightarrow x' \in F(I)$.

Démonstration. Si $x \in I$, alors : $e(x) \in I$ (proposition 10-2). En outre : $x' * e(x) = (1 + e(x)) * e(x) = 1$ (proposition 3-4). Donc $x' \in F(I)$.

11-3 Proposition. Si F un filtre de A, l'ensemble $I(F) = \{x \in A : \exists a \in F, a \cdot x = 0\}$ est un idéal de A.

Démonstration. En effet, il est clair que $0 \in I(F)$. Si $a \in A$ et $x \in I(F)$: $a_1 \cdot x = 0$ avec $a_1 \in F$, alors $a_1 \cdot x \cdot a = 0$ d'où $x \cdot a \in I(F)$. Si maintenant $x \in I(F)$ et $y \in I(F)$: $a_1 \cdot x = 0$ et $a_2 \cdot y = 0$ avec $a_1 \in F$ et $a_2 \in F$ donc $a_1 \cdot a_2 \cdot (x * y) = (a_1 \cdot a_2 \cdot x) * (a_1 \cdot a_2 \cdot y) = 0$ d'où $x * y \in I(F)$.

11-4 Proposition. $x \in F \Longrightarrow x' \in I(F)$.

Démonstration. Si $x \in F$, alors $x' \in I(F)$, car : $x \cdot x' = 0$ (proposition 5-2).

11-5 Proposition. Il existe un isomorphisme entre l'ensemble ordonné des filtres de A et l'ensemble ordonné des idéaux de A.
Preuve :

(a) $I(F(I)) = I$: si $x \in I, x' \in F(I)$, et comme $x' \cdot x = 0, x \in I(F(I))$. Supposons $x \in I(F(I))$. Il existe $b \in F(I)$ tel que $b \cdot x = 0$. Il existe $a \in I$ tel que $a * e(b) = 1$. Alors $x = (a * e(b)) \cdot x = a \cdot x * e(b) \cdot x = a \cdot x$ donc $x \in I$.

(b) $F(I(F)) = F$: supposons $x \in F$. Alors $x' \in I(F)$ et $x' * e(x) = 1$ donc $x \in F(I(F))$. Inversement si $x \in F(I(F))$: $\exists b \in I(F)$ tel que $b * e(x) = 1$. Il existe $a \in F$ tel que $a \cdot b = 0$. Donc $a = (b * e(x)) \cdot a = (b \cdot a) * e(x) \cdot a = 0 * e(x) \cdot a = e(x) \cdot a = x \cdot a$. Alors $x \in F$.

(c) Les applications $I(\ )$ et $F(\ )$ sont croissantes.

12. Filtres et congruences.

12-1 Définition. Soit F un filtre de A. On définit sur A la **relation modulo** F par : $x \equiv y(modF) \Longleftrightarrow \exists a \in F$ tel que $a \cdot x = a \cdot y$.

12-2 Notation. La congruence modulo le filtre **engendré** par un élément symétrique e s'appelle la **congruence complémentaire modulo** e **notée** $mod(e)'$.

12-3 Proposition. $x \equiv y(mod(e)')$ si et seulement si $e \cdot x = e \cdot y$.

Démonstration. $x \equiv y(mod(e)') \Longleftrightarrow x \equiv y(mod()e() \Longleftrightarrow e \cdot x = e \cdot y$.

12-4 Proposition. $x \equiv y(modF) \Longleftrightarrow (x+y)' \in F$.

Preuve. Si $x \equiv y(modF)$: $a \cdot x = a \cdot y$ et $a \in F$ donc $a \cdot (x+y) = 0$ et $a \in F$ alors $a \cdot (x+y)' = e(a) \in F$ donc $(x+y)' \in F$. Inversement si $a = (x+y)' \in F$ donc $a \cdot x = a \cdot y$ car $(x+y)' \cdot (x+y) = (x+y)' \cdot x + (x+y)' \cdot y = 0$.

12-5 Proposition. La congruence modulo un filtre F est identique à la congruence modulo l'idéal $I(F)$.

