DIAGRAMMES

C. LAIR

Catégories qualifiables et catégories esquissables

Diagrammes, tome 17 (1987), p. 1-153

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1987__17__1_0>

CATEGORIES QUALIFIABLES
ET
CATEGORIES ESQUISSABLES

C. Lair

INTRODUCTION

Ce texte est (essentiellement) consacré à quelques rappels.

En effet, nous rappelons tout d'abord, dans la Section I, les propriétés les plus élémentaires des catégories dites *qualifiables*, i. e. de ces sous-catégories pleines d'une plus large catégorie et ayant pour objets ceux dont nous disons, à la suite de Andréka-Németi-Sain (voir par exemple (A.C.I.S.) et (C.I.S.B.)) , qu'ils *valident* ou *satisfont* certains cônes projectifs donnés de cette plus large catégorie.

Nous rappelons ensuite, dans la Section II, les propriétés essentielles de certaines catégories dites, à la suite d'Ehresmann (voir par exemple (E.T.S.A.)), *esquissables*: i. e. des sous-catégories qualifiables des catégories de foncteurs ou des catégories localement présentables.

A titre d'illustration simple, voire simpliste, nous rappelons alors, dans la Section III, comment les considérations méthodes et résultats des Sections I et II fournissent *obligatoirement* et *systématiquement* les solutions quasiment triviales à, par exemple, cinq exercices élémentaires sur les catégories qualifiables puis à cinq exercices élémentaires (traductions automatiques particulières de ces cinq premiers) sur les catégories esquissables.

A.M.S. SUB. CLASS. : 18 C 10 , 18 B 40 , 18 A 10 , 18 A 35

Enfin, l'Appendice est consacré à trois caractérisations sémantiques intrinsèques des catégories esquissables. La première reprend mot pour mot les considérations d'un travail antérieur. La deuxième en est une formulation particulière qui en découle immédiatement. La troisième, originale (mais assez sophistiquée sur le plan technique - ce qui nous avait dissuadé de la publier antérieurement), fournit une réponse complète au problème de la caractérisation des catégories esquissables, non par une esquisse quelconque, mais par une esquisse de forme *prescrite* (arbitraire) a priori.

Il s'agit effectivement, pour l'essentiel par conséquent, de *rappels*: tant la théorie des catégories qualifiables que celle, plus particulière, des catégories esquissables figurent dans nombre de textes antérieurs, notamment (I.T.S.C.), (E.T.S.A.), (A.C.I.S.), (C.I.S.B.), (C.M.C.F.), (C.M.C.E.), (E.D.L.L.), (C.S.C.S.) ... pour n'en citer que *peu*, ainsi que *toutes* les méthodes développées et utilisées ici.
Plus précisément, c'est bien en (C.M.C.F.) que, pour la première fois, le lien - qui est *très* fécond - fut réellement et définitivement établi entre les catégories qualifiables (étudiées par Andréka-Németi-Sain), les catégories localement présentables ou, plus généralement, localisables (étudiées par Gabriel-Ulmer puis Diers) et les catégories esquissables (introduites par Ehresmann).

Si le présent travail prétend à quelque originalité ce n'est donc, essentiellement, que de *regrouper* plus d'un texte sur le sujet.

Le lecteur pourra, par conséquent, trouver ici un exposé de synthèse sur ce thème.

Je me suis résolu à publier ce texte, et sous cette forme, à la suite de quelques péripéties dont voici le détail.

En Décembre 1985, je prends connaissance du livre, paru chez Springer, intitulé "Toposes, Triples and Theories", publié par Barr et Wells.
En Janvier 1986, j'écris personnellement à Barr et Wells pour leur indiquer, tout d'abord, quelques erreurs purement techniques dans l'exposé de théorie des esquisses qu'ils développent en leurs Chapitres 4 et 8. Mais, surtout, pour les informer de ce que la théorie des esquisses a été largement étudiée et développée, depuis qu'elle fut fondée par Ehresmann, et de ce que ces développements éclairent certaines de leurs considérations et apportent nombre de solutions aux problèmes qu'ils se posent

(notamment, de caractérisation de certaines catégories esquissables). Je leur indique, enfin, mon étonnement de ne voir cités aucun de ces travaux et, par conséquent, demande que, sous une forme ou sous une autre, une mise au point soit apportée, par eux, à ce sujet.
En Juillet 1986, n'ayant reçu pour toute réponse, sans même *une* phrase d'accompagnement, qu'une vague liste de "corrections to *Toposes, Triples and Theories*", dont j'ignore complètement la destination et où figurent *exclusivement* les seules corrections de *détail* qui avaient été suggérées, j'estime nécessaire de procéder moi même à la mise au point qui s'impose, dès lors, *d'autant plus*: aussi, je publie ma lettre de Janvier 1986 (voir (P.T.T.T)).
En Septembre 1986, je prends connaissance de l'article de Barr, publié dans les Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, intitulé "Models of Sketches". J'y constate, par rapport à ce qui est développé dans le livre, cité plus haut, quelques évolutions auxquelles ma lettre de Janvier 1986 ne semble pas totalement étrangère. Surtout, j'y relève des préoccupations proches de celles figurant dans mes travaux antérieurs et des problèmes qui, en tout cas, deviennent totalement élémentaires, voire triviaux, si on les replace et les traite explicitement dans le cadre et par les méthodes systématiques que ces travaux avaient contribué à fonder et à développer (le présent texte en est justement la preuve explicite et formelle).
En Octobre 1986, ne croyant plus à aucune possibilité d'échange scientifique sérieux avec Barr, je me vois donc contraint d'écrire à Mme A. C. Ehresmann (directrice des Cahiers de Topologie et géométrie Différentielle Catégoriques) pour lui demander de publier la nouvelle "mise au point" qui s'impose devant la volonté - cette fois-ci délibérée - manifestée par Barr de faire la sourde oreille à toute mes sollicitations légitimes, c'est à dire de taire systématiquement mes publications.
En Janvier 1987, je reçois (enfin!?) une lettre personnelle de Barr: la grossièreté y côtoie la malhonnêteté intellectuelle. Il m'y somme de "fermer ma gueule", espérant m'intimider et me dissuader de prouver ce que j'avance.

Oui "Models of Sketches", encore davantage que les Chapîtres 4 et 8 de "Toposes, Triples and Theories", n'est qu'une pâle recopie, volontaire ou non, de résultats et méthodes qui ne doivent *rien* à Barr, qui, eux, sont systématiques et féconds, et réduisent à des exercices élémentaires, banaux et triviaux les "main theorems" qu'il prétend "étudier".

Oui, Barr aurait dû et devrait citer certains travaux antérieurs mais, surtout (après les avoir lus), les travailler et (si possible) les comprendre pour les appliquer avec davantage de profit et de pertinence, s'il est vrai que "science sans conscience n'est que ruine de l'âme" ... a fortiori lorsqu'il y a peu de science.

Au delà de toute polémique, n'ayant aucunement l'intention de me taire face à l'intimidation, je me résouds à publier ce texte. Il est sans doute fort long, au contraire de celui de Barr: c'est que rétablir la vérité, lorsqu'elle est travestie, volontairement ou non, est plus fastidieux que de la travestir. Il se veut être la preuve exclusivement scientifique de ce que j'avance. En tout cas, ce le sera pour le lecteur attentif et sérieux qui n'ira pas (au contraire de Barr, dans sa lettre de Janvier 1987) jusqu'à même nier l'existence matérielle de ce qu'il peut lire.

SECTION I

CATEGORIES QUALIFIABLES

I.1. VALIDATION ET SATISFACTION.

On suppose, dans tout ce n°I.1, que $\mathbb{C}$ est une catégorie localement petite.

I.1.1. Validation.

I.1.1.1. Soit $f = (f_x : C \to C_x)_{x \in E}$ une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$ [voir Note 1].

On dit qu'un objet C' de $\mathbb{C}$ *valide* f, et l'on écrit $C' <\!| f$, si et seulement si [voir Notes 2 et 3]:

- pour toute flèche $c : C \to C'$ de $\mathbb{C}$, il existe au moins un $x \in E$ et au moins une flèche $c_x : C_x \to C'$ de $\mathbb{C}$ tels que $c_x . f_x = c$.

[Note 1. On ne considère, dans la suite, que des familles projectives "petites" de flèches. Si $f = (f_x : C \to C_x)_{x \in E}$ est une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$, on dit que:
- E est l'*ensemble d'indexation* de f,
- C est le *sommet* de f,
- pour tout $x \in E$, C_x est un *pied* de f,
- pour tout $x \in E$, $f_x : C \to C_x$ est une *projection* de f.]

[Note 2. La définition de validation, donnée ici, peut être qualifiée d'*interne à* $\mathbb{C}$, en ce sens qu'elle ne fait intervenir explicitement que la "géométrie" de $\mathbb{C}$.
On peut bien entendu en donner une définition "externe", en ce sens qu'elle fait intervenir Ens (et ce n'est qu'ici que l'hypothèse "$\mathbb{C}$ est localement petite" intervient). En effet, il est clair que C' valide f si, et seulement si:
- l'application canonique ("composition par les f_x")

$$\Sigma_{x \in E} \mathrm{Hom}(C_x, C') \to \mathrm{Hom}(C, C')$$

est un épimorphisme de Ens]

[Note 3. La notion d'objet validant une famille projective de flèches a été introduite, sous une appellation différente, par Andréka-Németi-Sain, par exemple dans (A.C.I.S.) et (C.I.S.B).]

I.1.1.2. Soit C un objet de $\mathbb{C}$.

On dit qu'un objet C' de $\mathbb{C}$ *valide* C , et l'on note encore $C' <| C$, si et seulement si:

- C' valide la famille projective $\emptyset$-famproj(C) [voir Note 4].

Ainsi, on a:

- $C' <| C \Leftrightarrow C' <| (;C \to)_{\in \emptyset}$.

[Note 4. Si C est un objet de $\mathbb{C}$, on note $\emptyset$-famproj(C) la famille projective de flèches de $\mathbb{C}$, de sommet C et ayant l'ensemble vide pour ensemble d'indexation. Par analogie avec la notation générale, on convient d'écrire, plus "concrètement", $\emptyset$-famproj(C) = $(;C \to)_{\in \emptyset}$.]

I.1.1.3. Soit $e:C \to C_o$ une flèche de $\mathbb{C}$.

On dit qu'un objet C' de $\mathbb{C}$ *valide* e , et l'on note toujours $C' <| e$, si et seulement si:

- C' valide la famille projective 1-famproj(e) [voir Note 5].

Ainsi, on a:

- $C' <| e \Leftrightarrow C' <| (e)$.

[Note 5. Si $e:C \to C_o$ est une flèche de $\mathbb{C}$, on note 1-famproj(e) la famille projective de flèches de $\mathbb{C}$, de sommet C , ayant l'ensemble $1 = \{0\}$ pour ensemble d'indexation et dont la seule projection est $e:C \to C_o$. Par analogie avec la notation générale, on convient d'écrire, plus "concrètement", 1-famproj(e) = $(e:C \to C_o) = (e)$.]

I.1.2. Satisfaction.

I.1.2.1. Soit $p = (p_I:C \to B(I))_{I \in \mathcal{I}}$ un cône projectif de $\mathbb{C}$ [voir Note 6].

On dit qu'un objet C' de $\mathbf{C}$ *satisfait* p , et l'on note $C' \mathrel{<\!\!\|}\, p$, si et seulement si [voir Notes 7 et 8]:
- pour toute flèche $c{:}C \to C'$ de $\mathbf{C}$, il existe au moins un objet I de $\mathbf{I}$ et au moins une flèche $c_I{:}B(I) \to C'$ de $\mathbf{C}$ tels que $c_I.p_I = c$,
- pour tous objets I et I' de $\mathbf{I}$ et toutes flèches $c_I{:}B(I) \to C'$ et $c_{I'}{:}B(I') \to C'$ de $\mathbf{C}$ tels que $c_I.p_I = c_{I'}.p_{I'}$, il existe un zigzag

$$Z{:}\quad I = I_1 \leftarrow I_2 \to I_3 \ldots I_{2k-1} \leftarrow I_{2k} \to I_{2k+1} = I'$$

de flèches de $\mathbf{I}$ et il existe un diagramme

$$B(Z){:}\quad \begin{tikzcd}[column sep=small]
B(I) \arrow[drrr, "c_I"'] & B(I_2) \arrow[l] \arrow[r] & B(I_3) \arrow[dr] & \ldots & B(I_{2k-1}) \arrow[dl] & B(I_{2k}) \arrow[l] \arrow[r] & B(I') \arrow[dlll, "c_{I'}"] \\
 & & & C' & & &
\end{tikzcd}$$

commutatif dans $\mathbf{C}$.

[Note 6. On ne considère, dans la suite, que des cônes projectifs "petits". Si $p = (p_I{:}C \to B(I))_{I \in \mathbf{I}}$ est un cône projectif de $\mathbf{C}$, on sous-entend - car il n'y aura pas risque de confusion dans la suite - que:
- $\mathbf{I}$ est un graphe orienté petit (resp. une catégorie petite),
- $B{:}\mathbf{I} \to \mathbf{C}$ est un homomorphisme de graphes orientés (resp. un foncteur),
- pour toute flèche $i{:}I \to I'$ de $\mathbf{I}$, on a $B(i).p_I = p_{I'}$.

Alors, on dit que:
- $\mathbf{I}$ est le *graphe orienté* (resp. la *catégorie*) *d'indexation* du cône projectif p ,
- $B{:}\mathbf{I} \to \mathbf{C}$ est la *base* de p ,
- C est le *sommet* de p ,
- pour tout objet I de $\mathbf{I}$, $B(I)$ est un *pied* de p ,
- pour tout objet I de $\mathbf{I}$, $p_I{:}C \to B(I)$ est une *projection* du cône projectif p .]

[Note 7. La définition de satisfaction, donnée ici, peut encore être qualifiée d'*interne à* $\mathbb{C}$, dans le même sens que celui de la Note 2, concernant la validation.
On peut, de même, en donner une définition "externe". Il est clair, en effet, que C' satisfait p si, et seulement si:
- l'application canonique ("composition par les p_I ")

$$\mathrm{limind}_{I \in \mathbb{I}^{op}} \mathrm{Hom}(B(I),C') \to \mathrm{Hom}(C,C')$$

est un isomorphisme de Ens ,
(si l'on désigne par limind un opérateur "choix de limites inductives" dans Ens).]

[Note 8. La notion générale d'objet satisfaisant un cône projectif d'une certaine catégorie a été introduite, sous une terminologie différente, par Guitart-Lair en (C.M.C.F.). Elle constitue la formalisation "proprement catégorique" - et non pas seulement ensembliste, comme en I.1.1 - de l'idée d'objet validant "des" flèches. Elle fait apparaître un cône projectif p de $\mathbb{C}$ comme une *formule interne à* $\mathbb{C}$ ... d'autant plus qu'on a choisi la définition interne de la satisfaction (voir la Note 7): dans la suite, la "règle du jeu" sera de mener à bien toutes les démonstrations (ou de poser toutes les définitions) en conservant systématiquement - comme en (C.M.C.F.) - ce mode de présentation interne.]

I.1.2.2. Soit C un objet de $\mathbb{C}$.
On dit qu'un objet C' de $\mathbb{C}$ *satisfait* C , et l'on note encore C' <|| C , si et seulement si:
- C' satisfait le cône projectif ∅-côneproj(C) [voir Note 9].
Ainsi, on a:
- C' <|| C ⟺ C' <|| $(;C \to)_{\in \varnothing}$.

[Note 9. Si C est un objet de $\mathbb{C}$, on note ∅-côneproj(C) le cône projectif de sommet C , ayant pour graphe orienté - ou pour catégorie - d'indexation le graphe - ou la catégorie - vide (que l'on note ∅). Par analogie avec la notation générale, on convient d'écrire ∅-côneproj(C) = $(;C \to)_{\in \varnothing}$.]

I.1.2.3. Soit $e:C \to C_0$ une flèche de $\mathbb{C}$.
On dit qu'un objet C' de $\mathbb{C}$ *satisfait* e , et l'on note de nouveau C' <|| e , si et seulement si:
- C' satisfait le cône projectif 1-côneproj(e) [voir Note 10].
On a donc:
- C' <|| e ⟺ C' <|| (e) .

[Note 10. Si $e:C \to C_0$ est une flèche de $\mathbb{C}$, on note 1-côneproj(e) le cône projectif, de sommet C, ayant pour graphe orienté - ou catégorie - d'indexation "le" graphe orienté - ou "la" catégorie - à un seul objet et une seule flèche, que l'on note 1, et ayant $e:C \to C_0$ pour seule projection. Par analogie avec la notation générale, on convient d'écire encore, plus "concrètement", 1-côneproj(e) $= (e:C \to C_0) = (e)$ ... ce qui ne créera cependant pas d'ambiguïté avec la notation adoptée dans la Note 5 (voir aussi la Note 11).]

I.1.2.4. Soit $f = (f_x:C \to C_x)_{x \in E}$ une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$.

On dit qu'un objet C' de $\mathbb{C}$ *satisfait* f, et l'on note toujours $C' \lhd\!\vert\vert\; f$, si et seulement si:

- l'objet C' satisfait le cône projectif côneproj(f) [voir Note 11].

On a, par conséquent:

- $C' \lhd\!\vert\vert\; (f_x:C \to C_x)_{x \in E} \Leftrightarrow C' \lhd\!\vert\vert\; (f_x:C \to C_x)_{x \in Disc(E)}$.

[Note 11. Si $f = (f_x:C \to C_x)_{x \in E}$ est une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$, on désigne par côneproj(f) le cône projectif de sommet C, ayant pour graphe orienté (ou catégorie) d'indexation le graphe orienté discret (ou la catégorie discrète) Disc(E), dont l'ensemble des objets est E, et ayant les mêmes projections que f. Ainsi, en toute rigueur, on prend bien soin de distinguer les cônes projectifs d'indexations discrètes et les familles projectives (dont les indexations sont des ensembles): c'est que *valider* une famille projective n'est pas équivalent à *satisfaire* le cône projectif d'indexation discrète qu'elle définit. On pourra cependant considérer cette disctinction comme une simple clause de style, pourvu qu'on ne confonde pas alors valider une famille et satisfaire - ce qui est plus contraignant - cette même famille.]

I.1.3. Satisfaction implique validation.

I.1.3.1. Soit $p = (p_I:C \to B(I))_{I \in \mathcal{I}}$ un cône projectif de $\mathbb{C}$.

Il est clair que, si C' est un objet de $\mathbb{C}$ qui satisfait p, alors C' valide aussi la famille projective de flèches famproj(p) [voir Note 12].

Ainsi, on a:

- $C' <\| \, (p_I:C \to B(I))_{I \in \mathbf{I}} \quad \Rightarrow \quad C' <\mid (p_I:C \to B(I))_{I \in Ob(\mathbf{I})}$,

mais l'implication réciproque est fausse en général.

[Note 12. Si $p = (p_I:C \to B(I))_{I \in \mathbf{I}}$ est un cône projectif de $\mathbb{C}$, on note famproj(p) la famille projective de flèches de $\mathbb{C}$, de sommet C, ayant $Ob(\mathbf{I})$ pour ensemble d'indexation et de mêmes projections que p (voir de nouveau la Note 11).]

I.1.3.2. En particulier, si C est un objet de $\mathbb{C}$, on a:

- $C' <\| \, C \quad \Leftrightarrow \quad C' <\mid C$.

De même, si $e:C_1 \to C_2$ est une flèche de $\mathbb{C}$, on a:

- $C' <\| \, e \quad \Rightarrow \quad C' <\mid e$,

et, si e est un épimorphisme de $\mathbb{C}$, l'implication réciproque est évidemment vraie.

Enfin, si f est une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$, on a:

- $C' <\| \, f \quad \Rightarrow \quad C' <\mid f$.

I.2. FAMILLES LOCALEMENT INDEPENDANTES ET DIAGRAMMES LOCALEMENT LIBRES.

I.2.1. Familles localement indépendantes relatives.

On suppose, dans tout ce n°I.2.1, que $U:\mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ est un foncteur entre deux catégories localement petites.

I.2.1.1. Soit C un objet de $\mathbb{C}$, $(C'_x)_{x\in E}$ une famille d'objets de $\mathbb{C}'$ et $f = (f_x:C \to U(C'_x))_{x\in E}$ une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$.

On dit que $(C'_x)_{x\in E}$ est une *famille localement indépendante d'objets de* $\mathbb{C}'$, *présentée par* f, *engendrée par* C, *relativement à* U, si et seulement si [voir Note 1]:
- pour tout objet C' de $\mathbb{C}'$ et toute flèche $c:C \to U(C')$, il existe au moins un $x\in E$ et au moins une flèche $c'_x:C'_x \to C'$ de $\mathbb{C}'$ tels que $U(c'_x).f_x = c$.

[Note 1. Il est évidemment équivalent de dire que $\{ C'_x \mid x\in E \}$ est un "ensemble de solutions" (pour C), au sens classique de Freyd.
Il est encore équivalent de dire que (version "externe" de la définition *interne* à U proposée):
- pour tout objet C' de $\mathbb{C}'$, l'application canonique ("image par U puis composition par les f_x")

$$\Sigma_{x\in E} \mathrm{Hom}(C'_x,C') \to \mathrm{Hom}(C,U(C'))$$

est un épimorphisme de Ens.]

I.2.1.2. Soit C un objet de $\mathbb{C}$, C'_o un objet de $\mathbb{C}'$ et $e:C \to U(C'_o)$ une flèche de $\mathbb{C}$.

On dit (classiquement) que C'_o est un *objet quasi-libre de* $\mathbb{C}'$ *, engendré par* C *, présenté par* e *, relativement à* U , si et seulement si:
- (C'_o) est une famille (indexée par l'ensemble 1) localement indépendante d'objets de $\mathbb{C}'$, présentée par 1-famproj(e) , engendrée par C , relativement à U .

Dans ces conditions, si tout objet de $\mathbb{C}$ engendre un objet quasi-libre de $\mathbb{C}'$, relativement à U , nous dirons, plus brièvement, que U *admet un quasi-adjoint à gauche.*

I.2.1.3. Supposons, en particulier, que $\mathcal{J}$ est un graphe orienté petit (resp. une catégorie petite) et que:
- $\mathbb{C} = \mathbb{C}'^{\mathcal{J}}$ est la catégorie des homomorphismes (resp. des foncteurs) de $\mathcal{J}$ vers $\mathbb{C}'$,
- $U: \mathbb{C}' \to \mathbb{C}'^{\mathcal{J}}$ est le foncteur "diagonal".

Soit $G: \mathcal{J} \to \mathbb{C}'$ un objet de $\mathbb{C}'^{\mathcal{J}}$.

Une famille localement indépendante de $\mathbb{C}'$, engendrée par G , relativement à U , est appelée une *famille quasi-limite inductive de* G .

En particulier, un objet quasi-libre de $\mathbb{C}'$, engendré par G , relativement à U , est appelé une *quasi-limite* (ou un *objet quasi-limite*) *inductive du foncteur* G .

Dans ces conditions, si le foncteur U admet un quasi-adjoint à gauche, on dira que $\mathbb{C}'$ *possède toutes les quasi-limites inductives (de diagrammes) d'indexations* $\mathcal{J}$

I.2.2. Diagrammes localement libres relatifs.

On suppose, dans tout ce n°I.2.2, que $U: \mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ est un foncteur entre deux catégories localement petites

I.2.2.1. Soit C un objet de $\mathbb{C}$, $(B'(I))_{I \in \mathcal{I}}$ un diagramme de $\mathbb{C}'$ [voir Note 2] et $p = (p_I : C \to U(B'(I)))_{I \in \mathcal{I}}$ un cône projectif de $\mathbb{C}$.

On dit que $(B'(I))_{I \in \mathcal{I}}$ est un *diagramme localement libre de* $\mathbb{C}'$ *, présenté par* p *, engendré par* C *, relativement à* U , si et seulement si [voir Notes 3 et 4]:

- pour tout objet C' de $\mathbb{C}'$ et toute flèche $c : C \to U(C')$ de $\mathbb{C}$, il existe au moins un objet I de $\mathbf{I}$ et au moins une flèche $c'_I : B(I) \to C'$ de $\mathbb{C}'$ tels que $U(c'_I).p_I = c$,
- pour tout objet C' de $\mathbb{C}'$, tous objets I et I' de $\mathbf{I}$ et toutes flèches $c'_I : B(I) \to C'$ et $c'_{I'} : B(I') \to C'$ de $\mathbb{C}'$, telles que $U(c'_I).p_I = U(c'_{I'}).p_{I'}$, il existe un zigzag

$$Z: \qquad I = I_1 \leftarrow I_2 \to I_3 \ldots I_{2k-1} \leftarrow I_{2k} \to I_{2k+1} = I'$$

de flèches de $\mathbf{I}$ et il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] B(Z): & B(I) \arrow[drrr, "c'_I"'] & B(I_2) \arrow[l] \arrow[r] & B(I_3) \ldots \arrow[dr] & B(I_{2k-1}) \arrow[d] & B(I_{2k}) \arrow[l] \arrow[r] & B(I') \arrow[dll, "c'_{I'}"] \\ & & & & C' & & \end{tikzcd}$$

commutatif dans $\mathbb{C}'$.

[Note 2. On appelle *diagramme* d'une catégorie $\mathbb{C}'$ tout homomorphisme (resp. tout foncteur) $B : \mathbf{I} \to \mathbb{C}'$ d'un graphe orienté petit (resp. d'une catégorie petite) $\mathbf{I}$ vers $\mathbb{C}$. Alors, on identifie B et $(B(I))_{I \in \mathbf{I}}$ (ce qui dans la suite ne provoquera pas de risque de confusion), on dit que $\mathbf{I}$ en est le graphe orienté (resp. la catégorie) d'*indexation* et, pour tout objet I de $\mathbf{I}$, on dit que $B(I)$ en est une *valeur*.]

[Note 3. Il est équivalent de dire que (version "externe" de la définition *interne* à U proposée):
- pour tout objet C' de $\mathbb{C}'$, l'application canonique ("image par U puis composition par les p_I ")

$$\mathrm{limind}_{I \in \mathbf{I}^{op}} \mathrm{Hom}(B(I), C') \to \mathrm{Hom}(C, C')$$

est un isomorphisme de Ens .]

[Note 4. La notion générale de diagramme localement libre a été introduite par Guitart-Lair en (C.M.C.F.). Elle constitue la formalisation "proprement catégorique" - et non pas seulement ensembliste - de l'idée "d'ensemble de solutions", déjà formalisée en I.2.1.1: ainsi, par analogie, peut-on dire d'un diagramme localement libre qu'il est un "diagramme de solutions".]

I.2.2.2. Soit C un objet de $\mathbb{C}$, C'_o un objet de $\mathbb{C}'$ et $e:C \to U(C'_o)$ une flèche de $\mathbb{C}$.
On dit (classiquement) que C'_o est un *objet libre de* $\mathbb{C}'$, *présenté par* e, *engendré par* C, *relativement à* U, si et seulement si:
- (C'_o) est un diagramme (indexé par $\mathbb{1}$) localement libre de $\mathbb{C}'$, présenté par $\mathbb{1}$-côneproj(e), engendré par C, relativement à U.

I.2.2.3. Soit C un objet de $\mathbb{C}$, $(C'_x)_{x\in E}$ une famille d'objets de $\mathbb{C}'$ et $f = (f_x:C \to U(C'_x))_{x\in E}$ une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$.
On dit que $(C'_x)_{x\in E}$ est une *famille localement libre d'objets de* $\mathbb{C}'$, *présentée par* f, *engendrée par* C, *relativement à* U, si et seulement si [voir Note 6]:
- $(C'_x)_{x\in \mathrm{Disc}(E)}$ est un diagramme localement libre de $\mathbb{C}'$, présenté par côneproj(f), engendré par C, relativement à U.
Dans ces conditions, si tout objet de $\mathbb{C}$ engendre une famille localement libre d'objets de $\mathbb{C}'$, relativement à U, on dit, plus brièvement, que U *admet un multi-adjoint à gauche*.

[Note 6. La notion de famille localement libre a été introduite par Diers en (C.A.L.O.), antérieurement à celle, plus générale et qu'elle a suggèrée, de diagramme (d'indexation non nécessairement discrète) localement libre.]

I.2.2.4. Supposons, en particulier, que $\mathbb{J}$ est un graphe orienté petit (resp. une catégorie petite) et que:
- $\mathbb{C} = \mathbb{C}'^{\mathbb{J}}$ est la catégorie des homomorphismes (resp. des foncteurs) de $\mathbb{J}$ vers $\mathbb{C}'$,
- $U:\mathbb{C}' \to \mathbb{C}'^{\mathbb{J}}$ est le foncteur "diagonal".
Soit $G:\mathbb{J} \to \mathbb{C}'$ un objet de $\mathbb{C}'^{\mathbb{J}}$.
Un diagramme localement libre de $\mathbb{C}'$, engendré par G, relativement à U, est appelé un *diagramme localement limite inductive de* G.
En particulier, une famille localement libre de $\mathbb{C}'$, engendrée par G, relativement à U, est appelée une *famille localement limite inductive de* G.
Dans ces conditions, si le foncteur U admet un multi-adjoint à gauche, on dira que $\mathbb{C}'$ *possède toutes les familles localement limites inductives (de diagrammes) d'indexations* $\mathbb{J}$.

I.2.3. Transitivités.

On suppose, dans tout ce n°I.2.3, que $U':\mathbf{C}'' \to \mathbf{C}'$ et $U:\mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ sont deux foncteurs entre des catégories localement petites.

I.2.3.1. Il est facile d'établir que [voir Note 7]:
- (transitivité directe des objets libres et quasi-libres) *si l'objet* C *de* $\mathbf{C}$ *engendre un objet libre* C' *de* $\mathbf{C}'$ *, relativement à* U *, et si l'objet* C' *de* $\mathbf{C}'$ *engendre un objet quasi-libre* C'' *de* $\mathbf{C}''$ *, relativement à* U' *, alors* C'' *est un objet quasi-libre de* $\mathbf{C}''$ *, engendré par* C *, relativement à* $U.U'$ *,*
- (transitivité indirecte des objets libres et quasi-libres) *si l'objet* C *de* $\mathbf{C}$ *engendre un objet libre* C' *de* $\mathbf{C}'$ *, relativement à* U *, et si l'objet* C *de* $\mathbf{C}$ *engendre un objet quasi-libre* C'' *de* $\mathbf{C}''$ *, relativement à* $U.U'$ *, alors* C'' *est un objet quasi-libre de* $\mathbf{C}''$ *, engendré par* C' *, relativement au foncteur* U' .

[Note 7. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de prouver une propriété, plus générale, de transitivité des (ou de certains types de) familles localement indépendantes. Nous n'énonçons ici que les propriétés minimum qui nous sont nécessaires dans la suite, ne serait-ce que pour les qualifier.]

I.2.3.2. Il est tout aussi facile d'établir que [voir Note 8]:
- (transitivité directe des objets libres et des familles localement libres) *si l'objet* C *de* $\mathbf{C}$ *engendre un objet libre* C' *de* $\mathbf{C}'$ *, relativement à* U *, et si l'objet* C' *de* $\mathbf{C}'$ *engendre une famille localement libre* $(C''_x)_{x\in E}$ *d'objets de* $\mathbf{C}''$ *, relativement à* U' *, alors* $(C''_x)_{x\in E}$ *est une famille localement libre d'objets de* $\mathbf{C}''$ *, engendrée par* C *, relativement à* $U.U'$ *,*
- (transitivité indirecte des objets libres et des familles localement libres) *si l'objet* C *de* $\mathbf{C}$ *engendre un objet libre* C' *de* $\mathbf{C}'$ *, relativement à* U *, et si l'objet* C *de* $\mathbf{C}$ *engendre une famille localement libre* $(C''_x)_{x\in E}$ *d'objets de* $\mathbf{C}''$ *, relativement à* $U.U'$ *, alors* $(C''_x)_{x\in E}$ *est une famille localement libre d'objets de* $\mathbf{C}''$ *, engendrée par* C' *relativement à* U' .

[Note 8. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de prouver une propriété, plus générale, de transitivité des (ou de certains types de) diagrammes localement libres (voir la Note 7).]

I.2.4. Familles localement indépendantes (relatives à une sous-catégorie pleine).

On suppose, dans tout ce n°I.2.4, que $\mathbb{C}$ est une catégorie localement petite et que $\mathbb{C}'$ en est une sous-catégorie pleine. Alors, on désigne par $U:\mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ le foncteur injection canonique.

I.2.4.1. Soit C un objet de $\mathbb{C}$, $(C'_x)_{x\in E}$ une famille d'objets de $\mathbb{C}'$ et $f = (f_x:C \to C'_x)_{x\in E}$ une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$.

Il est clair que $(C'_x)_{x\in E}$ est une *famille localement indépendante d'objets de* $\mathbb{C}'$, *présentée par* f , *engendrée par* C , relativement à U (ce que nous omettrons de préciser dans la suite), si et seulement si:

- pour tout objet C' de $\mathbb{C}'$, on a $C' \mathrel{<\!\mid} f$.

I.2.4.2. Soit C un objet de $\mathbb{C}$, C'_o un objet de $\mathbb{C}'$ et $e:C \to C'_o$ une flèche de $\mathbb{C}$.

Il est clair que C'_o est un *objet quasi-libre de* $\mathbb{C}'$, *engendré par* C , *présenté par* e , relativement à U (ce que nous omettrons de préciser dans la suite), si et seulement si:

- pour tout objet C' de $\mathbb{C}'$, on a $C' \mathrel{<\!\mid} e$.

Dans ces conditions, si U admet un quasi-adjoint à gauche, nous dirons simplement que $\mathbb{C}'$ est une sous-catégorie pleine *quasi-réflexive* de $\mathbb{C}$.

I.2.5. Diagrammes localement libres (relatifs à une sous-catégorie pleine).

On suppose, dans tout ce n°I.2.5, que $\mathbb{C}$ est une catégorie localement petite et que $\mathbb{C}'$ en est une sous-catégorie pleine. Alors, on note $U:\mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ le foncteur injection canonique.

I.2.5.1. Soit C un objet de $\mathbb{C}$, $(B'(I))_{I\in\mathbf{I}}$ un diagramme de $\mathbb{C}'$ (identifié, si besoin est, à un diagramme de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}'$) et $p = (p_I:C \to B'(I))_{I\in\mathbf{I}}$ un cône projectif de $\mathbb{C}$.

Il est clair que $(B'(I))_{I\in\mathbf{I}}$ est un *diagramme localement libre de* $\mathbb{C}'$, *présenté par* p, *engendré par* C, relativement à U (ce que nous omettrons de préciser dans la suite), si et seulement si:

- pour tout objet C' de $\mathbb{C}'$, on a $C' <\!\!|| \, p$.

I.2.5.2. Soit C un objet de $\mathbb{C}$, C'_o un objet de $\mathbb{C}'$ et $e:C \to C'_o$ une flèche de $\mathbb{C}$.

Il est clair que C'_o est un *objet libre de* $\mathbb{C}'$, *présenté par* e, *engendré par* C, relativement à U (ce que nous omettrons de mentionner dans la suite), si et seulement si:

- pour tout objet C' de $\mathbb{C}'$, on a $C' <\!\!|| \, e$.

I.2.5.3. Soit C un objet de $\mathbb{C}$, $(C'_x)_{x\in E}$ une famille d'objets de $\mathbb{C}'$ et $f = (f_x:C \to C'_x)_{x\in E}$ une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$.

Il est clair que $(C'_x)_{x\in E}$ est une *famille localement libre d'objets de* $\mathbb{C}'$, *présentée par* f, *engendrée par* C, relativement à U (ce que nous ne préciserons plus dans la suite), si et seulement si:

- pour tout objet C' de $\mathbb{C}'$, on a $C' <\!\!|| \, f$.

Dans ces conditions, si U admet un multi-adjoint à gauche, nous dirons plus simplement que $\mathbb{C}'$ est une sous-catégorie pleine et *multiréflexive* de $\mathbb{C}$.

I.2.6. Familles localement indépendantes et diagrammes localement libres, associés.

On suppose, dans tout ce n°I.2.6, que $\mathbb{C}$ est une catégorie localement petite et que $\mathbb{C}'$ en est une sous-catégorie pleine.

I.2.6.1. Supposons que C est un objet de $\mathbb{C}$, $(B'(I))_{I\in\mathbb{I}}$ est un diagramme de $\mathbb{C}'$ et $p = (p_I : C \to B'(I))_{I\in\mathbb{I}}$ est un cône projectif de $\mathbb{C}$.

Clairement, si $(B(I))_{I\in\mathbb{I}}$ est un diagramme localement libre de $\mathbb{C}'$, présenté par p et engendré par C, alors $(B(I))_{I\in Ob(\mathbb{I})}$ est une famille localement indépendante d'objets de $\mathbb{C}'$, présentée par famproj(p) et engendrée par C.

On peut donc énoncer:

- si un objet de $\mathbb{C}$ engendre un diagramme localement libre de $\mathbb{C}'$, alors il engendre une famille localement indépendante d'objets de $\mathbb{C}'$.

I.2.6.2. Supposons que $\mathbb{C}$ possède toutes les sommes fibrées et que, tout objet C de $\mathbb{C}$ engendre une famille localement indépendante $(C'(C)_x)_{x\in E(C)}$ d'objets de $\mathbb{C}'$, présentée par la famille projective de flèches $f(C) = (f(C)_x : C \to C'(C)_x)_{x\in E(C)}$.

Dans ces conditions, pour tout objet C de $\mathbb{C}$ et tous éléments x et x' de $E(C)$, on note $C''(C)_{x,x'}$ la somme fibrée dans $\mathbb{C}$, représentée par le diagramme commutatif ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & C''(C)_{x,x'} & \\
C'(C)_x \arrow[ur, "s(C)_x"] & & C'(C)_{x'} \arrow[ul, "s'(C)_{x'}"'] \\
 & C \arrow[ul, "f(C)_x"] \arrow[ur, "f(C)_{x'}"'] &
\end{tikzcd}$$

De même, on note $\mathbf{I}(C)$ le graphe orienté tel que:
- si $x\in E(C)$, alors x est un objet de $\mathbf{I}(C)$,
- si $x\in E(C)$, si $x'\in E(C)$, si $y\in E(C''(C)_{x,x'})$, alors (x,x',y) est un objet de $\mathbf{I}(C)$,
- si $x\in E(C)$, si $x'\in E(C)$, si $y\in E(C''(C)_{x,x'})$, alors $(x,(x,x',y),1):x \to (x,x',y)$ et $(x',(x,x',y),2):x' \to (x,x',y)$ sont deux flèches de $\mathbf{I}(C)$.

On désigne alors par $B'(C):\mathbf{I}(C) \to \mathbb{C}'$ le foncteur tel que:
- si $x\in E(C)$, $B'(C)(x) = C'(C)_x$,
- si $x\in E(C)$, si $x'\in E(C)$, si $y\in E(C''(C)_{x,x'})$, alors
$$B'(C)(x,x',y) = C'(C''(C)_{x,x'})_y ,$$
- si $x\in E(C)$, si $x'\in E(C)$, si $y\in E(C''(C)_{x,x'})$, alors
$$B'(C)(x,(x,x',y),1) = f(C''(C)_{x,x'})_y.s(C)_x$$
et
$$B'(C)(x',(x,x',y),2) = f(C''(C)_{x,x'})_y.s'(C)_{x'} .$$

Enfin, on note $p(C) = (p(C)_I:C \to B'(C)(I))_{I\in \mathbf{I}(C)}$ le cône projectif de $\mathbb{C}$ tel que:
- si $x\in E(C)$, alors $p(C)_x = f(C)_x$,
- si $x\in E(C)$, si $x'\in E(C)$, si $y\in E(C''(C)_{x,x'})$, alors:
$$p(C)_{x,x',y} = f(C''(C)_{x,x'})_y.s(C)_x.f(C)_x$$
$$= f(C''(C)_{x,x'})_y.s'(C)_{x'}.f(C)_{x'} .$$

Moyennant ces constructions, il est facile de voir que:
- pour tout objet C de $\mathbb{C}$, $B'(C):\mathbf{I}(C) \to \mathbb{C}'$ est un diagramme localement libre de $\mathbb{C}'$, présenté par $p(C)$, engendré par C .

Autrement dit, on peut affirmer aussi que:
- si tout objet de $\mathbb{C}$ engendre une famille localement indépendante d'objets de $\mathbb{C}'$, alors tout objet de $\mathbb{C}$ engendre un diagramme localement libre de $\mathbb{C}'$ (lorsque $\mathbb{C}$ possède toutes les sommes fibrées).

I.3. AXIOMATISATIONS ET QUALIFICATIONS.

On suppose, dans tout ce n°I.3, que $\mathbb{C}$ est une catégorie localement petite.

I.3.1. Axiomatisations.

I.3.1.1. On appelle *axiomatisation (relative à* $\mathbb{C}$ *)* tout ensemble F de familles projectives de flèches de $\mathbb{C}$.

