ANDRÉ SILGA

Sur les produits tensoriels extérieurs de structures algébriques

Diagrammes, tome 14 (1985), p. 1-84
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1985__14__1_0>

Diagrammes, Vol. 14 , 1985.

A.M.S. Sub. Class.
18 D 10 , 18 D 15 ,
18 A 99 , 18 B 99 .

Sur les produits tensoriels extérieurs de structures algébriques. (+)

André SILGA

Certaines catégories Alg(S) de structures algébriques,d'une espèce donnée S , possèdent, à l'instar de la catégorie des groupes abéliens, un "bon" produit tensoriel. Alors, on dispose:

- d'un bifoncteur "produit tensoriel" $(- \boxtimes -): \mathrm{Alg}(S) \times \mathrm{Alg}(S) \longrightarrow \mathrm{Alg}(S)$,
- d'un bifoncteur "exponentiation" $(-)^{(-)} : \mathrm{Alg}(S)^{op} \times \mathrm{Alg}(S) \longrightarrow \mathrm{Alg}(S)$,
- d'un objet I de Alg(S) ,

de sorte que, naturellement en tous objets A_1 , A_2 et A_3 de Alg(S) , on a des isomorphismes:

$$A_3^{(A_1 \boxtimes A_2)} \approx (A_3^{A_1})^{A_2}$$

$$A_1 \boxtimes A_2 \approx A_2 \boxtimes A_1$$

$$I \boxtimes A_1 \approx A_1 \approx A_1 \boxtimes I \quad .$$

De telles catégories peuvent d'ailleurs fort bien posséder <u>plusieurs</u> bons produits tensoriels de cette sorte: c'est le cas, par exemple, de la catégorie des (petites) catégories! Elles peuvent n'en posséder exactement qu'un: c'est le cas de la catégorie des groupes abéliens. Enfin, elles peuvent n'en posséder aucun: c'est le cas de la catégorie des groupes, ou de celle des demi-groupes.

Une étude systématique des conditions d'existence et des procédures de classification des bons produits tensoriels sur de telles catégories de structures algébriques est entreprise, notamment, en (F.S.C.A.) ,

---

(+) Ce travail, préparé sous la direction de C. Lair, sera présenté au premier trimestre 1986 auprès de l'Université Paris 7 pour l'obtention du Doctorat de 3ème Cycle de Mathématiques Pures.

(C.C.F.W.) et (P.T.G.M.). Le présent travail complète ces études antérieures, nous montrons, en effet, que l'on peut toujours effectuer librement un bon produit tensoriel d'une structure algébrique quelconque A, d'une espèce arbitraire S, par une autre quelconque structure algébrique A', d'une autre espèce arbitraire S', obtenant une structure algébrique $A \boxtimes A'$, dont l'espèce, notée $S \boxtimes S'$, est exclusivement déterminée par les seules données de S et S' ; ainsi, ce n'est que lorsque l'on peut "comparer" $S \boxtimes S'$ à une troisième espèce S'', donnée a priori, que l'on peut "contraindre" le produit tensoriel libre $A \boxtimes A'$ à devenir une structure algébrique de l'espèce S'' voulue.

Pour obtenir et formaliser avec précision ce résultat, il nous a fallu, d'une part, généraliser la notion de "catégorie munie d'un bon produit tensoriel" (i. e. la notion de catégorie monoïdale bi-fermée, au sens de (C.L.C.A.)) et, d'autre part, utiliser une théorie adéquate des "espèces de structures algébriques".

Nous généralisons la notion de catégorie monoïdale bi-fermée en celle de système tensoriel bi-fermé: un système tensoriel (bi-fermé) est une famille, indexée par une catégorie donnée $\underline{C}$, dont on peut dire qu'elle sert de "guide", de catégories $(\underline{T}_c)_{c \in \underline{C}}$, de sorte que, pour tout couple (c',c) de flèches consécutives de $\underline{C}$, on dispose d'un produit tensoriel $(- {}_{c',c}\boxtimes -): \underline{T}_{c'} \times \underline{T}_c \longrightarrow \underline{T}_{c'.c}$.