Preuve. Soit $x \equiv y(modF)$. Il existe $a \in F$ tel que $a \cdot x = a \cdot y$; Alors $a \cdot (x+y) = 0$, donc $x+y \in I(F)$ et $x \equiv y(modI(F))$. Réciproquement, supposons : $x \equiv y(modI(F))$. Alors $x+y \in I(F)$ donc il existe $a \in F$ tel que $a \cdot (x+y) = 0$. Alors $a \cdot x = a \cdot y$ avec $a \in F$. Donc $x \equiv y(modF)$.

13. Idéaux premiers et filtres premiers.

13-1 Idéaux premiers.

13-1-1 Définition. 1) Un idéal I est **premier** s'il est propre et vérifie : $x \cdot y \in I \Longrightarrow (x \in I \quad \text{ou} \quad y \in I)$.
2) Un idéal I est **maximal** s'il est propre et n'est proprement contenu dans aucun idéal propre de A.

13-1-2 Théorème. Dans un booloïde A, les assertions suivantes sont équivalentes.

1) **I est un idéal premier ;**
2) **I est propre et pour tout $x \in A : x \in I \quad$ ou $\quad x' \in I$;**
3) **I est un idéal maximal.**
4) **$sym(I)$ est un idéal maximal de $sym(A)$.**

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) : L'élément nul 0 appartient à tout idéal I de A. En conséquence : $0 = x \cdot x' \in I$ pour tout $x \in A$; et comme I est premier, on a : $x \in I$ ou $x' \in I$.

2) $\Longrightarrow$ 3) : Supposons qu'il existe un idéal J de A qui contienne proprement l'idéal I. Comme $J \neq I$, il existe un élément x appartenant à J et non à I. Appliquant l'assertion 2), on conclut que l'élément $x' \in I$ et donc aussi $x' \in J$. J contenant x et x', contient $x' * e(x) = 1$ et n'est pas propre. Par conséquent, I est un idéal maximal.

3) $\Longrightarrow$ 2) : Si I est maximal et si $x \notin I$, alors $\{x*y : y \in I\}$ est un idéal contenant strictement I, donc contenant 1. Alors il existe $y \in I, x*y = 1$. Par suite $x' = (x*y)\cdot x' = x\cdot x' * y\cdot x' \in I$.

2) $\Longrightarrow$ 1) : Si $x \notin I$ et $y \notin I$, alors $x' \in I$ et $y' \in I$, donc $(x \cdot y)' = x' * y' \in I$, et par suite $x \cdot y \notin I$.

3) $\Longleftrightarrow$ 4): Découle de la proposition (8-9).

13-2 Filtres premiers.

13-2-1 Définition. 1) Un filtre **premier** F d'un booloïde A est un filtre propre vérifiant : $x * y \in F \Longrightarrow (x \in F \quad \text{ou} \quad y \in F)$.

2) Un filtre **maximal** F d'un booloïde A est un filtre propre, qui n'est proprement contenu dans aucun filtre propre de A.

13-2-2 Théorème. Pour un filtre F, les assertions suivantes sont équivalentes.

1) **F est un filtre premier ;**
2) **F est propre et pour tout x de $A, x \in F$ ou $x' \in F$;**
3) **F est un filtre maximal.**
4) **$sym(F)$ est un filtre maximal de $sym(A)$.**

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) : L'élément unité 1 appartient à tout filtre F de A. En conséquence $1 = e(x) * (1 + e(x)) \in F$ pour tout $x \in A$. Comme F est premier et selon la proposition (10-2), on a : $e(x) * x' \in F \Longrightarrow x \in F$ ou $x' \in F$.

2) $\Longrightarrow$ 3) : Supposons qu'il existe un filtre G de A qui contienne proprement le filtre F. Comme $F \neq G$, il existe un élément x appartenant à G et non à F. Appliquant l'assertion 2), on conclut que l'élément $x' \in F$ et donc aussi $x' \in G$. G contenant x et x' contient $x \cdot x' = 0$ et n'est pas propre. Par conséquent, F est un filtre maximal.