Si C est un objet de $\mathbb{C}$, on dit que C *valide* F, et l'on note $C \models F$, si et seulement si:

- pour toute $f \in F$, on a $C \models f$.

Alors, on désigne par $\mathrm{Val}(\mathbb{C},F)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ dont les objets sont ceux qui valident F [voir Note 1].

[Note 1. L' "opérateur" $\mathrm{Val}(\mathbb{C},-)$ est introduit, sous des terminologie et notation différentes, par Andréka-Németi-Sain en (A.C.I.S.) et (C.I.S.B.).
On peut introduire, inversement, comme le font Andréka-Németi en (C.V.C.T.) dans un cadre un peu plus limité, l' "opérateur" $\mathrm{Axm}(\mathbb{C},-)$ associant à toute sous-catégorie pleine $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{C}$ la classe $\mathrm{Axm}(\mathbb{C},\mathbb{C}')$ des familles projectives de flèches de $\mathbb{C}$ (éventuellement d'un type fixé a priori) qui sont toutes validées par tous les objets de $\mathbb{C}'$.
Bien entendu, ces deux opérateurs définissent alors une correspondance de Galois entre les sous-catégories pleines de $\mathbb{C}$ et les axiomatisations (d'un certain type donné) relatives à la catégorie $\mathbb{C}$.]

I.3.1.2. Soit $\mathbb{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$.
On dit que $\mathbb{C}'$ est *axiomatisable* (*relativement à* $\mathbb{C}$) si, et seulement si [voir Note 2]:
- il existe une axiomatisation F (relative à $\mathbb{C}$) telle que l'on ait $\mathbb{C}' = \mathrm{Val}(\mathbb{C},F)$.

[Note 2. Les sous-catégories axiomatisables de $\mathbb{C}$ sont donc les sous-catégories stables par l'opérateur $\mathrm{Val}(\mathbb{C},\mathrm{Axm}(\mathbb{C},-))$.
Plus généralement, $\mathbb{C}'$ étant une sous-catégorie pleine quelconque de $\mathbb{C}$, le problème se pose de décrire sa clôture $\mathrm{Val}(\mathbb{C},\mathrm{Axm}(\mathbb{C},\mathbb{C}'))$. Sommairement parlant, on l'obtient, dans certains cas particuliers, en saturant $\mathbb{C}'$ par (certains) sous-objets, (certains) quotients et ultraproduits (si les familles projectives considérées sont d'indexations finies): des résultats "à la Birkhoff" de ce type sont établis par Andréka-Németi-Sain en (A.C.I.S.) et (C.I.S.B.), par exemple.
Inversement, F étant une axiomatisation quelconque relative à $\mathbb{C}$, le problème se pose de décrire aussi sa clôture $\mathrm{Axm}(\mathbb{C},\mathrm{Val}(\mathbb{C},F))$. Sommairement parlant, on l'obtient, dans certains cas très particuliers, en saturant F (considéré comme un ensemble de formules classiques) par "dérivations" (i. e. règles d'inférence, ou de "ré-écriture"): des résultats de ce type sont établis par Andréka-Németi en (C.V.C.T.), par exemple.]

I.3.2. Qualifications.

I.3.2.1. On appelle *qualification* (*relative à* $\mathbb{C}$) tout ensemble P de cônes projectifs de $\mathbb{C}$.
Si C est un objet de $\mathbb{C}$, on dit que C *satisfait* P, et l'on note $C <\!\!|| P$, si et seulement si:
- pour tout $p \in P$, on a $C <\!\!|| p$.
Alors, on désigne par $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ dont les objets sont ceux qui satisfont P [voir Note 3].

[Note 3. L' "opérateur" $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},-)$ est introduit par Guitart-Lair, sous des terminologie et notation différentes, en (C.M.C.F.).

On peut introduire, inversement, l' "opérateur" $\mathrm{Qual}(\mathbb{C},-)$ associant à toute sous-catégorie pleine $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{C}$ la classe $\mathrm{Qual}(\mathbb{C},\mathbb{C}')$ de tous les cônes projectifs (éventuellement d'un type fixé a priori - par exemple comme en I.3.4) qui sont satisfaits par tous les objets de $\mathbb{C}'$.
Bien entendu, ces deux opérateurs définissent une correspondance de Galois entre les sous-catégories pleines de $\mathbb{C}$ et les qualifications (d'un certain type donné) relatives à $\mathbb{C}$.]

I.3.2.2. Soit $\mathbb{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$.
On dit que $\mathbb{C}'$ est *qualifiable* (*relativement à* $\mathbb{C}$) si, et seulement si [voir Note 4]:
- il existe une qualification P (relative à $\mathbb{C}$) telle que l'on ait $\mathbb{C}' = \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$.

[Note 4. Les sous-catégories qualifiables de $\mathbb{C}$ sont donc les sous-catégories stables par $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},\mathrm{Qual}(\mathbb{C},-))$.
Plus généralement parlant, $\mathbb{C}'$ étant une sous-catégorie pleine quelconque de $\mathbb{C}$, le problème se pose de décrire sa clôture $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},\mathrm{Qual}(\mathbb{C},\mathbb{C}'))$. Inversement, P étant une qualification quelconque relative à $\mathbb{C}$, le problème se pose de décrire sa clôture $\mathrm{Qual}(\mathbb{C},\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P))$.
Au moins quand $\mathbb{C}$ est une catégorie localement présentable, au sens de Gabriel-Ulmer (voir (L.P.L.G.)), une réponse complète à ces deux problèmes est fournie par la théorie des esquisses et des catégories esquissables (voir II): ainsi, dans les deux cas, il convient de saturer par limites inductives convenables.]

I.3.3. Axiomatisabilité équivaut à qualifiabilité.

I.3.3.1. Supposons que $\mathbb{C}$ possède toutes les sommes fibrées.
Soit $f = (f_x : C \to C_x)_{x \in E}$ une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$.
On note $W(E)$ le graphe orienté ("des mots, de longueur 1 ou 2, de E") tel que:

- ses objets sont les mots de E de longueur 1 (i. e. les $x\in E$) et les mots de E de longueur 2 (i. e. les xx' tels que $x\in E$ et $x'\in E$),
- pour tous éléments x et x' de E , $(x,xx',1):x \to xx'$ et $(x',xx',2):x' \to xx'$ en sont des flèches.

On désigne alors par $B(f):W(E) \to \mathbb{C}$ le diagramme de $\mathbb{C}$ tel que, pour tous éléments x et x' de E , le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f_x"'] \arrow[dr, "f_{x'}"] \arrow[dd, "c_{xx'}"] & \\
C_x \arrow[dr, "B(f)(x{,}xx'{,}1)"'] & & C_{x'} \arrow[dl, "B(f)(x'{,}xx'{,}2)"] \\
& C_{xx'} &
\end{tikzcd}$$

est une somme fibrée dans $\mathbb{C}$.

On dispose, par conséquent, du cône projectif $w(f) = (w(f)_m:C \to B(f)(m))_{m\in W(E)}$ tel que:
- pour tout $x\in E$, on a $w(f)_x = f_x$,
- pour tout éléments x et x' de E , on a $w(f)_{xx'} = c_{xx'}$.

Dans ces conditions, si C est un objet de $\mathbb{C}$, il est facile de voir que:
- $C <| f \Leftrightarrow C <|| w(f)$.

Si F est une axiomatisation relative à $\mathbb{C}$, il résulte, évidemment, de ce qui précède que:
- pour tout objet C de $\mathbb{C}$, on a:

$$C <| F \Leftrightarrow C <|| w(F) = \{ w(f) \,/\, f\in F \} .$$

On en déduit que [voir Note 5]:

- *si une sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ est axiomatisable, alors elle est qualifiable (lorsque $\mathbb{C}$ possède toutes les sommes fibrées).*

I.3.3.2. Supposons toujours que $\mathbb{C}$ possède toutes les sommes fibrées.

Soit $p = (p_I:C \to B(I))_{I\in \mathbf{I}}$ un cône projectif de $\mathbb{C}$.
Pour tous objets I et I' de $\mathbf{I}$, on considère la somme fibrée de $\mathbb{C}$ représentée par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "p_I"'] \arrow[dd, "c_{I,I'}"] \arrow[dr, "p_{I'}"] & \\
B(I) \arrow[dr, "c_{I,I',1}"'] & & B(I') \arrow[dl, "c_{I,I',2}"] \\
& C_{I,I'} &
\end{tikzcd}$$

Pour tous objets I et I' de $\mathbf{I}$ et tout zigzag

$$Z: \quad I = I_1 \leftarrow I_2 \rightarrow I_3 \; ,\!,\!, \; I_{2k-1} \leftarrow I_{2k} \rightarrow I_{2k+1} = I'$$

de I vers I' dans $\mathbf{I}$, on considère la limite inductive (obtenue par une succession de sommes fibrées) dans $\mathbb{C}$ représentée par le diagramme commutatif ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
B(Z): & B(I) \arrow[drrr, "c_{Z,I,1}"'] & \leftarrow B(I_2) & \rightarrow B(I_3) \arrow[dr] & ,,, & B(I_{2k-1}) \arrow[dl] & \leftarrow B(I_{2k}) & \rightarrow B(I') \arrow[dllll, "c_{Z,I',2}"] \\
& & & & C_Z & & &
\end{tikzcd}$$

et l'on note, alors, $c_{Z,p}$:$C_{I,I'} \rightarrow C_Z$ l'unique flèche de $\mathbb{C}$ telle que:

- $c_{Z,p}.c_{I,I',1} = c_{Z,I,1}$ et $c_{Z,p}.c_{I,I',2} = c_{Z,I',2}$.

Dans ces conditions, pour tous objets I et I' de $\mathbf{I}$, on désigne enfin par $zg(I,I')$ l'ensemble des zigzags de $\mathbf{I}$ allant de I à I' et l'on considère la famille projective de flèches $famproj_{I,I'}(p) = (c_{Z,p}:C_{I,I'} \rightarrow C_Z)_{Z \in zg(I,I')}$.

Moyennant ces constructions, si C est un objet de $\mathbb{C}$, il est facile de vérifier que:

- $C \lhd\!\| \, p \;\Leftrightarrow\; C \lhd\, z(p)$, .

où l'on a posé:

$z(p) = \{ famproj(p) \} \cup \{ famproj_{I,I'}(p) \; / \; (I,I') \in Ob(\mathbf{I}) \}$.

Si P est une qualification relative à $\mathbb{C}$, il résulte, évidemment, de ce qui précède que:

- pour tout objet C de $\mathbb{C}$, on a:

$$C \lhd\!\| \, P \;\Leftrightarrow\; C \lhd\, z(P) = \cup_{p \in P} z(p) \; .$$

On en déduit que [voir Note 5]:

- si une sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ *est qualifiable, alors elle est axiomatisable (lorsque* $\mathbb{C}$ *possède les sommes fibrées).*

[Note 5. Dans la suite, vus les résultats de I.3.3.1 et I.3.3.2, nous n'étudierons donc, comme en (C.M.C.F.) et puisque c'est le point de vue "catégorique" (équivalent au point de vue plus "ensembliste" des axiomatisations et de l'axiomatisabilité), que ce qui concerne les qualifications et la qualifiabilité.]

I.3.4. Qualifications particulières.

I.3.4.1. Soit $\mathcal{X}$ une classe de cônes projectifs de $\mathbb{C}$ et α et β deux ordinaux réguliers.

On dit qu'une qualification P relative à $\mathbb{C}$ est une *$\mathcal{X}$-qualification* si, et seulement si:

- P est inclus dans $\mathcal{X}$.

On dit qu'une $\mathcal{X}$-qualification est une *$\mathcal{X}^{\alpha}$-qualification* si, et seulement si:

- le sommet de tout $p \in P$ est un objet α-présentable de $\mathbb{C}$ [voir Note 6].

On dit, qu'une $\mathcal{X}^{\alpha}$-qualification P est une *$\mathcal{X}^{\alpha}{}_{\beta}$-qualification* si, et seulement si:

- tout pied de tout $p \in P$ est un objet β-présentable de $\mathbb{C}$.

[Note 6. Rappelons qu'un objet C d'une catégorie localement petite $\mathbb{C}$ est dit *α-présentable* si, et seulement si:

- le foncteur $\mathrm{Hom}(C,-):\mathbb{C} \to \mathrm{Ens}$ commute aux limites inductives ayant pour indexations des catégories petites et α-filtrantes.

Il s'agit là de la version "externe" à $\mathbb{C}$, initialement posée par Gabriel-Ulmer en (L.P.L.G.), dont on doit donner une version "interne", si l'on veut respecter la "règle du jeu" énoncée en I.1.2.1, Note 8. Ainsi, il est facile de voir que l'objet C de $\mathbb{C}$ est α-présentable si, et seulement si:

- pour toute catégorie $\mathbf{I}$, petite et α-filtrante, et pour tout foncteur $B:\mathbf{I} \to \mathbb{C}$, admettant une limite inductive $L = \mathrm{limind}_{I \in \mathbf{I}}\, B(I)$ dans $\mathbb{C}$ (dont nous notons $(s_I:B(I) \to L)_{I \in \mathrm{Ob}(\mathbf{I})}$ la famille des co-projections), on a:
    + pour toute flèche $c:C \to L$ de $\mathbb{C}$, il existe au moins un objet I de $\mathbf{I}$ et au moins une flèche $c_I:C \to B(I)$ de $\mathbb{C}$ tels que:

$$s_I.c_I = c \ ,$$

+ pour tous objets I et I' de $\mathbb{I}$ et toutes flèches $c_I : C \to B(I)$ et $c_{I'} : C \to B(I')$ de $\mathbb{C}$, tels que $s_I c_I = s_{I'}.c_{I'}$, il existe un objet J de $\mathbb{I}$ et deux flèches $j : I \to J$ et $j' : I' \to J$ de $\mathbb{I}$ tels que:

$$B(j).c_I = B(j').c_{I'} \ .]$$

I.3.4.2. Soit $\mathcal{X}$ une classe de cônes projectifs de $\mathbb{C}$, α et β deux ordinaux réguliers et $\mathbb{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$.

On dit que $\mathbb{C}'$ est *$\mathcal{X}$-qualifiable* (resp. *$\mathcal{X}^\alpha$-qualifiable*, *$\mathcal{X}^\alpha{}_\beta$-qualifiable*) si, et seulement si:

- il existe une $\mathcal{X}$-qualification (resp. une $\mathcal{X}^\alpha$-qualification, une $\mathcal{X}^\alpha{}_\beta$-qualification) P telle que $\mathbb{C}' = \mathrm{Sat}(\mathbb{C}, P)$.

I.3.4.3. Dans la suite [voir Note 7], on note $\mathcal{V}$ la classe des cônes projectifs d'indexation:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "{(1,0)}"'] & & 2 \arrow[dl, "{(2,0)}"] \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

et de la forme:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "Id(C)"'] \arrow[dr, "Id(C)"] \arrow[dd, "e"] & \\
C \arrow[dr, "e"'] & & C \arrow[dl, "e"] \\
& C_0 &
\end{tikzcd}$$

(où $e : C \to C_0$ est une flèche quelconque de $\mathbb{C}$).

De même, on note $\mathcal{D}$isc (resp. $\mathcal{D}$iscfin , $\mathcal{D}$iscun) la classe des cônes projectifs d'indexations discrètes (resp. d'indexations discrètes et finies, d'indexations discrètes isomorphes à $\mathbb{1}$) de $\mathbb{C}$.

Enfin, on pose:
- $\mathcal{V}\mathcal{D}$isc = $\mathcal{V}$ $\cup$ $\mathcal{D}$isc ,
- $\mathcal{V}\mathcal{D}$iscfin = $\mathcal{V}$ $\cup$ $\mathcal{D}$iscfin ,
- $\mathcal{V}\mathcal{D}$iscun = $\mathcal{V}$ $\cup$ $\mathcal{D}$iscun .

[Note 7. Les formes particulières de qualifications introduites ici ne sont évidemment pas les seules formes particulières intéressantes; pour s'en convaincre, il suffit de se reporter à I.3.3.1, ou encore à (C.M.C.F.). Dans la suite, nous ne considérerons, en détail, que ces cas particuliers dans la seule mesure où ce ne sont que ceux-ci que Barr prétend "étudier" en (M.D.S.K.).]

I.4. QUELQUES PROPRIETES DES CATEGORIES QUALIFIABLES.

On suppose, dans tout ce n°I.4, que $\mathbb{C}$ est une catégorie localement petite.

I.4.1. Propriétés de "réflexion".

I.4.1.1. Il est facile d'établir que [voir Note 1]:
- *si* α *est un ordinal régulier, si* P *est une* $\mathbb{V}^{\alpha}$-*qualification relative à* $\mathbb{C}$ *et si* $\mathbb{C}$ *possède toutes les limites inductives d'indexations petites, alors tout objet de* $\mathbb{C}$ *engendre un objet quasi-libre de* $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$ *.*

En effet, tout $p \in P$ est un cône projectif de la forme indiquée en I.3.4.3, i. e. entièrement déterminé par une flèche $e_p : C_p \to C_{p,o}$ de $\mathbb{C}$.
Alors, si C est un objet de $\mathbb{C}$, il engendre l'objet quasi-libre $QL(C) = C_\alpha$ de $\mathbb{C}' = \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$, construit par récurrence transfinie comme suit:
- on pose $C_o = C$;
- si $\lambda \leq \alpha$ est un ordinal limite et si $C_{\lambda'}$ est défini pour tout $\lambda' < \lambda$, on pose $C_\lambda = \mathrm{limind}_{\lambda' < \lambda} C_{\lambda'}$;
- si $\lambda < \alpha$ et si C_λ est défini, $C_{\lambda+1}$ est obtenu en *forçant* [voir Note 2], pour tout $p \in P$, chaque flèche $c : C_p \to C_\lambda$ à factoriser au moins d'une façon par $e_p : C_p \to C_{p,o}$; autrement dit, $C_{\lambda+1}$ est une limite inductive, représentée par le diagramme commutatif de $\mathbb{C}$ ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
C_\lambda \arrow[d, "i_{\lambda+1,\lambda}"'] & & C_{p,c} = C_p \arrow[ll, "c"'] \arrow[d, "e_{p,c} = e_p"] \\
C_{\lambda+1} & & C_{p,o,c} = C_{p,o} \arrow[ll, "i_{\lambda+1,p,c}"]
\end{tikzcd}$$

où p varie dans P
et
c varie dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C_p, C_\lambda)$

I.4.1.2. On établit aisément que [voir Note 1]:
- *si* α *est un ordinal régulier, si* P *est une* $\mathcal{D}$iscun$^\alpha$-*qualification relative à* $\mathbb{C}$ *et si* $\mathbb{C}$ *possède toutes les limites inductives d'indexations petites, alors tout objet de* $\mathbb{C}$ *engendre un objet libre de* $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$.

En effet, tout $p\in P$ est entièrement déterminé par sa seule projection $p_1 : C_p \to B_p(1)$.
Alors, si C est un objet de $\mathbb{C}$, il engendre l'objet libre $L(C) = C_\alpha$ de $\mathbb{C}' = \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$, construit par récurrence comme suit:
- on pose $C_0 = C$;
- si $\lambda\leqslant\alpha$ est un ordinal limite et si $C_{\lambda'}$ est défini pour tout $\lambda'<\lambda$, on pose $C_\lambda = \mathrm{limind}_{\lambda'<\lambda}\, C_{\lambda'}$;
- si $\lambda<\alpha$ et si C_λ est défini, alors $C_{\lambda+1}$ est obtenu en *forçant* [voir Note 2], pour tout $p\in P$, chaque flèche $c : C_p \to C_\lambda$ à factoriser d'une et d'une seule façon par $p_1 : C_p \to B_p(1)$; autrement dit, $C_{\lambda+1}$ est une limite inductive, représentée par le diagramme commutatif de $\mathbb{C}$ ci-dessous:

$$
\begin{tikzcd}
 & C_\lambda \arrow[dl, "i_{\lambda+1,\lambda}"'] & & C_{p,c} = C_p \arrow[lll, "c"'] \arrow[d, "p_{1,c} = p_1"] \\
C_{\lambda+1} & & & B_p(1)_c = B_p(1) \arrow[llu, "c_1"'] \arrow[lll, "i_{\lambda+1,p,c}"]
\end{tikzcd}
$$

où p varie dans P
c varie dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C_p, C_\lambda)$
c_1 varie dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(B_p(1), C_\lambda)$
et
$c_1 . p_1 = c$

I.4.1.3. De I.4.1.1 et I.4.1.2, on déduit immédiatement que [voir Note 1]:
- *si* α *est un ordinal régulier, si* P *est une* $\mathcal{V}\mathcal{D}$iscun$^\alpha$-*qualification relative à* $\mathbb{C}$ *et si* $\mathbb{C}$ *possède toutes les limites inductives d'indexations petites, alors tout objet de* $\mathbb{C}$ *engendre un objet quasi-libre de* $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$.

En effet, on peut écrire $P = P_\vee \cup P_\cup$, où $P_\vee$ est une $\mathcal{V}^\alpha$-qualification et $P_\cup$ est une $\mathcal{D}$iscun$^\alpha$-qualification.
En vertu de I.4.1.2, le foncteur injection canonique:

$$\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P_\cup) \to \mathbb{C}$$

admet un adjoint à gauche:

$$\mathrm{adj}:\mathbb{C} \to \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P_\cup) ,$$

et il est facile de constater que:

$$\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P_\cup),\mathrm{adj}(P_\vee)) .$$

Dans ces conditions, tout objet C de $\mathbb{C}$ engendre donc, en vertu de I.4.1.2, un objet libre $L(C)$ de $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P_\cup)$ qui engendre, en vertu de I.4.1.1, un objet quasi-libre $QL(L(C))$ de $\mathrm{Sat}(\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P_\cup),\mathrm{adj}(P_\vee)) = \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$.
Il est alors immédiat de constater, par transitivité (voir I.2.3.1), que $QL(L(C))$ est aussi un objet quasi-libre de $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$ engendré par C .

I.4.1.4. Il est assez facile d'établir que [voir Note 1]:
- *si* α *est un ordinal régulier, si* P *est une* $\mathcal{D}$isc$^\alpha$-*qualification relative à* $\mathbb{C}$ *et si* $\mathbb{C}$ *possède toutes les*

limites inductives d'indexations petites, alors tout objet de $\mathbb{C}$ *engendre une famille localement libre d'objets de* $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},p)$.

En effet, tout $p \in P$ est entièrement déterminé par la famille $\mathrm{famproj}(p) = (p_x : C_p \to C_{p,x})_{x \in E(p)}$ de ses projections.
Si C est un objet de $\mathbb{C}$, on obtient la famille localement libre d'objets de $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$ qu'il engendre en utilisant une méthode de *forçage* [voir Note 2] de la même veine que celles utilisées en I.4.1.1 et I.4.1.2 ... mais un peu plus raffinée. Ainsi, on pose:
- $C_0 = C$.

S'il existe $p \in P$ et s'il existe une flèche $c : C_p \to C$ de $\mathbb{C}$ pour laquelle il existe deux décompositions $c = c_x.p_x = c_{x'}.p_{x'}$, où $x \neq x'$, alors la famille vide est la famille localement libre d'objets de $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$ engendrée par l'objet C de $\mathbb{C}$.
Dans le cas contraire, pour chaque $p \in P$ et chaque $c : C_p \to C_0 = C$, on *choisit* un $x(c) \in E(p)$ de sorte que:
- $x(c) = x$, si c admet une décomposition $c = c_x.p_x$.

Ce choix Ch d'indices étant effectué, on *force* chaque c à factoriser d'une et d'une seule façon par $p_{x(c)} : C_p \to C_{p,x(c)}$; autrement dit, on définit $C_{1,Ch}$ comme étant la limite inductive dans $\mathbb{C}$, représentée par le diagramme commutatif de $\mathbb{C}$ ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[d, "i_{1,0,Ch}"'] & & C_{p,c} = C_p \arrow[ll, "c"'] \arrow[d, "p_{x(c),c} = p_{x(c)}"] \\
C_{1,Ch} & & C_{p,x(c),c} = C_{p,x(c)} \arrow[ll, "i_{1,p,c,Ch}"] \arrow[ull, "c_{x(c)}"']
\end{tikzcd}$$

où p varie dans P
c varie dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C_p,C_0)$
$c_{x(c)}$ varie dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C_{p,x(c)},C_0)$
et
$c_{x(c)}.p_{x(c)} = c$

Ainsi, à l'étape 1 de la récurrence, on obtient une *famille* $(C_{1,ch})_{ch \in CH(1)}$ d'objets de $\mathbb{C}$, où CH(1) désigne l'ensemble de tous les choix possibles d'indices.
On continue la récurrence transfinie jusqu'à l'étape α, en procédant de la même manière pour passer d'une étape à la suivante.

[Note 1. Les propriétés particulières de "réflexion" établies en I.4.1.1, I.4.1.2, I.4.1.3 et I.4.1.4 sont déjà étudiées, pour la plupart, en (C.M.C.F.). Elles ne concernent que les seules formes particulières de qualifications retenues en I.3.4.3 et qui seules seront considérées dans la suite; ce sont celles que Barr prétend "étudier" en (M.D.S.K.), mais ce ne sont évidemment pas les seules qui présentent un certain intérêt (voir I.3.4.3, Note 7, (C.M.C.F.) et (E.D.L.L.)).
De plus, rappelons (voir (C.M.C.E.)) et (E.D.L.L.) que l'on dispose, en tout état de cause, de l'une quelconque (voir I.2.6) des deux propriétés (les plus) générales suivantes:
- (a) *si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathcal{X}$ *est une classe de cônes projectifs de* $\mathbb{C}$ *, si* P *est une* $\mathcal{X}^{\alpha}$*-qualification relative à* $\mathbb{C}$ *et si* $\mathbb{C}$ *possède toutes les limites inductives petites, alors tout objet de* $\mathbb{C}$ *engendre une famille localement indépendante d'objets de* Sat($\mathbb{C}$,P) ,
- (b) *si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathcal{X}$ *est une classe de cônes projectifs de* $\mathbb{C}$ *, si* P *est une* $\mathcal{X}^{\alpha}$*-qualification relative à* $\mathbb{C}$ *et si* $\mathbb{C}$ *possède toutes les limites inductives petites, alors tout objet de* $\mathbb{C}$ *engendre un diagramme localement libre de* Sat($\mathbb{C}$,P) .
En conséquence, toute étude particulière ne fait que préciser (quand c'est possible) la forme particulière de diagrammes localement libres, ou de familles localement indépendantes, qu'il est possible de considérer.
Ainsi, l'énoncé de I.4.1.1 (resp. I.4.1.3) précise celui de (a), où l'on prend $\mathcal{X} = \mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{X} = \mathcal{V}\mathcal{D}$iscun) : la famille localement indépendante d'objets de Sat($\mathbb{C}$,P) , engendrée par un quelconque objet de $\mathbb{C}$ et dont l'existence est assurée par (a), peut être réduite à *exactement un* élément.
De même, l'énoncé de I.4.1.4 (resp. I.4.1.2) précise celui de (b), où l'on prend $\mathcal{X} = \mathcal{D}$isc (resp. $\mathcal{X} = \mathcal{D}$iscun): le diagramme localement libre de Sat($\mathbb{C}$,P) , engendré par un quelconque objet de $\mathbb{C}$ et dont l'existence est assurée par (b), est discret (resp. discret et d'indexation isomorphe à $\mathbf{1}$).]

[**Note 2. Les méthodes systématiques de** ***forçage*** utilisées ici ont été introduites par Guitart-Lair en (C.M.C.F.) et (E.D.L.L.): ce sont celles qu'il est nécessaire de mettre en oeuvre pour respecter la "règle du jeu" fixée en I.1.2.1, Note 8.]

I.4.2. Calculs de limites.

I.4.2.1. Il est immédiat d'établir que [voir Notes 3 et 4]:
- *si* P *est une* $\vee$*-qualification relative à* $\mathbb{C}$ *, alors le foncteur injection canonique* $\mathrm{Sat}((\mathbb{C},P) \to \mathbb{C}$ *crée les produits.*

En effet, il suffit de montrer que, si $e:C \to C'$ est une flèche de $\mathbb{C}$, si $\prod_{x\in E} C_x$ est un produit dans $\mathbb{C}$, tel que $C_x \mathrel{<\!|} e$, pour tout $x\in E$, alors $(\prod_{x\in E} C_x) \mathrel{<\!|} e$.

Supposons donc que $c:C \to (\prod_{x\in E} C_x)$ est une flèche de $\mathbb{C}$ (on pourra se référer au diagramme commutatif ci-dessous).
Pour tout $x\in E$, on a donc une flèche $c_x = p_x.c :C \to C_x$ (en désignant par $(p_x)_{x\in E}$ la famille des projections du produit considéré) et, comme $C_x \mathrel{<\!|} e$, il existe donc une flèche $c'_x:C' \to C_x$ telle que $c'_x.e = c_x = p_x.c$.
Par conséquent, il existe une unique flèche $c':C' \to (\prod_{x\in E} C_x)$ telle que, pour tout $x\in E$, on ait $p_x.c' = c'_x$.
Il en résulte que, pour tout $x\in E$, on a:

$$p_x.(c'.e) = (p_x.c').e = c'_x.e = c_x = p_x.c .$$

D'où il résulte que $c'.e = c$, i. e. que c factorise par e .

$$\begin{tikzcd}
\prod_{x\in E} C_x \arrow[d, bend right, "p_x"'] & C \arrow[l, "c"'] \arrow[dl, "c_x"'] \arrow[d, "e"] \\
C_x & C' \arrow[l, "c'_x"] \arrow[ul, bend left=90, dashed, "c'"]
\end{tikzcd}$$

I.4.2.2. Il est immédiat de prouver que [voir Notes 3 et 4]:
- *si* P *est une* $\mathcal{D}$*isc-qualification relative à* $\mathbb{C}$, *alors le foncteur injection canonique* $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P) \to \mathbb{C}$ *crée les limites projectives d'indexations connexes (non vides).*

En effet, il suffit de montrer que, si $f = (f_x : C \to C'_x)_{x\in E}$ est une famille projectives de flèches de $\mathbb{C}$ et si $\mathrm{limproj}_{I\in\mathbf{I}}\, B(I)$ est une limite projective dans $\mathbb{C}$, d'indexation connexe et non vide $\mathbf{I}$ et telle que $B(I) <\| f$, pour tout objet I de $\mathbf{I}$, alors $(\mathrm{limproj}_{I\in\mathbf{I}}\, B(I)) <\| f$.

Supposons donc que $c : C \to \mathrm{limproj}_{I\in\mathbf{I}}\, B(I)$ est une flèche de $\mathbb{C}$ (on pourra se référer au diagramme commutatif ci-dessous).
Pour tout objet I de $\mathbf{I}$, on a donc une flèche $c_I = p_I . c : C \to B(I)$ (en désignant par $(p_I)_{I\in\mathrm{Ob}(\mathbf{I})}$ la famille des projections de la limite projective considérée) et, comme $B(I) <\| f$, il existe un unique $x(I)\in E$ et une unique flèche $c'_I : C'_{x(I)} \to B(I)$ tels que $c'_I . f_{x(I)} = c_I = p_I . c$.
Pour toute flèche $i : I \to J$ de $\mathbf{I}$, on a donc:
$$c'_J . f_{x(J)} = p_J . c = B(i) . p_I . c = B(i) . c'_I . f_{x(I)} ,$$
d'où il résulte (en vertu de l'unicité) que $x(I) = x(J)$ et $c'_J = B(i) . c'_I$.
Mais, comme $\mathbf{I}$ est connexe (et non vide), cela détermine exactement un $x\in E$ et un unique cône projectif $(c'_I : C'_x \to B(I))_{I\in\mathbf{I}}$ tel que, pour tout objet I de $\mathbf{I}$, on a $p_I . c = c'_I . f_x$.
En conséquence, il existe aussi une unique flèche $c' : C'_x \to \mathrm{limproj}_{I\in\mathbf{I}}\, B(I)$ telle que, pour tout objet I de $\mathbf{I}$, on a $p_I . c' = c'_I$.
On en déduit que, pour tout objet I de $\mathbf{I}$, on a:
$$p_I . (c' . f_x) = (p_I . c') . f_x = c'_I . f_x = p_I . c .$$
D'où il résulte que $c' . f_x = c$, i. e. que c factorise au moins par f_x . Comme il est trivial de constater qu'il ne factorise que par f_x , on conclut donc.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{limproj}_{I\in\mathbf{I}}\, B(I) \arrow[d, "p_I"] \arrow[ddl, "p_J"'] & & C \arrow[ll, "c"'] \arrow[dl, bend right, "f_{x(I)}"'] \arrow[dd, "f_{x(J)}"] \arrow[dr, "f_x"] & \\
 & B(I) \arrow[dl, "B(i)"] & C'_{x(I)} \arrow[l, "c'_I"] & & C'_x \arrow[ulll, bend right=60, "c'"'] \\
B(J) & & & C'_{x(J)} \arrow[lll, "c'_J"] &
\end{tikzcd}$$

I.4.2.3. De même, on montre que [voir Notes 3 et 4]:
- *si* P *est une* $\mathbb{D}$iscun-*qualification relative à* $\mathbb{C}$, *alors le foncteur injection canonique* Sat($\mathbb{C}$,P) $\to$ $\mathbb{C}$ *crée les limites projectives.*

En effet, une $\mathbb{D}$iscun-qualification est une $\mathbb{D}$isc-qualification particulière, par conséquent $\mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ crée, d'après I.4.2.2, les limites projectives d'indexations connexes non vides, en particulier les noyaux.
De plus, un raisonnement en tout point analogue à celui effectué en I.4.2.1 prouve qu'il crée aussi les produits.

[Note 3. Le résultat de I.4.2.1 est abondamment utilisé par Andréka-Németi-Sain (voir par exemple (A.C.I.S.), (C.I.S.B.) et (C.V.C.T.)). Celui de I.4.2.2 (et, a fortiori, celui de I.4.2.3) est abondamment utilisé par Diers (voir (C.A.L.O.).

Nous en donnons ici, comme en (C.M.C.F.) notamment, des preuves *internes*, i. e. qui respectent la "règle du jeu" imposée en I.1.2.1, Note 8. Cependant, des preuves "externes" immédiates peuvent en être données:
- I.4.2.1 se déduit immédiatement de la propriété (supposée connue) de commutation dans Ens des épimorphismes avec les produits,
- I.4.2.2 se déduit immédiatement de la propriété (supposée connue) de commutation dans Ens des sommes avec les limites projectives d'indexations connexes.

Néanmoins, il convient de signaler (comme en (C.M.C.F.)) que les résultats et méthodes intrinsèques de démonstration de I.4.2.1 et I.4.2.2 prouvent, a contrario, ces propriétés de commutation (si on les ignore).
Soit, en effet et par exemple, $\mathbb{D}$ une catégorie discrète petite. Notons $\mathbb{D}$+ la catégorie obtenue en adjoignant à $\mathbb{D}$ un objet final 1 . On dispose donc du plongement de Yoneda Yon($\mathbb{D}$+):($\mathbb{D}$+)^{op} $\to$ Ens$^{(\mathbb{D}+)}$ et Yon($\mathbb{D}$+)(($\mathbb{D}$+)^{op}) s'identifie à un cône projectif p , d'indexation discrète, de $\mathbb{C}$ = Ens$^{\mathbb{D}+}$.
Alors, un foncteur F:$\mathbb{D}$+ $\to$ Ens s'identifie à un cône inductif d'indexation (discrète) $\mathbb{D}$ de Ens . De plus, un tel cône inductif est une limite inductive dans Ens si, et seulement si, F <|| p . Par application de I.4.2.2 (et de sa preuve interne) on en déduit la commutation dans Ens des limites projectives d'indexations connexes non vides avec les sommes (d'indexation $\mathbb{D}$ quelconque).
On procède de même pour la commutation dans Ens des produits avec les épimorphismes. Et, si α est un ordinal régulier, il

suffit de procéder également de la même manière pour prouver, sans difficulté, la commutation (dont la preuve, classique, est fastidieuse) dans Ens des limites projectives d'indexations α-petites avec les limites inductives d'indexations des catégories petites et α-filtrantes.]

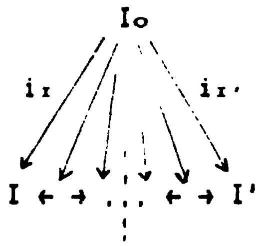
[Note 4. Les calculs de limites particulières examinés en I.4.2.1, I.4.2.2 (et I.4.3.3) ne concernent que les seules formes particulières de qualifications retenues en I.3.4.3 et qui seules seront considérées dans la suite: ce sont celles que Barr prétend "étudier" en (M.D.S.K.), mais ce ne sont évidemment pas les seules qui présentent un certain intérêt (voir I.3.4.3, Note 7, (C.M.C.F.), (E.D.L.L.) et ... la fin de Note 3!).

De plus, les résultats de I.4.2.1 à I.4.2.3, démontrés directement ci-dessus (de même que celui évoqué en fin de Note 3), sont aussi tous conséquences du résultat plus général suivant, qui se démontre (de manière interne) sans aucune difficulté et que nous détaillons ici pour mémoire.

Soit $\mathcal{J}$ un graphe orienté petit (ou une catégorie petite) et $p = (p_I : C \to B(I))_{I \in \mathbf{I}}$ un cône projectif de $\mathbb{C}$.
Nous dirons que p est *$\mathcal{J}_{\mathbf{I}}$-cofiltrant* si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées:
- pour toute famille $(I_J)_{J \in Ob(\mathcal{J})}$ d'objets de $\mathbf{I}$ et pour toute famille $(Z_j : I_J \leftarrow \rightarrow \ldots \leftarrow \rightarrow I_{J'})_{(j:J \to J') \in Fl(\mathcal{J})}$ de zigzags de $\mathbf{I}$, il existe un diagramme (non nécessairement commutatif)

$$\begin{tikzcd}
 & & I \arrow[dll, "i_J"'] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr, "i_{J'}"] & & \\
\ldots I_J & \leftarrow \rightarrow & \ldots & \leftarrow \rightarrow & I_{J'} \ldots
\end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{J}$ dont l'image par $B : \mathbf{I} \to \mathbb{C}$ est rendue commutative dans $\mathbb{C}$.
- pour tous objets I et I' de $\mathbf{I}$ et toute famille $(Z'_j : I \leftarrow \rightarrow \ldots \leftarrow \rightarrow I')_{j \in Fl(\mathcal{J})}$ de zigzags de $\mathbf{I}$, il existe un diagramme (non nécessairement commutatif)



dans $\mathbb{I}$ dont l'image par $B:\mathbb{I} \to \mathbb{C}$ est rendue commutative dans $\mathbb{C}$.

Dans ces conditions, il est *effectivement* facile de vérifier que:

- *si* $\mathcal{J}$ *est un petit graphe orienté (ou une petite catégorie), si* P *est une qualification relative à* $\mathbb{C}$ *et constituée de cônes projectifs* p *qui sont* $\mathcal{J}_I$*-cofiltrants, alors le foncteur injection canonique* $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P) \to \mathbb{C}$ *crée les limites projectives d'indexations* $\mathcal{J}$.

D'où l'on peut déduire, d'ailleurs (voir fin de Note 3) de nouvelles propriétés de commutation de limites dans Ens, plus générales que les "classiques" ... qui en découlent.]

I.4.2.4. Il est également trivial d'établir que:

- *si* $\alpha < \beta$ *sont deux ordinaux réguliers, si* $\mathcal{X}$ *est une classe de cônes projectifs de* $\mathbb{C}$ *et si* P *est une* $\mathcal{X}^{\alpha}{}_{\beta}$*-qualification relative à* $\mathbb{C}$*, alors le foncteur injection canonique* $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P) \to \mathbb{C}$ *crée les limites inductives d'indexations* β*-filtrantes.*

Il suffit, en effet, de prouver que si:

- $p = (p_I : C_p \to B(I))_{I \in \mathbb{I}}$ est un cône projectif de $\mathbb{C}$,
- C_p est un objet α-présentable de $\mathbb{C}$,
- pour tout objet I de $\mathbb{I}$, $B(I)$ est un objet β-présentable de $\mathbb{C}$,
- $C = \mathrm{limind}_{J \in \mathcal{J}} F(J)$ est une limite inductive dans $\mathbb{C}$ et d'indexation β-filtrante $\mathcal{J}$,
- pour tout objet J de $\mathcal{J}$, on a $F(J) <\| p$,

alors, on a $C <\| p$.

Supposons donc que $c : C_p \to C$ est une flèche de $\mathbb{C}$ (on pourra se référer au diagramme commutatif ci-dessous).
Comme C_p est α-présentable et $\alpha < \beta$, il est aussi β-présentable et il existe donc un objet J de $\mathcal{J}$ et une flèche $c_J : C_p \to F(J)$ tels que $s_J . c_J = c$ (en désignant par $(s_J)_{J \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})}$ la famille de coprojections de la limite inductive considérée).

