C. LAIR

À propos de « Toposes, triples and theories » de messieurs M. Barr et C. Wells

Diagrammes, tome 15 (1986), exp. n° 4, p. L1-L20
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1986__15__A4_0>

A PROPOS DE "TOPOSES, TRIPLES AND THEORIES" DE MESSIEURS M. BARR ET C. WELLS

C. Lair

Une lecture *attentive* des Chapitres 4 et 8 (notamment) de l'ouvrage de Messieurs M. Barr et C. Wells intitulé "Toposes, Triples and Theories" , récemment paru chez Springer, me suggère les *nombreuses* observations qui suivent.

1. Le §2 du Chapitre 4 est consacré au "théorème de Kennison".

Les auteurs y précisent (p. 146, lignes 11 et 12) qu'il aurait été "originellement établi (par Kennison, en 1968) pour une catégorie et des modèles préservant toutes les limites (projectives)".
Sans doute ignorent-ils qu'il fut prouvé, dans le cas plus général auquel ils s'intéressent, par Ehresmann en 1967 (voir (P.U.C.N.) et (S.L.S.A.))?

Ils indiquent (p. 146, lignes 7 et 8) qu'une "généralisation à des catégories de base autres que Ens a été prouvée par Freyd et Kelly [1972]".
Ils semblent ne pas savoir que de telles généralisations ont été obtenues par Foltz en 1969 (voir (C.D.F.D.)) et Burroni en 1970 (voir (E.C.Q.T.)).

En tout état de cause, leur "théorème de Kennison" est une généralisation du *Théorème du Faisceau Associé*. Ce qu'ils ne signalent pas, alors qu'ils font si grand cas (p. 40, ligne 32) de la "machinerie des topologies de Grothendieck".
Aussi, ils ignorent sans doute que c'est *tout l'intérêt* des preuves élaborées en (C.D.F.D.) et (E.C.Q.T.) d'être des adaptations *judicieuses* de la preuve classique de ce Théorème

A.M.S. Sub. Class. : 18 C 05 , 18 C 10 , 18 C 15 , 18 F 10.

classique. Au contraire de celle du "théorème de Kennison" qu'ils présentent ici et qui en est *fort éloignée*.

2. Messieurs M. Barr et C. Wells semblent méconnaître que leur notion "d'esquisse sans cône" (p. 150, ligne 1) n'est qu'une altération de celle de *graphe multiplicatif*, introduite par Ehresmann entre 1960 et 1965 (voir (C.A.S.T.)).
Certes, ils précisent (au bas de la page 142) que "leurs" esquisses sont "conceptuellement similaires à celles d'Ehresmann, bien que différentes dans le détail". Mais, alors, pourquoi prendre bien soin d'affirmer (p. 170, lignes 10 à 13) que "les esquisses d'Ehresmann sont des *catégories* plutôt que des *graphes*"? C'est *totalement faux*.
Ceci les conduit à ignorer que l'énoncé du théorème 1 du §3 du Chapitre 4 (p. 150, lignes 1 à 3) peut être *amélioré*. On peut y remplacer le mot *équivalence* par le mot *isomorphisme* et la catégorie Ens par une catégorie *quelconque*. Comme ce fut établi par Ehresmann dès 1965 en (C.A.S.T.).
De même, cela les pousse à affirmer (p. 150, ligne 16) que, si $\mathcal{S}$ est une "esquisse sans cône", alors le foncteur $u: \mathcal{S}^{op} \to \mathrm{Ens}^{S}$ est "plein et fidèle". C'est *grossièrement faux*, comme une lecture *sérieuse* de (C.A.S.T.) permet de s'en convaincre *immédiatement*.

3. Les auteurs semblent ignorer que les méthodes qu'ils utilisent pour construire successivement:
- "la FP-théorie engendrée par une FP-esquisse" (Chap. 4, §3, page 149, lignes 10 à 30, et p. 150, lignes 25 à 29),
- "la LE-théorie associée à une LE-esquisse" (Chap. 4, §4, page 155, lignes 29 à 31),
- "la théorie pré-régulière engendrée par une esquisse régulière" (Chap. 8, §1, page 290, lignes 2 à 4),
- "la théorie régulière associée à une esquisse régulière" (Chap.8, §1, page 290, lignes 16 à 20),
- "la FS-théorie induite par une FS-esquisse" (Chap. 8, §2, page 293, lignes 7 à 27),
- "la théorie pré-géométrique induite par une esquisse géométrique" (Chap. 8, §3, page 249, lignes 14 et 15),
- "la théorie géométrique universelle" associée à une esquisse géométrique (Chap. 8, §3, page 249, lignes 22 à 26),

sont *analogues* à celles que j'utilisais dès 1971 (voir (F.O.S.A.)) pour associer (selon la terminologie d'Ehresmann) certains *prototypes* ou *types* à des *esquisses projectives* ou à des *esquisses mixtes* (i. e. projectives *et* inductives).

Cependant, je n'y commettais pas l'erreur d'affirmer que, si $\mathcal{S}$ est une telle esquisse et si $T(\mathcal{S})$ est un type qui lui est associé de cette manière, alors tout modèle de $\mathcal{S}$ possède une extension *unique* en un modèle de $T(\mathcal{S})$! Ceci est *totalement faux*, contrairement à ce que Messieurs M. Barr et C. Wells prétendent dans:

- le Chapitre 4 (§3, théorème 4, p. 153, lignes 6 à 8, et §4, théorème 2, p. 156, lignes 3 à 5),
- le Chapitre 8 (§1, proposition 1, p. 290, lignes 11 et 12, et corollaire 4, p. 291, lignes 14 à 16).