3) $\Longrightarrow$ 2) : Si F est maximal, et si $x \notin F$, alors $\{x \cdot y : y \in F\}$ est un filtre contenant strictement F, donc contenant 0. Alors il existe $y \in F, x \cdot y = 0$. Par suite $x' = x' * (x \cdot y) = x' * (x \cdot 1 \cdot y) = (x' * x \cdot 1) \cdot (x' * y) = 1 \cdot (x' * y) = x' * y \in F$.

2) $\Longrightarrow$ 1): Si $x \notin F$ et $y \notin F$, alors $x' \in F$ et $y' \in F$, donc $(x * y)' = x' \cdot y' \in F$, et par suite $x * y \notin F$.

3) $\Longleftrightarrow$ 4): Découle de la proposition (10-9).

13-2-3 Proposition. Pour un idéal I, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) I est premier.

2) $F(I)$ est premier.

Démonstration. Découle de la proposition (11.5).

14. Booloïdes simples.

14-1 Définition. Un booloïde A est **simple** si $0 \neq 1$ et les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A.

14-2 Proposition. Pour un booloïde A, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est simple.

2) $sym(A) = \{0, 1\}$.

Démonstration. En effet, A est simple $\Longleftrightarrow$ $sym(A)$ est l'algèbre de boole triviale réduite aux deux éléments 0 et 1 (proposition (8-9)).

14-3 Proposition. Les booloïdes simples sont exactement les ensembles bipointés.

Démonstration. Soit A un booloïde simple. Il est bipointé par 0 et 1. Nous savons que $a \cdot b = e(a) \cdot b$ et que $e(a)$ est un élément symétrique. Donc si $a \neq 0, e(a) \neq 0$ et $a \cdot b = b$. En outre $0 \cdot b = 0$. Donc

$$a \cdot b = \begin{cases} a & \text{si} \quad a = 0 \\ b & \text{si} \quad a \neq 0 \end{cases}$$

La proposition (3-9) entraîne pour $a \neq 0, a * b = a$, donc

$$a * b = \begin{cases} b & \text{si} \quad a = 0 \\ a & \text{si} \quad a \neq 0 \end{cases}$$

De plus, si $a \neq b, a + b \neq 0$ (proposition 3-1). Puisque $a + b$ est symétrique, $a + b = 1$. Donc

$$a + b = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a = b \\ 1 & \text{si} \quad a \neq b \end{cases}$$

A est donc le booloïde canoniquement associé à un ensemble bipointé (exemple (1)). Réciproquement, dans le booloïde canoniquement associé à un ensemble A, on a : $a \cdot 1 = 1$ pour $a \neq 0$, donc $a = 1$ si a est symétrique. Donc $sym(A) = \{0, 1\}$ et A est simple.

15. Anneaux commutatifs booloïdes

15-1 Définition. Un anneau commutatif booloïde est un anneau commutatif unitaire A muni d'une opération binaire de symbole $\cdot$ idempotente, associative et qui vérifie les deux conditions :

1) $a \cdot (bc) = (a \cdot b)c$
2) $a \cdot b = 0 \Longrightarrow b \cdot a = 0$

15-2 Proposition. Dans un anneau commutatif booloïde, on a :