Puisque $F(J) <\| p$, il existe donc un objet I de $\mathbf{I}$ et une flèche $c'_{J,I}:B(I) \to F(J)$ tels que $c'_{J,I}.p_I = c_J$.
On en déduit que:

$$(s_J.c'_{J,I}).p_I = s_J.(c'_{J,I}.p_I) = s_J.c_J = c$$

i. e. que c factorise au moins par une des projections de p .
Supposons alors que c factorise d'une autre manière par une projection de p , i. e. que I' est un objet de $\mathbf{I}$ et $c'_{I'}:B(I') \to C$ est une flèche de $\mathbb{C}$ tels que $c'_{I'}.p_{I'} = c$.
Comme $B(I')$ est $\mathcal{B}$-présentable, il existe un objet J' de $\mathbf{J}$ et une flèche $c'_{I',J'}:B(I') \to F(J')$ tels que $s_{J'}.c'_{I',J'} = c'_{I'}$.
Il en résulte que:

$$\begin{aligned} & s_{J'}.(c'_{I',J'}.p_{I'}) \\ = {} & (s_{J'}.c'_{I',J'}).p_{I'} = c'_{I'}.p_{I'} = c \\ = {} & s_J.(c'_{J,I}.p_I) \ , \end{aligned}$$

mais, comme C_P est $\mathcal{B}$-présentable et $\mathbf{J}$ est $\mathcal{B}$-filtrante (en particulier finiment filtrante), il existe deux flèches $j:J \to J_+$ et $j':J' \to J_+$ de $\mathbf{J}$ telles que:

$$F(j').c'_{I',J'}.p_{I'} = F(j).c'_{J,I}.p_I \ .$$

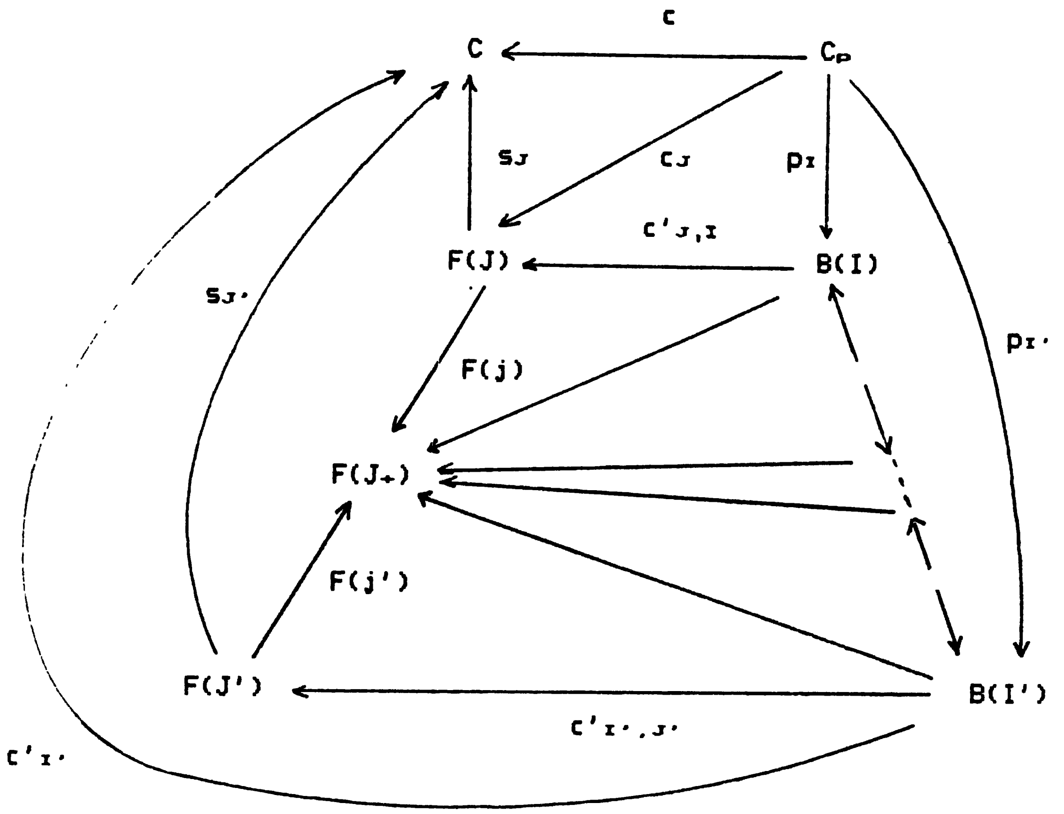
Comme $F(J_+) <\| p$, on peut donc affirmer qu'il existe un zigzag:

$$Z:\quad I \leftarrow \rightarrow \dots \leftarrow \rightarrow I'$$

de $\mathbf{I}$ et un diagramme commutatif de $\mathbb{C}$ tel que ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
B(Z): & B(I) \arrow[drr, "F(j).c'_{J,I}"'] & \cdot \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dr] & \dots & \cdot \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl] & B(I') \arrow[dll, "F(j').c'_{I',J'}"] \\
 & & & F(J_+) & &
\end{tikzcd}$$

On conclut alors immédiatement [voir Note 5].



[Note 5. Notons que la preuve présentée ici respecte effectivement la "règle du jeu" imposée en I.1.2.1, Note 8, mais qu'elle est essentiellement *différente* de celles présentées en I.4.2.1 et I.4.2.2. En effet, ce n'est pas la comparaison des "géométries" respectives des indexations des éléments de la qualification considérée et des indexations des limites inductives que l'on cherche à calculer qui est déterminante: c'est, plutôt, le "comportement" (interne - voir I.3.4.1, Note 6) des sommets et pieds de ces éléments vis à vis de ces limites inductives. On doit à Gabriel-Ulmer (voir (L.P.L.G.)) d'avoir souligné l'importance de ce comportement, et d'avoir su le formaliser "catégoriquement" (voir I.3.4.1, Note 6).]

I.4.3. Calculs d'ultraproduits.

I.4.3.1. Il est immédiat de montrer que [voir Notes 6 et 9]:
- *si* P *est une* $\mathcal{V}^{\omega}$*-qualification relative à* $\mathbb{C}$ *, alors* Sat($\mathbb{C}$,P) *est une sous-catégorie de* $\mathbb{C}$ *, fermée pour le calcul des ultraproduits* [voir Notes 7 et 8].

En effet, compte tenu de I.4.2.1, il suffit de prouver que, si:
- $e:C \to C_o$ est une flèche de $\mathbb{C}$,
- C est un objet ω-présentable de $\mathbb{C}$,
- $(C'_y)_{y\in F}$ est une famille d'objets de $\mathbb{C}$,
- U est un ultrafiltre sur F ,
- pour tout $y\in F$, on a $C'_y \lhd e$,

alors, on a aussi $C'_U = \mathrm{Ultraprod}_{y\in G\in U}\, C'_y \lhd e$.

Supposons donc que $c:C \to C'_U$ est une flèche de $\mathbb{C}$ (on pourra se référer au diagramme commutatif ci-dessous).
Comme $C'_U = \mathrm{limind}_{G\in Fil(U)}\, C'_G$ [voir Note 7] et C est un objet ω-présentable de $\mathbb{C}$, il existe au moins un $G\in U$ et au moins une flèche $c_G:C \to C'_G$ tels que $s_G.c_G = c$.
Par conséquent, pour tout $y\in G$, comme $C'_y \lhd e$,il existe au moins une flèche $c_{G,y,o}:C_o \to C'_y$ telle que

$$p_{G,y}.c_G = c_{G,y,o}.e \ .$$

On en déduit qu'il existe une unique flèche $c_{G,o}:C_o \to C'_G$ telle que, pour tout $y\in G$, on a $p_{G,y}.c_{G,o} = c_{G,y,o}$.
Il en résulte que, pour tout $y\in G$, on a:
$p_{G,y}.(c_{G,o}.e) = (p_{G,y}.c_{G,o}).e = c_{G,y,o}.e = p_{G,y}.c_G$.
On en conclut que $c_{G,o}.e = c_G$ et, par conséquent, que $c = s_G.c_G = s_G.(c_{G,o}.e) = (s_G.c_{G,o}).e$, i. e. que c factorise par e .

$$\begin{tikzcd}
C'_U & & C \arrow[ll, "c"'] \arrow[d, "e"] \arrow[dll, "c_G"] \\
C'_G \arrow[u, "s_G"] \arrow[d, "p_{G,y}"'] & & C_o \arrow[ll, "c_{G,o}"] \arrow[dll, "c_{G,y,o}"] \\
C'_y & &
\end{tikzcd}$$

où y varie dans G et $G\in U$

[Note 6. Ce résultat particulier est abondamment utilisé par Andréka-Németi-Sain, par exemple en (A.C.I.S.), (C.I.S.B.) et (C.V.C.T.). Du point de vue des catégories axiomatisables (voir I.3), Andréka-Németi en étudient explicitement une généralisation (étudiée directement ici ,du point de vue - équivalent, d'après I.3.3 - des catégories qualifiables) et une réciproque ("théorème de Los") en (L.L.H.C.).]

[Note 7. Si F est un ensemble et si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur F , on note $\mathrm{Fil}(\mathcal{U})$ la catégorie duale de celle associée à l'ordre "inclusion" sur $\mathcal{U}$: c'est donc une catégorie ω-filtrante.
Si $(C'_y)_{y\in F}$ est une famille d'objets de $\mathbb{C}$ et si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur F , alors pour tout $G\in\mathcal{U}$ on pose $C'_G = \prod_{y\in G} C'_y$ (si ce produit existe dans $\mathbb{C}$) et l'on note $(p_{G,y}:C'_G \to C'_y)_{y\in G}$ la famille des projections.
Dans ces conditions, on pose $C'_{\mathcal{U}} = \mathrm{limind}_{G\in \mathrm{Fil}(\mathcal{U})} C'_G$ (lorsque cette limite inductive existe dans $\mathbb{C}$) et l'on note $(s_G:C'_G \to C'_{\mathcal{U}})_{G\in\mathcal{U}}$ la famille des co-projections.
Alors, $C'_{\mathcal{U}}$ est appelé *ultraproduit de la famille* $(C'_y)_{y\in F}$ *d'objets de* $\mathbb{C}$, *selon l'ultrafiltre* $\mathcal{U}$. Pour abréger, on note encore $C'_{\mathcal{U}} = \mathrm{Ultraprod}_{y\in G\in\mathcal{U}} C'_y$.]

[Note 8. On dit qu'une sous-catégorie pleine $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{C}$ est *fermée pour le calcul des ultraproduits* si, et seulement si:
- pour toute famille $(C'_y)_{y\in F}$ d'objets de $\mathbb{C}'$, pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur F , tels que:
    + pour tout $G\in\mathcal{U}$, le produit $C'_G = \prod_{y\in G} C'_y$ existe dans la catégorie $\mathbb{C}$,
    + la limite inductive $C'_{\mathcal{U}} = \mathrm{limind}_{G\in \mathrm{Fil}(\mathcal{U})} (\prod_{y\in G} C'_y)$ existe dans la catégorie $\mathbb{C}$,

alors $C'_{\mathcal{U}}$ et, pour tout $G\in\mathcal{U}$, C'_G sont objets de $\mathbb{C}'$.]

I.4.3.2. Une méthode tout à fait analogue permet d'établir que [voir Note 9]:
- *si* P *est une* $\mathcal{D}\mathrm{iscfin}^{\omega}{}_{\omega}$*-qualification relative à* $\mathbb{C}$ *, alors* $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$ *est stable par ultraproduits* [voir Note 10].

En effet, il suffit de prouver que, si:
- $f = (f_x:C \to C'_x)_{x\in E}$ est une famille projective finie de flèches de $\mathbb{C}$,

- C est un objet ω-présentable de $\mathbb{C}$,
- pour tout $x \in E$, C_x est un objet ω-présentable de $\mathbb{C}$,
- $(C'_y)_{y \in F}$ est une famille d'objets de $\mathbb{C}$,
- U est un ultrafiltre sur F ,
- pour tout $y \in F$, $C'_y <\|\, f$,

alors, on a aussi $C'_U = \mathrm{Ultraprod}_{y \in G \in U} C'_y <\|\, f$.

Supposons donc que $c : C \to C'_U$ est une flèche de $\mathbb{C}$ et montrons (notamment) que c factorise par au moins un des f_x (on pourra se référer au diagramme commutatif ci-dessous) [voir Note 7].

Comme C est ω-présentable, il existe au moins un $G \in U$ et une flèche $c_G : C \to C'_G$ tels que $s_G . c_G = c$.

Par conséquent, pour tout $y \in G$, comme $C'_y <\|\, f$, il existe un unique $x(y) \in E$ et une unique $c_{G,y} : C_{x(y)} \to C'_y$ tels que $p_{G,y} . c_G = c_{G,y} . f_{x(y)}$.

On en conclut, puisque $G \neq \emptyset$, que:

$$E' = \{x \in E \;/\; \exists\, y \in G \;\; \exists\, c' : C_x \to C'_y \text{ tels que } p_{G,y} . c_G = c' . f_x \}$$

est un ensemble (fini, puisque E est fini) non vide.

Il en résulte que, si l'on pose, pour tout $x \in E'$:

$G(x) = \{y \in G \;/\; \exists\, c' : C_x \to C'_y \text{ tel que } p_{G,y} . c_G = c' . f_x \}$

il existe nécessairement un $z \in E'$ tel que $G(z) \in U$ (car sinon, on aurait $E \backslash G = \bigcap_{x \in E'} E \backslash G(x) \in U$ et donc $G = \bigcup_{x \in E'} G(x)$ n'appartiendrait pas à U).

On en déduit donc qu'il existe une unique flèche $c_{G(z)} : C_z \to C'_{G(z)}$ telle que, pour tout $y' \in G(z)$, on a $z = x(y')$ et $p_{G(z),y'} . c_{G(z)} = c_{G,y'}$.

Désignons donc par $c_{G,G(z)} : C'_G \to C'_{G(z)}$ l'unique flèche telle que, pour tout $y' \in G(z)$ G :

$$p_{G(z),y'} . c_{G,G(z)} = p_{G,y'} .$$

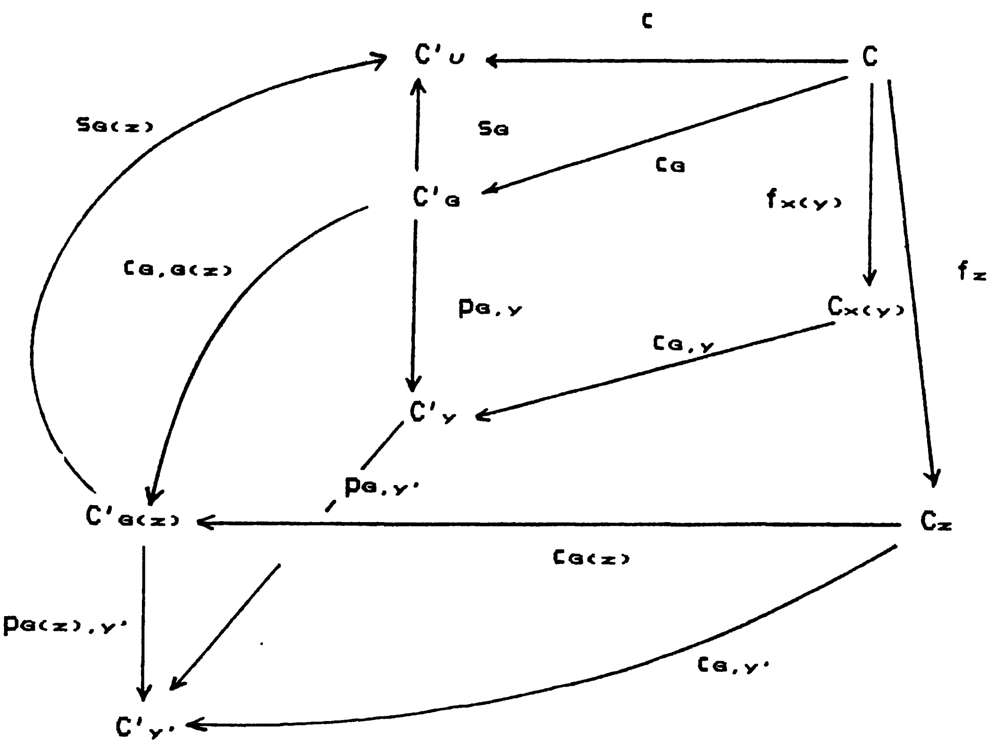
On a donc, pour tout $y' \in G(z)$:

$$\begin{aligned} p_{G(z),y'} . (c_{G,G(z)} . c_G) &= (p_{G(z),y'} . c_{G,G(z)}) . c_G = p_{G,y'} . c_G \\ &= c_{G,y'} . f_z = p_{G(z),y'} . c_{G(z)} . f_z . \end{aligned}$$

On en conclut que $c_{G,G(z)} . c_G = c_{G(z)} . f_z$, d'où l'on infère que c factorise par f_z , puisque:

$$\begin{aligned} (s_{G(z)} . c_{G(z)}) . f_z &= s_{G(z)} . (c_{G(z)} . f_z) = s_{G(z)} . (c_{G,G(z)} . c_G) \\ &= (s_{G(z)} . c_{G,G(z)}) . c_G = s_G . c_G = c . \end{aligned}$$

L'unicité de cette factorisation s'établit alors sans difficulté.



[Note 9. Les méthodes (évidemment internes, au sens de la "règle du jeu" imposée en I.1.2.1, Note 8) particulières de calculs d'ultraproduits examinées en I.4.3.1 et I.4.3.2 ne concernent que les seules formes particulières de qualifications retenues en I.3.4.3 et qui seules seront considérées par la suite: ce sont celles que Barr prétend "étudier" en (M.D.S.K.), mais ce ne sont évidemment pas les seules qui présentent un certain intérêt (voir I.3.4.3, Note 7).

Un calcul systématique (et tout aussi interne) d'ultraproduits dans les catégories qualifiables, plus générales que celles considérées ici, se trouve en (C.M.C.F.): rappelons-en brièvement les éléments.

On dit que $(\mathbf{I}, \mathbf{I}', \mathrm{csp})$ est une *w-catégorie connexe finitaire* si, et seulement si:

- $\mathbf{I}$ est une petite catégorie connexe,
- $\mathbf{I}'$ est un ensemble fini d'objets de $\mathbf{I}$ (ou encore une sous-catégorie discrète finie de $\mathbf{I}$),
- $\mathrm{csp}: \mathbf{I}' \times \mathbf{I}' \to \mathrm{span}(\mathbf{I})$ est une application qui, à tout couple (I', I'') d'objets de $\mathbf{I}'$ associe un co-span de $\mathbf{I}$ de la forme

csp(I',I"):
$$\begin{tikzcd} I' \arrow[dr] & & I'' \arrow[dl] \\ & I'*I'' & \end{tikzcd}$$

- pour tout objet I de $\mathbf{I}$, il existe au moins un objet I' de $\mathbf{I}'$ et au moins une flèche $I' \to I$ de $\mathbf{I}$,
(s'il n'y a pas risque de confusion, on dira plus brièvement que c'est $\mathbf{I}$ la w-catégorie connexe finitaire).
On dit qu'une catégorie est une *w-catégorie finitaire* si, et seulement si, elle est somme d'un nombre fini de w-catégories connexes finitaires.
Alors, on note $\boldsymbol{\omega}$ la classe des cônes projectifs $p = (p_I : C \to B(I))_{I \in \mathbf{I}}$ de $\mathbf{C}$ tels que:
- $\mathbf{I} = \Sigma_{1 \leq k \leq n} \mathbf{I}_k$ est une w-catégorie finitaire (somme de la famille $(\mathbf{I}_k)_{1 \leq k \leq n}$ de w-catégories connexes finitaires),
- C est un objet ω-présentable de $\mathbf{C}$,
- pour tout $1 \leq k \leq n$ et tout objet I' de $\mathbf{I}'_k$, $B(I')$ est un objet ω-présentable de $\mathbf{C}$,
- pour tout $1 \leq k \leq n$ et tout couple (I'_1, I'_2) d'objets de $\mathbf{I}'_k$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "p_{I'}"'] \arrow[dr, "p_{I''}"] \arrow[dd, "p_{I'*I''}"] & \\ B(I') \arrow[dr] & & B(I'') \arrow[dl] \\ & B(I'*I'') & \end{tikzcd}$$

est une somme fibrée dans $\mathbf{C}$.
Dans ces conditions, il est facile de vérifier que:
- *si* P *est une* $\boldsymbol{\omega}$*-qualification relative à* $\mathbf{C}$ *, alors* $Sat(\mathbf{C},P)$ *est une sous-catégorie de* $\mathbf{C}$ *, stable par ultraproduits,*
et que les propriétés énoncées en I.4.3.1 et I.4.3.2 n'en sont que des cas particuliers (une catégorie $\mathcal{V}^{\omega}$-qualifiable étant, en vertu de I.3, une catégorie $\boldsymbol{\omega}$-qualifiable et une $\mathcal{D}cfin^{\omega}{}_{\omega}$-qualification étant trivialement une $\boldsymbol{\omega}$-qualification).]

[Note 10. On dit qu'une sous-catégorie pleine $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{C}$ est *stable par ultraproduits* si, et seulement si:
- pour toute famille $(C'_y)_{y\in F}$ d'objets de $\mathbb{C}'$, pour tout ultrafiltre U sur F, tels que:
  + pour tout $G\in U$, le produit $C'_G = \prod_{y\in G} C'_y$ existe dans la catégorie $\mathbb{C}$,
  + la limite inductive $C'_U = \mathrm{limind}_{G\in Fil(U)} (\prod_{y\in G} C'_y)$ existe dans la catégorie $\mathbb{C}$,

alors C'_U est objet de $\mathbb{C}'$.]

I.4.3.3. De I.4.3.1 et I.4.3.2, on déduit immédiatement que [voir Note 11]:
- *si* P *est une* $\mathcal{V}\mathcal{D}$iscfin$^{\omega}{}_{\omega}$*-qualification relative à* $\mathbb{C}$, *alors* $\mathbb{C}'$ = Sat($\mathbb{C}$,P) *est stable par ultraproduits.*

[Note 11. Ce dernier résultat est aussi une conséquence directe de celui, plus général, énoncé en fin de Note 9.]

SECTION II

CATEGORIES ESQUISSABLES

II.1. GRAPHES COMPOSITIFS.

II.1.1. Définition des graphes compositifs.

II.1.1.1. On dit que $\mathbb{G} = (\mathrm{Or}(\mathbb{G}),\mathrm{Tr}(\mathbb{G}))$ est un *graphe compositif* si, et seulement si [voir Note 1]:
- $\mathrm{Or}(\mathbb{G})$ est un graphe orienté, dit *sous-jacent à* $\mathbb{G}$,
- $\mathrm{Tr}(\mathbb{G})$ est une classe de triangles, dits *commutatifs* [voir Note 1], de $\mathrm{Or}(\mathbb{G})$,
- pour toute flèche $g:G \to G'$ de $\mathbb{G}$ (i. e. de $\mathrm{Or}(\mathbb{G})$) les deux triangles (dits *triviaux*)

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dr, "g"] & \\ G \arrow[ur, "\mathrm{Id}(G)"] \arrow[rr, "g"'] & & G' \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} & G' \arrow[dr, "\mathrm{Id}(G')"] & \\ G \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "g"'] & & G' \end{tikzcd}$$

sont commutatifs,
- si

$$\begin{tikzcd} & G' \arrow[dr, "g'"] & \\ G \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h"'] & & G'' \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} & G' \arrow[dr, "g'"] & \\ G \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h'"'] & & G'' \end{tikzcd}$$

sont deux triangles commutatifs, alors $h = h'$.

Ainsi, un graphe compositif $\mathbb{G}$ est un graphe orienté muni d'une certaine loi de composition binaire *partielle* de *certains* couples (dits *composables*) de flèches consécutives [voir Note 1]. En effet, si $g:G \to G'$ et $g':G' \to G''$ sont deux flèches consécutives de $\mathbb{G}$, le couple (g',g) est composable si, et seulement si, il existe un triangle commutatif (nécessairement unique) tel que

$$\begin{tikzcd} & G' \arrow[dr, "g'"] & \\ G \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h"'] & & G'' \end{tikzcd}$$

et, alors, on dit que h est le *composé de* g' *par* g et l'on note $h = g'.g$.

[Note 1. Les "graphes orientés munis d'une loi de composition partielle de certains couples de flèches consécutives (dont, nécessairement, les triviaux)" ont été introduits par Ehresmann (voir (C.A.S.T.)) sous le nom de *graphes multiplicatifs*. Nous préfèrons les appeler graphes compositifs pour n'induire aucune confusion avec la notion de catégorie multiplicative (i. e. de catégorie munie d'un bi-foncteur "produit tensoriel") mais il s'agit bel et bien de la même notion.

Il nous a semblé divertissant de présenter ces graphes compositifs comme des "graphes orientés munis de triangles distingués (dits commutatifs, en raison de l'utilisation ultérieure que l'on en fait)".
Ainsi pourra-t-on dire, si l'on tient à *ne pas* prendre de précautions, qu'il s'agit là d'une notion moins générale que celle, introduite par Barr en (T.T.A.T.) ou (M.D.S.K.), de "graphes (orientés) munis de diagrammes distingués (qui ne sont pas nécessairement des triangles)".

La plus élémentaire des précautions permet de constater facilement que ces deux notions sont totalement équivalentes, lorsqu'il s'agit de réaliser ces graphes dans des catégories, de sorte que les diagrammes distingués se transforment en des diagrammes commutatifs. En effet, sans entrer dans des détails bien inutiles à propos d'un point si dérisoire, constatons que, de ce point de vue (qui était dès l'origine celui d' Ehresmann), un graphe multiplicatif (ou compositif) n'est rien d'autre qu'un système de générateurs (les flèches non triviales du graphe) et de relations (toutes écrites sous la forme $g'.g = h$) pour une catégorie (voir II.1.4). Tout aussi clairement, un "graphe (orienté) muni de diagrammes distingués" n'est rien d'autre qu'un ... système de générateurs (les flèches - non triviales, s'il y en a - du graphe) et de relations (toutes écrites sous l'une des deux formes

$$g_n.g_{n-1}...g_2.g_1 = g'_m.g'_{m-1}...g'_2.g'_1$$
ou
$$g_n.g_{n-1}...g_2.g_1 = Id$$

qui, au moyen de composés "intermédiaires", peuvent être remplacées par un système d'équations de la forme précédente) pour une catégorie. La différence n'est, bien entendu que scripturale..

Pour conclure, signalons qu'effectivement la notion de "graphe (orienté) muni de diagrammes distingués " peut, d'un autre point de vue, se concevoir comme non équivalente à celle de graphe compositif: cela se produit si l'on décide de "réaliser" ces graphes dans des catégories en transformant les diagrammes distingués en des diagrammes *non* commutatifs! Mais ce point de vue figure déjà chez ... Ehresmann (voir (I.T.S.C.)), qui considère, plus judicieusement, des graphes ... compositifs munis, de plus, d'autres diagrammes distingués que les commutatifs.]

II.1.1.2. Un graphe orienté s'identifie à un graphe compositif $\mathbb{G}$, dit *trivial*, où la composition des flèches est *minimale*, i. e. où les seuls triangles commutatifs sont

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dr, "g"] & \\ G \arrow[ur, "Id(G)"] \arrow[rr, "g"'] & & G' \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} & G' \arrow[dr, "Id(G')"] & \\ G \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "g"'] & & G' \end{tikzcd}$$

dès que $g:G \to G'$ est une quelconque flèche de $\mathbb{G}$.

Une catégorie s'identifie aussi à un graphe compositif $\mathbb{G}$, où la composition des flèches est associative et *maximale*, i. e. telle que, dès que $g:G \to G'$ et $g':G' \to G''$ sont deux flèches consécutives de $\mathbb{G}$, il existe un triangle commutatif (nécessairement unique)

$$\begin{tikzcd} & G' \arrow[dr, "g'"] & \\ G \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h"'] & & G'' \end{tikzcd}$$

II.1.1.3. Nous dirons, enfin, qu'un graphe compositif est *petit* si, et seulement si:
- son graphe orienté sous-jacent est petit.

II.1.2. Foncteurs.

II.1.2.1. Soit $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$ deux graphes compositifs.
On définit facilement (par analogie avec le cas particulier usuel où $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$ seraient deux catégories) ce qu'est un *foncteur* (entre graphes compositifs) $F:\mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ de $\mathbf{G}$ vers $\mathbf{G}'$: c'est évidemment un homomorphisme entre les graphes orientés sous-jacents à $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$ qui, de plus, transforme tout triangle commutatif en un triangle commutatif.
Clairement, un foncteur de $\mathbf{G}$ vers $\mathbf{G}'$ est aussi un homomorphisme de "graphes orientés munis de lois de composition de couples de flèches consécutives".

II.1.2.2. Soit $F:\mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ et $F':\mathbf{G}' \to \mathbf{G}''$ deux foncteurs.
On définit facilement (par analogie avec le cas particulier usuel où $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}'$ et $\mathbf{G}''$ seraient trois catégories) le foncteur *composé* $F'.F:\mathbf{G} \to \mathbf{G}''$ de F' par F.

II.1.2.3. Les homomorphismes entre graphes orientés s'identifient exactement aux foncteurs entre graphes compositifs triviaux. Alors, à la composition des homomorphismes entre graphes orientés correspond évidemment la composition des foncteurs entre graphes compositifs triviaux.
De même, les foncteurs entre catégories s'identifient exactement aux foncteurs entre graphes compositifs à composition associative et maximale. Alors, à la composition des foncteurs

entre catégories correspond la composition des foncteurs entre graphes compositifs à composition associative et maximale.

II.1.2.4. Soit $\mathbf{G}$ un graphe compositif.
On définit facilement (par analogie [voir Note 2] avec le cas particulier usuel où $\mathbf{G}$ serait une catégorie) ce qu'est un cône projectif (resp. inductif) dans $\mathbf{G}$.

[Note 2. Dès lors qu'on conçoit un graphe compositif comme un "graphe orienté muni d'une loi de composition partielle de certains couples de flèches consécutives (dont les triviaux)" plutôt que comme un "graphe (orienté) muni de diagrammes distingués", cette analogie est d'autant plus utile qu'il serait vraiment très fastidieux - bien que non impossible, si l'on y tient vraiment! - de définir ce qu'est un cône projectif (resp. inductif) d'indexation ... une catégorie non nécessairement discrète ou non nécessairement librement engendrée par un graphe (et l'on sait -voir ce qui précède et ce qui suit! - que ce n'est pas seulement par esprit ludique que l'on est conduit à considèrer, par exemple, des limites inductives d'indexations des catégories α-filtrantes).
Cette même analogie pourrait (ou devrait) aussi nous inciter à supposer, dans tout ce qui précède et dans tout ce qui suit, qu'un cône projectif (resp. inductif) dans un graphe compositif ou, plus particulièrement, dans une catégorie, peut être lui-même indexé par un graphe compositif (plutôt que par ces graphes compositifs particuliers que sont les graphes orientés ou les catégories). On y gagnerait encore un peu plus en homogénéité ... et ce ne serait pas le seul avantage!]

II.1.3. Transformations naturelles.

II.1.3.1. Soit $\mathbf{G}$ un graphe compositif et $\mathbf{A}$ une catégorie.
Si $F_1, F_2 : \mathbf{G} \to \mathbf{A}$ sont deux foncteurs, on définit facilement (par analogie [voir Note 3] avec le cas particulier usuel où $\mathbf{G}$ serait une catégorie) ce qu'est une transformation naturelle $n : F_1 \Rightarrow F_2 : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ de F_1 vers F_2 .

[Note 3. Il s'agit de l'analogie largement précisée, et justifiée, en II.1.2.4, Note 2. L'utilisant encore un peu plus, constatons que, dès lors qu'on conçoit un graphe compositif comme un "graphe orienté muni d'une loi de composition partielle de certains couples de flèches consécutives (dont les triviaux)" plutôt que comme un "graphe (orienté) muni de diagrammes distingués", on est naturellement porté à définir aussi (voir (P.T.G.M.)) *plusieurs* notions de transformations (toutes aussi naturelles les unes que les autres) lorsque $\mathbb{A}$ est aussi un graphe compositif (qui n'est pas nécessairement une catégorie).]

II.1.3.2. Soit $\mathbb{G}$ un graphe compositif et $\mathbb{A}$ une catégorie.
Si $n_1:F_1 \Rightarrow F_2 : \mathbb{G} \to \mathbb{A}$ et $n_2:F_2 \Rightarrow F_3 : \mathbb{G} \to \mathbb{A}$ sont deux transformations naturelles, on définit facilement (par analogie avec le cas particulier usuel où $\mathbb{G}$ serait une catégorie) la transformation naturelle $n_2 \bullet n_1 : F_1 \Rightarrow F_3 : \mathbb{G} \to \mathbb{A}$ *composée* (*latérale*) de n_2 par n_1.
Dans ces conditions, on note $\mathbb{A}^{\mathbb{G}}$ *la catégorie* [voir Note 4] *de foncteurs de* $\mathbb{G}$ *vers* $\mathbb{A}$, i. e. la catégorie telle que:
- ses objets sont les foncteurs $F:\mathbb{G} \to \mathbb{A}$,
- ses flèches sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.

Pour tout objet G de $\mathbb{G}$, on note $ev(\mathbb{G},\mathbb{A})_G:\mathbb{A}^{\mathbb{G}} \to \mathbb{A}$ le foncteur *évaluation* (*relative à* $\mathbb{G}$ *et* $\mathbb{A}$) *en* G (défini par analogie avec le cas où $\mathbb{G}$ serait une catégorie).
Pour toute flèche $g:G \to G'$, on note:

$$ev(\mathbb{G},\mathbb{A})_g:ev(\mathbb{G},\mathbb{A})_G \Rightarrow ev(\mathbb{G},\mathbb{A})_{G'} : \mathbb{G} \to \mathbb{A},$$

la transformation naturelle "évaluation en g" (définie par analogie avec le cas où $\mathbb{G}$ serait une catégorie).
On définit ainsi un foncteur $ev(\mathbb{G},\mathbb{A}):\mathbb{G} \to \mathbb{A}^{(\mathbb{A}^{\mathbb{G}})}$.

II.1.3.3. Soit $\mathbb{G}$ un graphe compositif.
Pour tout objet G de $\mathbb{G}$, on note plus brièvement:

$$ev(\mathbb{G})_G = ev(\mathbb{G},\mathrm{Ens})_G .$$

De même, pour toute flèche g de $\mathbb{G}$, on note:

$$ev(\mathbb{G})_g = ev(\mathbb{G},\mathrm{Ens})_g .$$

Enfin, on note tout aussi simplement:
$ev(\mathbb{G}) = ev(\mathbb{G},\mathrm{Ens})$.

[Note 4. Compte tenu de la fin de Note 3 précédente, si $\mathbb{A}$ n'est qu'un graphe compositif, alors $\mathbb{A}^{\mathbb{G}}$ est aussi un graphe compositif (voir (P.T.G.M.)).]

II.1.3.4. Soit $F:\mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ un foncteur et $\mathbf{A}$ une catégorie.

Si $n':F'_1 \Rightarrow F'_2 : \mathbf{G}' \to \mathbf{A}$ est une transformation naturelle, on définit facilement (par analogie avec le cas particulier usuel où $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$ seraient deux catégories) la transformation naturelle $n'.F:F'_1.F \Rightarrow F'_2.F : \mathbf{G} \to \mathbf{A}$ *composée (longitudinale)* de n' par F.

Dans ces conditions, on note

$$\mathbf{A}^F:\mathbf{A}^{\mathbf{G}'} \to \mathbf{A}^{\mathbf{G}}$$

le foncteur *composition (longitudinale) à droite par* F.

II.1.4. Catégories engendrées.

II.1.4.1. Soit $\mathbf{G}$ un graphe compositif.

On note $\mathrm{Chp}(\mathbf{G})$ la catégorie (librement engendrée par le graphe orienté sous-jacent à $\mathbf{G}$) des *chemins propres* de $\mathbf{G}$, i. e. la catégorie telle que:

- ses objets sont les objets de $\mathbf{G}$,
- ses flèches sont:
    + soit les flèches $g:\mathrm{dom}(g) \to \mathrm{codom}(g)$ de $\mathbf{G}$,
    + soit, pour tout entier $n>1$, les n-uplets
    $(g_n,\ldots,g_1):\mathrm{dom}(g_1) \to \mathrm{codom}(g_n)$
    de flèches consécutives et propres (i. e. toutes différentes de flèches identités) de $\mathbf{G}$,
- la composition de ces chemins est (pratiquement) la concaténation.

II.1.4.2. Soit $\mathbf{G}$ un graphe compositif.

On note $L(\mathbf{G})$ la *catégorie librement engendrée* [voir Note 5] par (le graphe compositif) $\mathbf{G}$, i. e. la catégorie quotient de $\mathrm{Chp}(\mathbf{G})$ par la relation d'équivalence R, compatible avec la structure de catégorie, engendrée par la relation ρ telle que:

- si $g:G \to G'$ et $g':G' \to G''$ sont deux flèches composables dans $\mathbf{G}$, alors $g'.g \; \rho \; (g',g)$ dans $\mathrm{Chp}(\mathbf{G})$.

Dans ces conditions, on désigne par $l(\mathbf{G}):\mathbf{G} \to L(\mathbf{G})$ le foncteur associant à toute flèche g de $\mathbf{G}$ la classe modulo R du "chemin" g (bien entendu, ce foncteur n'est, en général, ni injectif, ni fidèle, ni plein).

Clairement, si $\mathbf{G}$ est petit, alors $L(\mathbf{G})$ est petite.

II.1.4.3. Soit $F: \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un foncteur entre deux graphes compositifs.

Il est facile de vérifier que [voir Note 5] F *engendre* un unique foncteur $L(F): L(\mathbb{G}) \to L(\mathbb{G}')$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "l(\mathbb{G})"'] & \mathbb{G}' \arrow[d, "l(\mathbb{G}')"] \\ L(\mathbb{G}) \arrow[r, "L(F)"'] & L(\mathbb{G}') \end{tikzcd}$$

II.1.4.4. Soit $\mathbb{G}$ un graphe compositif.

On vérifie facilement que [voir Note 5]:

- *pour toute catégorie* $\mathbb{A}$ *, le foncteur*

$$\mathbb{A}^{l(\mathbb{G})}: \mathbb{A}^{L(\mathbb{G})} \to \mathbb{A}^{\mathbb{G}}$$

est un isomorphisme.

[Note 5. C'est parce que $\mathbb{G}$ engendre $L(\mathbb{G})$ qu'il est évidemment, formellement, justifié de considérer qu'un graphe compositif est un système de générateurs et relations pour une catégorie (voir II.1.1.3, Note 1).

Bien entendu, les résultats de II.1.4.2, II.1.4.3 et (en partie) II.1.4.4 signifient que le foncteur d'oubli Cat $\to$ Grphcp , de la catégorie des (petites) catégories vers celles des (petits) graphes compositifs, admet un adjoint à gauche.

Pour exprimer en une phrase aussi simple la *totalité* du résultat de II.1.4.4, on peut dire que ce foncteur d'oubli est sous-jacent à un 2-foncteur admettant un 2-adjoint à gauche ... étant entendu que le préfixe 2- signifie "enrichi par les graphes compositifs" (d'où la *nécessité* de ce à quoi il est fait allusion en fin de Note 3 et en Note 4).]

II.2. ESQUISSES.

II.2.1. Définition des esquisses.

II.2.1.1. On dit que $\mathbb{E}$ = (Supp($\mathbb{E}$),CP($\mathbb{E}$),CI($\mathbb{E}$)) est une *esquisse* (*mixte*) [voir Note 1] si, et seulement si:
- Supp($\mathbb{E}$) est un graphe compositif petit, qu'on appelle *support* de $\mathbb{E}$,
- CP($\mathbb{E}$) est un ensemble de cône projectifs de Supp($\mathbb{E}$) , dits *distingués* dans $\mathbb{E}$,
- CI($\mathbb{E}$) est un ensemble de cônes inductifs de Supp($\mathbb{E}$) , dits *distingués* dans $\mathbb{E}$.

Autrement dit, une esquisse est un graphe compositif muni de cônes projectifs distingués et de cônes inductifs distingués. C'est aussi un graphe orienté muni de triangles et de cônes projectifs et inductifs distingués [voir Note 1].

II.2.1.2 On dit qu'une esquisse est (*purement*) *projective* [voir Notes 1 et 2] si, et seulement si:
- aucun cône inductif n'y est distingué.

Si $\mathbb{E}$ est une esquisse, on note Proj($\mathbb{E}$) = (Supp($\mathbb{E}$),CP($\mathbb{E}$),$\emptyset$) l'esquisse projective *sous-jacente* à $\mathbb{E}$.

II.2.1.3. On dit qu'une esquisse est *élémentaire* si, et seulement si:
- aucun cône inductif n'y est distingué,
- aucun cône projectif n'y est distingué.

Clairement, les graphes compositifs s'identifient aux esquisses élémentaires. En particulier, les graphes orientés (resp. les catégories) s'identifient à des esquisses élémentaires dites *triviales* (resp. à composition *associative* et *maximale*) [voir Note 1].