Ceci entraîne également l'*inexactitude* des assertions du Chapitre 8, contenues dans:

- la proposition 1 du §2 (p. 293, lignes 15 à 17),
- le théorème 2 du §2 (p. 293, lignes 24 et 25),
- le théorème 1 du §3 (p. 294, lignes 22 et 23).

Je n'y commettais pas plus l'imprudence d'affirmer que, si l'on dispose d'un homomorphisme $f: \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ entre esquisses projectives (par exemple: entre FP-esquisses ou LE-esquisses), l'unique morphisme $T(f): T(\mathcal{S}_1) \to T(\mathcal{S}_2)$ rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
T(\mathcal{S}_1)^{op} \arrow[r, "T(f)^{op}"] \arrow[d, "v_1"] & T(\mathcal{S}_2)^{op} \arrow[d, "v_2"] \\
\mathrm{Mod}(\mathcal{S}_1) \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_2)
\end{tikzcd}$$

est *aussi* l'unique morphisme faisant commuter le diagramme ci-dessous:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_1^{op} \arrow[r, "f^{op}"] \arrow[d, "m_1^{op}"] & \mathcal{S}_2^{op} \arrow[d, "m_2^{op}"] \\
T(\mathcal{S}_1)^{op} \arrow[r, "T(f)^{op}"] & T(\mathcal{S}_2)^{op}
\end{tikzcd}
$$

Car ce dernier point est *évidemment* faux, contrairement à ce qui est affirmé au Chapitre 4 dans:

- le §3 (théorème 3, p. 152, lignes 5 à 7),
- le §4 (théorème 1, p. 155, dernière ligne, et p. 156, lignes 1 et 2) où les auteurs commettent *de nouveau* l'erreur d'indiquer que $u_i = v_i . m_i^{op}$ est, pour $i = 1, 2$, un plongement.

Comme je l'ai moi-même souligné dès 1971 en (F.O.S.A.), ce qu'ils semblent ne pas savoir, il est bien exact que les catégories $Mod(\mathcal{S})$ et $Mod(T(\mathcal{S}))$ sont équivalentes.
Mais on ne peut affirmer qu'elles sont isomorphes. Ni, même, que seulement leurs classes d'objets sont en bijection: contrairement à ce qu'ils prétendent.
C'est que le foncteur inclusion Théories → Esquisses *n'admet pas* d'adjoint à gauche et, encore moins, de 2-adjoint à gauche: il admet seulement un lax-adjoint à gauche ... pourvu que l'on se donne la peine de préciser ce que peuvent être les 2-cellules dans la catégorie des esquisses (voir, par exemple, (E.G.C.E.) et (P.T.G.M.)).
Ainsi, contrairement à ce que les auteurs prétendent, on ne peut *valablement* appeler $T(\mathcal{S})$ *le* type *universel* engendré par $\mathcal{S}$. Tout au plus, dans les cas particuliers de types que sont leurs diverses théories, peut-on parler de théories engendrées *à l'équivalence près* (ou encore *vaguement* engendrées) par $\mathcal{S}$.
C'est très exactement ce point de vue, que sans doute ils ignorent, qui fut adopté par Bastiani et Ehresmann dès 1972 en (C.O.S.S.) (pourtant cité, mais bien plus loin).

4. Le §3 du Chapitre 4 s'achève par un théorème 5 (p. 154, lignes 15 à 17) qui est une application *élémentaire* des travaux de Linton (voir (A.O.F.S.)), effectivement cité ... mais utlérieurement).

Messieurs M. Barr et C. Wells paraissent ne pas savoir que l'énoncé de la condition suffisante figure *déjà* dans mon texte de 1971 (voir (F.O.S.A.)).

Ils semblent ignorer, surtout, qu'il résulte *trivialement* de mon travail, datant de 1975, concernant la triplabilité des foncteurs de la forme $f_*: \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_2) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{S}_1)$, où $f: \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ est un homomorphisme entre esquisses projectives quelconques (voir (E.S.T.R.)), largement développé en (E.D.S.A.), repris en (C.S.T.R.) et aussi en (A.M.E.N.)!).

Il est vrai que la distinction qu'ils établissent *a priori* (avec beaucoup d'autres) entre FP-théories et FP-théories unisortes, ou encore entre FP-théories et LE-théories, ne pouvait guère les conduire à aborder *en toute généralité* le sujet. Ils *affichent* cependant qu'il est un des thèmes principaux de leur ouvrage.

5. Le §4 du Chapitre 4 ne se limite pas à *ré-énoncer*, dans le cas des LE-esquisses, les théorèmes généraux déjà énoncés au §3, dans le cas des FP-esquisses. Il y figure un théorème 4 (page 157, lignes 18 à 20) qui, lui, bizarrement, n'a pas son analogue au §3.

Les auteurs suggèrent-ils ainsi qu'il ne pouvait en avoir? Pourtant, il en a un!

Ou bien est-ce pour éviter des re-dites?

Mais , alors, pourquoi énoncer deux fois les théorèmes généraux évoqués précédemment (et, avec eux, les erreurs qu'ils contiennent)?

Sans doute ignorent-ils, surtout, que ce théorème fut énoncé, et dans un cadre *plus général*, dès 1971 en (F.O.S.A.). Que j'y attirais toute l'attention sur le rôle *fondamental* joué par les foncteurs d'évaluation, auxquels ils ne font qu'une brève allusion *anecdotique*. Et qu'il en résultait clairement, au delà de tout a priori, un (premier) processus de classification des esquisses (projectives):

-déterminer quelles limites inductives commutent (par exemple dans Ens) avec les limites projectives de forme analogue à celle des cônes projectifs distingués dans ces esquisses.