(1) $a \cdot b = (a \cdot 1)b$.
(2) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
(3) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.
(4) $(1 - a \cdot 1)a = (1 - a \cdot 1) \cdot a = 0$.
(5) $e \cdot 1 = e \Longrightarrow (1 - e) \cdot 1 = 1 - e$.
(6) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Démonstration (1). On a : $(a \cdot 1)b = a \cdot (1b) = a \cdot b$.
(2) $a \cdot (b + c) = (a \cdot 1)(b + c) = (a \cdot 1)b + (a \cdot 1)c = a \cdot b + a \cdot c$.
(3) $a \cdot (b - c) = (a \cdot 1)(b - c) = (a \cdot 1)b - (a \cdot 1)c = a \cdot b - a \cdot c$.
(4) On a : $(1 - a \cdot 1)a = a - (a \cdot 1)a = a - a \cdot (1a) = a - a = 0$. De plus $a \cdot (1 - a{\cdot}1) = (a \cdot 1)(1 - a{\cdot}1) = a{\cdot}1 - (a \cdot 1)(a \cdot 1) = a{\cdot}1 - a \cdot a \cdot 1 = a{\cdot}1 - a{\cdot}1 = 0$, donc $(1 - a \cdot 1) \cdot a = 0$.
(5) Si $e \cdot 1 = e$, alors $(1 - e) \cdot e = (1 - e \cdot 1) \cdot e = 0$, donc $(1 - e) \cdot [1 - (1 - e)] = 0$ et par suite $(1 - e) \cdot 1 = 1 - e$.
(6) En effet : $a \cdot 0 = a \cdot (a - a) = (a \cdot 1)(a - a) = (a \cdot 1)a - (a \cdot 1)a = 0$. Donc, on a aussi $0 \cdot a = 0$.

15-3 Rappel. Les E-anneaux [6]

Un E-anneau est un anneau unitaire A muni d'une opération unaire e vérifiant les six axiomes suivants :

(E_1) $e(x)$ est idempotent central.
(E_2) $xe(x) = x$
(E_3) $e(e(x)) = e(x)$
(E_4) $e(-x) = e(x)$
(E_5) $e(1 - e(x)) = 1 - e(x)$
(E_6) $e(e(x)y) = e(x)e(y)$

D'après [2] les quatre axiomes suivants sont suffisants.

(1) $e(x)$ est un élément central
(2) $e(0) = 0$
(3) $xe(x) = x$
(4) $e(ye(x)) = e(y)e(x)$

15-4 Théorème. Pour un anneau commutatif unitaire A, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) **A est un anneau booloïde.**
2) **A est muni d'une structure de booloïde telle que 0 et 1 sont ses deux éléments distingués et $a \cdot (bc) = (a \cdot b)c$ pour tout a, b, c.**
3) **A est E-anneau.**

Démonstration : 1$\Longrightarrow$ 2) On a : $a \cdot b = (a \cdot 1)b$. En particulier, pour $a = 1$, on a $1 \cdot b = b$. Donc 1 est élément unité à gauche pour l'opération $\cdot$. De plus $a \cdot b \cdot c =$

$a \cdot ((b \cdot 1)c) = (a \cdot 1)(b \cdot 1)c = (b \cdot 1)(a \cdot 1)c = b \cdot a \cdot c$. Donc l'opération $\cdot$ est associative.

Définissons maintenant l'opération $*$ par : $a * b = a+b - a{\cdot}b = a + (1 - a{\cdot}1)b$. On a : $(a * b) \cdot 1 = a{\cdot}1 * b{\cdot}1$. En effet, appliquant la proposition (15-2) on a d'une part : $(a*b){\cdot}[a{\cdot}1+(1-a{\cdot}1){\cdot}(b{\cdot}1)] = (a*b){\cdot}[1-(1-a{\cdot}1){\cdot}(1-b{\cdot}1)] = (a*b){\cdot}1-(a+b-a{\cdot}b){\cdot}(1-a{\cdot}1){\cdot}(1-b{\cdot}1) = (a*b){\cdot}1-(1-a{\cdot}1){\cdot}(a+b-a{\cdot}b){\cdot}(1-b{\cdot}1) = (a*b){\cdot}1-0-(1-a{\cdot}1){\cdot}b{\cdot}(1-b{\cdot}1)+0 = (a*b){\cdot}1$ et d'autre part : $(a*b){\cdot}[a{\cdot}1+(1-a{\cdot}1){\cdot}(b{\cdot}1)] = (a+b-a{\cdot}b){\cdot}a{\cdot}1+(a+b-a{\cdot}b){\cdot}(1-a{\cdot}1){\cdot}(b{\cdot}1) = a{\cdot}(a+b-a{\cdot}b){\cdot}1+(1-a{\cdot}1){\cdot}(a+b-a{\cdot}b){\cdot}(b{\cdot}1) = a{\cdot}a{\cdot}1+(1-a{\cdot}1){\cdot}b{\cdot}(b{\cdot}1) = a{\cdot}1+(1-a{\cdot}1){\cdot}(b{\cdot}1) = a{\cdot}1+[(1-a{\cdot}1){\cdot}1](b{\cdot}1) = a{\cdot}1+(1-a{\cdot}1)(b{\cdot}1) = a{\cdot}1*b{\cdot}1$. On en déduit que $(a*b){\cdot}1 = a{\cdot}1*b{\cdot}1$.