[Note 1. Sous une terminologie légèrement différente, les esquisses projectives (générales) ont été explicitement définies par Ehresmann, *au plus tard dès 1966* (voir (I.T.S.C.)). Pour la première fois se trouvaient simultanément formalisés deux points de vue complémentaires concernant tant les structures algébriques (usuelles) que ce que l'on a appelé (quelque temps après) les structures "essentiellement algébriques" (qui ne sont strictement rien d'autre que les ... structures projectivement esquissables):
(a) pour décrire une structure essentiellement algébrique d'un certain type, il suffit de considérer une famille d'ensembles, une famille de lois de composition entre ces ensembles (ou d'autres, construits par limites projectives à partir de ces données) et une liste d'égalités entre les composés de certaines de ces lois (ou d'autres, construites par limites projectives à partir de ces données),
(b) usuellement, le mathématicien décrit un type de structures algébriques à l'aide d'un système *minimum* de données (ensembles et lois) et d'équations ("axiomes"), et non par *toutes* les (lois et) équations déduites des premières (d'ailleurs, les déduire toutes, à partir de celles qui sont données, ... c'est justement *étudier* le type de structures algébriques considéré!).
Bien entendu, le point de vue *catégorique* (a) n'est pas propre à Ehresmann: il figure notamment, bien antérieurement à 1966, chez Grothendieck, Chevalley, Ehresmann et (pour les seules structures algébriques) chez Lawvere.
C'est un apport *essentiel* d'Ehresmann d'avoir utilisé, pour formaliser le point de vue (b), des graphes compositifs munis de cônes projectifs distingués plutôt que des catégories à limites projectives: de ce point de vue, un tel graphe compositif muni de cônes projectifs distingués est un système de générateurs et relations pour une catégorie à limites projectives, ... au même titre qu'un système (minimum) de données et d'équations est un système générateur de "théorèmes" pour un type de structures algébriques.
Ceci rappelé, comment ne pas s'étonner de lire sous la plume de Barr-Wells (voir (T.T.A.T.)):
"Ehresmann's sketches are categories with extra structure rather than graphs ... " ?
Sous une terminologie légèrement différente, les esquisses mixtes ont été explicitement introduites par Ehresmann dès 1968 (voir (E.T.S.A.)).
C'est un *second* apport essentiel - et qui fut longtemps ignoré, voire nié et même condamné - d'Ehresmann d'avoir constaté qu'on

pouvait *aussi* décrire, tout en conservant les points de vue (a) et (b), certains types de structures *non essentiellement algébriques* à l'aide de graphes compositifs munis de cônes projectifs *et* de cônes *inductifs* distingués: précisément, Guitart-Lair ont établi depuis (voir (L.C.R.F.)) - à titre d'exemple illustrant la puissance de la théorie des esquisses mixtes - que les modèles d'une quelconque théorie du premier ordre peuvent être décrits à l'aide d'une telle esquisse mixte.

Ceci étant également rappelé, notons que les "esquisses de Barr-Wells" introduites en (T.T.A.T.) sont des graphes munis de diagrammes distingués (destinés à devenir commutatifs - voir II.1.1.1, Note 1), de cônes projectifs distingués (destinés à devenir des limites projectives) et de familles inductives (de flèches) distinguées (destinées à devenir des familles épimorphes). Comme il est élémentaire d'exprimer, à l'aide d'une somme et d'*un* épi (i. e. à l'aide de deux limites inductives particulières) qu'une famille inductive de flèches d'une catégorie (ayant des sommes) est épimorphe, leur notion d' "esquisse" n' est, finalement, qu'un avatar sans originalité fondamentale de celle introduite par Ehresmann dès 1968. A ce point que ces "esquisses de Barr-Wells" deviennent en (M.D.S.K.) des "esquisses de Barr", à savoir des graphes munis de diagrammes distingués (voir II.1.1.1, Note 1), de cônes projectifs distingués, de cônes inductifs d'indexations discrètes distingués (destinés à devenir des sommes) et de cônes inductifs (d'indexations non discrètes) particuliers (destinés à devenir des épis).]

II.2.1.4. Soit $\mathcal{X}_p$ une classe de cônes projectifs, $\mathcal{X}_i$ une classe de cônes inductifs et $\mathbb{E}$ une esquisse.

On dit que $\mathbb{E}$ est une $(\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_i)$*-esquisse* [voir Note 2] si, et seulement si:

- les cônes projectifs distingués dans $\mathbb{E}$ appartiennent à $\mathcal{X}_p$,
- les cônes inductifs distingués dans $\mathbb{E}$ appartiennent à $\mathcal{X}_i$.

Si $\mathcal{X}'_p \subset \mathcal{X}_p$, $\mathcal{X}'_i \subset \mathcal{X}_i$ et $\mathbb{E} = (\mathrm{Supp}(\mathbb{E}), \mathrm{CP}(\mathbb{E}), \mathrm{CI}(\mathbb{E}))$ est une $(\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_i)$-esquisse, on note:

$$(\mathcal{X}'_p, \mathcal{X}'_i)\text{-esq}(\mathbb{E}) = (\mathrm{Supp}(\mathbb{E}), \mathrm{CP}(\mathbb{E}) \cap \mathcal{X}'_p, \mathrm{CI}(\mathbb{E}) \cap \mathcal{X}'_i)$$

la $(\mathcal{X}'_p, \mathcal{X}'_i)$-esquisse *sous-jacente* à $\mathbb{E}$.

II.2.1.5. Soit α un ordinal régulier.

On note $\mathcal{X}_p(\alpha)$ la classe des cônes projectifs d'indexations α-petites.

Si $\mathcal{X}_i$ est une classe de cônes inductifs, une $(\mathcal{X}_p(\alpha), \mathcal{X}_i)$-esquisse est appelée une $(\alpha, \mathcal{X}_i)$-*esquisse*.

Une $(\mathcal{X}_p(\alpha), \emptyset)$-esquisse est aussi appelée une esquisse α-*projective* [voir Note 2].

II.2.1.6. Dans la suite [voir Note 3], on note $\mathcal{V}_i$ la classe des cônes inductifs indexés par:

$$\begin{tikzcd} 1 & & 2 \\ & 0 \arrow[ul, "{(1,0)}"] \arrow[ur, "{(2,0)}"'] & \end{tikzcd}$$

et de la forme:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ E_1 \arrow[ur, "Id(E)"] & & E_1 \arrow[ul, "Id(E)"'] \\ & E_o \arrow[ul, "e"] \arrow[ur, "e"'] \arrow[uu, "e"] & \end{tikzcd}$$

De même, on note $\mathcal{D}isc_i$ (resp. $\mathcal{D}iscfin_i$, $\mathcal{D}iscun_i$) la classe des cônes inductifs d'indexations discrètes (resp. d'indexations discrètes et finies, d'indexations discrètes isomorphes à $\mathbf{1}$).

Enfin, on pose:
- $\mathcal{V}_i\mathcal{D}isc_i = \mathcal{V}_i \cup \mathcal{D}isc_i$,
- $\mathcal{V}_i\mathcal{D}iscfin_i = \mathcal{V}_i \cup \mathcal{D}iscfin_i$,
- $\mathcal{V}_i\mathcal{D}iscun_i = \mathcal{V}_i \cup \mathcal{D}iscun_i$,

[Note 2. Nous reprenons la terminologie originelle d'Ehresmann (voir (E.T.S.A.)), terminologie que nous ne voyons pas l'utilité de modifier (voir la fin de cette Note et la Note 3). Dès l'origine, ce fut une de ses préoccupations constantes de classer les esquisses selon la nature des cônes projectifs et inductifs qui y sont distingués, conscient qu'il était qu'à ces différentes classes correspondaient différentes classes "concrètes" de types de structures.

Techniquement (voir II.4 et, surtout, (C.S.C.S.)), les critères fondamentaux de classification semblent devoir être les suivants:
- absence éventuelle de cônes projectifs ou inductifs distingués (esquisses élémentaires),
- absence éventuelle de cônes inductifs distingués (esquisses projectives) et, dans ce cas, taille (et, mais à un moindre degré, forme) des cônes projectifs distingués (esquisses α-projectives),
- dans le cas d'une esquisse mixte non projective, taille (et, mais à un moindre degré, forme) des cônes projectifs distingués ainsi que forme (et, mais à un moindre degré, taille) des cônes inductifs distingués.

Concrètement (i. e. en se référant seulement à la classique théorie des modèles) une correspondance entre classes d'esquisses et classes de théories axiomatiques particulières peut être décrite comme suit.

A une esquisse élémentaire triviale, i. e. à un graphe orienté, correspond (et inversement) une théorie axiomatique, relative à un langage (multisorte) constitué seulement de symboles fonctionnels tous d'arité 1, qui est "sans axiomes"!

A une esquisse élémentaire (quelconque), i. e. à un graphe compositif, correspond (et inversement) une théorie axiomatique, relative à un langage (multisorte) constitué seulement de symboles fonctionnels tous d'arité 1, qui n'a pour axiomes que des équations (quantifiées universellement).

A une esquisse projective dont les cônes projectifs distingués sont tous d'indexations discrètes, correspond (et inversement) une théorie axiomatique, relative à un langage (multisorte) constitué seulement de symboles fonctionnels (d'arités pouvant être différentes de 1), qui n'a pour axiomes que des équations (quantifiées universellement), i. e. une théorie algébrique.

A une esquisse projective (quelconque) correspond (et inversement) une théorie axiomatique, relative à un langage (multisorte) constitué de symboles fonctionnels *et* relationnels, qui n'a pour axiomes que des "implications positives" ou "formules de Horn universelles" obtenues, à partir des formules atomiques, en ne s'autorisant que:
- les connecteurs "et (éventuellement infinitaire)" et "implique" ,

- le quantificateur "pour tout (éventuellement infinitaire)" et le quantificateur "il existe un et un seul (éventuellement infinitaire)" ,

i. e. une théorie essentiellement algébrique ... comme on dit maintenant.

A une $(\alpha, \mathcal{D}isc_i)$-esquisse (quelconque) correspond (et inversement) une théorie axiomatique, relative à un langage (multisorte) constitué de symboles fonctionnels et relationnels, qui n'a pour axiomes que des formules (interprêtées comme "quantifiées universellement sur ses variables libres") obtenues, à partir des formules atomiques, en ne s'autorisant, que:

- les connecteurs "et (infinitaire)" , "non" , "implique" , "ou exclusif (infinitaire)" ,
- le quantificateur "il existe un et un seul (infinitaire)".

A une $(\alpha, \mathcal{V}_i\mathcal{D}isc_i)$-esquisse (quelconque) correspond (et inversement) une théorie axiomatique, relative à un langage (multisorte) constitué de symboles fonctionnels et relationnels, qui n'a pour axiomes que des formules (interprêtées comme "quantifiées universellement sur ses variables libres") obtenues, à partir des formules atomiques, en ne s'autorisant que:

- les connecteurs "et (infinitaire)" , "non" , "implique" , "ou exclusif (infinitaire)" ,
- les quantificateurs "il existe (infinitaire)" et "il existe un et un seul (infinitaire)".

A une esquisse mixte quelconque correspond une théorie du premier ordre (infinitaire). Inversement, une théorie du premier ordre peut être automatiquement traduite en une esquisse mixte qui n'a, évidemment, aucune raison a priori d'être de l'une des formes particulières précédentes (et notamment de la dernière), bien qu'on puisse toujours (dans le topos Ens , ... comme il convient de dire de nos jours) exprimer un "ou (non nécessairement exclusif)" à l'aide du "ou exclusif" , du "et" et du "non" (mais il me semble que, ce faisant, on s'écarterait notablement de l'approche du concept de notion d'intuitionnisme ... comme on dit de nos jours): en d'autres termes, dans certains cas, et selon les points de vue, il peut ne pas être judicieux de traduire toute théorie du premier ordre (par essence purement syntaxique) en une $(\alpha, \mathcal{V}_i\mathcal{D}isc_i)$-esquisse). Mieux, si l'on tient à parler, avec quelque conséquence, de "géométrie" à ce sujet, on peut même considérer que les connecteurs et quantificateurs , ainsi que les associations (par groupes, à préciser) de formules, utilisés pour écrire une théorie du premier ordre donnée, ne reflètent qu'une "géométrie" de la "logique" particulière implicite qui préside à sa description: cette "géométrie" ne peut pas se représenter autrement que par la *forme* des cônes inductifs distingués (dès lors qu'on ne leur impose pas d'appartenir nécessairement à $\mathcal{V}_1\mathcal{D}\mathrm{iscfin}_1$) dans l'esquisse associée. Ainsi, une "théorie" est-elle toujours, de ce point de vue, "géométrique" et le problème consiste donc à étudier sa "géométrie" (et pas nécessairement de la faire se conformer à une "géométrie" particulière, immuablement fixée.]

[Note 3. Nous ne considérerons en détail, dans la suite, que les cas particuliers que Barr prétend "étudier" en (M.D.S.K.). Bien entendu ce ne sont pas les seuls à présenter un quelconque intérêt (voir fin de Note 2).

Pour faciliter au lecteur la comparaison entre le présent travail et (M.D.S.K.), indiquons lui la traduction suivante:

esquisse ω-projective = LE-sketch ,
($\omega,\mathcal{D}\mathrm{iscfin}_1$)-esquisse = FS-sketch ,
($\omega,\mathcal{V}_1$)-esquisse = regular sketch ,
($\omega,\mathcal{V}_1\mathcal{D}\mathrm{iscfin}_1$)-esquisse = coherent sketch ,
($\omega,\mathcal{V}_1\mathcal{D}\mathrm{isc}_1$)-esquisse = geometric sketch (voir fin de Note 2).]

II.2.2. Homomorphismes.

II.2.2.1. Soit $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux esquisses.

On dit que $H = (\mathbb{E},\mathrm{Supp}(H),\mathbb{E}') : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est un *homomorphisme* de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}'$ [voir Note 4] si, et seulement si:

- $\mathrm{Supp}(H):\mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Supp}(\mathbb{E}')$ est un foncteur, appelé *support* de H ,
- l'image par $\mathrm{Supp}(H)$ de tout cône projectif distingué dans $\mathbb{E}$ est un cône projectif distingué dans $\mathbb{E}'$,
- l'image par $\mathrm{Supp}(H)$ de tout cône inductif distingué dans $\mathbb{E}$ est un cône inductif distingué dans $\mathbb{E}'$.

Il arrivera souvent, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, que l'on confonde H et $\mathrm{Supp}(H)$: par exemple, on notera aussi $\mathrm{Supp}(H):\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ cet homomorphisme.

Si $F:\mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Supp}(\mathbb{E}')$ est un foncteur, on dit qu'il *définit* (ou, s'il n'y a pas risque de confusion, qu'il *est*) un homomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}'$ si, et seulement si:

- $(\mathbb{E},F,\mathbb{E}')$: $\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est un homomorphisme (et c'est alors le seul homomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}'$ de support F).

II.2.2.2. Soit $\mathcal{X}'_p \subset \mathcal{X}_p$ (resp. $\mathcal{X}'_i \subset \mathcal{X}_i$) deux classes de cônes projectifs (resp. inductifs), $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ deux $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquisses et $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ un homomorphisme.
On note $\mathrm{Proj}(H):\mathrm{Proj}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Proj}(\mathbb{E}')$ l'unique homomorphisme défini par $\mathrm{Supp}(H)$ [voir Note 4].
On note
$$(\mathcal{X}'_p,\mathcal{X}'_i)\text{-}(H):(\mathcal{X}'_p,\mathcal{X}'_i)\text{-esq}(\mathbb{E}) \to (\mathcal{X}'_p,\mathcal{X}'_i)\text{-esq}(\mathbb{E})$$
l'unique homomorphisme défini par $\mathrm{Supp}(H)$ [voir Note 4].

II.2.2.3. Soit $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ et $H':\mathbb{E}' \to \mathbb{E}''$ deux homomorphismes entre esquisses.
On note $H'.H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}''$ l'homomorphisme *composé* de H' par H , i. e. l'homomorphisme défini par $\mathrm{Supp}(H').\mathrm{Supp}(H)$ [voir Note 4].

II.2.2.4. Les foncteurs entre graphes compositifs s'identifient exactement aux homomorphismes entre esquisses élémentaires. Alors, à la composition des foncteurs correspond la composition des homomorphismes entre esquisses élémentaires [voir Note 4].

[Note 4. Evidemment II.2.2.1, II.2.2.2, II.2.2.3 et II.2.2.4 permettent de parler de la catégorie Esq des esquisses ou, encore plus précisément, si $\mathcal{X}_p$ (resp. $\mathcal{X}_i$) est une classe de cônes projectifs (resp. inductifs), de la catégorie $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-Esq des $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquisses. Pour une étude plus exhaustive de ces catégories d'esquisses (existence et calcul de limites projectives et inductives, structures monoïdales fermées ... et même esquissabilité!) voir par exemple (E.G.C.E.) et (C.T.F.E.).
De même, pour une analyse plus développée des foncteurs d'oubli ou d'inclusion (ou autres) entre ces catégories d'esquisses et les catégories "usuelles" (telles que celles des graphes orientés, des graphes compositifs petits, des catégories petites, des catégories petites avec choix de limites projectives et/ou inductives d'une forme prescrite ...) voir par exemple (E.T.S.A.) et (C.T.F.E.).]

II.3. MODELES.

II.3.1. Définition des modèles.

II.3.1.1. Soit $\mathbb{E}$ une esquisse et $\mathbb{A}$ une catégorie (non nécessairement petite).

On dit que $M = (\mathbb{E}, \mathrm{Fct}(M), \mathbb{A}) : \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ est une *réalisation*, ou un *modèle*, de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}$ si, et seulement si [voir Note 1]:

- $\mathrm{Fct}(M) : \mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \to \mathbb{A}$ est un foncteur, dit *sous-jacent* à M,
- l'image par $\mathrm{Fct}(M)$ de tout cône projectif distingué dans $\mathbb{E}$ est un cône limite projective dans $\mathbb{A}$,
- l'image par $\mathrm{Fct}(M)$ de tout cône inductif distingué dans $\mathbb{E}$ est un cône limite inductive dans $\mathbb{A}$.

Il arrivera souvent, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, que l'on confonde M et $\mathrm{Fct}(M)$: par exemple, on notera aussi $\mathrm{Fct}(M) : \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ ce modèle.

Si $F : \mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \to \mathbb{A}$ est un foncteur, on dit qu'il *définit* (ou, s'il n'y a pas risque de confusion, qu'il *est*) un modèle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}$ si, et seulement si:

- $(\mathbb{E}, F, \mathbb{A}) : \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ est un modèle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}$ (c'est alors l'unique modèle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}$ dont le foncteur sous-jacent est F).

[Note 1. Bien entendu, on peut associer à toute catégorie $\mathbb{A}$ (non nécessairement petite) une "grosse" esquisse $\mathrm{ESQ}(\mathbb{A})$ de support $\mathbb{A}$ et dont les cônes projectifs (resp. inductifs) distingués sont *tous* les cônes limites projectives (resp. inductives) d'indexations petites dans $\mathbb{A}$. De ce point de vue, un modèle d'une esquisse $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}$ s'identifie évidemment à un homomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathrm{ESQ}(\mathbb{A})$.

Plus précisément encore, si $\boldsymbol{X}_p$ (resp. $\boldsymbol{X}_i$) est une classe de cônes projectifs (resp. inductifs), on peut associer à toute catégorie $\mathbb{A}$ (non nécessairement petite) une "grosse"

$(\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_i)$-esquisse $(\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_i)$-ESQ($\mathbb{A}$) de support $\mathbb{A}$ et dont les cônes projectifs (resp. inductifs) distingués sont *tous* les cônes limites projectives (resp. inductives) de $\mathbb{A}$ qui, de plus, appartiennent à $\mathcal{X}_p$ (resp. $\mathcal{X}_i$). De ce point de vue, un modèle d'une $(\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_i)$-esquisse $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}$ s'identifie évidemment à un homomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $(\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_i)$-ESQ($\mathbb{A}$).

Nous ne développons pas ces points de vue ici, et ce pour plusieurs raisons.

D'abord parce qu'ils ne modifieraient en rien les considérations du présent travail (limitées aux seuls cas particuliers que Barr prétend "étudier" en (M.D.S.K.)).

Ensuite parce que, bien que justifiés "formellement", ils ne nous semblent pas les plus judicieux. En effet, tant pratiquement que théoriquement, on est amené à procéder à des restrictions de tailles sur les catégories telles que $\mathbb{A}$ et sur les esquisses telles que $\mathbb{E}$, qui ne sont pas exactement de même nature: elles doivent être dans le même rapport que celui du "petit" au "localement petit".

Enfin, parce que les esquisses telles que ESQ($\mathbb{A}$) ou $(\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_i)$-ESQ($\mathbb{A}$) ne sont pas *en réalité* (peut-être malgré les apparences) intrinsèquement liées à la catégorie $\mathbb{A}$, mais dépendent *en fait* de l'esquisse $\mathbb{E}$ que l'on projette d'y réaliser.

Utiliser de "grosses" esquisses de support une catégorie $\mathbb{A}$ ne nous semble justifié que si elles *reflètent* une structure plus précise de la catégorie $\mathbb{A}$ (i. e. de certaines de ses limites, plutôt que de toutes).

Il en est ainsi, notamment, d'une "grosse" esquisse $[\mathbb{A}]$ dont les cônes projectifs (resp. inductifs) distingués sont ceux obtenus à l'aide d'un choix (fonctionnel) de limites projectives (resp. inductives), d'indexations prescrites, dans $\mathbb{A}$. Ainsi, la "catégorie des homomorphismes" d'une esquisse $\mathbb{E}$ vers $[\mathbb{A}]$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de Mod($\mathbb{E}$,$\mathbb{A}$) (non équivalente à Mod($\mathbb{E}$,$\mathbb{A}$), en général) dont les objets sont les modèles *stricts* de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}$ (i. e. dans $[\mathbb{A}]$).

Par exemple, si $\mathbb{E}$ est une esquisse de groupes (facile à décrire) et si [Ens] correspond à un choix de produits finis sur Ens (par exemple, les produits cartésiens), il est facile de vérifier que:

- la catégorie des modèles de $\mathbb{E}$ (dans Ens) n'est qu'équivalente à la catégorie "usuelle" des groupes,
- la catégorie des modèles stricts de $\mathbb{E}$ (dans [Ens]) est *isomorphe* à celle des groupes.

De telles considérations précises et, vu cet exemple, tout à fait justifiées, se trouvent déjà chez Ehresmann (voir (E.T.S.A.). Elles mériteraient d'ailleurs d'être développées (ce qui fut entrepris notamment en (E.G.C.E.) et (C.T.F.E.)), maintenant qu'étudier des "catégories munies de choix de limites" n'effraie plus ceux qui ... pendant longtemps leur dénigraient tout intérêt.]

II.3.1.2. Les foncteurs d'un graphe compositif vers une catégorie $\mathbb{A}$ s'identifient exactement aux modèles d'une esquisse élémentaire dans $\mathbb{A}$.

II.3.1.3. Soit $\mathbb{E}$ une esquisse.
On appelle, plus simplement, ***modèle de*** $\mathbb{E}$ tout modèle de $\mathbb{E}$ dans Ens .

II.3.1.4. Soit $\mathbb{E}$ une esquisse et $\mathbb{A}$ une catégorie (non nécessairement petite).
On appelle *co-modèle de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{A}$ tout modèle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}^{op}$ [voir Note 2].

[Note 2. Dans la suite, nous n'aurons qu'un seul type de co-modèle à considérer, mais il est tout à fait fondamental (voir II.4.2.5).]

II.3.2. Homomorphismes de modèles.

II.3.2.1. Soit $\mathbb{E}$ une esquisse, $\mathbb{A}$ une catégorie (non nécessairement petite) et $M_1,M_2:\mathbb{E} \to \mathbb{A}$ deux modèles de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}$.
On dit que $h = (M_1,nat(h),M_2):M_1 \Rightarrow M_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ est une *tranformation naturelle*, ou un ***homomorphisme de modèles***, de M_1 vers M_2 , si et seulement si:
- $nat(h):Fct(M_1) \Rightarrow Fct(M_2) : Supp(\mathbb{E}) \to \mathbb{A}$ est une transformation naturelle, dite *sous-jacente* à h .
Il arrivera souvent, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, que l'on confonde h et $nat(h)$: par exemple, on notera aussi $nat(h):M_1 \Rightarrow M_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ cet homomorphisme entre modèles.

Si $n:Fct(M_1) \Rightarrow Fct(M_2) : Supp(\mathbb{E}) \to \mathbb{A}$ est une transformation naturelle, elle définit donc toujours un unique homomorphisme, du modèle M_1 vers le modèle M_2, dont n est la transformation naturelle sous-jacente.

II.3.2.2. Soit $\mathbb{E}$ une esquisse et $\mathbb{A}$ une catégorie (non nécessairement petite).
Si $h_1:M_1 \Rightarrow M_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ et $h_2:M_2 \Rightarrow M_3 : \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ sont deux homomorphismes de modèles, on note $h_2.h_1:M_1 \Rightarrow M_3 : \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ l'homomorphisme de M_1 vers M_3, *composé (latéral)* de h_2 par h_1, i. e. l'unique homomorphisme de M_1 vers M_3 dont la transformation naturelle sous-jacente est $nat(h_2).nat(h_1)$.
Dans ces conditions, on note $Mod(\mathbb{E},\mathbb{A})$ la catégorie *des modèles de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{A}$, i. e. la catégorie telle que:
- ses objets sont les modèles $M:\mathbb{E} \to \mathbb{A}$,
- ses flèches sont les homomorphismes entre ces modèles.

Pour tout objet E de $\mathbb{E}$, on note:

$$ev(\mathbb{E},\mathbb{A})_E:Mod(\mathbb{E},\mathbb{A}) \to \mathbb{A},$$

le foncteur "évaluation en E" (qu'on définit facilement, par analogie avec II.1.3.2 par exemple).
De même, pour toute flèche $e:E \to E'$ de $\mathbb{E}$, on note

$$ev(\mathbb{E},\mathbb{A})_e:ev(\mathbb{E},\mathbb{A})_E \Rightarrow ev(\mathbb{E},\mathbb{A})_{E'} : Mod(\mathbb{E},\mathbb{A}) \to \mathbb{A},$$

la transformation naturelle "évaluation en e" (qu'on définit facilement, par analogie avec II.1.3.2 par exemple).
On définit donc ainsi un foncteur:

$$ev(\mathbb{E},\mathbb{A}):Supp(\mathbb{E}) \to \mathbb{A}^{Mod(\mathbb{E},\mathbb{A})}.$$

et l'on vérifie facilement qu'il définit un modèle dit *canonique* (encore noté) $ev(\mathbb{E},\mathbb{A}):\mathbb{E} \to \mathbb{A}^{Mod(\mathbb{E},\mathbb{A})}$.

II.3.2.3. Les transformations naturelles entre foncteurs d'un graphe compositif vers une catégorie s'identifient exactement aux homomorphismes entre modèles d'une esquisse élémentaire vers cette catégorie. Alors, à la composition latérale de ces transformations naturelles correspond la composition latérale de ces homomorphismes.

II.3.2.4. Soit $\mathbb{E}$ une esquisse.
On note, plus simplement, $Mod(\mathbb{E}) = Mod(\mathbb{E},Ens)$ la catégorie des modèles de $\mathbb{E}$.
Pour tout objet E de $\mathbb{E}$, on note également plus simplement $ev(\mathbb{E},Ens)_E = ev(\mathbb{E})_E$.
Pour toute flèche e de $\mathbb{E}$, on note aussi:

$$ev(\mathbb{E},Ens)_e = ev(\mathbb{E})_e.$$

Enfin, on note tout aussi simplement $ev(\mathbb{E}) = ev(\mathbb{E}, Ens)$.

II.3.2.5. Soit $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ un homomorphisme entre deux esquisses et $\mathbb{A}$ une catégorie.

Si $M':\mathbb{E}' \to \mathbb{A}$ est un modèle de $\mathbb{E}'$ dans $\mathbb{A}$, on note $M'.H:\mathbb{E} \to \mathbb{A}$ le modèle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}$, *composé* du modèle M' par l'homomorphisme H, i. e. le modèle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{A}$ défini par le foncteur $Fct(M').Supp(H):Supp(\mathbb{E}) \to \mathbb{A}$.

Si $h':M'_1 \Rightarrow M'_2 : \mathbb{E}' \to \mathbb{A}$ est un homomorphisme de modèles, on note $h' \bullet H:M'_1.H \Rightarrow M'_2.H : \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ l'homomorphisme de modèles *composé (longitudinal)* de h' par H, i. e. l'unique homomorphisme du modèle $M'_1.H$ vers le modèle $M'_2.H$ dont la transformation naturelle sous-jacente est $nat(h') \bullet Supp(H)$.

Dans ces conditions, on note

$$Mod(H,\mathbb{A}): Mod(\mathbb{E}',\mathbb{A}) \to Mod(\mathbb{E},\mathbb{A})$$

le foncteur *composition (longitudinale) à droite par* H .

II.3.2.6. Les catégories de foncteurs s'identifient exactement aux catégories de modèles d'esquisses élémentaires.

Plus précisément, si $\mathbb{E}$ est une esquisse et si $\mathbb{A}$ est une catégorie, notons $Hid(\mathbb{E}): Supp(\mathbb{E}) \to \mathbb{E}$ l'homomorphisme d'esquisses défini par $Id(Supp(\mathbb{E})):Supp(\mathbb{E}) \to Supp(\mathbb{E})$.

Alors, on a:

- $\mathbb{A}^{Supp(\mathbb{E})} = Mod(Supp(\mathbb{E}),\mathbb{A})$,
- le foncteur
$$Mod(Hid(\mathbb{E}),\mathbb{A}):Mod(\mathbb{E},\mathbb{A}) \to Mod(Supp(\mathbb{E}),\mathbb{A}) = \mathbb{A}^{Supp(\mathbb{E})}$$
identifie $Mod(\mathbb{E},\mathbb{A})$ à une sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}^{Supp(\mathbb{E})}$.

De même, si $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est un homomorphisme entre deux esquisses, le diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
Mod(\mathbb{E}',\mathbb{A}) \arrow[r, "Mod(Hid(\mathbb{E}')\text{,}\mathbb{A})"] \arrow[d, "Mod(H\text{,}\mathbb{A})"'] & \mathbb{A}^{Supp(\mathbb{E}')} \arrow[d, "\mathbb{A}^{Supp(H)}"] \\
Mod(\mathbb{E},\mathbb{A}) \arrow[r, "Mod(Hid(\mathbb{E})\text{,}\mathbb{A})"'] & \mathbb{A}^{Supp(\mathbb{E})}
\end{tikzcd}$$

autrement dit, $Mod(H,\mathbb{A})$ s'identifie à une restriction de $\mathbb{A}^{Supp(H)}$.

II.3.2.7. Soit $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ un homomorphisme entre deux esquisses.
On note, simplement, $Mod(H) = Mod(H,Ens):Mod(\mathbb{E}') \to Mod(\mathbb{E})$.

II.3.3. Catégories esquissables.

II.3.3.1. Soit $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux catégories.
On dit que $\mathbb{B}$ est *esquissable relativement à* $\mathbb{A}$ si, et seulement si:
- il existe une esquisse $\mathbb{E}$ telle que les catégories $\mathbb{B}$ et $Mod(\mathbb{E},\mathbb{A})$ sont équivalentes.

On dit que $\mathbb{B}$ est *projectivement esquissable relativement à* $\mathbb{A}$ si, et seulement si:
- il existe une esquisse projective $\mathbb{E}$ telle que $\mathbb{B}$ et $Mod(\mathbb{E},\mathbb{A})$ sont équivalentes [voir Note 3].

[Note 3. Plus précisément, soit $[\mathbb{A}]$ une esquisse de support $\mathbb{A}$, relative à un choix de limites projectives et inductives sur $\mathbb{A}$ (voir Note 1).
On peut dire qu'une catégorie $\mathbb{B}$ est *strictement esquissable relativement à* $[\mathbb{A}]$ si, et seulement si:
- il existe une esquisse $\mathbb{E}$ telle que $\mathbb{B}$ et la catégorie des modèles stricts de $\mathbb{E}$ dans $[\mathbb{A}]$ sont équivalentes.]

II.3.3.2. Soit $\mathcal{X}_p$ une classe de cônes projectifs, $\mathcal{X}_i$ une classe de cônes inductifs, et $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux catégories.
On dit que $\mathbb{B}$ est *$(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquissable relativement à* $\mathbb{A}$ si, et seulement si:
- il existe une $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquisse $\mathbb{E}$ telle que les catégories $\mathbb{B}$ et $Mod(\mathbb{E},\mathbb{A})$ sont équivalentes.

II.3.3.3. Soit α un ordinal régulier, $\mathcal{X}_i$ une classe de cônes inductifs et $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux catégories.
On dit que $\mathbb{B}$ est *$(\alpha,\mathcal{X}_i)$-esquissable relativement à* $\mathbb{A}$ si, et seulement si:
- $\mathbb{B}$ est $(\mathcal{X}_p(\alpha),\mathcal{X}_i)$-esquissable relativement à $\mathbb{A}$.

On dit que $\mathbb{B}$ est *α-projectivement esquissable relativement à* $\mathbb{A}$ si, et seulement si:
- $\mathbb{B}$ est $(\mathcal{X}_p(\alpha),\emptyset)$-esquissable relativement à $\mathbb{A}$.

II.3.3.4. Dans la suite, on dira plus simplement ***esquissable*** plutôt que esquissable relativement à Ens [voir Note 4].

[Note 4. Rappelons de nouveau (voir II.2.1.6, Note 2) que les catégories projectivement esquissables sont exactement celles qui sont équivalentes aux catégories de structures essentiellement algébriques (ensemblistes).
De même, les catégories esquissables sont exactement celles qui sont équivalentes aux catégories de modèles (ensemblistes) de théories (infinitaires) du 1er ordre.
Plus précisément encore (voir la Note 3), les catégories qui sont strictement projectivement esquissables (relativement à un choix de limites projectives "canoniques" dans Ens) sont les catégories *isomorphes* aux catégories de structures essentiellement algébriques.
Les catégories qui sont strictement esquissables (relativement à un choix de limites projectives et inductives "canoniques" dans Ens) sont celles qui sont *isomorphes* aux catégories de modèles de théories (infinitaires) du 1er ordre.]

II.3.4. Comparaisons d'esquisses.

II.3.4.1. Soit $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ et $K:\mathbb{E}^* \to \mathbb{E}'$ deux homomorphismes d'esquisses.
On dit que (H,K) est une *comparaison* de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}^*$ si, et seulement si [voir Note 5]:
- pour toute catégorie $\mathbb{A}$ (à limites projectives et inductives d'indexations petites), les foncteurs

$$\mathrm{Mod}(H,\mathbb{A}):\mathrm{Mod}(\mathbb{E}',\mathbb{A}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathbb{A})$$
et
$$\mathrm{Mod}(K,\mathbb{A}):\mathrm{Mod}(\mathbb{E}',\mathbb{A}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}^*,\mathbb{A})$$

sont des équivalences.
On dit que deux esquisses sont *comparables* si, et seulement si:
- il existe une comparaison de l'une vers l'autre.

[Note 5. Les notions d'esquisses comparables, analogues ou semblables, introduites ici, en II.3.4.2 et en II.3.4.3, ne le sont que pour le besoin de la cause (i. e. pour disposer dans la suite d'une terminologie précise et définie). Elles se contentent de reprendre et/ou de préciser les diverses "équivalences" d'esquisses utilisées par Barr en (M.D.S.K.).

Indiquons, cependant, qu'il n'est nullement le premier à avoir considéré de telles "équivalences". Dès 1968, Ehresmann s'est attaché en (E.T.S.A.) à préciser ce que pouvaient être, en toute généralité, deux esquisses (strictement) équivalentes (i. e. ayant des catégories de modèles stricts - voir la Note 1 - isomorphes): ce sont deux esquisses ayant le même "type", i. e. engendrant librement la même catégorie munie d'un choix de limites projectives et inductives (d'indexations prescrites).
Par la suite, A. et C. Ehresmann ont précisé en (C.O.S.S.) ce que sont deux esquisses (non nécessairement strictement) "équivalentes": ce sont deux esquisses qui engendrent deux "types vagues" équivalents, i. e. deux catégories à limites projectives et inductives (non nécessairement choisies), d'indexations prescrites, équivalentes.

Signalons enfin que la littérature (écrite depuis 1968) sur la théorie des esquisses *abonde* en considérations particulières ou générales concernant les "types de modifications d'esquisses qui ne modifient pas les catégories de modèles"!]

II.3.4.2. Soit $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ et $K:\mathbb{E}^* \to \mathbb{E}'$ deux homomorphismes d'esquisses.

On dit que (H,K) est une *analogie* de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}^*$ si, et seulement si:
- (H,K) est une comparaison de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}^*$,
- $(\mathrm{Proj}(H),\mathrm{Id}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}')))$ est une comparaison de $\mathrm{Proj}(\mathbb{E})$ vers $\mathrm{Proj}(\mathbb{E}')$,
- $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est injectif sur les objets,
- $K:\mathbb{E}^* \to \mathbb{E}'$ est bijectif sur les objets.

On dit qu'une esquisse est *analogue* à une autre si, et seulement si:
- il existe une analogie de la première vers la deuxième.

II.3.4.3. Soit $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ et $K:\mathbb{E}^* \to \mathbb{E}'$ deux homomorphismes d'esquisses.

On dit que (H,K) est une *similitude* de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}^*$ si, et seulement si:
- (H,K) est une analogie de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}^*$,
- les foncteurs

$$\mathrm{Supp}(H):\mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Supp}(\mathbb{E}')$$
et

$$Supp(K):Supp(\mathbb{E}^*) \to Supp(\mathbb{E})$$

sont des isomorphismes.

On dit qu'une esquisse est semblable à une autre si, et seulement si:

- il existe une similitude de la première vers la deuxième.

II.3.4.4. Soit α un ordinal régulier.

On a [voir Note 6]:

- *toute* $(\alpha, \mathcal{V}_i\mathcal{D}iscun_i)$*-esquisse* $\mathbb{E}$ *est semblable à une* $(\alpha, \mathcal{V}_i)$*-esquisse.*

En effet, l'ensemble $CI(\mathbb{E})$ des cônes inductifs distingués est réunion d'un ensemble $CI_{\vee}(\mathbb{E})$ de cônes inductifs appartenant à $\mathcal{V}_i$ et d'un ensemble $CI_{discun}(\mathbb{E})$ de cônes inductifs appartenant à $\mathcal{D}iscun_i$. Aussi, tout cône inductif $q \in CI_{discun}(\mathbb{E})$ est-il le cône inductif $q = \mathbb{1}\text{-côneind}(e_q)$, d'indexation isomorphe à $\mathbb{1}$, associé à une flèche $e_q:E_q \to E'_q$ de $\mathbb{E}$.

Alors, on pose:

- $CP(\mathbb{E}') = CP(\mathbb{E}) \cup \{\mathbb{1}\text{-côneproj}(e_q) \ / \ q \in CI_{discun}(\mathbb{E})\}$,
- $CI(\mathbb{E}') = CI(\mathbb{E})$,
- $\mathbb{E}' = (Supp(\mathbb{E}), CP(\mathbb{E}'), CI(\mathbb{E}'))$,
- $CP(\mathbb{E}^*) = CP(\mathbb{E}')$,
- $CI(\mathbb{E}^*) = CI_{\vee}(\mathbb{E})$,
- $\mathbb{E}^* = (Supp(\mathbb{E}), CP(\mathbb{E}^*), CI(\mathbb{E}^*))$.

Clairement, $\mathbb{E}^*$ est une $(\alpha, \mathcal{V}_i)$-esquisse semblable à $\mathbb{E}$.

[Note 6. Lorsqu'une flèche d'une esquisse est repérée comme étant l'unique projection (resp. co-projection) d'un cône projectif (resp. inductif) distingué (de base $\mathbb{1}$), c'est qu'elle sera toujours réalisée en un iso. On peut donc la repérer, de manière trivialement équivalente, comme étant l'unique co-projection (resp. projection) d'un cône inductif (resp. projectif) de base $\mathbb{1}$ (on pourrait même la caractériser en lui rajoutant une "inverse formelle" dans le support de l'esquisse considérée). Concrètement ce genre de modification n'introduit pas grand changement: pour partie, les propriétés que Barr prétend "étudier" en (M.D.S.K.) résultent de cette seule constatation.]

II.4. PROPRIETES DES CATEGORIES ESQUISSABLES.

II.4.1. Propriétés des catégories de foncteurs.

II.4.1.1. Il est facile de prouver que:
- *si* $F:\mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ *est un foncteur entre deux graphes compositifs petits, alors le foncteur* $Ens^F:Ens^{\mathbb{G}'} \to Ens^{\mathbb{G}}$ *admet un adjoint à gauche.*

En effet, le foncteur $Ens^{L(F)}:Ens^{L(\mathbb{G}')} \to Ens^{L(\mathbb{G})}$ admet un adjoint à gauche (qui est le foncteur extension de Kan inductive le long de F), puisque $L(\mathbb{G})$ et $L(\mathbb{G}')$ sont deux catégories petites. L'affirmation résulte alors de II.1.4.3.