Ainsi, ils semblent méconnaître qu'il peut être *utile*, par exemple (voir (P.F.F.A.)), de considérer la classe des PC-esquisses (i. e. des esquisses projectives où les cônes

projectifs distingués sont tous de bases connexes). Esquisses dont les catégories de modèles sont toutes à:
- limites projectives,
- limites inductives filtrantes,
- sommes,

toutes calculées point par point.

6. Le §4 du Chapitre 4 se poursuit par l'étude des "algèbres finiment présentées" (p. 157, dernier paragraphe, à p. 159, premier paragraphe).
Messieurs M. Barr et C. Wells y établissent, *fort longuement*, un théorème 5 (p. 158, lignes 3 à 24, et haut de la page 159) dans le *seul* cas des "théories équationnelles".
Sans doute ignorent-ils qu'il est *tout autant* valable dans le cas d'une LE-esquisse *quelconque*.
Evidemment, pour l'établir, il faut utiliser des "algèbres finiment présentées" relativement à un *quelconque* des foncteurs d'évaluation et non au *seul* foncteur d'évaluation en la *seule* sorte *génératrice* de tous les autres objets de l'esquisse *unisorte* qu'ils considèrent.
Ceci contraint à faire jouer *tout* leur rôle aux *diverses* évaluations (alors que les auteurs ne leur assignent qu'une fonction anecdotique). Et interdit donc les disctinctions *arbitraires* auxquelles ils procèdent a priori.
Mais cela permet d'établir *immédiatement* ce théorème 5 dans sa forme la plus *générale*: en utilisant la notion *d'objet finiment présentable*, définie dès 1971 par Gabriel et Ulmer en (L.P.L.G.), pourtant cités (p. 335) en Bibliographie, mais que les auteurs ne semblent pas connaître.

7. Le §4 du Chapitre 4 s'achève (pp. 159 à 168) par quelques "exemples de LE-théories".
Tout d'abord, ce titre est *fort étonnant* puisque ne sont présentés que des exemples de LE-esquisses et qui sont *loin* d'être des LE-théories.
C'est d'autant plus étonnant que les auteurs construisent chacune de ces LE-esquisses avec un *luxe*, *fort louable*, de *précisions*.
Alors que le théorème 5 (p. 158), certes dans la forme générale qu'ils paraissent méconnaître, permettait de décrire *très rapidement* les LE-théories qu'*eux-mêmes* déclarent avoir en vue.
Peut-être y a-t-il une explication à tout cela?

Ensuite, sans doute ignorent-ils que ce luxe fort louable de précisions, utilisé dans chacun des cas traités ici, figure *à chaque fois* dans *au moins un* des *nombreux* textes (que j'ai déjà cités ou que je vais citer) consacrés *depuis 20 ans* à la Théorie des Esquisses par Ehresmann et quelques uns de ses élèves? Et que ceci vaut aussi pour le §1 du Chapitre 4, consacré à l'esquisse des groupes, et pour cette partie du §1 du Chapitre 1 consacrée à la "définition d'une catégorie par diagrammes commutatifs"?
Il est vrai que lorsque c'était *nous* qui procédions ainsi, d'éminents spécialistes nous opposaient systématiquement que cela ne présentait *aucun* intérêt et qu'il était bien plus *judicieux* de décrire "la" LE-théorie du type de structures considéré, plutôt que "sa" LE-esquisse!
Voilà, peut-être, une explication à ma toute première remarque. Inconsciemment sans doute, les auteurs *re-font*, 20 ans après, ce que nous avons *toujours* fait, depuis 20 ans, et que certains voulaient *occulter* ... voire *empêcher*. Mais, alors, ne leur faut-il pas *prétendre*, sans doute involontairement, faire le contraire, que certains voulaient *imposer* mais qui *ne se révèle pas*, en définitive, plus judicieux?

En tout état de cause, Messieurs M. Barr et C. Wells construisent (pp. 162 à 165) une esquisse projective qui, si on les suivait, devrait être appelée "LE-esquisse des LE-catégories".
Ils semblent ignorer que des esquisses *analogues* furent décrites, *dès 1970*, par Burroni (voir (E.C.Q.T.) et par moi-même (voir (C.E.T.N.)).
Cependant, nous n'y commettions pas l'erreur, qu'ils commettent, de les appeler "esquisses des catégories exactes à gauche". Car l'esquisse qu'ils décrivent *n'est pas* celle des LE-catégories, puisque sa catégorie de modèles n'est même pas *équivalente* à celle dont les objets sont les LE-catégories et dont les flèches sont les LE-foncteurs.
Par contre, et ils semblent ne pas le savoir, elle est équivalente à la catégorie telle que:
- ses objets sont les (petites) catégories munies d'un *choix* d'objet final et d'un *choix* de produits fibrés,
- ses flèches sont les foncteurs qui *commutent avec ces choix*.
D'ailleurs, ceci achève de préciser les remarques du point 3. . A isomorphisme - *commutant avec les choix* - près, une LE-esquisse $\mathcal{S}$ engendre une *unique* catégorie munie d'un *choix* de limites projectives finies *universelle* $T'(\mathcal{S})$ (qui *n'est pas* isomorphe à la LE-théorie $T(\mathcal{S})$ des auteurs). Ceci fut prouvé directement

par Ehresmann dès 1968 (voir (E.T.S.A.)). Comme établi en (E.D.S.A.), cela résulte *aussi* d'une application *immédiate* du Théorème du Faisceau Associé Généralisé (appelé par les auteurs "théorème de Kennison" et qu'en tout état de cause ils avaient une *excellente* occasion d'appliquer) puisque:
- la structure de LE-esquisse est *projectivement esquissable* (à l'aide d'une certaine esquisse $\mathcal{S}_{LE\text{-}esq}$),
- la structure de catégorie munie d'un *choix* de limites projectives finies est projectivement esquissable (à l'aide d'une certaine esquisse $\mathcal{S}_{LE\text{-}catchx}$ ... "conceptuellement" analogue à la prétendue "esquisse des LE-catégories" mais, néanmoins, *notablement différente*),
- le foncteur injection canonique