Bien entendu, cette notion est assez proche (bien que plus précise, en raison de la présence de la catégorie guide $\underline{C}$) de celle de bi-catégorie (voir (D.I.S.T.)) que nous aurions pu utiliser. D'ailleurs, il est assez facile de traduire en termes de bi-catégories ce que nous énonçons en termes de systèmes tensoriels (et réciproquement). Cependant, ce travail ne prétend pas contenir une étude exhaustive des systèmes tensoriels généraux (ce qui pourrait être considéré comme faisant double emploi avec la théorie, désormais classique, des bi-catégories) mais étudier les sytèmes tensoriels (ou les bicatégories) de structures algébriques: de ce point de vue, la notion de système tensoriel nous a semblé mieux adaptée (au moins dans sa formalisation).

Suivant (E.T.S.A.), on décrit une espèce de structures algébriques à l'aide d'une esquisse projective: une esquisse projective est un graphe orienté (qui fixe les sortes de variables - objets du graphe - et les sortes de lois de composition -flèches du graphe), muni d'une composition de certaines flèches consécutives (ce qui en fait un graphe multiplicatif, où les diagrammes commutatifs expriment les équations de définition des structures algébriques considérées) et où l'on a distingué des cônes projectifs (qui précisent les arités des lois de composition de l'espèce de structures étudiée). Ce procédé catégorique (ou diagrammatique) de description des espèces de structures algébriques nous a semblé d'autant plus adéquat que:

- c'est celui qui est déjà utilisé dans les travaux antérieurs (F.S.C.A.), (C.C.F.W.) et (P.T.G.M.), et ce, avec efficacité,

- il permet suffisamment de constructions entre espèces diverses, notamment celle du produit tensoriel de deux espèces - et ce, assez naturellement.

Nous avons tenu à rédiger un texte aussi "auto-contenu" que possible, c'est pourquoi nous avons rappelé, au Chapitre I (cependant, assez brièvement) à peu près toutes les notations systématiques, la terminologie et les résultats standard tant en "théorie des catégories" qu'en "théories des esquisses" qui nous sont utiles par la suite.

Le Chapitre II est consacré à la formalisation précise de la notion, indispensable par la suite, de système tensoriel (et de quelques uns de ses affaiblissements). Dans un premier temps, on pourra penser que les notations utilisées sont assez lourdes: c'est parce que nous les avons voulues systématiques, d'un usage automatique et, surtout, révélatrices des structures considérées. Dans un second temps, le lecteur sera conduit à les simplifier de lui même (ainsi pourra-t-il supprimer de nombreux indices) en raison même de la compréhension des structures considérées que ces notations (au moins) permettent.
Nous avons, de plus, illustré la plupart des notions introduites d'exemples , parfois élémentaires, d'autres fois plus marquants, qui, pensons-nous, permettent assez bien de fixer les idées.
Comme il n'était pas dans notre intention de procéder à une étude générale des systèmes tensoriels (et des notions dérivées) nous avons veillé

à limiter le plus possible ce Chapite II de "généralités" (cependant indispensables).

Au Chapitre III, nous procédons à une étude assez exhaustive des sytèmes tensoriels particuliers que sont les sytèmes tensoriels de structures algébriques, en l'illustrant de nombreux exemples. Nous y établissons, surtout, le résultat essentiel que nous avions en vue (et évoqué plus haut).

Enfin, on trouvera en Appendice une comparaison précise entre les notions de systèmes tensoriels et de bicatégories.

CHAPITRE I : TERMINOLOGIE, NOTATIONS ET RESULTATS PRELIMINAIRES.

1. Graphes orientés.

Si Σ est un graphe orienté (voir (C.A.S.T.)), on note:

- $Fl\,\Sigma$ la classe de ses flèches,
- $Ob\,\Sigma$ la classe de ses objets,
- $dom: Fl\,\Sigma \longrightarrow Ob\,\Sigma$ l'application domaine des flèches (qui, à toute flèche de Σ, associe son domaine - ou source),
- $cod: Fl\,\Sigma \longrightarrow Ob\,\Sigma$ l'application co-domaine des flèches (qui, à toute flèche de Σ, associe son co-domaine - ou but)
- $i: Ob\,\Sigma \longrightarrow Fl\,\Sigma$ l'application sélection des identités (qui, à tout objet S de Σ, associe la flèche identité en S, notée $i(S) = Id_S$).

Alors, on a:

- pour tout objet S de Σ, $dom(i(S)) = cod(i(S)) = S$.

On dit qu'un graphe orienté Σ est petit si, et seulement si:

- $Fl\,\Sigma$ est un ensemble (et $Ob\,\Sigma$ est un ensemble).