En particulier, si $\mathbb{G}$ est un graphe compositif petit, pour tout objet G de $\mathbb{G}$, le foncteur évaluation en G :

$$ev(\mathbb{G})_G:Ens^{\mathbb{G}} \to Ens$$

admet un adjoint à gauche:

$$q(\mathbb{G})_G:Ens \to Ens^{\mathbb{G}} \quad .$$

II.4.1.2. Il est tout aussi facile de prouver que:
- *si* $\mathbb{G}$ *est un graphe compositif, alors la catégorie* $Ens^{\mathbb{G}}$ *possède toutes les limites projectives et toutes les limites inductives d'indexations petites; de plus, elles se calculent point par point.*

En effet, $Ens^{L(\mathbb{G})}$ possède toutes les limites projectives et toutes les limites inductives d'indexations petites. De plus, elles se calculent point par point.

II.4.1.3. De II.4.1.2 résulte immédiatement que:
- *si* $\mathbb{G}$ *est un graphe compositif, alors* $Ens^{\mathbb{G}}$ *possède tous les ultraproduits; de plus, ils se calculent point par point.*

II.4.1.4. Soit $\mathbb{G}$ un graphe compositif petit.

Comme $L(\mathbb{G})$ est une catégorie petite, on dispose du plongement de Yoneda (relatif à $L(\mathbb{G})$):

$$\mathrm{Yon}(L(\mathbb{G})):L(\mathbb{G}) \to (\mathrm{Ens}^{L(\mathbb{G})})^{op} \ .$$

Alors, on dispose du foncteur, dit *de Yoneda* (relatif à $\mathbb{G}$) [voir Note 1]:

$$\mathrm{Yon}(\mathbb{G}):\mathbb{G} \xrightarrow[l(\mathbb{G})]{} L(\mathbb{G}) \xrightarrow[\mathrm{Yon}(L(\mathbb{G}))]{} (\mathrm{Ens}^{L(\mathbb{G})})^{op} \xrightarrow[(\mathrm{Ens}^{l(\mathbb{G})})^{op}]{} (\mathrm{Ens}^{\mathbb{G}})^{op}$$

Par construction (en utilisant les propriétés analogues de $\mathrm{Yon}(L(\mathbb{G}))$), on en déduit que:

- *naturellement en tout objet* G *de* $\mathbb{G}$ *et en tout objet* F *de* $\mathrm{Ens}^{\mathbb{G}}$ *(i. e. en tout foncteur* $F:\mathbb{G} \to \mathrm{Ens}$ *), on a:*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}(\mathbb{G})(G),F) \simeq F(G) \ ,$$

- *naturellement en tout objet* G *de* $\mathbb{G}$ *, on a:*

$$q(\mathbb{G})_G(1) \simeq \mathrm{Yon}(\mathbb{G})(G) \ ,$$

- *pour tout objet* G *de* $\mathbb{G}$ *,* $\mathrm{Yon}(\mathbb{G})(G)$ *est un objet libre de* $\mathrm{Ens}^{\mathbb{G}}$ *, engendré par l'ensemble* 1 *, relativement au foncteur évaluation* $ev(\mathbb{G})_G:\mathrm{Ens}^{\mathbb{G}} \to \mathrm{Ens}$,
- *pour tout objet* G *de* $\mathbb{G}$ *,* $\mathrm{Yon}(\mathbb{G})(G)$ *est un objet* $\emptyset$*-présentable de* $\mathrm{Ens}^{\mathbb{G}}$ [voir Note 2],
- *le foncteur* $(\mathrm{Yon}(\mathbb{G}))^{op}:\mathbb{G}^{op} \to \mathrm{Ens}^{\mathbb{G}}$ *est dense.*

[Note 1. En général, le foncteur de Yoneda *relatif à un graphe compositif* n'est ni plein ni fidèle (contrairement au classique ... plongement de Yoneda, relatif à une catégorie).]

[Note 2. Soit $\mathcal{I}$ une classe de petits graphes orientés (ou de petites catégories).

On dit qu'une (petite) catégorie $\mathbb{J}$ est $\mathcal{I}$*-filtrante* si, et seulement si:

- pour tout $\mathbf{I} \in \mathcal{I}$ et pour tout homomorphisme de graphes orientés (ou pour tout foncteur) $F:\mathbf{I} \to \mathbb{J}$, il existe un cône inductif de $\mathbb{J}$, de base F .

Par exemple, si α est un ordinal régulier et si $\mathcal{I}$ est la classe de toutes les catégories α-petites, une catégorie est $\mathcal{I}$-filtrante si, et seulement si, elle est α-filtrante (au sens classique).

De même, si $\mathcal{I} = \emptyset$, toute petite catégorie $\mathbb{J}$ est $\emptyset$-filtrante.

On dit, dans ces conditions, qu'un objet A d'une catégorie (localement petite) $\mathbb{A}$ est $\mathcal{I}$*-présentable* si, et seulement si:

- le foncteur $\mathrm{Hom}(A,-):\mathbb{A} \to \mathrm{Ens}$ commute aux limites inductives d'indexations $\mathcal{I}$-filtrantes.

Par exemple, si α est un ordinal régulier et si $\mathcal{I}$ est la classe de toutes les catégories α-petites, un objet A de $\mathbb{A}$ est $\mathcal{I}$-présentable si, et seulement si, il est α-présentable (au sens classique de (L.P.L.G.), rappelé en I.3.4.1, Note 6).
De même, si $\mathcal{I} = \emptyset$, un objet A de $\mathbb{A}$ est $\emptyset$-présentable si, et seulement si, le foncteur $\mathrm{Hom}(A,-):\mathbb{A} \to \mathrm{Ens}$ commute avec les limites inductives d'indexations petites *quelconques*.

Notons que, comme en I.3.4.1, Note 6, il n'est pas difficile de donner une version interne de la définition externe d'objet $\mathcal{I}$-présentable proposée ici.

Plus généralement encore, soit $\mathcal{X}_i$ une classe de cônes inductifs.
On dit qu'un objet A d'une catégorie (localement petite) $\mathbb{A}$ est $\mathcal{X}_i$*-projectif* si, et seulement si:
- l'image par le foncteur $\mathrm{Hom}(A,-):\mathbb{A} \to \mathrm{Ens}$ de tout cône limite inductive de $\mathbb{A}$, appartenant de plus à $\mathcal{X}_i$, est un cône limite inductive de Ens ,
(et il est facile de donner une version interne de cette définition externe).
Par exemple, un objet $\mathcal{V}_i$-projectif est un objet projectif au sens classique.

Clairement, un objet A de $\mathbb{A}$ est $\mathcal{X}_i$-projectif si, et seulement si, c'est un objet de $\mathbb{A}^{op}$ qui satisfait, au sens de I.1.2, tous les cônes limites projectives de $\mathbb{A}^{op}$, duaux de cônes inductifs appartenant à $\mathcal{X}_i$.
En particulier, si $\mathcal{I}$ est une classe de petits graphes orientés (ou de petites catégories) et si $\mathcal{X}_i$ est la classe de tous les cônes inductifs d'indexations $\mathcal{I}$-filtrantes, un objet A de $\mathbb{A}$ est $\mathcal{X}_i$-projectif si, et seulement si, il est $\mathcal{I}$-présentable (et la "présentabilité" n'est donc - via la dualité - qu'un cas particulier de la satisfaction).]

II.4.2. Propriétés des catégories projectivement esquissables.

II.4.2.1. Soit $\mathbb{E}$ une esquisse projective.
Pour tout cône projectif distingué $q = (q_I:E \to B(I))_{I\in\mathcal{I}}$ dans $\mathbb{E}$, on note
$h_q:(\mathrm{limind}_{I\in\mathcal{I}}\,\mathrm{op}\ \mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\mathbb{E}))(B(I))) \to \mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\mathbb{E}))(E)$

l'unique flèche de la catégorie (de foncteurs) $Ens^{supp(\mathbb{E})}$ qui factorise le cône inductif, image de q par Yon($\mathbb{G}$), au travers du cône limite inductive du diagramme $(Yon(\mathbb{G})(B(I)))_{I\in \mathbb{I}^{op}}$.

Alors, on pose:

$$qual(\mathbb{E}) = \{ 1\text{-côneproj}(h_q) \;/\; q\in CP(\mathbb{E}) \}.$$

Clairement, qual($\mathbb{E}$) est une $\mathcal{D}$iscun-qualification, dite *associée* à $\mathbb{E}$, relative à $Ens^{supp(\mathbb{E})}$.

De plus, si α est un ordinal régulier et si $\mathbb{E}$ est une esquisse α-projective, alors qual($\mathbb{E}$) est une $\mathcal{D}iscun^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification.

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que:

$$Mod(\mathbb{E}) = Sat(Ens^{supp(\mathbb{E})}, qual(\mathbb{E})).$$

Autrement dit [voir Note 3]:

- *toute catégorie de modèles (ensemblistes) d'une esquisse projective est (ou s'identifie à) une sous-catégorie* $\mathcal{D}$iscun-*qualifiable d'une catégorie de foncteurs.*

[Note 3. L'énoncé précédent est le premier pas - pour les autres voir II.4.3.1, II.4.4.1 et, en toute généralité, II.4.5, qui permet d'intégrer non pas la Théorie des Esquisses mais celle des catégories esquissables (qui en est la partie "sémantique") dans celle des catégories qualifiables. Nous en verrons dans la suite les très nombreux avantages ... qui sont totalement méconnus par Barr, bien que les suggestions d'énoncés et de preuves qu'il prétend "étudier" en (M.D.S.K.) s'en trouvent automatiquement vidées de toute difficulté.]

II.4.2.2. De II.4.2.1, II.4.1.1 et I.4.1.2 on déduit immédiatement que (théorème du faisceau associé) [voir Note 4]:

- *si* α *est un ordinal régulier et si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse* α-*projective, alors le foncteur injection canonique*

$$Mod(\mathbb{E}) \to Ens^{supp(\mathbb{E})}$$

admet un adjoint à gauche,

$$adj(\mathbb{E}): Ens^{supp(\mathbb{E})} \to Mod(\mathbb{E}),$$

(autrement dit, tout foncteur du support de $\mathbb{E}$ vers Ens engendre librement un modèle, ou "faisceau", de $\mathbb{E}$).

Il en résulte que:

- *si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse* α-*projective et si* E *est un objet de* $\mathbb{E}$, *alors le foncteur évaluation en* E :

$$ev(\mathbb{E})_E: Mod(\mathbb{E}) \to Ens$$

admet un adjoint à gauche;

$$q(\mathbb{E})_{\mathbb{E}} : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) ,$$

à savoir $q(\mathbb{E})_{\mathbb{E}} = \mathrm{adj}(\mathbb{E}).q(\mathrm{Supp}(\mathbb{E}))_{\mathbb{E}}$.

[Note 4. Le "théorème du faisceau associé" fut initialement établi par plusieurs auteurs et ce, probablement, indépendamment.

Tout d'abord, il généralise l'énoncé particulier ("vrai" théorème du faisceau associé) qui stipule que tout préfaisceau (i. e. tout foncteur de la catégorie $\mathrm{Ouv}(T)^{op}$, duale de celle des ouverts d'un espace topologique T , vers Ens) engendre librement un faisceau (qui est un modèle d'une esquisse projective très particulière de support $\mathrm{Ouv}(T)^{op}$).

Ensuite, il fut peut-être établi par Kennison en 1968 (comme ceci est signalé en (T.T.A.T.)) mais aussi par Ehresmann en 1967 (voir (P.U.C.N.) et (S.L.S.A.)) ... comme ceci n'est pas signalé en (T.T.A.T.).

Enfin, il fut repris sous des formes de plus en plus globales et systématiques par "l'école d'Ehresmann". La preuve proposée ici - c'est-à-dire en I.4.1.2 - en est la plus globale, la plus systématique et la plus simple, suffisant déjà largement à justifier l'intégration de la théorie des catégories projectivement esquissables dans celle des catégories qualifiables (voir Note 3).]

II.4.2.3. De II.4.2.1, II.4.1.2, I.4.2.3 et I.4.2.4, on déduit immédiatement que [voir Note 5]:

- *si* α *est un ordinal régulier et si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse* α*-projective, alors* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *possède toutes les limites projectives et toutes les limites inductives d'indexations petites; de plus, les limites projectives d'indexations petites se calculent point par point, ainsi que les limites inductives petites d'indexations* α*-filtrantes,*

(autrement dit, $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est complète, co-complète et le foncteur injection canonique $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Ens}^{\mathrm{Supp}(\mathbb{E})}$ crée les limites projectives d'indexations petites et les limites inductives d'indexations petites et α-filtrantes).

II.4.2.4. De II.4.2.1, II.4.1.3, II.4.2.3 et I.4.3.2, résulte automatiquement que [voir Note 5]:

- *si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse* ω*-projective, alors* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *est une sous-catégorie fermée dans* $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Supp}(\mathbb{E})}$ *pour le calcul des ultraproduits (qui se calculent donc point par point).*

[Note 5. Les résultats de II.4.2.3 et II.4.2.4 sont autant de justifications supplémentaires à l'intégration de la théorie des catégories projectivement esquissables dans celle des catégories qualifiables.]

II.4.2.5. Soit α un ordinal régulier et $\mathbb{E}$ une esquisse α-projective.

On dispose du foncteur, dit de *Yoneda* (relatif à $\mathbb{E}$):

$$\mathrm{Yon}(\mathbb{E}):\mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \xrightarrow[\mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\mathbb{E}))]{} (\mathrm{Ens}^{\mathrm{Supp}(\mathbb{E})})^{\mathrm{op}} \xrightarrow[\mathrm{adj}(\mathbb{E})^{\mathrm{op}}]{} (\mathrm{Mod}(\mathbb{E}))^{\mathrm{op}}$$

Par construction, il est facile d'établir que:

- *naturellement en tout objet* E *de* $\mathbb{E}$ *et en tout objet* M *de* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *(i. e. en tout modèle* $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ *), on a:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(\mathbb{E})}(\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E),M) \simeq M(E) \ ,$$

- *naturellement en tout objet* E *de* $\mathbb{E}$ *, on a:*

$$\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E) \simeq q(\mathbb{E})_E(1) \ ,$$

- *pour tout objet* E *de* $\mathbb{E}$, $\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E) = L(E)$ *est un modèle de* $\mathbb{E}$ *, libre à un générateur de sorte* E *(i. e. libre à un générateur, relativement au foncteur* $\mathrm{ev}(\mathbb{E})_E$ *)* [voir Note 6],
- *pour tout objet* E *de* $\mathbb{E}$, $\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E)$ *est un objet* α-*présentable de* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$,
- *le foncteur* $\mathrm{Yon}(\mathbb{E}):\mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \to (\mathrm{Mod}(\mathbb{E}))^{\mathrm{op}}$ *, définit un modèle de* $\mathbb{E}$ *dans* $(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}))^{\mathrm{op}}$ *, i. e. un co-modèle (dit canonique) de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$,
- *le foncteur* $(\mathrm{Yon}(\mathbb{E}))^{\mathrm{op}}:(\mathrm{Supp}(\mathbb{E}))^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *est dense.*

[Note 6. Soit $\mathbb{E}$ une esquisse projective et E un objet de $\mathbb{E}$. On dispose donc, en vertu de II.4.2.5, de la catégorie $\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E)/\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$.

On ose à peine rappeler que la flèche

$$\mathrm{id}(\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E)):\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E) \to \mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E)$$

de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est un objet initial de $\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E)/\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$; ceci constitue ce qu'il est convenu d'appeler un "abstract non sense" (voir (C.F.W.M.))!

Vue la propriété d'adjonction, on craint de rappeler aussi que tout couple (M,x) constitué d'un modèle M de $\mathbb{E}$ et d'un élément x de $M(E)$ s'identifie à une flèche $x^{\wedge}:\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E) \to M$, i. e. à un objet de $\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E)/\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$. Et qu'ainsi, on établit cet autre "abstract non sense" qui consiste à dire que la catégorie $\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E)/\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est isomorphe à la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_E$ des "modèles de $\mathbb{E}$, pointés par un élément de sorte E " .

Enfin, puisqu'il faut aller jusqu'au bout des trivialités, il est élémentaire (sauf sans doute quand on pratique les esquisses depuis peu) de constater que $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_E$ est aussi une catégorie esquissable. En effet $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_E \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_E)$, où $\mathbb{E}_E$ est obtenue en adjoignant à $\mathbb{E}$:

- d'une part un objet 1 , sommet d'un cône projectif distingué de base $\emptyset$, (si $\mathbb{E}$ n'en possède pas),
- d'autre part, une flèche $x_E : 1 \to E$,

(cette savante construction est re-découverte par Barr en (M.D.S.K.)).

Cette suite d' "abstract non sense" permet de reformuler la quatrième assertion de II.4.2.5 comme suit:

- pour tout objet E de $\mathbb{E}$, l'esquisse $\mathbb{E}_E$ admet un modèle initial.

En (M.D.S.K.), Barr ne se prive pas d'utiliser une telle reformulation, bien évidemment présentée comme une formulation originale. Elle a sans doute l'avantage de faire très "theoretical computer science". Malheureusement, elle hétérogénéise ce que l'on peut énoncer de manière homogène (i. e. ne concernant qu'une seule esquisse $\mathbb{E}$, qu'il n'y a pas lieu de modifier) en faisant jouer tout leur rôle fondamental aux foncteurs évaluation $\mathrm{ev}(\mathbb{E})_E$, donc à leurs adjoints à gauche $q(\mathbb{E})_E$, donc aux objets $q(\mathbb{E})_E(1) = \mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E)$ (voir II.4.2.6), donc au co-modèle canonique $\mathrm{Yon}(\mathbb{E})(E)$ ... toutes choses déjà largement soulignées en (F.O.S.A.), qu'il convenait probablement de taire en (M.D.S.K.).]

II.4.2.6. Soit α un ordinal régulier et $\mathbb{C}$ une catégorie.

Rappelons que (caractérisation sémantique intrinsèque des catégories projectivement esquissables) [voir Notes 7 et 8]:

- *la catégorie* $\mathbb{C}$ *est α-projectivement esquissable si, et seulement si, elle est localement α-présentable* [voir Note 7], *i. e. si, et seulement si:*
  + $\mathbb{C}$ *est localement petite,*
  + $\mathbb{C}$ *possède toutes les limites inductives d'indexations petites et α-filtrantes,*
  + $\mathbb{C}$ *possède toutes les limites inductives de diagrammes dont les objets sont α-présentables dans* $\mathbb{C}$ *et dont les indexations sont α-petites,*
  + $\mathbb{C}$ *possède un ensemble générateur propre formé d'objets α-présentables de* $\mathbb{C}$.

En effet, si $\mathbb{E}$ est une esquisse α-projective, la catégorie $\mathbb{C}$ = Mod($\mathbb{E}$) vérifie, en vertu de II.4.2.3, les trois premières conditions et, d'après II.4.2.5, l'ensemble Yon($\mathbb{E}$)(Ob($\mathbb{E}$)), qui est effectivement constitué d'objets α-présentables, est générateur propre.

Réciproquement, si $\mathbb{C}$ vérifie les quatre conditions énoncées et si Γ est un ensemble générateur propre formé d'objets α-présentables, on note $\mathbb{C}_\alpha$ la plus petite sous-catégorie de $\mathbb{C}$, fermée pour le calcul des limites inductives (choisies) d'indexations α-petites (représentant chacune une classe d'isomorphismes des indexations α-petites) et dont la classe des objets contient Γ (on montre facilement qu'elle est pleine, petite, et équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ dont les objets sont tous les α-présentables).
Alors, on note $/(\mathbb{C}_\alpha)^{op}/$ l'esquisse α-projective obtenue en distinguant dans $\mathbb{C}^{op}$ tous les cônes limites projectives d'indexations α-petites.
Dans ces conditions, Mod($/(\mathbb{C}_\alpha)^{op}/$) est équivalente à $\mathbb{C}$.

En particulier, si $\mathbb{E}$ est une esquisse α-projective, il est facile de voir que (H,K) est une analogie de $\mathbb{E}$ vers $/(\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_\alpha)^{op}/$, si:
- H:$\mathbb{E} \to /(\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_\alpha)^{op}/$ est la restriction de Yon($\mathbb{E}$),
- K est l'homomorphisme identité de $/(\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_\alpha)^{op}/$.

[Note 7. Il n'est pas très difficile de constater directement (i. e. sémantiquement) que les catégories vérifiant les quatre conditions énoncées sont exactement les catégories localement α-présentables de Gabriel-Ulmer (voir (L.P.L.G.), dont nous reprenons la terminologie). Autrement dit, que les propriétés (concernant notamment l'existence de *seulement* certaines limites inductives) énoncées ici en impliquent automatiquement nombre d'autres (notamment l'existence de *toutes* les limites inductives d'indexations petites *et* de *toutes* les limites *projectives* d'indexations petites).

On aura constaté aussi, très certainement, toute l'importance du rôle que jouent, dans cette caractérisation, les objets α-présentables (voir I.4.2.4, Note 5) et, précisément, ceux de la forme Yon($\mathbb{E}$)(E) - lorsque l'esquisse projective $\mathbb{E}$ est donnée - (voir II.4.2.5, Note 6).]

[Note 8. Le lecteur pourra être surpris par la forme que nous donnons à la caractérisation sémantique intrinsèque des catégories α-projectivement esquissables, notamment par la dissociation des deuxième et troisième assertions; c'est que nous souhaitons lui faciliter la comparaison avec la caractérisation sémantique intrinsèque des catégories $(\alpha,\mathcal{D}isc_1)$-esquissables (plus générales) donnée en II.4.4.5 (où il est cette fois tout à fait nécessaire de dissocier les deuxième et troisième points correspondants).

II.4.2.7. On déduit immédiatement de II.4.2.6 que [voir Note 9]:
- *si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathbb{C}$ *est une catégorie localement* α*-présentable et si* $\mathbb{C}'$ *en est une sous-catégorie pleine, réflexive, pour laquelle le foncteur injection canonique* $\mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ *crée (ou commute avec) les limites inductives d'indexations petites et* α*-filtrantes, alors* $\mathbb{C}'$ *est aussi localement* α*-présentable.*

[Note 9. Il s'agit là d'un résultat tout à fait élémentaire et classique qui nous sera utile dans la suite. Nous ne le mentionnons ici que pour attirer l'attention du lecteur sur le fait qu'il se déduit (sémantiquement) immédiatement de la caractérisation fournie en II.4.2.6, qui elle ne nous sera plus, désormais, d'aucune utilité.]

II.4.3. Propriétés des catégories $(\alpha,\mathcal{V}_1)$-esquissables.

II.4.3.1. Soit α un ordinal régulier et $\mathbb{E}$ une $(\alpha,\mathcal{V}_1)$-esquisse.

On dispose de la $\mathcal{V}^\alpha{}_\alpha$-qualification, relative à Mod(Proj($\mathbb{E}$)) [voir Note 10], dite *associée à* $\mathbb{E}$:

$$\mathrm{Qual}(\mathbb{E}) = \{\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))(q) \ / \ q\in\mathrm{CI}(\mathbb{E})\ \} .$$

Clairement, en vertu de II.4.2.5, on a [voir Note 11]:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})),\mathrm{Qual}(\mathbb{E})) .$$

[Note 10. On peut associer à $\mathbb{E}$ une autre qualification, cette fois relative à $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Supp}(\mathbb{E})}$, à savoir:

$$\mathrm{Qual}'(\mathbb{E}) = \mathrm{qual}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})) \cup \{\ \mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\mathbb{E}))(q) \ / \ q\in\mathrm{CI}(\mathbb{E})\ \} .$$

Clairement, il s'agit alors d'une $\mathcal{VD}\mathrm{iscun}^\alpha{}_\alpha$-qualification.]

[Note 11. On a également, bien entendu:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Ens}^{\mathrm{Supp}(\mathbb{E})}, \mathrm{Qual}'(\mathbb{E})) .$$

Ce dernier résultat, ou celui de II.4.3.1, est un nouveau pas vers l'intégration complète de la théorie des catégories esquissables dans celle des catégories qualifiables.]

II.4.3.2. De II.4.3.1 et I.4.1.1, résulte immédiatement que [voir Note 13]:

- *si* α *est un ordinal régulier et si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\alpha, \mathcal{V}_1)$-*esquisse, alors le foncteur injection canonique*

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))$$

admet un quasi-adjoint à gauche,

- *si* α *est un ordinal régulier et si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\alpha, \mathcal{V}_1)$-*esquisse, alors le foncteur injection canonique*

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Ens}^{\mathrm{Supp}(\mathbb{E})}$$

admet un quasi-adjoint à gauche,

(autrement dit, tout foncteur du support de $\mathbb{E}$ vers Ens engendre un modèle, ou "faisceau", de $\mathbb{E}$ quasi-libre).

Il en résulte que:

- *si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\alpha, \mathcal{V}_1)$-*esquisse et si* E *est un objet de* $\mathbb{E}$ *, alors le foncteur évaluation en* E *;*

$$\mathrm{ev}(\mathbb{E})_E : \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Ens}$$

admet un quasi-adjoint à gauche.

En particulier, on a [voir Note 12]:

- *si* α *est un ordinal régulier et si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\alpha, \mathcal{V}_1)$-*esquisse, alors, pour tout objet* E *de* $\mathbb{E}$ *, il existe un modèle* QL(E) *de* $\mathbb{E}$ *, quasi-libre à un générateur de sorte* E *(i. e. quasi-libre à un générateur, relativement au foncteur* $\mathrm{ev}(\mathbb{E})_E$ *).*

[Note 12. Des considérations en tout point analogues à celles de la Note 6 (dont nous reprenons les notations) permettent - si l'on tient à tout prix à faire très "theoretical computer science" - de re-formuler le dernier résultat très particulier de II.4.3.2 comme suit:

- *pour tout objet* E *de* $\mathbb{E}$ *, il existe un modèle quasi-initial de* $\mathbb{E}_E$ *.*

Evidemment, Barr ne manque pas de procéder, en (M.D.S.K.), à une telle re-formulation, présentée comme originale: les mêmes remarques que dans la Note 6 s'imposent donc encore.]

II.4.3.3. De II.4.3.1, I.4.2.1 et I.4.2.4, résulte immédiatement que [voir Note 13]:

- si α *est un ordinal régulier et si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\alpha,\mathcal{V}_i)$*-esquisse, alors* Mod($\mathbb{E}$) *possède toutes les limites inductives d'indexations petites et* α*-filtrantes et tous les produits (d'indexations -discrètes - petites); de plus, ces limites et ces produits se calculent point par point,*
(autrement dit, Mod($\mathbb{E}$) est fermée dans Mod(Proj($\mathbb{E}$)) - ou dans $Ens^{Supp(\mathbb{E})}$ - pour le calcul des produits et des limites inductives d'indexations petites et α-filtrantes).

[Note 13. Les résultats de II.4.3.2 et II.4.3.3 sont autant d'avantages supplémentaires résultant de l'intégration des catégories $(\alpha,\mathcal{V}_i)$-esquissables dans celle des catégories qualifiables. Ils sont tout aussi méconnus que les précédents par Barr en (M.D.S.K.).]

[Note 14. Pour ne pas allonger ce texte (déjà fort long) nous n'énonçons pas ici de résultat analogue à celui de II.4.2.7, puisqu'il ne nous sera pas utile dans la suite.
Signalons cependant qu'on peut assez facilement le faire en le déduisant d'une caractérisation sémantique intrinsèque des catégories pour lesquelles il existe un ordinal régulier α tel qu'elles soient $(\alpha,\mathcal{V}_i)$-esquissables.
Nous laissons au lecteur le soin de déduire de (C.M.C.E.) ou (C.S.C.S.) une telle caractérisation (et l'analogue de II.4.2.7 qui en résulte).]

II.4.4. Propriétés des catégories $(\alpha,\mathcal{D}isc_i)$-esquissables.

II.4.4.1. Soit α un ordinal régulier et $\mathbb{E}$ une $(\alpha,\mathcal{D}isc_i)$-esquisse (resp. une $(\alpha,\mathcal{D}iscfin_i)$-esquisse).
On dispose de la $\mathcal{D}isc^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification (resp. de la $\mathcal{D}iscfin^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification), relative à Mod(Proj($\mathbb{E}$)) [voir Note 15], dite *associée* à $\mathbb{E}$:

$$\mathrm{Qual}(\mathbb{E}) = \{\ \mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))(q)\ /\ q\in \mathrm{CI}(\mathbb{E})\ \}\ .$$

Alors, on vérifie facilement que [voir Note 16]:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})),\mathrm{Qual}(\mathbb{E}))\ .$$

[Note 15. On peut associer à $\mathbb{E}$ une autre qualification, cette fois relative à $Ens^{Supp(\mathbb{E})}$, à savoir:
$Qual'(\mathbb{E}) = qual(Proj(\mathbb{E})) \cup \{ Yon(Supp(\mathbb{E}))(q) \ / \ q \in CI(\mathbb{E}) \}$.
Clairement, il s'agit alors d'une $\mathcal{D}isc^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification (resp. d'une $\mathcal{D}iscfin^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification).]

[Note 16. Bien évidemment, on a également:

$$Mod(\mathbb{E}) = Sat(Ens^{Supp(\mathbb{E})}, Qual'(\mathbb{E})) .$$

Ce résultat, ou celui de II.4.4.1, est un (avant dernier) pas supplémentaire vers l'intégration complète de la théorie des catégories esquissables dans celle des catégories qualifiables.]

II.4.4.2. De II.4.4.1 et I.4.1.4, résulte immédiatement que (théorème de la famille localement libre de faisceaux associée) [voir Note 18]:
- *si* α *est un ordinal régulier et si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\alpha,\mathcal{D}isc_1)$*-esquisse, alors* $Mod(\mathbb{E})$ *est une sous-catégorie pleine et multiréflexive de* $Mod(Proj(\mathbb{E}))$,
- *si* α *est un ordinal régulier et si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\alpha,\mathcal{D}isc_1)$*-esquisse, alors* $Mod(\mathbb{E})$ *est une sous-catégorie pleine et multiréflexive de* $Ens^{Supp(\mathbb{E})}$,

(autrement dit, tout foncteur du support de $\mathbb{E}$ vers Ens engendre une famille localement libre de modèles, ou "faisceaux", de $\mathbb{E}$).

Il en résulte que:
- *si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\alpha,\mathcal{D}isc_1)$*-esquisse et si* E *est un objet de* $\mathbb{E}$ *, alors le foncteur évaluation en* E *:*

$$ev(\mathbb{E})_E : Mod(\mathbb{E}) \to Ens$$

admet un multiadjoint à gauche.

En particulier, on a [voir Note 17]:
- *si* α *est un ordinal régulier et si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\alpha,\mathcal{D}isc_1)$*-esquisse, alors, pour tout objet* E *de* $\mathbb{E}$ *, il existe une famille* $(LL(E)_x)_{x \in X(E)}$ *de modèles de* $\mathbb{E}$ *, localement libre à un générateur de sorte* E *(i. e. localement libre à un génrateur, relativement au foncteur* $ev(\mathbb{E})_E$ *).*

[Note 17. Des considérations en tout point analogues à celles de la Note 6 (dont nous reprenons les notations) permettent - si l'on tient à faire très "theoretical computer science" - de re-formuler le dernier résultat très particulier de II.4.4.2 comme suit:

- pour tout objet E *de* $\mathbb{E}$ *, il existe une famille initiale de modèles de* $\mathbb{E}_E$ *.*
Bien entendu, Barr ne se prive pas en (M.D.S.K.) d'adopter une telle re-formulation, présentée, tout autant que les précédentes, comme une formulation originale: des remarques analogues à celles de la Note 6 s'imposent donc encore.]

II.4.4.3. De II.4.4.1, I.4.2.2 et I.4.2.4, résulte immédiatement que [voir Note 18]:
- si α *est un ordinal régulier et si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\alpha,\mathcal{D}isc_i)$*-esquisse, alors* Mod($\mathbb{E}$) *possède toutes les limites projectives d'indexations petites et connexes (non vides) et toutes les limites inductives d'indexations petites et* α*-filtrantes; de plus ces limites se calculent point par point,*
(autrement dit, Mod($\mathbb{E}$) est fermée dans Mod(Proj($\mathbb{E}$)) - ou dans $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Supp}(\mathbb{E})}$ - pour le calcul de ces limites).
De même, de II.4.4.2, II.4.1.2 et I.2.3.2, résulte que:
- si α *est un ordinal régulier et si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\alpha,\mathcal{D}isc_i)$*-esquisse, alors* Mod($\mathbb{E}$) *possède toutes les familles localement limites inductives d'indexations petites.*

II.4.4.4. De II.4.4.1 et I.4.3.2, résulte immédiatement que [voir Note 18]:
- si $\mathbb{E}$ *est une* $(\omega,\mathcal{D}iscfin_i)$*-esquisse, alors* Mod($\mathbb{E}$) *est une sous-catégorie de* Mod(Proj($\mathbb{E}$)) *, ou de* $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Supp}(\mathbb{E})}$ *, stable par ultraproduits (mais non nécessairement fermée pour le calcul des ultraproduits).*

[Note 18. Les résultats de II.4.4.2, II.4.4.3 et II.4.4.4 sont autant d'avantages supplémentaires résultant de l'intégration de la théorie des catégories $(\alpha,\mathcal{D}isc)$-esquissables dans celle des catégories qualifiables. Ils sont aussi méconnus que les autres par Barr en (M.D.S.K.).]

II.4.4.5. Soit α un ordinal régulier et $\mathbb{C}$ une catégorie.
Rappelons (voir (C.M.C.F.) et (C.S.C.S.)) que (caractérisation sémantique intrinsèque des catégories $(\alpha,\mathcal{D}isc)$-esquissables) [voir Note 18]:
- la catégorie $\mathbb{C}$ *est* $(\alpha,\mathcal{D}isc_i)$*-esquissable si, et seulement si, elle est* α*-localisable, i. e. si, et seulement si:*
+ $\mathbb{C}$ *est localement petite,*

+ $\mathbb{C}$ *possède toutes les limites inductives d'indexations petites et α-filtrantes,*
+ $\mathbb{C}$ *possède toutes les familles localement limites inductives d'indexations α-petites,*
+ $\mathbb{C}$ *possède un ensemble générateur propre formé d'objets α-présentables de* $\mathbb{C}$.

En effet, si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha,\mathcal{D}isc_1)$-esquisse, la catégorie $\mathbb{C} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ vérifie, en vertu de II.4.4.3, les trois premières conditions. De plus, pour tout objet E de $\mathbb{E}$, l'objet $\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))(E)$ de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))$ engendre, en vertu de II.4.4.2, une famille localement libre

$$(\mathrm{LL}(\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))(E))_x)_{x\in X(E)} \quad (= (\mathrm{LL}(E)_x)_{x\in X(E)})$$

d'objets de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$. On établit alors sans difficulté que

$$\Gamma = \{ \mathrm{LL}(\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))(E))_x \ / \ E\in \mathrm{Ob}(\mathbb{E}) \text{ et } x\in X(E) \} ,$$

effectivement formé d'objets α-présentables de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$, est bien générateur propre.

Réciproquement, si $\mathbb{C}$ vérifie les quatre conditions énoncées et si Γ est un ensemble générateur propre formé d'objets α-présentables, on note $\mathbb{C}_\alpha$ la plus petite sous-catégorie de $\mathbb{C}$ fermée pour le calcul des familles localement limites inductives (choisies) d'indexations α-petites (représentant chacune une classe d'isomorphismes entre les indexations α-petites) et contenant Γ (on montre facilement qu'elle est pleine, petite, et équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ dont les objets sont tous les α-présentables).
Alors, on note $\langle(\mathbb{C}_\alpha)^{op}\rangle$ la $(\alpha,\mathcal{D}isc_1)$-esquisse telle que:
- son support est la sous-catégorie pleine (évidemment petite) de $\mathrm{Ens}^{\mathbb{C}}$ dont les objets sont tous les foncteurs limites projectives, d'indexations α-petites, de foncteurs représentés par des α-présentables,
- ses cônes projectifs distingués sont tous les cônes limites projectives dans $\mathrm{Ens}^{\mathbb{C}}$, d'indexations α-petites, appartenant à cette sous-catégorie pleine,
- ses cônes inductifs distingués sont tous les cônes limites inductives dans $\mathrm{Ens}^{\mathbb{C}}$, appartenant à cette sous-catégorie pleine, d'indexations discrètes dont la taille est majorée par un majorant des tailles des familles localement limites inductives de diagrammes de $\mathbb{C}$.
Dans ces conditions $\mathrm{Mod}(\langle(\mathbb{C}_\alpha)^{op}\rangle)$ est équivalente à $\mathbb{C}$.

En particulier, si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha,\mathcal{D}isc_1)$-esquisse, il est facile de voir que (H,K) est une analogie de $\mathbb{E}$ vers $\langle(\mathrm{Mod}(\mathbb{E})_\alpha)^{op}\rangle$, si:
- $H:\mathbb{E} \to \langle(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_\alpha)^{op}\rangle$ est la restriction de

$$ev(\mathbb{E}):\mathbb{E} \to Ens^{Mod(\mathbb{E})},$$

- K est l'homomorphisme identité de $\langle(Mod(\mathbb{E})_\alpha)^{op}\rangle$.

[Note 18. C'est en (C.M.C.F.) que Guitart-Lair ont établi, pour la première fois, que les catégories α-localisables de Diers (voir (C.A.L.O.)) sont exactement les catégories $(\alpha,\mathcal{D}isc_1)$-esquissables. La caractérisation sémantique intrinsèque, proposée ici, de ces catégories localisables diffère légèrement de celle proposée initialement par Diers en (C.A.L.O.): c'est que les quatre conditions que nous imposons (notamment, l'existence de *seulement* quelques limites inductives et de *seulement* quelques familles localement limites inductives) en imposent nombre d'autres (notamment l'exitence de familles localement limites inductives d'indexations petites *quelconques* et de limites projectives d'indexations petites connexes non vides *quelconques*). En tout état de cause, il n'est pas très difficile de vérifier directement (i. e. sémantiquement) que ces deux caractérisations sont bien équivalentes.

On notera, de nouveau, toute l'importance du rôle joué, dans cette caractérisation, par les objets α-présentables, notamment par ceux de la forme $LL(Yon(Proj(\mathbb{E}))(E))_\times$.

On comparera, enfin, très utilement cette caractérisation à celle fournie en II.4.2.6 (voir aussi la Note 8).]

II.4.4.6. On déduit immédiatement de II.4.4.5 que [voir Note 19]:

- *si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathbb{C}$ *est une catégorie α-localisable et si* $\mathbb{C}'$ *en est une sous-catégorie pleine, multiréflexive, pour laquelle le foncteur injection canonique* $\mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ *crée les limites inductives d'indexations petites et α-filtrantes, alors* $\mathbb{C}'$ *est aussi α-localisable.*

[Note 19. Le résultat particulier de II.4.4.6 est élémentaire, mais il nous sera utile dans la suite. Nous le mentionnons explicitement pour attirer l'attention du lecteur sur le fait qu'il découle sémantiquement (et immédiatement) de la caractérisation fournie en II.4.4.5 qui, elle, ne nous sera plus, désormais, d'aucune utilité.]

II.4.5. Catégories qualifiables et catégories esquissables.

II.4.5.1. Soit α un ordinal régulier

Supposons que $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{V}_1\mathcal{D}isc_1)$-esquisse.

On dispose alors, en toute généralité, de la $\mathcal{V}\mathcal{D}isc^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification, relative à $Mod(Proj(\mathbb{E}))$ [voir Note 20], dite *associée à* $\mathbb{E}$:

$$Qual(\mathbb{E}) = \{ Yon(Proj(\mathbb{E}))(q) \ / \ q \in CI(\mathbb{E}) \} .$$

Clairement:

- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{V}_1)$-esquisse, alors (on a déjà vu que) $Qual(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{V}^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification,
- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{D}isc_1)$-esquisse, alors (on a déjà vu que) $Qual(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{D}isc^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification,
- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{D}iscfin_1)$-esquisse, alors (on a déjà vu que) $Qual(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{D}iscfin^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification,
- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{D}iscun_1)$-esquisse, alors $Qual(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{D}iscun^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification,
- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{V}_1\mathcal{D}iscfin_1)$-esquisse, alors $Qual(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{V}\mathcal{D}iscfin^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification,
- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{V}_1\mathcal{D}iscun_1)$-esquisse, alors $Qual(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{V}\mathcal{D}iscun^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification.