LE-catégories avec choix de lim. proj. fin. → LE-esquisses

est *induit* (à l'équivalence près) par un homomorphisme

$$f\colon \mathcal{S}_{LE\text{-}esq} \to \mathcal{S}_{LE\text{-}catchx}.$$

Et tout ceci vaut, également, pour:
- les FP-esquisses et les catégories avec *choix* de produits finis (plutôt que les FP-théories),
- les FS-esquisses et les catégories avec *choix* de sommes finies et *choix* de limites projectives finies (et d'éventuelles propriétés de commutation),
-les FS-esquisses et les catégories avec *choix* de sommes finies disjointes universelles, *choix* de limites projectives finies et propriétés convenables de commutation (plutôt que les FS-théories).

Des remarques analogues doivent être faites concernant l'exemple des topos (pp. 165 à 167).
Tout d'abord la catégorie des modèles de l'esquisse que Messieurs M. Barr et C. Wells construisent n'est même pas *équivalente* à celle des topos et des foncteurs logiques. Par contre, elle l'est à la catégorie telle que:
- ses objets sont les topos munis de *choix* convenables (notamment de certains sous-objets),
- ses flèches sont les foncteurs logiques *commutant avec ces choix*.
Ensuite, les auteurs semblent ignorer que leur esquisse se déduit *facilement* de la combinaison de quelques unes de celles qui figurent depuis 1970 en (C.E.T.N.). Et surtout, que tant Conduché

en 1973 (ce qui est signalé, imprécisément, en (C.E.O.C.)) que Burroni en 1981 (voir (A.L.G.R.)) ont déjà décrit *explicitement* de telles esquisses de topos avec choix convenables, ainsi qu'à leur suite Dubuc et Kelly (voir (P.T A.G.), certes cité ... en Bibliographie) et McDonald (voir (T.O.G.R.) , où , cependant, le mot esquisse est *soigneusement* évité).

A la lecture de ces "exemples de LE-théories" une dernière constatation s'impose.

Sans doute les auteurs ne savent pas qu'un même type de structures, s'il est esquissable, *ne l'est pas d'une unique façon*, même *minimale*?

Et qu'*il ne suffit plus*, depuis 15 ans, d'exhiber n'importe quelle esquisse dont la catégorie de modèles soit équivalente (mais encore *faut-il* qu'elle le soit!) à une catégorie C donnée?

Que c'est, justement, tout l'objectif et tout l'intérêt de nombre de *mes* travaux d'établir que:

- pour qu'une catégorie esquissable C (resp. un foncteur esquissable $U: C' \to C$) possède telle ou telle propriété P , il est nécessaire et suffisant d'en rechercher une esquisse $\mathcal{S}$ (resp. un homomorphisme d'esquisses $f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, induisant U) possédant une certaine forme *associée* à la propriété P ?

Qu'ainsi, par exemple, et puisque c'est un des thèmes proclamés par les auteurs de l'ouvrage , il résulte de (E.S.T.R.) que leurs esquisses de:

- catégories avec choix d'objet final et choix de produits fibrés,
- topos avec choix convenables,

sont toutes deux *totalement inappropriées* à prouver la triplabilité des foncteurs d'oubli:

$$\text{LE-Cat}_{\text{chx de final, chx de prodfib}} \to \text{Cat}$$

$$\text{Topos}_{\text{chx}} \to \text{Cat}$$

ou encore des foncteurs d'oubli:

$$\text{LE-Cat}_{\text{chx de final, chx de prodfib}} \to \text{Graphes}$$

$$\text{Topos}_{\text{chx}} \to \text{Graphes},$$

qui, pourtant, *le sont*. Et que c'était tout l'objectif de (E.S.T.R.) de construire des esquisses permettant d'établir la triplabilité de ces foncteurs vers Cat et tout l'objectif de (A.L.G.R.) de construire des esquisses permettant d'établir la triplabilité de ces foncteurs vers Graphes , compte tenu des résultats généraux de (E.S.T.R.) indiquant quelle forme (associée à la propriété de triplabilité) ces esquisses devaient nécessairement posséder.

8. Après avoir consacré les §§1, 2 et 3 du Chapitre 8 à quelques théorèmes généraux que j'ai déjà commentés, les auteurs étudient, dans le §4 de ce même Chapitre, des "propriétés des catégories de modèles".

Ils précisent (p. 296, lignes 14 et 15) qu'ils ne répondent "qu'en partie à la question de reconnaître parmi toutes les catégories celles qui sont des catégories de modèles de différentes sortes de théories".