L'opération $*$ est associative puisque :

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= a + (1 - a{\cdot}1)b + (1 - a{\cdot}1 - (1 - a{\cdot}1)(b \cdot 1))c \\ &= a + (1 - a{\cdot}1)b + (1 - a{\cdot}1)(1 - b{\cdot}1)c \\ &= a + (1 - a{\cdot}1)(b + (1 - b{\cdot}1)c) = a * (b * c).\end{aligned}$$

En outre, $0 * a = 0 + a - 0 \cdot a = a$ (proposition 15-2), et $a \cdot (a * b) = a \cdot (a+b - a{\cdot}b) = a \cdot a = a$. On a

$$\begin{aligned}a \cdot (b * c) &= a \cdot (b + c - b \cdot c) = a{\cdot}b + a{\cdot}c - a{\cdot}b{\cdot}c \\ &= a{\cdot}b + a{\cdot}c - a{\cdot}b{\cdot}a{\cdot}c = a{\cdot}b * a{\cdot}c.\end{aligned}$$

Egalement, on a

$$\begin{aligned}(a * b) \cdot c &= ((a * b) \cdot 1)c = ((a \cdot 1) * (b \cdot 1))c = (a{\cdot}1 + b{\cdot}1 - a{\cdot}b{\cdot}1)c = \\ &= a{\cdot}c + b{\cdot}c - a{\cdot}b{\cdot}c = a{\cdot}c + b{\cdot}c - a{\cdot}c{\cdot}b{\cdot}c = a{\cdot}c * b{\cdot}c\end{aligned}$$

Définissons l'opération $\dashv$ par : $a \dashv b = (a - b) \cdot 1$. On a $a \dashv a = (a - a) \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$ (proposition 15-2). En outre, l'opération $\dashv$ est commutative puisque $a \dashv b = (a - b) \cdot 1 = [-((b - a) \cdot 1)(b - a)] \cdot 1 = [((b - a) \cdot 1)(a - b)] \cdot 1 = (b - a) \cdot (a - b) \cdot 1 = (a - b) \cdot (b - a) \cdot 1 = (b - a) \cdot 1 = b \dashv a$. Aussi $a \cdot (b \dashv c) = a \cdot (b - c) \cdot 1 = (a \cdot b - a \cdot c) \cdot 1 = a \cdot b \dashv a \cdot c$. Enfin, $(a \dashv b) * 1 = (a \dashv b) + 1 - (a \dashv b) \cdot 1 = 1$ et

$$\begin{aligned}(a \dashv b) * a &= (a \dashv b) + a - (a - b) \cdot (a - b + b) = (a \dashv b) + a - (a - b) - (a - b) \cdot b \\ &= (a \dashv b) + b - (a \dashv b) \cdot b = (a \dashv b) * b.\end{aligned}$$

Donc les trois opérations précédentes définissent sur A une structure de booloïde tel que ses éléments distingués sont 0 et 1 et vérifie aussi l'égalité $a \cdot (bc) = (a \cdot b)c$.

2) $\Longrightarrow$ 3) : Posons $e(x) = x{\cdot}1$. On a $e(0) = 0$ et $xe(x) = e(x)x = (x{\cdot}1)x = x{\cdot}(1x) = x{\cdot}x = x$. De plus $e(e(x)y) = ((x \cdot 1)y) \cdot 1 = x \cdot y \cdot 1 = (x \cdot 1)(y \cdot 1) = e(x)e(y)$. Alors A est un E-anneau.