Dans tous les cas, il est clair que [voir Note 21]:

$$Mod(\mathbb{E}) = Sat(Mod(Proj(\mathbb{E})), Qual(\mathbb{E})) .$$

Autrement dit [voir Note 21]:

- *les catégories $(\alpha, \mathcal{V}_1\mathcal{D}isc_1)$-esquissables sont des sous-catégories $\mathcal{V}\mathcal{D}isc^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualifiables des catégories localement α-présentables (i. e. α-projectivement esquissables).*

[Note 20. On peut associer à $\mathbb{E}$ une autre qualification, cette fois relative à $Ens^{Supp(\mathbb{E})}$, à savoir:

$$Qual'(\mathbb{E}) = qual(Proj(\mathbb{E})) \cup \{ Yon(Supp(\mathbb{E}))(q) \ / \ q \in CI(\mathbb{E}) \} .$$

Clairement, on a alors:

- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{V}_1)$-esquisse, alors (on a déjà vu que) $Qual'(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{V}\mathcal{D}iscun^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification,
- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{D}isc_1)$-esquisse, alors (on a déjà vu que) $Qual'(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{D}isc^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification,
- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{D}iscfin_1)$-esquisse, alors (on a déjà vu que) $Qual'(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{D}iscfin^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification,
- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{D}iscun_1)$-esquisse, alors $Qual'(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{D}iscun^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification,

- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{V}_i\mathcal{D}\mathrm{iscfin}_i)$-esquisse, alors $\mathrm{Qual}'(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{VD}\mathrm{iscfin}^\alpha{}_\alpha$-qualification,
- si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{V}_i\mathcal{D}\mathrm{iscun}_i)$-esquisse, alors $\mathrm{Qual}'(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{VD}\mathrm{iscun}^\alpha{}_\alpha$-qualification.]

[Note 21. Bien entendu, on a aussi:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Ens}^{\mathrm{supp}(\mathbb{E})}, \mathrm{Qual}'(\mathbb{E})) .$$

Autrement dit, on a encore:
- *les catégories* $(\alpha, \mathcal{V}_i\mathcal{D}\mathrm{isc}_i)$*-esquissables sont des sous-catégories* $\mathcal{VD}\mathrm{isc}^\alpha{}_\alpha$*-qualifiables des catégories de foncteurs.*

Ce dernier résultat, ou celui de II.4.5.1, constitue la dernière étape qui permet d'aboutir à l'intégration complète des catégories esquissables - par une esquisse (presque) quelconque - dans celle des catégories qualifiables.]

II.4.5.2. Soit α un ordinal régulier et $\mathbb{C}$ une catégorie localement α-présentable.

Si P est une $\mathcal{VD}\mathrm{isc}^\alpha{}_\alpha$-qualification relative à $\mathbb{C}$, on dispose de la $(\alpha, \mathcal{V}_i\mathcal{D}\mathrm{isc}_i)$-esquisse Esq(P), dite associée à P et telle que:
- $\mathrm{Proj}(\mathrm{Esq}(P)) = /(\mathbb{C}_\alpha)^{op}/$,
- $\mathrm{CI}(\mathrm{Esq}(P)) = P^{op}$ (est l'ensemble des cônes inductifs duaux des cônes projectifs appartenant à P).

Il est facile de vérifier que:
- si P est une $\mathcal{V}^\alpha{}_\alpha$-qualification, alors Esq(P) est une $(\alpha, \mathcal{V}_i)$-esquisse,
- si P est une $\mathcal{D}\mathrm{isc}^\alpha{}_\alpha$-qualification, alors Esq(P) est une $(\alpha, \mathcal{D}\mathrm{isc}_i)$-esquisse,
- si P est une $\mathcal{D}\mathrm{iscfin}^\alpha{}_\alpha$-qualification, alors Esq(P) est une $(\alpha, \mathcal{D}\mathrm{isfin}_i)$-esquisse,
- si P est une $\mathcal{D}\mathrm{iscun}^\alpha{}_\alpha$-qualification, alors Esq(P) est une $(\alpha, \mathcal{D}\mathrm{iscun}_i)$-esquisse,
- si P est une $\mathcal{VD}\mathrm{iscfin}^\alpha{}_\alpha$-qualification, alors Esq(P) est une $(\alpha, \mathcal{V}_i\mathcal{D}\mathrm{iscfin}_i)$-esquisse,
- si P est une $\mathcal{VD}\mathrm{iscun}^\alpha{}_\alpha$-qualification, alors Esq(P) est une $(\alpha, \mathcal{V}_i\mathcal{D}\mathrm{iscun}_i)$-esquisse.

De plus, dans tous les cas, on a [voir Note 22]:

$$\mathrm{Sat}(\mathbb{C}, P) \simeq \mathrm{Mod}(\mathrm{Esq}(P)) .$$

Autrement dit, on a [voir note 22]:
- *les sous-catégories* $\mathcal{VD}\mathrm{isc}^\alpha{}_\alpha$*-qualifiables des catégories localement* α*-présentables sont des catégories* $(\alpha, \mathcal{V}_i\mathcal{D}\mathrm{isc}_i)$*-esquissables.*

II.4.5.3. Soit α un ordinal régulier, $\mathbb{E}$ une $(\alpha,\mathcal{V}_1\mathcal{D}isc_1)$-esquisse et P une $\mathcal{VD}isc^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification relative à Mod(Proj($\mathbb{E}$)) .

On a [voir Note 22]:

- *si* Mod($\mathbb{E}$) = Sat(Mod(Proj($\mathbb{E}$)),P) , *alors* $\mathbb{E}$ *est analogue à* Esq(P) .

En effet le couple (H,K) définit une analogie de $\mathbb{E}$ vers Esq(P) , si $//(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})_{\alpha})^{op}//$ désigne la plus petite structure d'esquisse (de support $(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))_{\alpha})^{op}$ telle que:

- le foncteur $\mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \to (\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))_{\alpha})^{op}$, restriction de Yon(Proj($\mathbb{E}$)) , définit un homomorphisme

$$H:\mathbb{E} \to //(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})_{\alpha})^{op}// ,$$

- le foncteur identité de $(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))_{\alpha})^{op}$, définit un homomorphisme

$$K:\mathrm{Esq}(P) \to //(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))_{\alpha})^{op}// .$$

[Note 22. Les résultats de II.4.5.2, réciproques de ceux de II.4.5.1, permettent d'intégrer complètement non la théorie des catégories qualifiables (quelconques) mais seulement celle des sous-catégories qualifiables des catégories localement présentables dans la théorie des catégories esquissables.

Dans ce qui suit, nous n'utiliserons que *peu* ce résultat ainsi que celui, qui en découle, de II.4.5.3. C'est dire que nombre des propriétés que nous étudions dans la suite, parce que Barr prétend les "étudier" en (M.D.S.K.), ne relèvent exclusivement que de la théorie générale des sous-catégories qualifiables d'une catégorie (à peu près) quelconque et non, en propre, des catégories esquissables: ceci, comme beaucoup d'autres choses, est totalement ignoré de Barr.]

II.4.5.4. Soit α un ordinal régulier et $\mathbb{C}$ une catégorie localement α-présentable.

Si P est une $\mathcal{D}iscun^{\alpha}{}_{\alpha}$-qualification relative à $\mathbb{C}$, on note esq(P) l'esquisse α-projective définie comme suit [voir Note 23]:

- son support est $(\mathbb{C}_{\alpha})^{op}$,
- le foncteur identité de $(\mathbb{C}_{\alpha})^{op}$ définit un homomorphisme de $/(\mathbb{C}_{\alpha})^{op}/$ vers esq(P) ,
- pour tout cône projectif $p = (p_1:C_p \to C_{p,1})$ (associé à une flèche p_1 de $\mathbb{C}$) appartenant à P , le cône *projectif* $(p_1:C_{p,1} \to C_p)$ de $(\mathbb{C}_{\alpha})^{op}$ est distingué.

Dans ces conditions, il est clair que:

$$\mathrm{Mod}(\mathrm{esq}(P)) \simeq \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P) .$$

Autrement dit [voir Note 23]:
- *les sous-catégories* $\mathbf{D}$iscun$^{\alpha}{}_{\alpha}$-*qualifiables des catégories localement* α-*présentables sont des catégories* α-*projectivement esquissables (et donc encore localement* α-*présentables).*

[Note 23. La construction particulière (i. e. différente de celle - systématique - de II.4.5.2) de l'esquisse esq(P) est à rapprocher de la construction particulière (i. e. différente de celle - systématique - de II.4.5.1) de la qualification qual($\mathbf{E}$) fournie en II.4.2.1; on pourra, à ce sujet, se reporter à II.3.4.4, Note 6. En tout état de cause, on peut dire qu'elles sont réciproques l'une de l'autre puisque, grâce aux résultats (réciproques l'un de l'autre) de II.4.2.1 et II.4.5.4 , on peut énoncer:
- *les sous-catégories* $\mathbf{D}$iscun$^{\alpha}{}_{\alpha}$-*qualifiables des catégories de foncteurs (ou des catégories localement* α-*présentables) sont exactement les catégories localement* α-*présentables.*]

SECTION III

DIX EXERCICES D'APPLICATION ELEMENTAIRES

III.1. CINQ EXERCICES ELEMENTAIRES SUR LES CATEGORIES QUALIFIABLES.

On suppose, dans tout ce n°III.1, que $\mathcal{C}$ est une catégorie localement petite possédant toutes les limites inductives d'indexations petites.

III.1.1. Premier exercice.

III.1.1.1. Enoncé [voir Note 1].

On suppose que α est un ordinal régulier, $P_{\mathcal{V}}$ est une $\mathcal{V}^{\alpha}$-qualification relative à $\mathcal{C}$ et $P_{\mathcal{D}}$ est une $\mathcal{D}isc^{\alpha}$-qualification relative à $\mathcal{C}$. On pose $P = P_{\mathcal{V}} \cup P_{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{C}' = \mathrm{Sat}(\mathcal{C},P)$.

Montrer que:

(a) P est une $\mathcal{VD}iscun^{\alpha}$-qualification si, et seulement si, le sommet et tout pied de tout $p \in P_{\mathcal{D}}$ engendre un objet quasi-libre de $\mathcal{C}'$,

(b) $\mathcal{C}'$ est $\mathcal{VD}iscun^{\alpha}$-qualifiable si, et seulement si, P est une $\mathcal{VD}iscun^{\alpha}$-qualification.

III.1.1.2. Solution [voir Note 1].

(a) Si P est une $\mathcal{VD}iscun^{\alpha}$-qualification, évidemment $\mathcal{C}'$ est $\mathcal{VD}iscun^{\alpha}$-qualifiable et l'on sait qu'alors, en vertu de I.4.1.3, tout objet de $\mathcal{C}$ engendre un objet quasi-libre de $\mathcal{C}'$. A fortiori, il en est ainsi pour les seuls objets de $\mathcal{C}$ qui sont sommets ou pieds des éléments p de $P_{\mathcal{D}}$.

Inversement, montrons que, si le sommet et tout pied de tout $p \in P_{\mathcal{D}}$ engendre un objet quasi-libre de $\mathcal{C}'$, alors les cônes projectifs de $P_{\mathcal{D}}$ sont d'indexations isomorphes à $\mathbf{1}$.

Supposons tout d'abord que $p = (\ ;C \to)_{\in\emptyset}$ est un élément de P_D .
Par hypothèse, le sommet C de p engendre un objet quasi-libre $QL(C)$ de $\mathbb{C}'$, présenté par une certaine flèche $e:C \to QL(C)$ de $\mathbb{C}$,
Par hypothèse, tout objet C' de $\mathbb{C}'$ est tel que $C' <\| p$, et par conséquent vérifie $Hom_{\mathbb{C}}(C,C') = \emptyset$.
En particulier, on a $QL(C) <\| p$ et donc:
- $e \in Hom_{\mathbb{C}}(C,QL(C))$,
- $Hom_{\mathbb{C}}(C,QL(C)) = \emptyset$,

d'où une contradiction.

Supposons, maintenant, que $f = (f_x:C \to C_x)_{x\in E}$ est une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$ telle que:
- $p = côneproj(f) \in P_D$,
- E a au moins deux éléments distincts,

(on pourra se reporter au diagramme commutatif ci-dessous).
Par hypothèse, le sommet C de p engendre un objet quasi-libre $QL(C)$ de $\mathbb{C}'$, présenté par une certaine flèche $e:C \to QL(C)$ de $\mathbb{C}$,
Par hypothèse, $QL(C) <\| p$ et, par conséquent, il existe un unique $x \in E$ et une unique $e'_x:C_x \to QL(C)$ tels que $e'_x.f_x = e$.
Soit, alors, $x' \neq x$ un autre élément de E .
Par hypothèse, le pied $C_{x'}$ de p engendre aussi un objet quasi-libre $QL(C_{x'})$ de $\mathbb{C}'$, présenté par une certaine flèche $e_{x'}:C_{x'} \to QL(C_{x'})$ de $\mathbb{C}$,
Comme $QL(C)$ est un objet quasi-libre de $\mathbb{C}'$ engendré par C , il existe au moins une flèche $c':QL(C) \to QL(C_x)$ de $\mathbb{C}'$ telle que $c'.e = e_{x'}.f_{x'}$.
On en déduit que:
- $e_{x'}.f_{x'}$ factorise par ... $f_{x'}$,
- $e_{x'}.f_{x'} = c'.e = c'.(e'_x.f_x) = (c'.e'_x).f_x$ factorise tout autant par f_x .

Mais, tout objet C' de $\mathbb{C}'$ est, par hypothèse, tel que $C' <\| p$. En particulier $QL(C_{x'}) <\| p$. Par conséquent, la flèche $e_{x'}.f_{x'}$ doit factoriser d'une seule manière par une seule des projections de la famille projective f , d'où une contradiction.

$$\begin{tikzcd}
QL(\mathcal{C}) \arrow[dd, "c'"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "f_x"] \arrow[ddr, "f_{x'}"] & \\
& \mathcal{C}_x \arrow[ul, "e'_x"'] & \\
QL(\mathcal{C}_{x'}) & & \mathcal{C}_{x'} \arrow[ll, "e_{x'}"]
\end{tikzcd}$$

(b) Clairement, si P est une $\mathcal{V}\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualification, $\mathcal{C}'$ est évidemment $\mathcal{V}\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualifiable.

Inversement, si $\mathcal{C}'$ est $\mathcal{V}\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualifiable, on sait, en vertu de I.4.1.3, que tout objet de $\mathcal{C}$ engendre un objet quasi-libre de $\mathcal{C}'$. En particulier, il en est ainsi du sommet et de tout pied de tout $p \in P_D$. Par conséquent, en vertu de (a), P_D est une $\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualification et P est une $\mathcal{V}\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualification.

[Note 1. En général, pour établir qu'une sous-catégorie $\mathcal{C}' = Sat(\mathcal{C}, P)$ de la catégorie $\mathcal{C}$, qualifiée par une certaine P, est aussi $\mathcal{V}\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualifiable, on imagine qu'il convient de rechercher (par exemple en modifiant P) une qualification P' (autre que P) telle que:
- $\mathcal{C}' = Sat(\mathcal{C}, P')$,
- P' est une $\mathcal{V}\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualification.

Au contraire, dans le cas particulier considéré en III.1.1.1, l'assertion (b) stipule très précisément qu'il n'y a pas lieu de *modifier* la qualification P pour établir que $\mathcal{C}'$ est $\mathcal{V}\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualifiable.]

III.1.2. Deuxième exercice.

III.1.2.1. Enoncé [voir Note 2].

On suppose que α est un ordinal régulier, P_V est une $\mathcal{V}^{\alpha}$-qualification relative à $\mathcal{C}$ et P_D est une $\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-

qualification relative à $\mathbb{C}$. On pose $P = P_V \cup P_D$ et $\mathbb{C}' = \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$.

Montrer que $\mathbb{C}'$ est $\mathcal{D}$iscun$^\alpha$-qualifiable si, et seulement si, tout sommet de tout $p \in P_V$ engendre un objet libre de $\mathbb{C}'$.

III.1.2.2. Solution [voir Note 2].

En vertu de I.4.1.2, on sait que, si $\mathbb{C}'$ est $\mathcal{D}$iscun$^\alpha$-qualifiable, alors tout objet de $\mathbb{C}$ engendre un objet libre de $\mathbb{C}'$. A fortiori, il en est ainsi pour les seuls objets de $\mathbb{C}$ qui sont sommets des éléments p de P_V.

Inversement, supposons que le sommet de tout $p \in P_V$ engendre un objet libre de $\mathbb{C}'$.

Par hypothèse, chaque cône projectif $p \in P_V$ est de la forme indiquée en I.3.4.3, i. e. est entièrement déterminé par une flèche $e_p : C_p \to C_{p,0}$ de $\mathbb{C}$ (de sorte que, pour tout objet C de $\mathbb{C}$, on a $C <\!\!|| \; p \Leftrightarrow C <\!\!| \; e_p$).

Par hypothèse, pour tout $p \in P_V$, l'objet C_p de $\mathbb{C}$ (qui est sommet de p) engendre un objet libre $L(C_p)$ de $\mathbb{C}'$, présenté par une certaine flèche $e'_p : C_p \to L(C_p)$ de $\mathbb{C}$ (on se référera au diagramme commutatif ci-dessous).

Par hypohèse, tout objet C' de $\mathbb{C}'$ est tel que, pour tout $p \in P_V$, on a $C' <\!\!|| \; p$ ou encore $C' <\!\!| \; e_p$. En particulier, pour tout $p \in P_V$, on a $L(C_p) <\!\!| \; e_p$ et il existe donc au moins une flèche $e''_p : C_{p,0} \to L(C_p)$ telle que $e''_p . e_p = e'_p$.

Dans ces conditions, associons à P la $\mathcal{D}$iscun$^\alpha$-qualification relative à $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{Discun}(P) = P_D \cup \{(e'_p : C_p \to L(C_p) \;/\; p \in P_V\},$$

et montrons que $\mathbb{C}' = \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P) = \mathrm{Sat}(\mathbb{C},\mathrm{Discun}(P))$.

Si $C' <\!\!|| \; P$, alors C' est objet de $\mathbb{C}'$ et l'on a $C' <\!\!|| \; P_D$, d'une part, et, pour tout $p \in P$, on a aussi $C' <\!\!|| \; e'_p$, puisque e'_p présente $L(C_p)$ comme objet libre de $\mathbb{C}'$, engendré par C_p. Il en résulte que $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P) \subset \mathrm{Sat}(\mathbb{C},\mathrm{Discun}(P))$.

Si $C <\!\!|| \; \mathrm{Discun}(P)$, si $p \in P_V$ et si $c : C_p \to C$ est une flèche de $\mathbb{C}$, on a $C <\!\!|| \; e'_p$ et il existe donc une unique flèche $c' : L(C_p) \to C$ telle que $c'.e'_p = c$.

On en déduit que:

$$(c'.e''_p).e_p = c'.(e''_p.e_p) = c'.e'_p = c,$$

i. e. que c factorise par e_p.

Autrement dit, si $C <\!\!|| \; \mathrm{Discun}(P)$, on a $C <\!\!|| \; P_D$, d'une part, et $C <\!\!| \; e_p$ ou encore $C <\!\!|| \; p$, pour tout $p \in P$, d'autre part. On en déduit que $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},\mathrm{Discun}(P)) \subset \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$.

$$
\begin{tikzcd}
C & \\
L(C_p) \arrow[u, "c'"] & C_p \arrow[l, "e'_p"'] \arrow[ul, "c"'] \arrow[d, "e_p"] \\
& C_{p,o} \arrow[ul, "e''_p"]
\end{tikzcd}
$$

[Note 2. Il convient de remarquer que la preuve de l'énoncé III.1.2.1 résulte *immédiatement* de I.2.5.1.]

III.1.3. Troisième exercice.

III.1.3.1. Enoncé [voir Note 3].

On suppose que α est un ordinal régulier, P_v est une $\mathcal{V}^\alpha$-qualification relative à $\mathcal{C}$ et P_D est une $\mathcal{D}isc^\alpha$-qualification relative à $\mathcal{C}$. On pose $P = P_v \cup P_D$ et $\mathcal{C}' = \mathrm{Sat}(\mathcal{C},P)$.

Montrer que $\mathcal{C}'$ est $\mathcal{D}isc^\alpha$-qualifiable si, et seulement si, le sommet de tout $p \in P_v$ engendre une famille localement libre d'objets de $\mathcal{C}'$.

III.1.3.2. Solution [voir Note 3].

En vertu de I.4.1.4, on sait que, si $\mathcal{C}'$ est $\mathcal{D}isc^\alpha$-qualifiable, alors tout objet de $\mathcal{C}$ engendre une famille localement libre d'objets de $\mathcal{C}'$. A fortiori, il en est ainsi pour les seuls objets de $\mathcal{C}$ qui sont sommets des éléments p de P_v.

Inversement, supposons que le sommet de tout élément de P_v engendre une famille localement libre d'objets de $\mathcal{C}'$.

Par hypothèse, chaque cône projectif $p \in P_v$ est de la forme indiquée en I.3.4.3, i. e. est entièrement déterminé par une flèche $e_p : C_p \to C_{p,o}$ de $\mathcal{C}$ (de sorte que, pour tout objet C de $\mathcal{C}$, on a $C \mathrel{<\!\|} p \Leftrightarrow C \mathrel{<\!|} e_p$).

Par hypothèse, pour tout $p \in P_v$, l'objet C_p de $\mathbb{C}$ (qui est sommet de p) engendre une famille localement libre $(LL(C_p)_x)_{x \in E(p)}$ d'objets de $\mathbb{C}'$, présentée par une certaine famille projective de flèches:

$$f(p) = (f(p)_x : C_p \to LL(C_p)_x)_{x \in E(p)}$$

(on se référera au diagramme commutatif ci-dessous).
Par hypohèse, tout objet C' de $\mathbb{C}'$ est tel que, pour tout $p \in P_v$, on a $C' <\!| | \; p$ ou encore $C' <\!| \; e_p$. En particulier, pour tout $p \in P_v$ et tout $x \in E(p)$, on a $LL(C_p)_x <\!| \; e_p$ et il existe donc au moins une flèche $e'_{p,x} : C_{p,o} \to LL(C_p)_x$ telle que $e'_{p,x}.e_p = f(p)_x$.

Dans ces conditions, associons à P la $\mathcal{D}isc^{\alpha}$-qualification relative à $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{Disc}(P) = \{ \text{côneproj}(f(p)) \;/\; p \in P \} \cup P_D ,$$

et montrons que $\mathbb{C}' = \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P) = \mathrm{Sat}(\mathbb{C},\mathrm{Disc}(P))$.

Si $C' <\!| | \; P$, alors C' est objet de $\mathbb{C}'$ et, par conséquent, pour tout $p \in P_v$, on a $C' <\!| | \; f(p)$, puisque $f(p)$ présente $(LL(C_p)_x)_{x \in E(p)}$ comme famille localement libre d'objets de $\mathbb{C}'$, engendré par C_p. Comme, de plus, $C' <\!| | \; P_D$, il en résulte que $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},P) \subset \mathrm{Sat}(\mathbb{C},\mathrm{Disc}(P)))$.

Si $C <\!| | \; \mathrm{Disc}(P)$, si $p \in P_v$ et si $c : C_p \to C$ est une flèche de $\mathbb{C}$, on a $C <\!| | \; f(p)$ et il existe donc un unique $x \in E(p)$ et une unique flèche $c'_x : LL(C_p)_x \to C$ tels que $c'_x.f(p)_x = c$.
On en déduit que:

$$(c'_x.e'_{p,x}).e_p = c'_x.(e'_{p,x}.e_p) = c'_x.f(p)_x = c ,$$

i. e. que c factorise par e_p.
Autrement dit, si $C <\!| | \; \mathrm{Disc}(P)$, on a $C <\!| | \; P_D$, d'une part, et $C <\!| \; e_p$ ou encore $C <\!| | \; p$, pour tout $p \in P$, d'autre part.
On en déduit que $\mathrm{Sat}(\mathbb{C},\mathrm{Disc}(P)) \subset \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$.

$$\begin{tikzcd}
C & \\
LL(C_p)_x \arrow[u, "c'_x"] & C_p \arrow[ul, "c"'] \arrow[l, "f(p)_x"'] \arrow[d, "e_p"] \\
& C_{p,o} \arrow[ul, "e'_{p,x}"]
\end{tikzcd}$$

[Note 3. Il convient de remarquer que la preuve de l'énoncé III.1.3.1 résulte *immédiatement* de I.2.5.1.]

III.1.4. Quatrième exercice.

III.1.4.1. Enoncé [voir Note 4].

On suppose que α est un ordinal régulier et P est une $\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\alpha}$-qualification relative à $\mathbb{C}$. On pose $\mathbb{C}' = \mathrm{Sat}(\mathbb{C},P)$.

Montrer que:

(a) P est une $\mathcal{D}\mathrm{iscun}^{\alpha}$-qualification si, et seulement si, le sommet et tout pied de tout $p \in P$ engendre un objet libre de $\mathbb{C}'$,

(b) $\mathbb{C}'$ est $\mathcal{D}\mathrm{iscun}^{\alpha}$-qualifiable si, et seulement si, P est une $\mathcal{D}\mathrm{iscun}^{\alpha}$-qualification.

III.1.4.2. Solution [voir Note 4].

(a) Si P est une $\mathcal{D}\mathrm{iscun}^{\alpha}$-qualification, évidemment $\mathbb{C}'$ est $\mathcal{D}\mathrm{iscun}^{\alpha}$-qualifiable et l'on sait qu'alors, en vertu de I.4.1.2, tout objet de $\mathbb{C}$ engendre un objet libre de $\mathbb{C}'$. A fortiori, il en est ainsi pour les seuls objets de $\mathbb{C}$ qui sont sommets ou pieds des éléments p de P .

Inversement, montrons que, si le sommet et tout pied de tout $p \in P$ engendre un objet libre de $\mathbb{C}'$, alors les cônes projectifs de P sont d'indexations isomorphes à $\mathbb{1}$ (la preuve est tout à fait analogue à celle du premier exercice: nous la reproduisons, avec les quelques - rares - modifications qui s'imposent).

Supposons tout d'abord que $p = (\ ;C \to\ )_{x\in\emptyset} \in P$.
Par hypothèse, le sommet C de p engendre un objet libre $L(C)$ de $\mathbb{C}'$, présenté par une certaine flèche $e{:}C \to L(C)$ de $\mathbb{C}$.
Par hypothèse, tout objet C' de $\mathbb{C}'$ est tel que $C' <\!\|\, p$, et par conséquent vérifie $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C,C') = \emptyset$.
En particulier, on a $L(C) <\!\|\, p$ et donc:
- $e \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C,L(C))$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C,L(C)) = \emptyset$,

d'où une contradiction.

Supposons, maintenant, que $f = (f_x{:}C \to C_x)_{x\in E}$ est une famille projective de flèches de $\mathbb{C}$ telle que:
- $p = \mathrm{côneproj}(f) \in P$,
- E a au moins deux éléments distincts,

(on pourra se reporter au diagramme commutatif ci-dessous).
Par hypothèse, le sommet C de p engendre un objet libre $L(C)$ de $\mathbb{C}'$, présenté par une certaine flèche $e{:}C \to L(C)$ de $\mathbb{C}$.
Par hypothèse, $L(C) <\!\|\, p$, par conséquent il existe un unique $x \in E$ et une unique $e'_x{:}C_x \to L(C)$ tels que $e'_x . f_x = e$.
Soit, alors, $x' \neq x$ un autre élément de E .

Par hypothèse, le pied $C_{x'}$ de p engendre aussi un objet libre $L(C_{x'})$ de $\mathcal{C}'$, présenté par une certaine flèche $e_{x'}:C_{x'} \to L(C_{x'})$ de $\mathcal{C}$.
Comme $L(C)$ est un objet libre de $\mathcal{C}'$ engendré par C, il existe une et une seule flèche $c':L(C) \to L(C_{x'})$ de $\mathcal{C}'$ telle que $c'.e = e_{x'}.f_{x'}$.
On en déduit que:
- $e_{x'}.f_{x'}$ factorise par $f_{x'}$,
- $e_{x'}.f_{x'} = c'.e = c'.(e'_x.f_x) = (c'.e'_x).f_x$ factorise tout autant par f_x.
Mais, tout objet C' de $\mathcal{C}'$ est, par hypothèse, tel que $C' <\| p$. En particulier $L(C_{x'}) <\| p$. Par conséquent, la flèche $e_{x'}.f_{x'}$ doit factoriser d'une seule manière par une seule des projections de la famille projective f, d'où une contradiction.

$$
\begin{tikzcd}
L(C) \arrow[ddd, "c'"'] & & C \arrow[ll, "e"'] \arrow[d, "f_x"] \arrow[dddr, "f_{x'}"] & \\
 & & C_x \arrow[ull, "e'_x"'] & \\
 & & & \\
L(C_{x'}) & & & C_{x'} \arrow[lll, "e_{x'}"]
\end{tikzcd}
$$

(b) Clairement, si P est une $\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualification, $\mathcal{C}'$ est évidemment $\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualifiable.
Inversement, si $\mathcal{C}'$ est $\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualifiable, on sait, en vertu de I.4.1.2, que tout objet de $\mathcal{C}$ engendre un objet libre de $\mathcal{C}'$. En particulier, il en est ainsi du sommet et de tout pied de tout $p \in P$. Par conséquent, en vertu de (a), P est une $\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualification.

[Note 4. En général, pour établir qu'une sous-catégorie $\mathcal{C}' = \mathrm{Sat}(\mathcal{C},P)$ de la catégorie $\mathcal{C}$, qualifiée par une certaine P, est aussi $\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualifiable, on imagine qu'il convient de rechercher (par exemple en modifiant P) une qualification P', autre que P, telle que:

- $\mathcal{C}' = \mathrm{Sat}(\mathcal{C}, P')$,
- P' est une $\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualification.

Au contraire, dans le cas particulier considéré en III.1.3.1, l'assertion (b) stipule très précisément qu'il n'y a pas lieu de *modifier* la qualification P pour établir que $\mathcal{C}'$ est $\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}$-qualifiable.]

III.1.5. Cinquième exercice.

III.1.5.1. Enoncé [voir Note 5].

On suppose que $\mathcal{C}$ est une catégorie à produits, P_V est une $\mathcal{V}^{\omega}{}_{\omega}$-qualification relative à $\mathcal{C}$ et P_D est une $\mathcal{D}$isc$^{\omega}{}_{\omega}$-qualification relative à $\mathcal{C}$. On pose $P = P_V \cup P_D$ et $\mathcal{C}' = \mathrm{Sat}(\mathcal{C}, P)$.

Montrer que $\mathcal{C}'$ est $\mathcal{VD}$iscfin$^{\omega}{}_{\omega}$-qualifiable si, et seulement si, elle est stable par ultraproduits.

III.1.5.2. Solution [voir Note 5].

En vertu de I.4.2.3, on sait que, si $\mathcal{C}'$ est $\mathcal{VD}$iscfin$^{\omega}{}_{\omega}$-qualifiable, alors elle est stable par ultraproduits.

Inversement, montrons que si $\mathcal{C}'$ est stable par ultraproduits, alors elle est $\mathcal{VD}$iscfin$^{\omega}{}_{\omega}$-qualifiable.

Tout $p \epsilon P_D$ est entièrement déterminé par une famille projective de flèches $f(p) = (f(p)_x ; C_p \to C_{p,x})_{x \epsilon E(p)}$ (de sorte que $p = \mathrm{coneproj}(f(p))$).

Pour tout $p \epsilon P_D$, posons:
- $E'(p) = \{x \epsilon E(p) /$ pour tout $C' \epsilon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_{p,x}, C') = \emptyset\}$,
- $f'(p) = (f(p)_x ; C_p \to C_{p,x})_{x \epsilon E(p) \setminus E'(p)}$,
- $F'(p) = \{ (\; ; C_{p,x} \to \;)_{\epsilon \emptyset} \; / \; x \epsilon E'(p) \}$.

Dans ces conditions, on associe à P_D la $\mathcal{D}$isc$^{\omega}{}_{\omega}$-qualification:

$$P'_D = \bigcup_{p \epsilon P_D} (\{\mathrm{coneproj}(f'(p))\} \cup F'(p))$$

et on associe à P la $\mathcal{VD}$isc$^{\omega}{}_{\omega}$-qualification

$$\mathrm{VDiscfin}(P) = P_V \cup P'_D \; .$$

Alors, il est facile de vérifier que $\mathcal{C}' = \mathrm{Sat}(\mathcal{C}, \mathrm{VDiscfin}(P))$ et il suffit d'établir que P'_D est une $\mathcal{D}$iscfin$^{\omega}{}_{\omega}$-qualification (i. e. que, pour tout $p \epsilon P_D$, $E''(p) = E(p) \setminus E'(p)$ est fini).

Supposons donc qu'il existe $p \in P_0$ tel que $E''(p)$ ne soit pas fini (on pourra se reporter au diagramme ci-dessous).

Alors, pour chaque $x \in E''(p)$, il existe au moins un objet (que l'on choisit) C'_x de $\mathcal{C}'$ pour lequel il existe au moins une flèche (que l'on choisit) $c_x : C_{p,x} \to C'_x$ de $\mathcal{C}$.

Choisissons, de plus, un ultrafiltre non trivial (ou non principal) $\mathcal{U}$ sur $E''(p)$ et notons successivement:

- pour tout $F \in \mathcal{U}$, $C'_F = \prod_{x \in F} C'_x$ et $(p_{F,x} : C'_F \to C'_x)_{x \in F}$ la famille des projections du produit considéré,
- pour tous $F' \subset F$, appartenant à $\mathcal{U}$, $c_{F,F'} : C'_F \to C'_{F'}$ l'unique flèche telle que:

  pour tout $x \in F'$, on a $p_{F',x}.c_{F,F'} = p_{F,x}$,
- $C'_{\mathcal{U}} = \mathrm{Ultraprod}_{x \in F \in \mathcal{U}} C'_x$,
- $(s_F : C'_F \to C'_{\mathcal{U}})_{F \in \mathcal{U}}$ la famille des coprojections de la limite inductive $C'_{\mathcal{U}} = \mathrm{limind}_{F \in \mathrm{Fil}(\mathcal{U})} C'_F$ considérée,
- pour tout $F \in \mathcal{U}$, $c_F : C_p \to C'_F$ l'unique flèche telle que:

  pour tout $x \in F$, on a $p_{F,x}.c_F = c_x.f(p)_x$,
- $c : C_p \to C'_{\mathcal{U}}$ la flèche telle que:

  pour tout $F \in \mathcal{U}$, on a $s_F.c_F = c$.

Par hypothèse $C'_{\mathcal{U}}$ est un objet de $\mathcal{C}'$. Par conséquent $C'_{\mathcal{U}} \mathrel{<\!||} f(p)$ et il existe un unique $x \in E''(p)$ et une unique flèche $c'_x : C_{p,x} \to C'_{\mathcal{U}}$ tels que $c'_x.f(p)_x = c$.

Comme $C_{p,x}$ est un objet ω-présentable de $\mathcal{C}$, il existe aussi au moins un $F \in \mathcal{U}$ et au moins une flèche $c''_{x,F} : C_{p,x} \to C'_F$ tels que $s_F.c''_{x,F} = c'_x$.

On en déduit deux factorisations de c par s_F, puisque:

$$s_F.(c''_{x,F}.f(p)_x) = (s_F.c''_{x,F}).f(p)_x = c'_x.f(p)_x = c$$

et

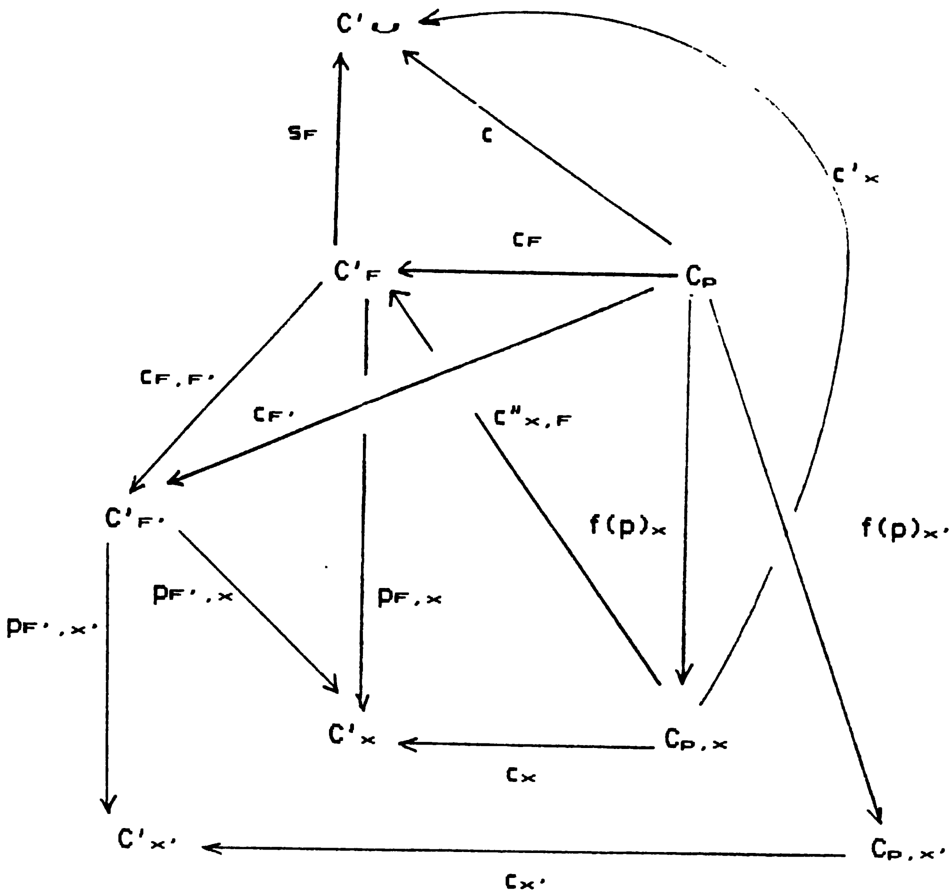
$$s_F.c_F = c .$$

Mais C_p est aussi un objet ω-présentable de $\mathcal{C}$, par conséquent il existe (puisque $\mathrm{Fil}(\mathcal{U})$ est ... filtrante [voir I.4.3.1, Note 7]) un $F \subset F' \in \mathcal{U}$ tel que $c_{F,F'}.c_F = c_{F,F'}.(c''_{x,F}.f(p)_x)$.

Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non trivial, on peut affirmer que F' possède au moins un élément $x' \neq x$. D'où l'on déduit que $p_{F',x'}.c_{F'} : C_p \to C'_{x'}$ admet deux factorisations par deux projections *distinctes* de la famille projective $f(p)$, puisque:

$$\begin{aligned} p_{F',x'}.c_{F'} &= c_{x'}.f(p)_{x'} \\ &= p_{F',x'}.(c_{F,F'}.c_F) \\ &= p_{F',x'}.(c_{F,F'}.c''_{x,F}.f(p)_x) \\ &= (p_{F',x'}.c_{F,F'}.c''_{x,F}).f(p)_x . \end{aligned}$$

Mais ceci est en contradiction avec l'hypothèse que $C'_{x'}$ est objet de $\mathcal{C}'$, i. e. que $C'_{x'} \mathrel{<\!||} f(p)$.



[Note 5. Bien évidemment, la méthode utilisée en III.1.5.2, pour prouver l'assertion de III.1.5.1 ne prétend pas être spécialement originale: elle relève plutôt d'un classicisme de bon aloi concernant tout raisonnement portant sur des ultrafiltres!

De même, l'énoncé de III.1.5.1 (présenté en termes de qualification, donc de satisfaction) résulte facilement (compte tenu de I.3) de (C.I.S.B.) par exemple (où les résultats sont présentés en termes d'axiomatisation, donc de validation).]

III.2. CINQ EXERCICES ELEMENTAIRES SUR LES CATEGORIES ESQUISSABLES.

III.2.1. Premier exercice.

III.2.1.1. Enoncé [voir Notes 1 et 2].

On suppose que α est un ordinal régulier et que $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{V}_1\mathcal{D}isc_1)$-esquisse.

Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(a) il existe un ordinal régulier $\beta \geq \alpha$ et une analogie de $\mathbb{E}$ vers une $(\beta, \mathcal{V}_1)$-esquisse,

(b) pour tout objet E de $\mathbb{E}$, il existe un modèle de $\mathbb{E}$, quasi-libre à un générateur de sorte E,

(c) pour tout objet E de $\mathbb{E}$ qui est sommet ou pied d'un cône inductif, d'indexation discrète, distingué dans $\mathbb{E}$, il existe un modèle de $\mathbb{E}$, quasi-libre à un générateur de sorte E.

Montrer, de plus, que l'une des trois conditions précédentes est vérifiée si, et seulement si:

(d) $\mathbb{E}$ est semblable à une $(\alpha, \mathcal{V}_1)$-esquisse.

III.2.1.2. Solution [voir Notes 1 et 2].

Montrons que (a) implique (b).

Si $\mathbb{E}$ est analogue à une certaine $(\beta, \mathcal{V})$-esquisse $\mathbb{E}^*$, on a, en vertu de II.3.4.2 et II.4.3.1:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}^*) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}^*)), \mathrm{Qual}(\mathbb{E}^*)) ,$$

où $\mathrm{Qual}(\mathbb{E}^*)$ est, par hypohèse, une $\mathcal{V}^\beta$-qualification.