Certes, ils n'y répondent qu'*en partie*. Et même en *infime* partie! Ils ignorent sans doute que:

- les catégories de modèles de FP-esquisses unisortes ont été entièrement caractérisées, dès 1963, par Lawvere (voir (A.T.C.F.)), dont ils font pourtant si grand cas,
- les catégories de modèles de LE-esquisses ont été entièrement caractérisées par Gabriel et Ulmer dès 1971 (voir (L.P.L.G.)), qui figure pourtant dans leur Bibliographie),
- les catégories de modèles de S-esquisses (i. e. d'esquisses où sont distingués des cônes inductifs discrets, non nécessairement finis, que les modèles transforment en sommes) ont été entièrement caractérisées dès 1980 par Guitart et moi-même (voir (C.M.C.F.) et (C.S.C.S.)), à la suite des travaux de Diers (voir (C.A.L.O.)),
- une caractérisation des catégories de modèles de FS-esquisses en résulte,
- les catégories de modèles d'esquisses mixtes (au sens d'Ehresmann) ont été entièrement caractérisées par mes soins dès 1981 (voir (C.M.C.E.) et (C.S.C.S.)),
- une caractérisation des catégories de modèles d'esquisses régulières s'en déduit, de même qu'une caractérisation des catégories de modèles d'esquisses géométriques ou encore d'esquisses cohérentes, puisqu'il résulte de (L.C.R.F.) qu'elles sont équivalentes a des catégories de modèles de certaines esquisses mixtes.

Quand bien même on accepte de se limiter, *arbitrairement*, comme Messieurs M. Barr et C. Wells le font (p.297, lignes 28 et 29), à

ces "propriétés préservées par les foncteurs d'évaluation", il demeure encore quelque *imprécision* dans leur théorème 1 (page 297).
En effet l'affirmation (e) est *inexacte*: si S est une théorie cohérente, sa catégorie de modèles C *n'a pas* tous les ultra-produits ... du moins *tels* qu'ils sont définis (page 297, lignes 13 à 24).
C'est que cette définition suppose *a priori* que C possède *tous* les produits: ce qui n'est pas le cas, comme les auteurs en conviennent d'ailleurs en cours de démonstration (p. 300, ligne 5)!
Mais peut-être ne connaissent-ils pas ce qui fut écrit sur ce sujet, justement, dès 1980 en (C.M.C.F.)?

De même, la lecture de la remarque (p. 298, ligne 1) qui suit immédiatement le théorème 1 suggère quelque *étonnement*.
Sans doute ne savent-ils pas que les limites inductives discrètes commutent dans Ens avec les limites projectives connexes? Et, par conséquent, qu'il est *élémentaire* de "distinguer" (selon le sens que les auteurs accordent à ce mot) les FS-esquisses des esquisses cohérentes comme suit:

(f) si S est une FS-esquisse, alors C possède toutes les limites projectives connexes et les foncteurs évaluations les préservent.

Ceci ne constitue, d'ailleurs, qu'une application *particulière* (à certaines esquisses mixtes) du processus de classification auquel je fais allusion au point 5.. Cas particulier fort intéressant, pourvu que:
- comme Guitart et moi-même l'avons effectué en (C.M.C.F.), on le replace dans le contexte des travaux de Diers sur la "multi-monadicité" (voir (C.A.L.O.)),
- on se dispense de le "mettre au trou", comme Messieurs M. Barr et C. Wells proposent de le faire (p. 170, ligne 19).

9. Un lecteur peu averti (et il n'en manque pas) ignorera toujours ce que les auteurs ignorent sans doute: à savoir que *l'essentiel* de leur Chapitre 4 ne constitue qu'une version d'une part bien *modeste* (et assez maladroitement présentée) de la Théorie des Esquisses Projectives d'Ehresmann (voir (I.T.S.C.)). Du moins, saura-t-il qu'elle a tout de même quelque chose de "conceptuel" à voir avec ce qu'ils font.

De même, décidément de moins en moins averti, le même lecteur ne saura jamais ce que les auteurs paraissent méconnaître: à

savoir que l'essentiel de leur Chapitre 8 ne constitue qu'une version d'une part tout aussi modeste (et tout aussi maladroitement présentée) de la Théorie des Esquisses Mixtes (englobant la précédente), initiée *explicitement* par Ehresmann dès 1968 (voir (E.T.S.A.)). Et fort substantiellement développée depuis, notamment en (F.O.S.A.), (C.M.C.F.), (L.C.R.F.) (E.D.L.L.) ... pour ne citer que *peu* de références.
Mais, cette fois, il ignorera *même* qu'elle a quelque chose à voir - ne serait-ce que de "conceptuel" - avec ce que Messieurs M. Barr et C. Wells redécouvrent.

Ainsi, dans l'introduction (p. 140 et p. 141, lignes 1 à 3) de leur Chapitre 4, ils font allusion (p. 140, ligne 15) à une certaine "hiérarchie des types de théories".
Le *premier* niveau en serait "la version de la théorie des esquisses (projectives) d'Ehresmann" (p. 140, ligne 27) qu'ils présentent dans ce Chapitre 4. Version qu'il leur a sans doute fallu élaborer car celle d'Ehresmann ne pouvait convenir?
Mais on a vu comment la leur convenait!
Quant aux *niveaux supérieurs* (traités dans le Chapitre 8), ils *nécessiteraient* de "recourir à la machinerie des topologies de Grothendieck" (p. 140, ligne 30). C'est-à-dire, comme les auteurs le précisent au Chapitre 8 (p. 288, lignes 3 et 4), à ce "type général de théories qui sont exactes à gauche et qui, de plus, ont différents types de co-cônes inclus dans leur structure"".
Ceci suggère-t-il les esquisses *mixtes* d'Ehresmann (auxquelles ils ne font strictement plus aucune allusion cependant)? *Non*, car ils prennent *bien soin* d'ajouter (p. 288, lignes 13 à 15) que leur "type général de théories n'est pas la seule forme concevable (mais on ne saura jamais qui a pu concevoir quelle autre forme) de théorie à co-cônes (et pour cause), *mais* c'est le *seul* pour lequel il y a un topos générique".