3) $\Longrightarrow$ 1) : Supposons que A est un E-anneau et définissons l'opération $\cdot$ par : $a \cdot b = e(a)b$. L'opération $\cdot$ est idempotente puisque $a \cdot a = e(a)a = a$, et associative puisque $(a \cdot b) \cdot c = e(e(a)b)c = e(a)e(b)c = a \cdot (b \cdot c)$. En plus, on a $a \cdot (bc) = e(a)bc = (a \cdot b)c$. Enfin si $a \cdot b = e(a)b = 0$ alors $e(e(a)b) = e(b)e(a) = 0$ donc $b \cdot a = e(b)e(a)a = 0$. Alors A est un anneau booloïde.

15-5 Exemple. Les anneaux commutatifs réguliers [10].

Définissons l'opération $\cdot$ par $a \cdot b = a\bar{a}b$ on a $a \cdot a = a\bar{a}a = a$ et $(a \cdot b) \cdot c = \overline{a\bar{a}b}a\bar{a}bc = (a\bar{a})^2 b\bar{b}c = a\bar{a}b\bar{b}c = a \cdot (b \cdot c)$. En plus, $a \cdot (bc) = a\bar{a}bc = (a \cdot b)c$ et $a \cdot b =$

$a\bar{a}b = 0 \Longrightarrow aa\bar{a}b = ab = ba = 0 \Longrightarrow b \cdot a = \bar{b}ba = 0$. Donc les anneaux commutatifs réguliers sont des anneaux commutatifs booloïdes. On retrouve les résultats de 2-3. En effet $a * b = a + (1 - a{\cdot}1)b = a + (1 - a\bar{a})b$ et $a \dashv b = (a - b) \cdot 1 = (a - b)(\overline{a - b})$.

15-6 Proposition. Les anneaux commutatifs booloïdes tels que l'opération $\cdot$ soit commutative sont exactement les anneaux de Boole.

Démonstration. Soit A un anneau commutatif booloïde tel que l'opération $\cdot$ soit commutative. Alors $a \cdot b = a \cdot (1b) = (a \cdot 1)b = (1 \cdot a)b = ab$. Donc l'opération $\cdot$ coïncide avec le produit dans l'anneau. On en déduit que A est simplement un booloïde commutatif, donc une algèbre de Boole. Il est alors muni d'une structure d'anneau de boole qui coïncide précisement avec la structure donnée d'anneau commutatif car on a : $a * b = a + (1 - a{\cdot}1)b = a{+}b - ab$.

REFERENCES

[1] E. AYRES, *Algèbre moderne (Série Schaum)*, Paris,McGraw-Hill, (1983).

[2] Y.DIERS, *Categories of Boolean sheaves of simple Algebras*, Lecture Notes in Mathematics 1187, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo (1980).

[3] Y.DIERS, *Une description axiomatique des catégories de faisceaux de structures algébriques sur les espaces topologiques booléens*, Advances in Mathematics, **47,** (1983), pp.258–299.

[4] R. FAURE, E. HEURGON, *Structures ordonnées et algèbres de Boole*, Paris, Gauthiers-Villars, (1971).

[5] K.H. HOFMANN, *Representations of algebras by continuous sections*, Bull. Amer. Math. Soc **78,** (1972), pp. 291–373.

[6] J.F. KENNISON, *Triples and compact sheaf representations*, J. Pure. Appl. Algebra 20 (1981), pp.13–38.

[7] J.F. KENNISON, *Structure and constructure for strongly regular rings*, J. Pure and Appl. Algebra 5 (1974), pp.321–332.

[8] F.W. LAWVERE, *Functorial semantics of algebraic theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), pp.869–873..

[9] N.H. MacCOY et D.MONTGOMERY, *A representation of generalised Boolean rings*, Duke Math. J. **3,** (1937), pp.455–459.

[10] J.V. NEUMANN, *Regular Rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 22 (1936), pp.707–713.

[11] N. PERMINGEAT, D. GLAUDE, *Algèbre de Boole*, Paris, Masson, (1988.).