Ainsi, si E est un quelconque objet de $\mathbb{E}$, il est aussi objet de $\mathbb{E}^*$ et l'objet $\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}^*))(E)$ de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}^*))$ est, d'après II.4.2.5, un modèle de $\mathrm{Proj}(\mathbb{E}^*)$ libre à un générateur de sorte E. De plus, il engendre, en vertu de I.4.1.1, un objet quasi-libre de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}^*) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$. Par transitivité (voir I.2.3.1), ce dernier est donc un modèle de $\mathbb{E}$, quasi-libre à un générateur de sorte E .

Il est clair que (b) implique (c)

Montrons, maintenant, que (c) implique (d).

On sait, en vertu de II.4.5.1, que:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})),\mathrm{Qual}(\mathbb{E})) ,$$

où, par hypothèse, Qual($\mathbb{E}$) est une $\mathcal{VD}$isc$^{\alpha}$-qualification.

Si M est un objet de Mod(Proj($\mathbb{E}$)) qui est sommet (resp. pied) d'un cône projectif, d'indexation discrète, pεQual($\mathbb{E}$) , alors il existe un objet E de $\mathbb{E}$ et un cône inductif i , d'indexation discrète, distingué dans $\mathbb{E}$, dont E est le sommet (resp. un pied), tels que Yon(Proj($\mathbb{E}$))(i) = p et Yon(Proj($\mathbb{E}$))(E) = M .

Par conséquent, d'après II.4.2.5, M est un modèle de Proj($\mathbb{E}$) , libre à un générateur de sorte E .

Par hypothèse, il existe aussi un modèle de $\mathbb{E}$, quasi-libre à un générateur de sorte E : c'est donc, par transitivité (voir I.2.3.1) un objet quasi-libre de Mod($\mathbb{E}$) , engendré par M .

On en déduit que le sommet et tout pied de tout cône projectif discret pεQual($\mathbb{E}$) engendre un objet quasi-libre de Mod($\mathbb{E}$) .

De III.1.1.1, il résulte que Qual($\mathbb{E}$) est une $\mathcal{VD}$iscun$^{\alpha}$-qualification et donc, en vertu de II.4.5.1, que $\mathbb{E}$ est une (α, $\mathcal{V}_1\mathcal{D}$iscun$_1$)-esquisse. D'après II.3.4.4, elle est donc semblable à une (α, $\mathcal{V}_1$)-esquisse.

Pour finir, il est clair que (d) implique (a).

[Note 1. Cet exercice III.2.1 n'est qu'une interprètation particulière *automatique* de l'exercice général III.1.1, dans le cas particulier où la "catégorie de base" $\mathbb{C}$ est une catégorie projectivement esquissable (ou encore localement présentable).

En effet, compte tenu des propriétés particulières d'une catégorie localement présentable, rappelées en II.4.2.5, il a suffit de traduire les considérations générales de III.1.1 au moyen *systématique* de II.4.5 (dont II.3.4.4 et II.4.3.1 ne sont que des aspects particuliers).]

[Note 2. Les assertions de III.2.1 précisent notablement (et généralisent au cas non finitaire - mais là n'est pas l'essentiel) le théorème 2 (plus exactement l'équivalence des points (i) et (v) - les autres nous semblant tout à fait secondaires) énoncé par Barr en (M.D.S.K.).

Bien entendu, l'objectif de Barr était d'énoncer un critère assez simple permettant de savoir quand, un type de structure

étant esquissable à l'aide d'une (presque) quelconque esquisse, on pouvait l'esquisser à l'aide d'une esquisse seulement régulière. D'après son théorème 2, il en est ainsi si, et seulement si, la catégorie de ces structures possède un modèle quasi-libre à un générateur de toute sorte.
Cet énoncé (et sa preuve) laisse(nt) donc supposer qu'avant de savoir s'il est possible de modifier l'esquisse de départ en une esquisse seulement régulière, il convient de procéder à une étude exhaustive de la catégorie des modèles pour y détecter ceux qui y sont quasi-libres. Et que, ce n'est qu'une fois ceci fait qu'on peut savoir comment modifier (d'ailleurs assez simplement) l'esquisse de départ.

L'énoncé III.2.1.1 et la solution III.2.1.2 sont beaucoup plus explicites: *ils vident de toute consistance réelle* ce théorème 2! En effet, on peut modifier l'esquisse de départ en une esquisse régulière si, et *seulement* si, les seuls cônes inductifs d'indexations discrètes qui y sont distingués sont d'indexations isomorphes à $\mathbf{1}$ (auquel cas, les uniques co-projections de chacun de ces cônes peuvent être immédiatement transformées en des iso ou en des projections de cônes projectifs d'indexations isomorphes à $\mathbf{1}$ distingués - voir la II.3.4.4, Note 6).
Autrement dit, il est totalement inutile de procéder d'abord à une étude exhaustive de la catégorie des modèles (mais ceci ne l'empêche évidemment pas d'avoir des objets quasi-libres); l'esquisse initiale est modifiable en une esquisse régulière si, et seulement si, pratiquement et dès l'origine elle "est" déjà régulière ce qui, alors, crève les yeux!

Si telle n'a pas été la constatation de Barr c'est simplement parce que les considérations du début de sa preuve de l'implication (iv) ⇒ (i) et de la fin de sa preuve de l'implication (ii) ⇒ (v) sont erronées.]

III.2.2. Deuxième exercice.

III.2.2.1. Enoncé [voir Notes 3 et 4].

On suppose que α est un ordinal régulier et que $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{V}_1)$-esquisse.

Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(a) il existe un ordinal régulier $\beta > \alpha$ et une analogie de $\mathbb{E}$ vers une esquisse β-projective,

(b) pour tout objet E de $\mathbb{E}$, il existe un modèle de $\mathbb{E}$, libre à un générateur de sorte E,

(c) pour tout objet E de $\mathbb{E}$ qui est sommet d'un cône inductif distingué de $\mathbb{E}$, il existe un modèle de $\mathbb{E}$, libre à un générateur de sorte E.

Montrer, de plus, que l'une des trois conditions précédentes est vérifiée si, et seulement si:

(d) l'esquisse $\mathbb{E}$ est analogue à une esquisse α-projective.

III.2.2.2. Solution [voir Notes 3 et 4].

Montrons que (a) implique (b).

Si $\mathbb{E}$ est analogue à une certaine esquisse β-projective $\mathbb{E}^*$, on a $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}^*)$.

Par conséquent, si E est un quelconque objet de $\mathbb{E}$, il est objet de $\mathbb{E}^*$ et, en vertu de II.4.2.5, l'objet $\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}^*))(E)$ de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}^*) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est libre à un générateur de sorte E.

Il est clair que (b) implique (c).

Montrons, maintenant, que (c) implique (a).

On sait, en vertu de II.4.3.1, que:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})),\mathrm{Qual}(\mathbb{E})),$$

où, par hyptohèse, $\mathrm{Qual}(\mathbb{E})$ est une $\mathbb{V}^{\alpha}$-qualification.

Si M est un objet de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))$ qui est sommet d'un cône projectif $p \in \mathrm{Qual}(\mathbb{E})$, alors il existe un objet E de $\mathbb{E}$ et un cône inductif distingué i de $\mathbb{E}$, dont E est le sommet, tels que $\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))(i) = p$ et $\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))(E) = M$.

Par conséquent, d'après II.4.2.5, M est un modèle de $\mathrm{Proj}(\mathbb{E})$, libre à un générateur de sorte E.

Par hypothèse, il existe aussi un modèle $L(E)$ de $\mathbb{E}$, libre à un générateur de sorte E : c'est donc, par transitivité (voir I.2.3.2) un objet libre de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$, engendré par M.

On en déduit que le sommet de tout cône projectif $p \in \mathrm{Qual}(\mathbb{E})$ engendre un objet libre de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$; nous notons alors β le plus petit ordinal régulier (qui, bien entendu, existe) tel que:

- $\beta > \alpha$,
- pour tout sommet E de tout cône inductif distingué i de $\mathbb{E}$, $L(E)$ est un objet β-présentable de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))$.

De III.1.2, il résulte que:

$$\mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})),\mathrm{Qual}(\mathbb{E}))=\mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})),\mathrm{Discun}(\mathrm{Qual}(\mathbb{E}))),$$

où, par construction, Discun(Qual($\mathbb{E}$)) est une $\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}{}_{\beta}$-qualification.
On en déduit, en vertu de II.4.5.3 et II.4.5.4, que $\mathbb{E}$ est analogue à esq(Discun(Qual($\mathbb{E}$))) , qui est une esquisse β-projective.

Montrons que (c) implique (d).

D'après II.4.3.3, le foncteur injection canonique Mod($\mathbb{E}$) $\to$ Mod(Proj($\mathbb{E}$)) crée les limites inductives d'indexations petites et α-filtrantes.

Comme précédemment, on a:

Mod($\mathbb{E}$) = Sat(Mod(Proj($\mathbb{E}$)),Discun(Qual($\mathbb{E}$))) ,

où, par construction, Discun(Qual($\mathbb{E}$)) est une $\mathcal{D}$iscun$^{\alpha}{}_{\gamma}$-qualification.
Par conséquent, en vertu de I.4.1.2, Mod($\mathbb{E}$) est une sous-catégorie pleine et réflexive de Mod(Proj($\mathbb{E}$)) (nous notons, alors, adj:Mod(Proj($\mathbb{E}$)) $\to$ Mod($\mathbb{E}$) l'adjoint à gauche au foncteur injection canonique Mod($\mathbb{E}$) $\to$ Mod(Proj($\mathbb{E}$))).

Ainsi, en vertu de II.4.2.7 et II.4.2.6, Mod($\mathbb{E}$) est aussi localement α-présentable et l'on a Mod($\mathbb{E}$) = Mod(/Mod($\mathbb{E}$)$_{\alpha}{}^{op}$/) .

Notons:

- Yon(Proj($\mathbb{E}$))$_{\alpha}$:Proj($\mathbb{E}$) $\to$ Mod(Proj($\mathbb{E}$))$_{\alpha}{}^{op}$ la restriction de Yon(Proj($\mathbb{E}$)) ,
- adj$_{\alpha}{}^{op}$:Mod(Proj($\mathbb{E}$))$_{\alpha}{}^{op}$ $\to$ Mod($\mathbb{E}$)$_{\alpha}{}^{op}$ la restriction de adj^{op} ,
- H = adj$_{\alpha}{}^{op}$.Yon(Proj($\mathbb{E}$))$_{\alpha}$,
- //Mod($\mathbb{E}$)$_{\alpha}{}^{op}$// la plus petite sur-structure de (α,$\mathcal{V}_1$)-esquisse sur /Mod($\mathbb{E}$)$_{\alpha}{}^{op}$/ telle que

H: $\mathbb{E}$ $\to$ //Mod($\mathbb{E}$)$_{\alpha}{}^{op}$//

soit un homomorphisme d'esquisses,
- K: /Mod($\mathbb{E}$)$_{\alpha}{}^{op}$/ $\to$ //Mod($\mathbb{E}$)$_{\alpha}{}^{op}$// l'homomorphisme canonique qui en résulte.

Il est alors facile de constater que (H,K) définit une analogie de $\mathbb{E}$ vers l'esquisse α-projective /Mod($\mathbb{E}$)$_{\alpha}{}^{op}$/ .

Pour finir, il est clair que (d) implique (a).

[Note 3. L'équivalence des points (a), (b) et (c) de III.2.2.1, et sa preuve, ne sont qu'une interprètation particulière *automatique* de l'exercice général III.1.2, dans le cas particulier où la "catégorie de base" $\mathbb{C}$ est une catégorie projectivement esquissable (ou encore localement présentable).

En effet, compte tenu des propriétés particulières d'une catégorie localement présentable, rappelées en II.4.2.5, il a suffit de traduire les considérations générales de III.1.2 au moyen *systématique* de II.4.5 (dont II.4.3.1 n'est qu'un aspect particulier).

L'équivalence avec le point (d), quant à elle, ne résulte pas d'une interprètation particulière des propriétés générales des sous-catégories qualifiables d'une catégorie (quelconque). Par contre, elle résulte immédiatement de la propriété *ultra-classique* rappelée en II.4.2.7, *spécifique* de certaines sous-catégories d'une catégorie localement α-présentable.]

[Note 4. Soit α un ordinal régulier et $\mathbb{E}$ une $(\alpha, \mathcal{V}_1\mathcal{D}isc_1)$-esquisse.
En appliquant successivement les résultats de III.2.1 et III.2.2, il est facile de prouver que les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(a') il existe un ordinal régulier $\beta \geq \alpha$ et une analogie de $\mathbb{E}$ vers une esquisse β-projective,

(b') pour tout objet E de $\mathbb{E}$, il existe un modèle de $\mathbb{E}$, libre à un générateur de sorte E,

(c') pour tout objet E de $\mathbb{E}$ qui est sommet d'un cône inductif distingué de $\mathbb{E}$, il existe un modèle de $\mathbb{E}$, libre à un générateur de sorte E.

De plus, il est immédiat de prouver que l'une de ces trois conditions est vérifiée si, et seulement si:

(d') l'esquisse $\mathbb{E}$ est analogue à une esquisse α-projective.:

Cette équivalence des assertions (a'), (b'), (c') et (d') précise (et généralise au cas non finitaire - mais là n'est pas l'essentiel) le théorème 3 (plus exactement l'équivalence des points (i) et (iii) - les autres nous semblant tout à fait secondaires) énoncé par Barr en (M.D.S.K.).
Cependant, elle ne constitue pas une amélioration réellement consistante de ce qui est énoncé en III.2.2.1: l'existence de modèles libres (donc au moins quasi-libres) à un générateur de toute sorte impose en effet, d'après III.2.1.1 et III.2.1.2, que l'esquisse de départ $\mathbb{E}$ "est" déjà, dès l'origine, régulière (voir III.2.1.2, Note 2): ce qui, dans ce cas, crève les yeux!
Nous avons donc préféré n'énoncer que l'équivalence des assertions (a), (b), (c) et (d) de III.2.2.1, afin de ne formuler que ce qui pouvait être le plus consistant possible!

Dans la preuve de son théorème 3, Barr construit une esquisse $\mathbb{E}^*$ dont le support est une certaine sous-catégorie de $Ens^{Mod(\mathbb{E})}$ (on a vu l'intérêt d'un tel genre de construction ... en II.4.4.5, i. e. dans un cadre, qui ne doit *rien* à Barr, où

elle s'impose *vraiment*, i. e. pour des esquisses *non projectives*. Pour établir qu'il s'agit bien d'une sous-catégorie pleine (et petite) il fait appel à un "théorème de plongement plein" tout à fait "crucial". Manifestement, la connaissance de la propriété ultra-classique II.4.2.7 lui aurait évité toute cette peine et tant de grandiloquence.
De même qu'elle lui aurait évité de se targuer, dans une lettre m'étant personnellement adressée, d'avoir été le premier (n'ayant nulle part dans mes travaux - dont par ailleurs il nie même l'existence - trouvé trace d'un énoncé analogue) à établir l'équivalence (a')⇔(b')⇔(c')⇔(d'), ou encore l'équivalence corollaire (mais c'est en fait la même, ce qui n'a pas l'air de lui crever les yeux) (a)⇔(b)⇔(c)⇔(d) .
Je n'ai pas pour habitude, en effet, de ré-écrire nombre de versions différentes d'un résultat ultra-classique (en l'espèce celui de II.4.2.7), ni même les solutions d'exercices élémentaires qui s'en déduisent sans effort. Sauf peut-être pour expliquer et ré-expliquer inlassablement qu'il conviendrait que ceux qui les ignorent le connaissent et le comprennent.

Enfin, il est piquant de constater que, dans cette même preuve de son théorème 3 Barr fait allusion (haut de page 10) au fait que, si $\mathbb{E}$ est une esquisse et E en est un objet, alors un modèle initial de $\mathbb{E}_E$ est exactement un modèle de $\mathbb{E}$, libre à un générateur de sorte E (voir II.4.2.5, Note 6). Il rompt ainsi avec la belle homogénéité, faisant très "theoretical computer science", qu'il s'est lui même imposée. Il est vrai qu'il lui était difficile de faire autrement: dès lors qu'on veut établir un résultat (l'équivalence avec (d)) qui résulte d'une propriété (celle de II.4.2.7) spécifique à une certaine sous-catégorie pleine d'une catégorie projectivement esquissable, la considération de co-modèles canoniques (voir II.4.2.5) semble inévitable; sans doute est-ce encore un apport "crucial" de Barr de commencer à n'en prendre qu'infiniment peu conscience?]

III.2.3. Troisième exercice.

III.2.3.1. Enoncé [voir Notes 5 et 6].

On suppose que α est un ordinal régulier et que $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{V}_1\mathcal{D}isc_1)$-esquisse.

Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(a) il existe un ordinal régulier $\beta > \alpha$ et une analogie de $\mathbb{E}$ vers une $(\beta, \mathcal{D}isc_1)$-esquisse,

(b) pour tout objet E de $\mathbb{E}$, il existe une famille de modèles de $\mathbb{E}$, localement libre à un générateur de sorte E,

(c) pour tout objet E de $\mathbb{E}$, sommet d'un cône inductif, d'indexation non discrète, distingué dans $\mathbb{E}$, il existe une famille de modèles de $\mathbb{E}$, localement libre à un générateur de sorte E.

Montrer, de plus, que si l'une des trois conditions précédentes est vérifiée, alors:

(d) $\mathbb{E}$ est comparable à une $(\alpha, \mathcal{D}isc_1)$-esquisse.

III.2.3.2. Solution [voir Notes 5 et 6].

Montrons que (a) implique (b).

Si $\mathbb{E}$ est analogue à une certaine $(\beta, \mathcal{D}isc)$-esquisse $\mathbb{E}^*$, on a, en vertu de II.3.4.2 et II.4.4.1:
$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}^*) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}^*)), \mathrm{Qual}(\mathbb{E}^*))$,
où $\mathrm{Qual}(\mathbb{E}^*)$ est une $\mathcal{D}isc^{\beta}$-qualification.

Par conséquent, si E est un quelconque objet de $\mathbb{E}$, il est objet de $\mathbb{E}^*$ et, en vertu de II.4.2.5, $\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}^*))(E)$ est un modèle de $\mathrm{Proj}(\mathbb{E}^*)$ libre à un générateur de sorte E. D'après I.4.1.4, il engendre donc une famille localement libre d'objets de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}^*) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$: par transitivité (voir I.2.3.2), c'est donc une famille d'objets de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$, localement libre à un générateur de sorte E.

Il est clair que (b) implique (c).

Montrons, maintenant, que (c) implique (a).

On sait, en vertu de II.4.5.1, que:
$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})), \mathrm{Qual}(\mathbb{E})),$$
où, par hypothèse, $\mathrm{Qual}(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{VD}isc^{\alpha}$-qualification.

Si M est un objet de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))$ qui est sommet d'un cône projectif, d'indexation non discrète, $p \in \mathrm{Qual}(\mathbb{E})$, alors il existe un objet E de $\mathbb{E}$ et un cône inductif i, d'indexation non discrète, distingué dans $\mathbb{E}$, dont E est le sommet, tels que $\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))(i) = p$ et $\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))(E) = M$.

Par conséquent, d'après II.4.2.5, M est un modèle de $\mathrm{Proj}(\mathbb{E})$, libre à un générateur de sorte E.

Par hypothèse, il existe une famille $(LL(E)_x)_{x \in X(E)}$ de modèles de $\mathbb{E}$, localement libre à un générateur de sorte E : c'est donc, par transitivité (voir I.2.3.2), une famille localement libre d'objets de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ engendrée par M.

On en déduit que le sommet de tout cône projectif d'indexation non discrète $p \in \mathrm{Qual}(\mathbb{E})$ engendre une famille localement libre d'objets de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$; nous notons, alors, β le plus petit ordinal régulier (qui, bien entendu, existe) tel que:

- $\beta \geq \alpha$,
- pour tout sommet E de tout cône inductif i , d'indexation non discrète, distingué dans $\mathbb{E}$, et, pour tout $x \in X(E)$, $LL(E)_x$ est un objet β-présentable de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))$.

De III.1.3, il résulte que:
$\mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})),\mathrm{Qual}(\mathbb{E})) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})),\mathrm{Disc}(\mathrm{Qual}(\mathbb{E})))$,
où, par construction, $\mathrm{Disc}(\mathrm{Qual}(\mathbb{E}))$ est une $\mathcal{D}\mathrm{isc}^{\alpha}{}_{\beta}$-qualification.
Par conséquent,en vertu de II.4.5.2 et II.4.5.3, $\mathbb{E}$ est analogue à la $(\beta,\mathcal{D}\mathrm{isc}_{1})$-esquisse $\mathrm{Esq}(\mathrm{Disc}(\mathrm{Qual}(\mathbb{E})))$.

Montrons, pour finir, que (c) implique (d).

D'après II.4.4.3, le foncteur injection canonique $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))$ crée les limites inductives d'indexations petites et α-filtrantes.

Comme précédemment, on a:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})),\mathrm{Disc}(\mathrm{Qual}(\mathbb{E})))\ .$$

Par conséquent, en vertu de I.4.1.4, $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est une sous-catégorie pleine et multiréflexive de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))$.
Ainsi, en vertu de II.4.4.6 et II.4.4.5, $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est aussi α-localisable et l'on a $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \simeq \mathrm{Mod}(\langle \mathrm{Mod}(\mathbb{E}^{op})\rangle_\alpha)$.

Notons:

$$H: \mathbb{E} \longrightarrow \langle \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}\rangle_\alpha \subset (\mathrm{Ens}^{\mathrm{Mod}(\mathbb{E})})^{op}$$
$$E \longmapsto ev_E \quad : \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathrm{Ens}$$
$$M \longmapsto M(E)$$

la restriction du foncteur évaluation (en les objets et flèches de $\mathbb{E}$) et:

$$K: \mathrm{Esq}(\mathrm{Dis}(\mathrm{Qual}(\mathbb{E}))) \longrightarrow \langle \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}\rangle_\alpha \subset (\mathrm{Ens}^{\mathrm{Mod}(\mathbb{E})})^{op}$$
$$M' \longmapsto ev_{M'} \quad :\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathrm{Ens}$$
$$M \longmapsto M(M') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))}(M',M)$$

la restriction du foncteur évaluation (en les objets et flèches de $\mathrm{Esq}(\mathrm{Disc}(\mathrm{Qual}(\mathbb{E})))$).
Il est facile de constater que (H,K) définit une comparaison de $\mathbb{E}$ vers la $(\alpha,\mathcal{D}\mathrm{isc}_{1})$-esquisse $\mathrm{Esq}(\mathrm{Disc}(\mathrm{Qual}(\mathbb{E})))$.

[Note 5. L'équivalence des points (a), (b) et (c) de III.2.3.1, et sa preuve, ne sont qu'une interprètation particulière *automatique* de l'exercice général III.1.3, dans le cas particulier où la "catégorie de base" $\mathbb{C}$ est une catégorie projectivement esquissable (ou encore localement présentable).

En effet, compte tenu des propriétés particulières d'une catégorie localement présentable, rappelées en II.4.2.5, il a suffit de traduire les considérations générales de III.1.3 au moyen *systématique* de II.4.5 (dont II.4.4.1 n'est qu'un aspect particulier).

L'implication de (d), quant à elle, ne résulte pas d'une interprètation particulière des propriétés générales des sous-catégories qualifiables d'une catégorie (quelconque). Par contre, elle résulte immédiatement de la propriété rappelée en II.4.4.6, *spécifique* de certaines sous-catégories d'une catégorie localisable (ou, en particulier, localement présentable).]

[Note 6. Les assertions de III.2.3 précisent notablement (et généralisent au cas non finitaire, ce qui n'est pas sans importance) le théorème 1 (plus exactement, l'implication - l'équivalence n'étant pas démontrée - de (iii) par (i) - les autres nous semblant tout à fait secondaires) énoncé par Barr en (M.D.S.K.).

Nous établissons ici l'*équivalence* de ces points, pourvu que l'on ne se limite pas *arbitrairement* à trouver une "équivalence" (que nous appelons ici *analogie*, la relation considérée ne ,nous semblant pas spécialement réflexive) d'esquisses $\mathbb{E} \to \mathbb{E}' \leftarrow \mathbb{E}^*$, où $\mathbb{E}'$ et $\mathbb{E}^*$ ont des cônes projectifs distingués dont la taille est celle des cônes projectifs distingués de $\mathbb{E}$.

Mieux, nous établissons que, s'il est toujours possible, effectivement, de modifier $\mathbb{E}$ en une autre esquisse $\mathbb{E}^{**}$ possèdant des cônes projectifs distingués de même taille que ceux de $\mathbb{E}$, en général on ne peut le faire que si l'on s'autorise des modifications faisant éventuellement intervenir des cônes projectifs de taille plus grande (c'est le sens de la *comparaison* d'esquisses - plus générale que les "équivalence" ou analogie - intervenant au point (d)).

Barr aurait tout aussi bien pu "fermer" la question qu'il "ouvre" dans la remarque qui suit l'énoncé de son théorème 1: en utilisant *ici* un procédé "crucial", analogue à celui qu'il utilise, sans véritable nécessité, dans la preuve de son théorème 3, i. e. les résultats (il est vrai moins classiques que ceux rappelés II.4.2.6 et II.4.2.7, surtout pour qui nie même l'existence matérielle de la revue Diagrammes) rappelés en II.4.4.5 et II.4.4.6.

Il est, enfin, tout particulièrement piquant de constater que, dans cette même remarque, Barr fait allusion au fait que, si $\mathbb{E}$ est une esquisse et E en est un objet, alors une famille initiale de modèles de $\mathbb{E}_E$ s'identifie exactement à une famille de modèles de $\mathbb{E}$, localement libre à un générateur de sorte E (voir II.4.4.2, Note 17). Cependant, il ne va pas, dans la preuve de son théorème 1, jusqu'à rompre avec la belle homogénéité, faisant très "theoretical computer science", qu'il s'est lui même imposée. Pourtant cela lui aurait permis d'établir l'équivalence cherchée: dès lors qu'on veut établir un résultat (l'équivalence avec (d)) qui résulte d'une propriété (celle de II.4.4.6) spécifique à une certaine sous-catégorie pleine d'une catégorie projectivement esquissable, la considération de co-modèles canoniques (voir II.4.2.5) semble inévitable.

Barr ne sachant comment utiliser cette allusion, mais la faisant précisément à cet endroit, on peut affirmer qu'elle est certainement tout à fait étrangère à la non-existence, qu'il proclame sans vergogne dans une lettre personnelle qu'il m'a adressée, de (C.M.C.F.).]

III.2.4. Quatrième exercice.

III.2.4.1. Enoncé [voir Notes 7 et 8].

On suppose que α est un ordinal régulier et que $\mathbb{E}$ est une $(\alpha,\mathcal{D}isc_1)$-esquisse.

Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(a) il existe un ordinal régulier $\beta>\alpha$ et une analogie de $\mathbb{E}$ vers une esquisse β-projective,

(b) pour tout objet E de $\mathbb{E}$, il existe un modèle de $\mathbb{E}$, libre à un générateur de sorte E ,

(c) pour tout objet E de $\mathbb{E}$ qui est sommet ou pied d'un cône inductif (d'indexation nécessairement discrète) distingué de $\mathbb{E}$, il existe un modèle de $\mathbb{E}$, libre à un générateur de sorte E .

Montrer, de plus, que l'une des trois conditions précédentes est vérifiée si, et seulement si:

(d) l'esquisse $\mathbb{E}$ est semblable à une $(\alpha,\emptyset)$-esquisse.

III.2.4.2. Solution [voir Notes 7 et 8].

Montrons que (a) implique (b).

Si $\mathbb{E}$ est analogue à une certaine $(\beta,\emptyset)$-esquisse $\mathbb{E}^*$, on a:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}^*) .$$

Par conséquent, si E est un quelconque objet de $\mathbb{E}$, il est objet de $\mathbb{E}^*$ et l'objet $\mathrm{Yon}(\mathbb{E}^*)(E)$ de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}^*) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est, en vertu de II.4.2.5, libre à un générateur de sorte E.

Il est clair que (b) implique (c)

Montrons, maintenant, que (c) implique (d).

On sait, en vertu de II.4.4.1, que:

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) = \mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E})),\mathrm{Qual}(\mathbb{E})) ,$$

où, par hypothèse, $\mathrm{Qual}(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{D}isc^{\alpha}$-qualification.

Si M est un objet de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))$ qui est sommet (resp. pied) d'un cône projectif, d'indexation discrète, $p\in\mathrm{Qual}(\mathbb{E})$, alors il existe un objet E de $\mathbb{E}$ et un cône inductif i, d'indexation discrète, distingué dans $\mathbb{E}$, dont E est le sommet (resp. un pied), tels que $\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))(i) = p$ et $\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))(E) = M$.

En vertu de II.4.2.5, M est donc un modèle de $\mathrm{Proj}(\mathbb{E})$, libre à un générateur de sorte E.

Par hypothèse, on sait qu'il existe un modèle de $\mathbb{E}$, libre à un générateur de sorte E ; c'est donc, par transitivité (voir I.2.3.2), un objet libre de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ engendré par M.

On en déduit que le sommet et tout pied de tout cône projectif (d'indexation nécessairement discrète) $p\in\mathrm{Qual}(\mathbb{E})$ engendre un objet libre de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$.

De III.1.2.1, il résulte que $\mathrm{Qual}(\mathbb{E})$ est une $\mathcal{D}iscun^{\alpha}$-qualification, i. e. que $\mathbb{E}$ est une $(\alpha,\mathcal{D}iscun)$-esquisse et donc, en vertu de II.3.4.4 et II.4.5.4, qu'elle est semblable à une esquisse α-projective.

Pour finir, il est clair que (d) implique (a).

[Note 7. Cet exercice III.2.4 n'est qu'une interprètation particulière *automatique* de l'exercice général III.1.4, dans le cas particulier où la "catégorie de base" $\mathbb{C}$ est une catégorie projectivement esquissable (ou encore localement présentable).

En effet, compte tenu des propriétés particulières d'une catégorie localement présentable, rappelées en II.4.2.5, il a suffit de traduire les considérations générales de III.1.4 au moyen *systématique* de II.4.5 (dont II.3.4.4 n'est qu'un aspect particulier).]

[Note 8. Soit α un ordinal régulier et $\mathbb{E}$ une $(\alpha, \mathcal{V}_1\mathcal{D}isc_1)$-esquisse.
En appliquant successivement les résultats de III.2.3 et III.2.4, il est facile de prouver - par conséquent d'une autre façon que celle évoquée dans la Note 4 - que les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(a') il existe un ordinal régulier $\beta\geq\alpha$ et une analogie de $\mathbb{E}$ vers une esquisse β-projective,

(b') pour tout objet E de $\mathbb{E}$, il existe un modèle de $\mathbb{E}$, libre à un générateur de sorte E,

(c') pour tout objet E de $\mathbb{E}$ qui est sommet d'un cône inductif distingué de $\mathbb{E}$, il existe un modèle de $\mathbb{E}$, libre à un générateur de sorte E.

De plus, il est immédiat d'établir que l'une de ces trois conditions est vérifiée si, et seulement si:

(d') l'esquisse $\mathbb{E}$ est analogue à une esquisse α-projective.:

Cette équivalence des assertions (a'), (b'), (c') et (d') précise (et généralise au cas non finitaire - mais là n'est pas l'essentiel) le théorème 3 (plus exactement l'équivalence des points (i) et (iii) - les autres nous semblant tout à fait secondaires) énoncé par Barr en (M.D.S.K.).
Cependant, elle ne constitue pas une amélioration réellement consistante de ce qui est énoncé en III.2.2.1 (voir Note 4): l'énoncé III.2.4.1 en est, très exactement, cette partie non réellement consistante.
On s'étonne encore que Barr ne l'ait pas énoncée en (M.D.S.K.).]

III.2.5. Cinquième exercice.

III.2.5.1. Enoncé [voir Notes 9 et 10].

On suppose que $\mathbb{E}$ est une $(\omega, \mathcal{V}_1\mathcal{D}isc_1)$-esquisse.

Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(a) $\mathbb{E}$ est semblable à une $(\omega, \mathcal{V}_1\mathcal{D}iscfin_1)$-esquisse,

(b) Mod($\mathbb{E}$) est une sous-catégorie pleine de Mod(Proj($\mathbb{E}$)), stable par ultraproduits.

Montrer, de plus, que l'une des deux conditions précédentes est vérifiée si, et seulement si:

(c) Mod($\mathbb{E}$) est une sous-catégorie pleine de Mod((ω, $\mathcal{V}_1$)-esq($\mathbb{E}$)) , stable par ultraproduits.

III.2.5.2. Solution [voir Notes 9 et 10].

Montrons que (a) implique (b).

Si $\mathbb{E}$ est semblable à une certaine (ω, $\mathcal{V}_1\mathcal{D}$iscfin$_1$)-esquisse $\mathbb{E}^*$, alors $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}^*$ ont le même support $\mathbb{S}$.

D'après II.4.5.1 et I.4.3.3, Mod($\mathbb{E}$) = Mod($\mathbb{E}^*$) est stable par ultraproduits dans Mod(Proj($\mathbb{E}^*$)) .

D'après II.4.2.4, les ultraproduits se calculent point par point dans Mod(Proj($\mathbb{E}^*$)) , autrement dit Mod(Proj($\mathbb{E}^*$)) est stable par ultraproduits dans Ens$^{\mathbb{S}}$.

Il en résulte que Mod($\mathbb{E}$) = Mod($\mathbb{E}^*$) est stable par ultraproduits dans Ens$^{\mathbb{S}}$. D'après II.4.2.4, Mod(Proj($\mathbb{E}$)) est stable par ultraproduits dans Ens$^{\mathbb{S}}$ (ils se calculent également point par point).

On en conclut que Mod($\mathbb{E}$) est stable par ultraproduits dans Mod(Proj($\mathbb{E}$)) .

Montrons, maintenant, que (b) implique (a).

D'après II.4.5.1, on a Mod($\mathbb{E}$) = Sat(Mod(Proj($\mathbb{E}$),Qual($\mathbb{E}$)) .
Comme, par hypothèse, Mod($\mathbb{E}$) est stable par ultraproduits dans Mod(Proj($\mathbb{E}$)) , il résulte de III.1.5, que:

$$\text{Mod}(\mathbb{E}) = \text{Sat}(\text{Mod}(\text{Proj}(\mathbb{E})),\text{VDiscfin}(\text{Qual}(\mathbb{E}))) ,$$

où VDiscfin(Qual($\mathbb{E}$)) est, par construction, une $\mathcal{VD}$iscfin$^{\omega}{}_{\omega}$-qualification.

D'après II.4.5.2 et II.4.5.3, il est immédiat de constater que $\mathbb{E}$ est semblable à la (ω, $\mathcal{V}_1\mathcal{D}$iscfin$_1$)-esquisse

$$\text{Esq}(\text{VDiscfin}(\text{Qual}(\mathbb{E}))) .$$

Pour finir, il est clair que (b) équivaut à (c).

[Note 9. Cet exercice III.2.5 n'est qu'une interprètation particulière *automatique* de l'exercice général III.1.5, dans le cas particulier où la "catégorie de base" $\mathbb{C}$ est une catégorie projectivement esquissable (ou encore localement présentable).

En effet, compte tenu des propriétés particulières d'une catégorie localement présentable, rappelées en II.4.2.5, il a suffit de traduire les considérations générales de III.1.5 au moyen *systématique* de II.4.5.]

[Note 10. On reconnaitra dans l'énoncé III.2.5 le théorème 4 formulé par Barr en (M.D.S.K.) (sans autre modification ou précision que terminologique). L'essentiel de sa démonstration n'est rien d'autre, précisément écrite (notamment, en ne tenant aucun compte de l'affirmation - erronnée - contenue dans la première phrase de la remarque suivant son énoncé et précédant sa preuve - ce qui modifie tout de même un peu les choses!), que celle de III.2.5.2, i. e. que celle de III.1.5.2. Autrement dit, elle n'a rien de proprement spécifique aux catégories esquissables. Par contre elle est spécifique des catégories qualifiables, ou encore axiomatisables; il s'agit là d'un point de vue bien classique initié par Németi-Sain (et Andréka), par exemple en (C.I.S.B.) - voir III.1.5.2, Note 6.]

APPENDICE

CARACTERISATIONS
SEMANTIQUES INTRINSEQUES
DES
CATEGORIES EQUISSABLES

1 . Soit $\mathbb{E} = (\mathrm{Supp}(\mathbb{E}), \mathrm{CP}(\mathbb{E}), \mathrm{CI}(\mathbb{E}))$ une esquisse et θ un ordinal inaccessible.

On dit que $\mathbb{E}$ est *θ-petite* si, et seulement si:

- $\mathrm{Supp}(\mathbb{E})$ est un graphe compositif θ-petit,
- $\mathrm{CP}(\mathbb{E})$ est un ensemble (de cônes projectifs distingués) θ-petit,
- $\mathrm{CI}(\mathbb{E})$ est un ensemble (de cônes inductifs distingués) θ-petit,
- tout cône projectif distingué dans $\mathbb{E}$ est d'indexation θ-petite,
- tout cône inductif distingué dans $\mathbb{E}$ est d'indexation θ-petite.

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie et θ un ordinal inaccessible.

On dit que $\mathbb{C}$ est *θ-esquissable* si, et seulement si;

- il existe une esquisse θ-petite $\mathbb{E}$ telle que $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ sont équivalentes.

On dit que $\mathbb{C}$ est *θ-modelable* [voir Note 1] si, et seulement si:

- il existe un ordinal régulier $\beta<\theta$ et une sous-catégorie $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{C}$ tels que:
    + $\mathbb{C}$ possède toutes les limites inductives d'indexations petites et β-filtrantes,
    + $\mathbb{C}'$ est petite,
    + $\mathbb{C}'$ est pleine,
    + $\mathbb{C}'$ est dense dans $\mathbb{C}$,
    + tout rétracte d'un objet de $\mathbb{C}'$ est isomorphe à un objet de $\mathbb{C}'$,
    + tout objet de $\mathbb{C}'$ est un objet β-présentable de $\mathbb{C}$,
    + pour tout objet C de $\mathbb{C}$, la catégorie $\mathbb{C}'/C$ est β-filtrante.

Rappelons que [voir Note 1]:

- *la catégorie $\mathbb{C}$ est θ-esquissable si, et seulement si, elle est θ-modelable.*

En effet, soit $\mathbb{E}$ une esquisse θ-petite. Alors, la catégorie θ-esquissée $\mathbb{C} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est bien θ-modelable, i. e. vérifie effectivement les propriétés précédentes, si l'on note:

- i la borne supérieure des cardinaux des indexations des cônes projectifs distingués dans $\mathbb{E}$,

- δ l'ordinal régulier ω_{i+1} d'indice $i+1$,
- s le cardinal de $\mathrm{Supp}(\mathbb{E})$,
- i' le cardinal de $\mathrm{CP}(\mathbb{E})$,
- j la borne supérieure des cardinaux des indexations des cônes inductifs distingués dans $\mathbb{E}$,
- j' le cardinal de $\mathrm{CI}(\mathbb{E})$,
- β l'ordinal régulier $\omega_{\sup(\delta,s,i',j,j')+1}$,
- $\mathbb{C}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ dont les objets sont les modèles $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ tels que:
    + pour tout objet E de $\mathbb{E}$, $M(E)$ est un ensemble β-petit.

Inversement, supposons que $\mathbb{C}$ est une catégorie θ-modelable. Si $\Delta = (C'_I)_{I\in\mathbb{I}}$ est un diagramme de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}'$ et d'indexation β-petite, on note $\Delta//\mathbb{C}'$ la catégorie telle que:
- ses objets sont les cônes inductifs $s' = (s'_I:C'_I \to C')_{I\in\mathbb{I}}$, où C' est un quelconque objet de $\mathbb{C}'$,
- ses flèches sont les

$$(s',c',s''):(s'_I:C'_I \to C')_{I\in\mathbb{I}} \to (s''_I:C'_I \to C'')_{I\in\mathbb{I}}$$

où $c':C' \to C''$ est une quelconque flèche de $\mathbb{C}'$ telle que:
    + pour tout objet I de $\mathbb{I}$, on a $c'.s'_I = s''_I$.