Cette affirmation bien péremptoire qui pourrait, *à la rigueur*, justifier que Messieurs M. Barr et C. Wells ne parlent pas plus avant des esquisses mixtes d'Ehresmann est, malheureusement, *fausse*!
Ils semblent ignorer que toute structure esquissable, par une esquisse projective $\mathcal{S}$, nantie d'un homomorphisme $\mathcal{S} \to \mathcal{S}_{\mathrm{Toposch}}$ vers une esquisse projective de *topos avec choix convenables*, *admet* ce qu'on peut bien appeler un *topos générique*: tout simplement par application du Théorème du Faisceau Associé Généralisé. Et que c'est justement le cas, en particulier, de la *structure d'esquisse mixte (finitaire)* ... qui est effectivement *projectivement* esquissable!

De même, malgré l'introduction fort ambigüe (ou fort prudente?) de leur Chapitre 8, les auteurs ne paraissent pas avoir réalisé que *toutes* les catégories de modèles de leur Chapitre 8 sont équivalentes à des catégories de modèles d'esquisses *mixtes* particulières. Comme ceci est *clairement* et *définitivement* discuté et établi en (C.M.C.F.).

Ainsi, ils semblent ne pas avoir compris que la Théorie des Esquisses mixtes d'Ehresmann permet d'atteindre *leur* objectif déclaré (p. 140, lignes 1, 3 et 4): "expliquer le concept naïf de théorie mathématique ... au moyen d'une catégorie, de sorte qu'un modèle de cette théorie devienne un foncteur de source cette catégorie".

Elle permet de le faire comme ils le souhaitent (p. 140, lignes 26): "en utilisant *seulement* les idées de base sur les limites" (mais bien évidemment *projectives et inductives*) et justement *sans nul recours obligé* à la "machinerie des topologies de Grothendieck".

De plus, elle permet d'atteindre ce qu'ils espèrent (p. 140, lignes 13 et 14): "les théories les plus générales en logique mathématique" i. e. les *théories du 1er ordre* (voir (L.C.R.F.)). Et ce contrairement à leur version des choses, ce dont les auteurs conviennent d'ailleurs (p. 140, lignes 13 et 14), qui aurait dû contenir, pour y parvenir, des esquisses *à la fois* esquisses régulières et FS-esquisses ... qu'ils se sont *empressés* (p. 170, ligne 19) de "mettre au trou".

Finalement, de ce point de vue, la hiérarchie "logique" des types de structures *n'est plus rien d'autre* que la hiérarchie des diverses *formes* de cônes projectifs *et* inductifs distingués et des diverses propriétés de *commutation* des limites de ces différentes formes (dans Ens ou dans toute autre catégorie où l'on désire faire aboutir les modèles).

Evidemment ceci nous éloigne d'une certaine idéologie à la mode.

10. Après ces fort nombreuses observations, que reste-t-il des quelques "notes (historiques) sur les théories", figurant dans le §5 du Chapitre 4 (pp. 168 à 170)? Sinon qu'elles se contentent de *répéter et compléter* une *histoire officielle* dont Messieurs M. Barr et C. Wells ne sont ni les premiers ni les seuls propagandistes, mais qui est *fort éloignée* de la vérité historique et de la réalité scientifique.

Ainsi, ils affirment (p. 169, ligne 8) que c'est "Lawvere qui inventa les théories algébriques dans les années soixante" et qui

fit, selon eux (p. 169, lignes 16 à 20), "l'observation fondamentale" selon laquelle on pouvait considérer "un groupe comme un foncteur préservant les produits et un morphisme de groupes comme une transformation naturelle".
Sans doute ignorent-ils que "dans les années soixante" ce fut *aussi* "l'observation fondamentale" de Grothendieck, Chevalley ... et Ehresmann qui considérait *déjà* nombre de catégories structurées (modèles de l'esquisse de catégories dans ... les catégories, les ordres, les topologies ou les variétés).
Sans doute ne savent-ils pas qu'il introduisit *explicitement* la notion d'esquisse *projective* quelconque *dès* 1966 en (I.T.S.C.) ... qui contient *aussi* une notion encore plus générale englobant même celle d'esquisse *mixte* et donc les diverses notions d'esquisses que Messieurs M. Barr et C. Wells considèrent.

Je constate, en tout cas, qu'ils prennent *bien soin* de situer le plus exactement possible "l'invention" de Lawvere.
En effet, ils citent non seulement la date d'achèvement de sa thèse mais aussi, fort curieusement, la date de son *annonce* dans les Proc. Nat. Sci. .
A contrario, ils prennent *bien soin* d'affirmer (page 169, dernier paragraphe) que "Ehresmann introduisit les esquisses *dans la fin* des années soixante" et de ne citer qu'*un seul* de ses travaux, datant réellement de 1972, mais qu'ils situent en 1973!

Contrairement à ce que les auteurs suggèrent, Lawvere n'a donc *certainement pas* les 10 ans d'avance sur Ehresmann qu'ils lui prêtent.
Mais de *quelle avance* s'agirait-il, à propos? Puisqu'ils remarquent (p. 169, ligne 21) que le premier s'était "*limité* aux théories équationnelles finitaires" alors que le second, et certainement indépendamment, considérait *déjà* des esquisses projectives *quelconques* ... dont ils semblent redécouvrir, et 20 ans après, les vertus.
Par conséquent, il est également injustifié de prétendre (p. 169, ligne 22) qu'il fallut attendre que ce soit "Linton [1966] qui étende le travail de Lawvere au cas des théories infinitaires" (en tout état de cause, son mérite n'est pas là). Comme il est illégitime d'ajouter (p. 169, lignes 31 et 32) qu'un progrès supplémentaire fut celui des "théories essentiellement algébriques de Freyd [1972]", qui, de la sorte, semble encore en avance d'un an sur le *seul* texte d'Ehresmann que Messieurs M. Barr et C. Wells condescendent à citer ... en le post-datant d'un an (mais c'est sans doute involontaire).

Concernant l'évolutiuon de "l'approche catégorique" des structures algébriques (ou "essentiellement algébriques"), l'histoire officielle part obligatoirement de leur "Lawvere [1963]", passe nécessairement par leur "Linton [1966]", se permet de flâner du côté de leur "Bénabou [1968]" et même autour de leur "Bénabou [1972]" totalement imaginaire, pour culminer immanquablement en leur "Freyd [1972]".
C'est sans doute pourquoi ils ne s'autorisent que le seul "Ehresmann [1973]".
Malheureusement, les auteurs suggèrent ainsi, mais ce peut être involontaire, qu'il est arrivé *après* que *tout* fut fait et par *d'autres*. D'autant qu'ils prennent bien soin de préciser (page 169, dernier paragraphe) qu'il "introduisit les esquisses comme un moyen de rapprocher le système formel (bien entendu inventé par d'autres) de la description naïve du mathématicien".
En tout cas, par rapport à une histoire officielle qui ignore Ehresmann depuis 25 ans, ce premier écart (faut-il dire progrès?) ne les a guère incités à en commettre d'autres: *aucun* des très nombreux textes importants concernant la Théorie des Esquisses Projectives (qui ne culmine pas à "Freyd [1972]" et ne s'achève pas à "Ehrresmann [1973]"), publiés depuis 1966 par Ehresmann et quelques uns de ses élèves, ne leur semble connu.
Enfin, l'histoire officielle peut être achevée. Car si Messieurs M. Barr et C. Wells prétendent (p. 170, lignes 1 à 3) que "le développement de l'approche catégorique aux théories générales constitue le travail essentiel de la dernière partie de la carrière d'Ehresmann", ils semblent suggérer, mais ce peut être involontaire, que ce "travail essentiel" n'a pas abouti à grand chose (ou concernait d'autres "types concevables de théories générales"). Puisqu'ils se permettent d'affirmer (page 170, dernière ligne) qu'ils obtiennent "le premier traitement systématique" de tout cela.
Ainsi, cette histoire officielle ignore que ce fut Ehresmann qui obtint *dès 1968* (voir (E.T.S.A.)) une *excellente* "approche catégorique de ces théories générales", en fondant la Théorie des Esquisses Mixtes.
Comme elle ignore que des développements *substantiels* furent obtenus, non par Ehresmann (et ce n'est pas, là, lui faire injure, bien au contraire), mais par Guitart et moi-même (voir (C.M.C.F.), (L.C.R.F.), (C.M.C.E.) ...).
Par contre, moyennant un écart prudent et bien modeste par un "Ehresmann [1973]", elle permet ce bond *fantastique* qui part de "Freyd [1972]" pour aboutir directement à cette *apothéose*: un

Barr-Wells [1985] , d'ailleurs déjà cité, *à cet effet*, par exemple dans (D.R.P.T.)!

Brisons là!

Je n'ignore pas que, parmi tous les textes que j'ai cités, certains n'ont pu bénéficier d'une très large diffusion (plus, cependant, que ce "Bénabou [1972]" parfaitement imaginaire): c'est que tout le monde, semble-t-il, ne peut profiter des services de l'éditeur Springer (histoire officielle oblige).
Je n'ignore pas, non plus, que les plus anciens de ces travaux sont d'une lecture parfois rendue difficile aux lecteurs (pénétrés d'histoire officielle) peu habitués à des notations non conformes à la "norme" actuelle (non étrangère, bien sûr, à la propagation de cette histoire officielle): mais on fait bien l'effort de décrypter celles de Messieurs M. Barr et C. Wells!
Néanmoins, je n'ai cité que des faits, des dates, des références, des résultats, des noms d'auteurs parfaitement *vérifiables*. d'autant plus facilement que nombre de ces textes ont fait l'objet d'analyses régulières dans les Zentralblatt (par exemple) ou encore sont cités dans (C.E.O.C.).

L'ouvrage de Messieurs M. Barr et C. Wells est destiné à une large audience.
Ses Chapitres 4 et 8 prétendent faire la synthèse du sujet qui y est abordé et en présenter un "traitement systématique".
Or, beaucoup d'imprécisions et beaucoup d'erreurs y sont accumulées.
Beaucoup de faits, de dates, de références, de résultats et de noms d'auteurs, souvent essentiels (et qui permettent d'éviter ces erreurs) n'y figurent pas.
Beaucoup trop, car ils auraient *dû* y figurer quand bien même on prétend ne pas vouloir faire oeuvre historique.

Dans le meilleur des cas, voilà beaucoup d'ignorance involontaire. Dans le pire, cela fait beaucoup d'omissions volontaires et systématiques.

Dans tous les cas, une mise au point *sérieuse* et *publique* s'imposait *absolument*.
Apporter, a posteriori, quelques "corrections" aux seuls points techniques (de détail) les plus manifestement erronés est bien la moindre des choses mais *ne saurait suffire*.
C'est l'indigence du fond de ces Chapitres 4 et 8 qu'il convient de réformer.

Citer celui qui a relevé ces erreurs de détail (mais pas seulement elles) relève de l'anecdote et *ne saurait suffire*.
C'est de sa critique fondamentale qu'il faut me semble-t-il tenir compte, à moins qu'on ne veuille la taire en le faisant passer pour un maniaque du détail.
Prendre, a posteriori, la précaution purement oratoire d'affirmer qu'on voulait présenter "les mathématiques et non un traitement historique de celles-ci" *ne saurait suffire*.
Cela ne saurait suffire quand on a vu de quelles "mathématiques" il s'agit et quand on cite tant d'auteurs et de dates "officielles" en en ignorant ou en en taisant tant d'autres au moins aussi essentiels.
Convenir, enfin, que "le concept d'esquisse (d'Ehresmann et de son école) est plus proche de celui des auteurs qu' ils ne le pensaient" *ne saurait suffire*.
Est-ce de la naïveté ou de l'hypocrisie?