Dans ces conditions, il est facile de constater que $(C'_{s'})_{s'\in\Delta//\mathbb{C}'}$ est un diagramme, à valeurs dans $\mathbb{C}'$, localement limite inductive, dans $\mathbb{C}$, du diagramme Δ . Autrement dit, que l'on a:

$$(*_\Delta)\qquad \begin{array}{c} \lim.\ \mathrm{proj.}\ (\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C'_I,-))_{I\in\mathbb{I}^{op}} \\ = \\ \lim.\ \mathrm{ind.}\ (\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C'_{s'},-))_{s'\in(\Delta//\mathbb{C}')^{op}}. \end{array}$$

Alors on note $\langle\langle \mathbb{C}'^{op} \rangle\rangle_\beta$ l'esquisse telle que:
- son support est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\mathbb{C}}$ dont les objets sont:
    + d'une part les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C',-):\mathbb{C} \to \mathrm{Ens}$, dès que C' est objet de $\mathbb{C}'$,
    + d'autre part les foncteurs $U:\mathbb{C} \to \mathrm{Ens}$ qui sont limites projectives (choisies) de diagrammes de la forme $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C'_I,-))_{I\in\mathbb{I}^{op}}$, dès que $\Delta = (C'_I)_{I\in\mathbb{I}}$ est un diagramme de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}'$ et d'indexation (représentant une classe d'isomorphisme) β-petite,
- y sont distingués les cônes projectifs limites (dans $\mathrm{Ens}^{\mathbb{C}}$) et les cônes inductifs limites (dans $\mathrm{Ens}^{\mathbb{C}}$) , intervenant dans l'égalité $(*_\Delta)$, pour tout diagramme Δ , à valeurs dans $\mathbb{C}'$, d'indexation (représentant une classe d'isomorphisme) β-petite.

On vérifie, alors, que $\langle\langle\mathbb{C}'^{op}\rangle\rangle_B$ est bien une esquisse θ-petite et que $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Mod}(\langle\langle\mathbb{C}'^{op}\rangle\rangle_B)$ sont bien équivalentes.

[Note 1. La caractérisation *sémantique* et *intrinsèque* précédente des catégories esquissables (par une esquisse - petite - absolument quelconque) généralise celles rappelées en II.4.2.6 et II.4.4.5, qui seules nous ont été utiles dans ce qui précède. Elle a été obtenue, pour la première fois, en (C.M.C.E.), dont nous reprenons mot à mot les considérations (à l'exception de la cinquième propriété intervenant dans la définition des catégories modelables, qui ne figure pas dans (C.M.C.E.) - parce qu'elle n'est pas, techniquement, nécessaire - mais que nous faisons apparaître ici en raison des développements que nous avons en vue au point 2 de cet Appendice).

Comme en (C.M.C.E.), il convient de remarquer que, si α est un ordinal régulier, si $\mathcal{X}_1$ est une classe de cônes inductifs et si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{X}_1)$-esquisse (évidemment θ-petite, pour un ordinal inaccessible θ suffisamment grand), alors $\mathbb{C} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est bien θ-modelable mais, pour un ordinal β et une sous-catégorie $\mathbb{C}'$ qui lui sont ainsi associés, on a (en général) $\alpha<\beta$ et $\langle\langle\mathbb{C}'^{op}\rangle\rangle_B$ *n'est pas* une $(\alpha, \mathcal{X}_1)$-esquisse.
Si l'on y tient absolument (quoique ceci semble discutable), on peut vouloir "améliorer" la caractérisation précédente de sorte que:
- on puisse "conserver le $\mathcal{X}_1$" (sans se préoccuper de conserver le α); c'est l'objet du point 2 de cet Appendice - qui ne présente pas de difficulté théorique,
- plus précisément encore, on puisse conserver *à la fois* le α et le $\mathcal{X}_1$; c'est l'objet du point 3 de cet Appendice - qui nécessite un peu plus de sophistication.]

2. Soit $\mathbb{J}$ une catégorie.
On note $\mathbb{J}^-$ la catégorie obtenue en adjoignant à $\mathbb{J}$ un élément initial. Alors, $\mathbb{J}^-$ s'identifie à un cône projectif d'indexation $\mathbb{J}$ et de sommet cet élément initial.
Soit Y un ensemble.
On note Y* le cône projectif d'indexation (notée Index(Y*) :

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "{(1,y)}"'] & & 2 \arrow[dl, "{(2,y)}"] \\
& \ldots y \ldots &
\end{tikzcd}
$$

(où y varie dans Y)

et représenté ci-dessous;

$$
\begin{tikzcd}
& O(Y) \arrow[dl, "{Id(O(y))}"'] \arrow[dr, "{Id(O(y))}"] & \\
O(Y) \arrow[dr] & & O(Y) \arrow[dl] \\
& \ldots y \ldots &
\end{tikzcd}
$$

(où y varie dans Y)

Soit $\mathcal{X}$ une classe de cônes projectifs.

On dit que $\mathcal{X}$ est une classe *localement librement stable* si, et seulement si:

- pour toute catégorie localement présentable $\mathbb{C}$, pour toute $\mathcal{X}$-qualification P , relative à $\mathbb{C}$, pour tout ordinal régulier β et pour tout objet C de $\mathbb{C}$, s'il existe un diagramme localement libre de $Sat(\mathbb{C},P)$, engendré par C et à valeurs β-présentables, alors il existe un diagramme localement libre $(LL(C)_J)_{J\in\mathcal{J}(C)}$ de $Sat(\mathbb{C},P)$, engendré par C , à valeurs β-présentables et tel que $\mathcal{J}(C)^-$ appartient à $\mathcal{X}$.

Par exemple, les classes $\mathcal{D}$iscun et $\mathcal{D}$isc sont, d'après I.4.1.2 et I.4.1.4, localement librement stables.

On dit que $\mathcal{X}$ est une classe *localement indépendamment stable* si, et seulement si:

- pour toute catégorie localement présentable $\mathbb{C}$, pour toute $\mathcal{X}$-qualification P , relative à $\mathbb{C}$, pour tout ordinal régulier β et pour tout objet C de $\mathbb{C}$, s'il existe une famille localement indépendante d'objets de $Sat(\mathbb{C},P)$, engendrée par C et à valeurs β-présentables, alors il existe une famille localement indépendante $(LI(C)_y)_{x\in Y(C)}$ de $Sat(\mathbb{C},P)$,

engendrée par C , à valeurs β-présentables et telle que Y(C)* appartient à $\mathcal{X}$.
Par exemple, la classe $\mathcal{V}$ est, d'après I.4.1.1, localement indépendamment stable.

Soit $\mathcal{X}_i$ une classe de cônes inductifs.
Nous notons $\mathcal{X}_i^{op}$ la classe des cônes projectifs duaux des cônes inductifs appartenant à $\mathcal{X}_i$.
Nous dirons que $\mathcal{X}_i$ est *localement librement co-stable* si, et seulement si:
- $\mathcal{X}_i^{op}$ est localement librement stable.
Par exemple, $\mathcal{D}$iscun$_i$ et $\mathcal{D}$isc$_i$ sont localement librement co-stables.
Nous dirons que $\mathcal{X}_i$ est *localement indépendamment co-stable* si, et seulement si:
- $\mathcal{X}_i^{op}$ est localement indépendamment stable.
Par exemple, la classe $\mathcal{V}_i$ est localement indépendamment co-stable.

Soit $\mathcal{X}_i$ une classe de cônes inductifs et $\mathbb{C}$ une catégorie.
On dit que $\mathbb{C}$ est *(?,$\mathcal{X}_i$)-esquissable* si, et seulement si:
- il existe un ordinal régulier β et une (β,$\mathcal{X}_i$)-esquisse $\mathbb{E}$ tels que $\mathbb{C}$ et Mod($\mathbb{E}$) sont équivalentes.

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie et $\mathcal{X}_i$ une classe localement librement (resp. indépendamment) co-stable de cônes inductifs.
Il est facile de vérifier que [voir Note 2]:
- *la catégorie $\mathbb{C}$ est (?,$\mathcal{X}_i$)-esquissable si, et seulement si, il existe un ordinal régulier β et une sous-catégorie $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{C}$ tels que:*
  + *$\mathbb{C}$ possède toutes les limites inductives d'indexations petites et β-filtrantes,*
  + *$\mathbb{C}'$ est petite,*
  + *$\mathbb{C}'$ est pleine,*
  + *$\mathbb{C}'$ est dense dans $\mathbb{C}$,*
  + *tout rétracte d'un objet de $\mathbb{C}'$ est isomorphe à un objet de $\mathbb{C}'$,*
  + *tout objet de $\mathbb{C}'$ est un objet β-présentable de $\mathbb{C}$,*
  + *tout diagramme $\Delta = (C'_I)_{I \in \mathbb{I}}$, d'indexation β-petite et à valeurs dans $\mathbb{C}'$, admet, dans $\mathbb{C}$, un diagramme (resp. une famille) localement (resp. quasi-) limite inductive*

$(C''_j)_{j\in \mathcal{J}(\Delta)}$ (resp. $(C''_y)_{y\in Y(\Delta)}$), à valeurs dans $\mathbf{C}'$, de sorte que $\mathcal{J}(\Delta)^-$ (resp. $Y(\Delta)^*$) appartient à $\mathcal{X}_i^{op}$.

En effet, si $\mathbf{E}$ est une $(\alpha,\mathcal{X}_i)$-esquisse, elle est nécessairement θ-petite et $\mathbf{C} = \mathrm{Mod}(\mathbf{E})$ est θ-modelable, pour un ordinal inaccessible θ assez grand, et donc, d'après le point 1 de cet Appendice, les six premières conditions précédentes sont vérifiées, pour un certain ordinal régulier $\alpha<\beta<\theta$ et une certaine sous-catégorie $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$. En particulier, il est facile de voir qu'elles imposent que tout objet β-présentable de $\mathbf{C}$ est isomorphe à un objet de $\mathbf{C}'$).
De plus, on a:

$$\mathbf{C} = \mathrm{Sat}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbf{E})),\mathrm{Qual}(\mathbf{E})) ,$$

où $\mathrm{Qual}(\mathbf{E})$ est une $\mathcal{X}_i^{op}$-qualification, relative à $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbf{E}))$, associée à $\mathbf{E}$ comme en II.4.5.1.
Ainsi, si $\Delta = (C'_I)_{I\in \mathcal{I}}$ est un diagramme de $\mathbf{C}$, d'indexation β-petite et à valeurs dans $\mathbf{C}'$, il admet dans $\mathbf{C}$ (comme au point 1) un diagramme, à valeurs dans $\mathbf{C}'$, localement limite inductive, à savoir:

$$D(\Delta) = (C'_{m'})_{m'\in\Delta//\mathbf{C}'} ,$$

par conséquent, il admet aussi dans $\mathbf{C}$ une famille, à valeurs dans $\mathbf{C}'$, quasi-limite inductive, à savoir:

$$F(\Delta) = (C'_{m'})_{m'\in\mathrm{Ob}(\Delta//\mathbf{C}')} .$$

Il en résulte que l'objet $M(\Delta)$ de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbf{E}))$, limite inductive dans $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbf{E}))$ du diagramme Δ , vérifie:
- $D(\Delta)$ est un diagramme de $\mathbf{C}$, à valeurs β-présentables, localement libre, engendré par $M(\Delta)$,
- $F(\Delta)$ est une famille d'objets de $\mathbf{C}$, à valeurs β-présentables, localement indépendante, engendrée par $M(\Delta)$.

Comme $\mathcal{X}_i^{op}$ est localement librement (resp. indépendamment) stable, on en déduit que:
- $M(\Delta)$ engendre un diagramme $(C''_j)_{j\in\mathcal{J}(\Delta)}$ de $\mathbf{C}$, localement libre, à valeurs β-présentables (par conséquent, à isomorphismes près, à valeurs dans $\mathbf{C}'$), tel que $\mathcal{J}(\Delta)^-$ appartient à $\mathcal{X}_i^{op}$,

(resp.
- $M(\Delta)$ engendre une famille $(C''_y)_{y\in Y(\Delta)}$ de $\mathbf{C}$, localement indépendante, à valeurs β-présentables (par conséquent, à isomorphismes près, à valeurs dans $\mathbf{C}'$), telle que $Y(\Delta)^*$ appartient à $\mathcal{X}_i^{op}$).

Il est alors facile de vérifier que $(C''_j)_{j\in\mathcal{J}}$ (resp. $(C''_y)_{y\in Y(\Delta)}$) est un diagramme (resp. une famille quasi-) limite inductive de Δ dans $\mathbf{C}$ qui répond aux contraintes exigées dans la septième condition précédente.

Inversement, si $\mathbb{C}$ vérifie les sept conditions précédentes, on construit une $(\beta, \mathcal{X}_i)$-esquisse $\mathbb{E}$ telle que $Mod(\mathbb{E}) \simeq \mathbb{C}$ en procédant exactement comme au point 1 de cet Appendice, mais en substituant aux égalités de type $(*_\Delta)$ celles du type suivant:

$$(**_\Delta) \qquad \begin{array}{c} \text{lim. proj. } (Hom_{\mathbb{C}}(C'_I,-))_{I\in\mathcal{I}^{op}} \\ = \\ \text{lim. ind. } (Hom_{\mathbb{C}}(C''_J,-))_{J\in(\mathcal{J})^{op}} \end{array},$$

(resp.

$$(**_\Delta) \qquad \begin{array}{c} \text{lim. proj. } (Hom_{\mathbb{C}}(C'_I,-))_{I\in\mathcal{I}^{op}} \\ = \\ \text{lim. ind. } (U_z:\mathbb{C} \to Ens)_{z\in Index(Y(\Delta)^*)} \end{array}$$

où l'on a posé:
- $U_1 = U_2 = \text{lim. proj. } (Hom_{\mathbb{C}}(C'_I,-))_{I\in\mathcal{I}^{op}}$,
- $U_y = Hom_{\mathbb{C}}(C''_y,-)$, pour tout $y\in Y(\Delta)$).

[Note 2. Cette caractérisation sémantique intrinsèque des catégories $(?, \mathcal{X}_i)$-esquissables est une reformulation élémentaire de celle des catégories esquissables (par une esquisse quelconque) fournie au point 1 de cet Appendice. Pour l'obtenir, il est *essentiel* de disposer de tous les éléments rappelés précédemment, notamment: diagrammes localement libres (ou familles localement indépendantes), satisfaction (ou validation) et qualifications (ou axiomatisations). Evidemment, elle suppose menée à bien, par la forme même de ses hypothèses, une étude assez fine des classes $\mathcal{X}_i$ localement (librement ou indépendamment) co-stables. Une telle étude reste à faire en toute généralité (i. e. pour d'autres classes que $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{D}iscun_i$ ou $\mathcal{D}isc_i$, qui, elles, sont *évidemment* localement co-stables ... depuis que ceci fut, *pour la première fois*, étudié, établi et utilisé en (C.M.C.F.)). Certain(s) serai(en)t sans doute plus avisé(s) de s'attaquer à la résolution de ce problème, plutôt que de prétendre en "étudier" d'autres ... déjà résolus.

Notons (comme en (C.M.C.E.) et comme précédemment), que, si α est un ordinal régulier et si $\mathbb{E}$ est une $(\alpha, \mathcal{X}_i)$-esquisse, alors la catégorie $Mod(\mathbb{E})$ est évidemment $(?, \mathcal{X}_i)$-esquissable et donc vérifie les conditions précédentes, mais avec un β supérieur à α (en général). Le problème reste donc posé de caractériser intrinsèquement les catégories $(\alpha, \mathcal{X}_i)$-esquissables (pour un α et une $\mathcal{X}_i$ quelconques fixés): sa solution, nettement plus sophistiquée, est donnée au point 3 de cet Appendice.

Remarquons que, si $\mathcal{X}_i = \mathcal{D}isc_i$ (resp. $\mathcal{X}_i = \mathcal{D}iscun_i$), on obtient des formulations particulières de la caractérisation précédente qui sont *moins precises* (et donc moins intéressantes) que celles de II.4.4.5 et II.4.2.6 (où l'on a affirmé, de plus, notamment, qu'on pouvait encore prendre $\beta = \alpha$).

Lorsque $\mathcal{X}_i = \mathcal{V}_i$, on peut formuler la caractérisation précédente comme suit:

- *la catégorie* $\mathbf{C}$ *est* $(?, \mathcal{V}_i)$*-esquissable si, et seulement si, il existe un ordinal régulier* β *et une sous-catégorie* $\mathbf{C}'$ *de* $\mathbf{C}$ *tels que:*
    + $\mathbf{C}$ *possède toutes les limites inductives d'indexations petites et* β*-filtrantes,*
    + $\mathbf{C}'$ *est petite,*
    + $\mathbf{C}'$ *est pleine,*
    + $\mathbf{C}'$ *est dense dans* $\mathbf{C}$ *,*
    + *tout rétracte d'un objet de* $\mathbf{C}'$ *est isomorphe à un objet de* $\mathbf{C}'$ *,*
    + *tout objet de* $\mathbf{C}'$ *est un objet* β*-présentable de* $\mathbf{C}$ *,*
    + *tout diagramme d'indexation* β*-petite et à valeurs dans* $\mathbf{C}'$ *, admet, dans* $\mathbf{C}$ *, un objet quasi-limite inductive qui appartient à* $\mathbf{C}'$.]

3. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et $\mathbf{G}$ une classe d'objets de $\mathrm{Ens}^{\mathbf{C}}$.

On note $*\mathbf{G}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\mathbf{C}}$ ayant $\mathbf{G}$ pour classe d'objets.

On dit que $\mathbf{G}$ est *légitime* si, et seulement si:

- $*\mathbf{G}$ est une catégorie petite.

Soit $\mathcal{X}_p$ (resp. $\mathcal{X}_i$) une classe de cônes projectifs (resp. inductifs).

On dit que $\mathcal{X}_p$ (resp. $\mathcal{X}_i$) est *index-petite* si, et seulement si:

- la classe $\mathrm{Index}(\mathcal{X}_p)$ (resp. $\mathrm{Index}(\mathcal{X}_i)$) des indexations des éléments de $\mathcal{X}_p$ (resp. $\mathcal{X}_i$) est petite (i. e. est un ensemble).

Si $\mathcal{X}_p$ est index-petite, on note $\alpha(\mathcal{X}_p)$ le plus petit ordinal régulier qui majore les cardinaux de toutes les indexations des éléments de $\mathcal{X}_p$.

Soit $\mathcal{X}_p$ (resp. $\mathcal{X}_i$) une classe index-petite de cônes projectifs (resp. inductifs), $\mathbf{C}$ une catégorie et $\mathbf{G}$ un ensemble légitime de foncteurs de $\mathbf{C}$ vers Ens .
On note $[\mathbf{G}]_{\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i}$ la $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquisse de support $*\mathbf{G}$ telle que:
- ses cônes projectifs distingués sont les cônes projectifs, appartenant à $\mathcal{X}_p$, qui sont limites projectives dans $\mathrm{Ens}^{\mathbf{C}}$.
- ses cônes inductifs distingués sont les cônes inductifs, appartenant à $\mathcal{X}_i$, qui sont limites inductives dans $\mathrm{Ens}^{\mathbf{C}}$.
On note

$$\phi(\mathbf{G})_{\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i}:\mathbf{C} \to \mathrm{Mod}([\mathbf{G}]_{\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i})$$

le foncteur tel que:
- naturellement en tout objet C de $\mathbf{C}$ et en tout objet $U:\mathbf{C} \to \mathrm{Ens}$ de $[\mathbf{G}]_{\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i}$, on a:

$$\phi(\mathbf{G})_{\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i}(C)(U) = U(C) .$$

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et $\mathbf{G}$ un ensemble de foncteurs de $\mathbf{C}$ vers Ens .
On dit que $\mathbf{G}$ est *générique* pour $\mathbf{C}$ [voir Note 3] si, et seulement si:
- pour tout objet C de $\mathbf{C}$, le foncteur (canonique):

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,-)/*\mathbf{G}) \to *\mathbf{G} \to \mathrm{Ens}^{\mathbf{C}}$$

admet $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,-)$ pour limite projective (canonique).
On dit qu'un foncteur $U:\mathbf{C} \to \mathrm{Ens}$ est $\mathbf{G}$-*satisfaisant* [voir Note 4] si, et seulement si:
- pour tout objet C de $\mathbf{C}$, le foncteur (canonique):

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,-)/*\mathbf{G}) \to (\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,-)/*(\mathbf{G} \cup \{U\}))$$

est initial.

Soit β un ordinal régulier, $\mathbf{C}$ une catégorie et $\mathbf{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}$.
On dit qu'un foncteur $U:\mathbf{C} \to \mathrm{Ens}$ est $(\beta,\mathbf{C}')$-*petit* si, et seulement si:
- pour tout objet C' de $\mathbf{C}$, l'ensemble $U(C')$ est β-petit.

Soit α un ordinal régulier et $\mathbf{C}$ une catégorie.
On dit qu'un foncteur $U:\mathbf{C} \to \mathrm{Ens}$ est α-*commutant* [voir Note 3] si, et seulement si:
- U commute aux limites inductives d'indexations petites et α-filtrantes.

Soit β un ordinal régulier, $\mathbf{C}$ une catégorie et $\mathbf{C}'$ une sous-catégorie de $\mathbf{C}$.

Plus précisément qu'au point 1 de cet Appendice, on dit que $\mathbb{C}$ est $(\beta,\mathbb{C}')$-*modelée* si, et seulement si:
- $\mathbb{C}$ possède toutes les limites inductives d'indexations petites et β-filtrantes,
- $\mathbb{C}'$ est petite,
- $\mathbb{C}'$ est pleine,
- $\mathbb{C}'$ est dense,
- tout rétracte d'un objet de $\mathbb{C}'$ est isomorphe à un objet de $\mathbb{C}'$,
- tout objet de $\mathbb{C}'$ est un objet β-présentable de $\mathbb{C}$,
- pour tout objet C de $\mathbb{C}$, la catégorie $\mathbb{C}'/C$ est β-filtrante,

(ainsi, une catégorie $(\beta,\mathbb{C}')$-modelée est θ-modelable, pour au moins un ordinal inaccessible θ assez grand, et une catégorie θ-modelable est $(\beta,\mathbb{C}')$-modelée, pour au moins un $\beta<\theta$ et au moins une $\mathbb{C}'$ convenablement choisis!),

Soit $\alpha\leqslant\beta$ deux ordinaux réguliers, $\mathbb{C}$ une catégorie et $\mathbb{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ tels que:
- $\mathbb{C}$ est $(\beta,\mathbb{C}')$-modelée.

Il est facile de voir que:
- si $U:\mathbb{C}\to \mathrm{Ens}$ est un foncteur α-commutant, alors l'ensemble 1 engendre le diagramme localement libre
$$(1/U|_{\mathbb{C}'})\to\mathbb{C}'\to\mathbb{C},$$
relativement au foncteur U (autrement dit, U est limite inductive canonique dans $\mathrm{Ens}^{\mathbb{C}}$ du diagramme
$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C'_x,-))_{x\in U(C'),C'_x=C',C'\in\mathbb{C}'}),$$
- si $U:\mathbb{C}\to \mathrm{Ens}$ et $V:\mathbb{C}\to \mathrm{Ens}$ sont deux foncteurs α-commutants, alors la classe $\mathrm{Nat}(U,V)$ est un ensemble,
- si $\mathbb{G}$ est un ensemble générique pour $\mathbb{C}$, formé de foncteurs α-commutants, alors $\mathbb{G}$ est légitime.

Soit $\mathcal{X}_p$ (resp. $\mathcal{X}_i$) une classe index-petite de cônes projectifs (resp. inductifs), $\beta\geqslant\alpha(\mathcal{X}_p)$ un ordinal régulier, $\mathbb{C}$ une catégorie $(\beta,\mathbb{C}')$-modelée et $\mathbb{G}$ un ensemble générique pour $\mathbb{C}$, constitué de foncteurs $\alpha(\mathcal{X}_p)$-commutants et $(\beta,\mathbb{C}')$-petits.

On note $\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p}$ la plus petite sous-classe de $\mathrm{Ob}(\mathrm{Ens}^{\mathbb{C}})$ telle que:
- $\mathbb{G}\subset\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p}$
- si $U:\mathbb{C}\to \mathrm{Ens}$ est un foncteur $\alpha(\mathcal{X}_p)$-commutant qui est sommet d'un cône projectif, appartenant à $\mathcal{X}_p$ et limite projective dans $\mathrm{Ens}^{\mathbb{C}}$ d'un diagramme à valeurs dans $*(\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p})$, alors U appartient à $\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p}$.

Clairement, $*(\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p})$ est essentiellement petite: on désigne alors par $E_{\mathcal{X}_p}(\mathbb{G})$ un sous-ensemble de $\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p}$ tel que $*(E_{\mathcal{X}_p}(\mathbb{G})) \to *(\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p})$ soit une équivalence.

On note $\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}'}$ la classe des foncteurs $U:\mathbb{C} \to \mathrm{Ens}$ tels que:
- U est $\alpha(\mathcal{X}_p)$-commutant,
- U est $E_{\mathcal{X}_p}(\mathbb{G})$-satisfaisant [voir Note 4],
- U est $(\beta,\mathbb{C}')$-petit.

Clairement, $*(\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}'})$ est essentiellement petite et contient $*(\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p})$: on désigne par $E_{\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}'}(0,\mathbb{G})$ un sous-ensemble de $\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}'}$ tel que $E_{\mathcal{X}_p}(\mathbb{G}) \subset E_{\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}'}(0,\mathbb{G})$ et $*(E_{\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}'}(0,\mathbb{G})) \to *(\mathbb{G}_{\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}'})$ est une équivalence.

Enfin, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement:

$$\mathbb{E}(0,\mathbb{G}) = [E_{\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}'}(0,\mathbb{G})]_{\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i} ,$$

et:

$$\phi(0,\mathbb{G}) = \phi(E_{\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}'}(\mathbb{G}))_{\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i}:\mathbb{C} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}(0,\mathbb{G})) .$$

Dans ces conditions, il est facile de voir que:
- *le foncteur* $\phi(0,\mathbb{G})$ *est plein et fidèle.*

Soit $\mathcal{X}_p$ (resp. $\mathcal{X}_i$) une classe index-petite de cônes projectifs (resp. inductifs), $\beta\rangle\alpha(\mathcal{X}_p)$ un ordinal régulier, $\mathbb{C}$ une catégorie $(\beta,\mathbb{C}')$-modelée et $\mathbb{G}$ un ensemble générique pour $\mathbb{C}$, constitué de foncteurs α-commutants et $(\beta,\mathbb{C}')$-petits.

On dit que $\mathbb{G}$ est $(\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}',\mathcal{X}_i)$-*enveloppable* 1 *fois* et d'*enveloppe première* (ou 1-*ième*) $\mathbb{E}(1,\mathbb{G})$, si et seulement si:
- le foncteur plein et fidèle $\phi(0,\mathbb{G}):\mathbb{C} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}(0,\mathbb{G}))$ admet un adjoint à droite $\psi(0,\mathbb{G}):\mathrm{Mod}(\mathbb{E}(0,\mathbb{G})) \to \mathbb{C}$ (on note, alors, $(\phi(0,\mathbb{G}),\psi(0,\mathbb{G}),e_0,id)$ une co-monade idempotente sur $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}(0,\mathbb{G}))$ qui se déduit de cette adjonction),
- $E(1,\mathbb{G})$ est l'ensemble des seuls objets U de $\mathbb{E}(0,\mathbb{G})$ tels que:
  + pour tout modèle $M:\mathbb{E}(0,\mathbb{G}) \to \mathrm{Ens}$, on a:
  $e_0(M)(U)$ est inversible ,
- $\mathbb{E}(1,\mathbb{G}) = [E(1,\mathbb{G})]_{\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i}$.

Alors, on note:
- $\phi(1,\mathbb{G}) = \phi(E(1,\mathbb{G}))_{\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i}:\mathbb{C} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}(1,\mathbb{G}))$,

que l'on appelle la *comparaison* 1-*ième* associée à $\mathbb{G}$.

Dans ces conditions, il est facile de voir que:
- *le foncteur* $\phi(1,\mathbb{G})$ *est plein et fidèle.*

Soit $\mathcal{X}_p$ (resp. $\mathcal{X}_i$) une classe index-petite de cônes projectifs (resp. inductifs), $\beta\rangle\alpha(\mathcal{X}_p)$ un ordinal régulier, $\mathbb{C}$

une catégorie $(\beta,\mathbf{C}')$-modelée et $\mathbf{G}$ un ensemble générique pour $\mathbf{C}$, constitué de foncteurs α-commutants et $(\beta,\mathbf{C}')$-petits.

Par analogie avec précédemment, si λ est un ordinal, il est facile de définir (par récurrence transfinie) à quelles conditions $\mathbf{G}$ est λ *fois* $(\mathcal{X}_p,\beta,\mathbf{C}',\mathcal{X}_i)$-*enveloppable* et, si c'est le cas, quelle est son $(\mathcal{X}_p,\beta,\mathbf{C}',\mathcal{X}_i)$-*enveloppe* λ-*ième* $\mathbf{E}(\lambda,\mathbf{G})$ ainsi que la *comparaison* λ-*ième* $\phi(\lambda,\mathbf{G}):\mathbf{C} \to \mathrm{Mod}(\mathbf{E}(\lambda,\mathbf{G}))$.

Comme précédemment, on établit alors que:

- *le foncteur* $\phi(\lambda,\mathbf{G})$ *est plein et fidèle.*

Dans ces conditions, on dit que $\mathbf{G}$ est *totalement* $(\mathcal{X}_p,\beta,\mathbf{C}',\mathcal{X}_i)$-*enveloppable* si, et seulement si:

- pour tout ordinal λ, $\mathbf{G}$ est λ-fois $(\mathcal{X}_p,\beta,\mathbf{C}',\mathcal{X}_i)$-enveloppable.

Soit $\mathcal{X}_p$ (resp. $\mathcal{X}_i$) une classe index-petite de cônes projectifs (resp. inductifs) et $\mathbf{C}$ une catégorie.

On dit que $\mathbf{C}$ est $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-*analysable* si, et seulement si:

- il existe un ordinal régulier $\beta\rangle\alpha(\mathcal{X}_p)$, une sous-catégorie $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ et un ensemble $\mathbf{G}$ de foncteurs de $\mathbf{C}$ vers Ens tels que:
  + $\mathbf{C}$ est $(\beta,\mathbf{C}')$-modelée,
  + tout élément de $\mathbf{G}$ est $\alpha(\mathcal{X}_p)$-commutant et $(\beta,\mathbf{C}')$-petit,
  + $\mathbf{G}$ est générique pour $\mathbf{C}$,
  + $\mathbf{G}$ est totalement $(\mathcal{X}_p,\beta,\mathbf{C}',\mathcal{X}_i)$-enveloppable.

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que [voir Note 4]:

- *une catégorie* $\mathbf{C}$ *est* $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-*esquissable si, et seulement si, elle est* $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-*analysable.*

En effet, si $\mathbf{C}$ est $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-analysable, il existe un β, une $\mathbf{C}'$ et un $\mathbf{G}$ vérifiant les conditions précédentes.
Désignons alors par λ le premier ordinal (qui, par hypothèse, existe) tel que $\mathbf{E}(\lambda,\mathbf{G}) = \mathbf{E}(\lambda+1,\mathbf{G})$. On a donc, par construction, $\mathbf{C} \simeq \mathrm{Mod}(\mathbf{E}(\lambda,\mathbf{G}))$. Par conséquent, $\mathbf{C}$ est $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquissable.

Inversement, si $\mathbf{E}$ est une $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquisse telle que $\mathbf{C} \simeq \mathrm{Mod}(\mathbf{E})$, alors il existe un β et une $\mathbf{C}'$ tels que $\mathbf{C}$ est $(\beta,\mathbf{C}')$-modelée. De plus, si l'on pose:

$$\mathbf{G} = \{\, \mathrm{ev}(\mathbf{E})_E \;/\; E\in\mathrm{Ob}(\mathbf{E}) \,\},$$

il est clair que:

- $\mathbb{G}$ est formé de foncteurs $\alpha(\mathcal{X}_p)$-commutants (puisque les limites inductives d'indexations petites et $\alpha(\mathcal{X}_p)$-filtrantes se calculent point par point dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \simeq \mathbb{C}$),
- $\mathbb{G}$ est formé de foncteurs $(\beta,\mathbb{C}')$-petits (voir la construction de β et $\mathbb{C}'$ donnée au point 1),
- $\mathbb{G}$ est générique pour $\mathbb{C}$ (puisque $\mathrm{Yon}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))^{op}:\mathrm{Supp}(\mathbb{E})^{op} \to \mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))$ est dense et $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Proj}(\mathbb{E}))$).

De plus, la restriction à $*\mathrm{E}_{\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}'}(0,\mathbb{G})$ du foncteur $\mathrm{ev}(\mathbb{E}):\mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Ens}^{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{Ens}^{\mathrm{Mod}(\mathbb{E})}$ définit évidemment un homomorphisme de $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquisses:

$$\epsilon\mathrm{v}(\mathbb{E}):\mathbb{E} \to \mathbb{E}(0,\mathbb{G}) \ .$$

Alors, $\psi(0,\mathbb{G}) = \mathrm{Mod}(\epsilon\mathrm{v}(\mathbb{E})):\mathrm{Mod}(\mathbb{E}(0,\mathbb{G})) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \simeq \mathbb{C}$ est évidemment adjoint à droite de $\phi(0,\mathbb{G})$. Ainsi, $\mathbb{G}$ est $(\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}',\mathcal{X}_i)$-enveloppable 1 fois.

On procède de même pour les "ordres supérieurs": $\mathbb{G}$ est donc totalement $(\mathcal{X}_p,\beta,\mathbb{C}',\mathcal{X}_i)$-enveloppable et, par conséquent, $\mathbb{C}$ est $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-analysable.

[Note 3. Clairement, si $\mathbb{G}$ est un ensemble de foncteurs représentables $G:\mathbb{C} \to \mathrm{Ens}$ et générique pour $\mathbb{C}$, alors un ensemble $\mathrm{Rep}(\mathbb{G})$, de représentants des $G\epsilon\mathbb{G}$, est générateur (au sens classique) dans $\mathbb{C}$.

De même, si $U = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C,-):\mathbb{C} \to \mathrm{Ens}$ est un foncteur α-commutant et repésenté par l'objet C de $\mathbb{C}$, alors C est un objet α-présentable de $\mathbb{C}$.

Evidemment, ce n'est ni innocemment ni fortuitement que la terminologie - et les techniques - utilisées ici sont à rapprocher de celles employées par Gabriel-Ulmer en (L.P.L.G.).

[Note 4. La caractérisation *sémantique* et *intrinsèque* des catégories $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquissables - avec une $\mathcal{X}_p$ et une $\mathcal{X}_i$ quelconques arbitrairement fixées - que nous formulons ici (en faisant *volontairement* figurer quelques conditions qui - techniquement - ne sont pas absolument nécessaires, mais facilitent la comparaison avec les caractérisations précédentes - essentiellement, d'ailleurs, celle du point 1) est évidemment nettement plus sophistiquée que celle des catégories esquissables obtenue en (C.M.C.E), et rappelée au point 1, ou que celle des catégories $(?,\mathcal{X}_i)$-esquissables - avec *seulement* une $\mathcal{X}_i$ *localement librement co-stable* arbitrairement fixée - obtenue au point 2; à l'exception de quelques paraphrases plus "séductrices" (toujours possibles ... et que nous laissons le soin de formuler à d'autre(s) - fort expérimenté(s) en la matière), il ne semble pas que l'on puisse notablement l'améliorer, par exemple en n'énonçant que des propriétés "intérieures" (mais pas plus *internes* que les précédentes) à $\mathbf{C}$, i. e. *ne faisant pas intervenir* $\mathrm{Ens}^{\mathbf{C}}$.

• Il n'en demeure pas moins que cette caractérisation indique très précisément la marche à suivre: construire les enveloppes successives. En effet, un ensemble de foncteurs $\mathbf{G}$, générique pour $\mathbf{C}$, ayant été choisi, de deux choses l'une:

- ou bien, à l'étape λ, il y a échec dans la construction de l'enveloppe suivante (i. e. il n'y a pas l'ajoint à droite espéré): alors la catégorie considérée n'est pas $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquissable (en tout cas, pas par une $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquisse "engendrée par $\mathbf{G}$"),
- ou bien il n'y a "jamais" (i. e. quand on pousse la récurrence - qui finit, de toute manière, par "stationner" - assez loin) échec: alors une $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquisse, esquissant $\mathbf{C}$, est *automatiquement* obtenue (de plus, elle contiendra toute autre $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquisse de $\mathbf{C}$ "engendrée par $\mathbf{G}$").

Notons que le choix d'un ensemble de foncteurs $\mathbf{G}$, générique pour $\mathbf{C}$, susceptible d'être effectivement suffisamment enveloppable n'est pas plus difficile (ou arbitraire) que celui d'un ensemble générateur propre dans une catégorie dont on souhaite prouver qu'elle est, par exemple, localement présentable.

La construction des enveloppes successives de $\mathbf{G}$ correspond exactement à la préoccupation suivante (analogue à celle qui se présente dans le cas des catégories localement présentables):

- déterminer toutes les sortes d'une $(\mathcal{X}_p,\mathcal{X}_i)$-esquisse de $\mathbf{C}$, *conditionnées*, à partir des "sortes de base" que sont les éléments de $\mathbf{G}$, aussi bien par des *contraintes* $\mathcal{X}_p$-projectives que par des *contraintes* $\mathcal{X}_i$-inductives.

On ne peut ici (au contraire du cas purement projectif) se limiter à seulement ces nouveaux objets que sont les limites (projectives ou inductives) d'anciens: par exemple, le complémentaire A', dans B, de $A \subset B$, est entièrement conditionné, quand A et B sont connus, par la contrainte inductive $A+A' = B$ et, cependant, A' n'est pas limite (projective ou inductive d'indexation discrète) d'un diagramme à valeurs dans $\{A,B\}$. C'est tout le rôle des foncteurs "satisfaisants" que de permettre d'atteindre ces nouveaux objets.]

BIBLIOGRAPHIE

(A.C.I.S.) H. Andréka et I. Németi:

A general axiomatizability theorem formulated in terms of cône-injective subcategories, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 29, Univ. Alg., Esztergom, 1977.

(C.A.L.O.) Y. Diers:

Catégories localisables, Thèse de Doctorat d'Etat, Paris, 1977.

(C.A.S.T.) C. Ehresmann:

Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

(C.F.W.M.) S. MacLane:

Categories for the working mathematician, Grad. Texte in Math. n°5, Springer, 1971.

(C.I.S.B.) I. Németi et I. Sain:

Cône implicational subcategories and some Birkhoff-type theorems, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 29, Univ. Alg., Esztergom, 1977.

(C.M.C.E.) C. Lair:

Catégories modelables et catégories esquissables, Diagrammes 6, Paris, 1981.

(C.M.C.F.) R. Guitart et C. Lair:

Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes 4, Paris 1980.

(C.O.S.S.) A. et C. Ehresmann:

Categories of sketched structures, Cah. de Top. et Géom. Diff., XIII,2, Paris 1984.

(C.S.C.S.) F. Mouen:

Caractérisation sémantique des catégories de structures, Thèse de 3ème Cycle en Mathématiques, Diagrammes 11, Paris, 1984.

(C.T.F.E.) C. Lair:

Conditions syntaxiques de triplabilité d'un foncteur algébrique esquissé, Diagrammes 1, Paris, 1979.

(C.V.C.T.) H. Andréka et I. Németi:

Generalization of the concept of variety and quasi-variety to partial algebras through category theory, Dissert. Math. CCIV, Warzawa, 1983.

(E.D.L.L.) R. Guitart et C. Lair:

Existence de diagrammes localement libres I et II, Diagrammes 6 et 7, Paris, 1981 et 1982.

(E.G.C.E.) C. Lair:

Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses Math. 23, Amiens, 1975.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann:

Esquisses et types des structures algébriques, Bull. Instit. Polit. Iasi, XIV, 1968.

(F.O.S.A.) C. Lair:

Foncteurs d'omission de structures algébriques, Cah. de Top. et Géom. Diff., XII,2 , Paris, 1971.

(I.T.S.C.) C. Ehresmann:

Introduction to the theory of structured categories, Techn. Report 10, Univ. of Kansas, Lawrence, 1966.

(L.C.R.F.) R. Guitart et C. Lair:

Limites et colimites pour représenter les formules, Diagrammes 7, Paris, 1982.

(L.L.H.C.) H. Andréka et I. Németi:

Løs lemma holds in every category, Stud. Scient. Math. Univ. Hung, 13, 1978.

(L.P.L.G.) F. Ulmer:

Locally α-presentable and locally α-generated categories, Lect. Notes in Math. 195, Springer, 1971.

(M.D.S.K.) M. Barr:

Models of sketches, Cah. de Top. et Géom. Diff. Cat., XXVII,2 , Amiens, 1986.

(P.T.G.M.) L. Coppey:

Sur quelques problèmes typiques concernant les graphes multiplicatifs, Diagrammes 3, Paris, 1983.

(P.T.T.T.) C. Lair:

A propos de "Toposes, Triples and Theories" de Messieurs M. Barr et C. Wells, Diagrammes 15, Paris, 1986.

(P.U.C.N.) C. Ehresmann:

Problèmes universels relatifs aux catégories n-aires, Note aux C.R.A.S., t. 264, pp. 273-276, Paris 1967.

(S.L.S.A.) C. Ehresmann:

Sur les structures algébriques, Note aux C.R.A.S., t. 264, pp. 840-843, Paris, 1967.

(T.T.A.T.) M. Barr et C. Wells:

Toposes, Triples and Theories, Springer, 1985.

TABLE

UNIVERSITE PARIS 7

U.F.R. DE MATHEMATIQUES
TOURS 45-55-5ème ETAGE

2 PLACE JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05

FRANCE