Rien de "tout" cela ne saurait suffire à rétablir tant la réalité historique que la vérité scientifique!

Je me vois donc contraint d'y procéder moi-même, en toute clarté, puisque Messieurs M. Barr et C. Wells n'ont pas cru devoir le faire autrement qu'en apportant quelques "corrections" dérisoires à leur oeuvre, corrections qui n'y suffisent absolument pas.

Références Bibliographiques.

(A.L.G.R.) A. Burroni:

Algèbres graphiques, Cah. de Top et Géom. Diff., XXII,3 , Amiens, 1981.

(A.M.E.N.) L. Coppey et C. Lair:

Algébricité, monadicité, esquissabilité et non-algébricité, Diagrammes 13, Paris, 1985.

(A.O.F.S.) F. E. J. Linton:

An outline of functorial semantics, Lect. Notes in Math. 80, Springer, 1969.

(A.T.C.F.) F. W. Lawvere:

Algebraïc theories, algebraïc categories and algebraïc functors, Proc. of the 1963 Internat. Symp. on Theory of Models, edit. by J. W. Alddison, L. Henkin, A. Tarski, North Holland, Amsterdam, 1965.

(C.A.L.O.) Y. Diers:

Catégories localisables, Thèse de Doctorat d'Etat en Math., Paris, 1977.

(C.A.S.T.) C. Ehresmann:

Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

(C.D.F.D.) F. Foltz:

Sur la catégorie des foncteurs dominés, Cah. de Top. et Géom. Diff., XI,2 , Paris, 1969.

(C.E.O.C.) C. Ehresmann:

Oeuvres complètes et commentées, Partie IV,1, Cah. de Top. et Géom. Diff., suppl. au vol. XXII, Amiens, 1981.

(C.E.T.N.) C. Lair:

Constructions d'esquisses et transformations naturelles généralisées, Thèse de 3ième Cycle en Math., Esquisses Math. 2, Paris, 1970.

(C.M.C.E.) C. Lair:

Catégories modelables et catégories esquissables, Diagrammes 6, Paris, 1981.

(C.M.C.F.) R. Guitart et C. Lair:

Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes 4, Paris, 1980.

(C.O.S.S.) A. Bastiani et C. Ehresmann:

Categories of sketched structures, Cah. de Top. et Géom. Diff., XIII,2 , Paris, 1984.

(C.S.C.S.) F. Mouen:

Caractérisation sémantique des catégories de structures, Thèse de 3ème Cycle en Math., Diagrammes 11, Paris, 1984.

(C.S.T.R.) C. Lair:

Condition syntaxique de triplabilité d'un foncteur algébrique esquissé, Diagrammes 1, Paris, 1979.

(D.R.P.T.) J. W. Gray

Categorical aspects of parametric data types, version prelim, Seminarberichte 20, FernUniversitat, Hagen, 1984.

(E.C.Q.T.) A. Burroni:

Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies, Thèse de 3ème Cycle en Math., Esquisses Math. 5, Paris, 1970.

(E.D.L.L.) R. Guitart et C. Lair:

Existence de diagrammes localement libres, Diagrammes 6, Paris, 1981.

(E.D.S.A.) C. Lair:

Esquisses des structures algébriques, Thèse de Doctorat d'Etat en Math., Amiens, 1977.

(E.G.C.E.) C. Lair:

Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses Math. 23, Paris, 1975.

(E.S.T.R.) C. Lair:

Esquissabilité et triplabilité, Cah. de Top. et Géom. Diff., XVI,3 , Amiens, 1975.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann:

Esquisses et types des structures algébriques, Bul. Instit. Polit., Iaşi, XIV, 1968.

(F.O.S.A.) C. Lair:

Foncteurs d'omission de structures algébriques, Cah. de Top. et Géom. Diff., XII,2 , Paris, 1971.

(I.T.S.C.) C. Ehresmann:

Introduction to the theory of structured categories, Techn. Report 10, Univ. of Kansas, Lawrence, 1966.

(L.C.R.F.) R. Guitart et C. Lair:

Limites et colimites pour représenter les formules, Diagrammes 7, Paris, 1982.

(L.P.L.G.) F. Ulmer:

Locally α-presentable and locally α-generated categories, Lect. Notes in Math. 195, Springer, 1971.

(P.F.F.A.) C. Lair:

Condition syntaxique de plongement II: prolongement de faisceaux et faisceaux associés, Diagrammes 3, Paris, 1980.

(P.T.A.G.) E. Dubuc et G. M. Kelly:

A presentation of topoï as algebraïc relative to the category of graphs, Journ. of Alg. 81, 1983.

(P.T.G.M.) L. Coppey:

Sur quelques problèmes typiques concernant les graphes multiplicatifs, Diagrammes 3, Paris, 1980.

(P.U.C.N.) C. Ehresmann:

Problèmes universels relatifs aux catégories n-aires, C. R. A. S. , t. 264, pp. 273-276, Paris, 1967.

(S.L.S.A.) C. Ehresmann:

Sur les structures algébriques, C. R. A. S. , t. 264, pp.840-843, Paris, 1967.

(T.O.G.R.) J. McDonald et A. Stone:

Topoï over graphs, Cah. de Top. et Géom. Diff., XXV,1 , Amiens, 1984.

Université Paris 7
U.E.R. de Mathématiques et Informatique

2 Place JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05

FRANCE