De même, on dit qu'il est fini si, et seulement si:

- $Fl\,\Sigma$ est un ensemble fini.

Nous laissons au lecteur le soin de préciser ce qu'est un homomorphisme entre graphes orientés.

2. Graphes multiplicatifs.

On dit que $\underline{B} = (\mathrm{Ob}\,\underline{B}\,,\ \mathrm{Fl}\,\underline{B},\ \mathrm{dom},\ \mathrm{cod},\ i,\ k\colon \underline{B}*\underline{B} \longrightarrow \mathrm{Fl}\,\underline{B})$ est un graphe multiplicatif si, et seulement si (voir (C.A.S.T.)):

- $(\mathrm{Ob}\,\underline{B},\ \mathrm{Fl}\,\underline{B},\ \mathrm{dom},\ \mathrm{cod},\ i)$ est un graphe orienté (dit sous-jacent à $\underline{B}$)
- $\underline{B}*\underline{B}$ est une classe (dite des couples de flèches composables de $\underline{B}$) dont les éléments sont des couples (b',b) de flèches consécutives de $\underline{B}$, i.e. telles que $\mathrm{dom}(b') = \mathrm{cod}(b)$ (i. e. deux flèches composables sont nécessairement consécutives, mais deux flèches consécutives ne sont pas nécessairement composables),
- $k\colon \underline{B}*\underline{B} \longrightarrow \mathrm{Fl}\,\underline{B}$ est une application (loi de composition des flèches ... composables, et l'on pose $k(b',b) = b'.b$ si cela a un sens),
- pour toute flèche $b\colon B \longrightarrow B'$ de $\underline{B}$, les couples (b,Id_B) et $(\mathrm{Id}_{B'},b)$ sont nécessairement des couples de flèches composables (dits triviaux) et l'on a $k(\mathrm{Id}_{B'},b) = b = k(b,\mathrm{Id}_B)$,
- pour tout couple $(b'\colon B' \longrightarrow B'',\ b\colon B \longrightarrow B')$ de flèches composables de $\underline{B}$, on a $\mathrm{dom}(b'.b) = \mathrm{dom}(b) = B$ et $\mathrm{cod}(b'.b) = \mathrm{cod}(b') = B''$.

On dit qu'un graphe multiplicatif est petit (resp. fini) si, et seulement si, son graphe orienté sous-jacent est petit (resp. fini).

Il nous arrivera fréquemment de "représenter graphiquement" un graphe multiplicatif en donnant une représentation graphique de son graphe orienté sous-jacent et une liste d'équations (e. g. $b'.b = b''$, qui signifie: (b',b) est un couple de flèches composables et le composé est b''), où nous omettrons les compositions de couples triviaux, précisant la loi de composition des flèches.

Nous laissons, enfin, au lecteur le soin de préciser ce qu'est un homomorphisme de graphes multiplicatifs, encore appelé foncteur . Alors, si $F\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur du graphe multiplicatif $\underline{B}$ vers le graphe multiplicatif $\underline{C}$, il nous arrivera fréquemment d'écrire:

- FB , au lieu de $F(B)$ (si B est un objet de $\underline{B}$),

- Fb , au lieu de $F(b)$, si b est une flèche de $\underline{B}$,
- $F(-)$, ou même $F -$, au lieu de F .

3. Catégories.

Une <u>catégorie</u> est un graphe multiplicatif où deux flèches consécutives sont <u>nécessairement</u> composables et dont la loi de composition des flèches est associative.

Si $\underline{C}$ est une catégorie, on note $\underline{C}*\underline{C}*\underline{C}$ la classe des triplets de flèches (c'',c',c) <u>consécutives</u> (et donc composables) i. e. telles que: $dom(c'') = cod(c')$ et $dom(c') = cod(c)$.

Si $\underline{B}$ est un graphe multiplicatif, si $\underline{C}$ est une catégorie, si $F: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ et $G: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ sont deux foncteurs et si n est une transformation naturelle du foncteur F vers le foncteur G (voir (C.A.S.T.)), alors, on notera fréquemment:

- $n: F \longrightarrow G$,
- $n : F \longrightarrow G : \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$,
- n_B ou nB , au lieu de $n(B)$ (si B est un objet de $\underline{B}$)
- n_- , où $n-$, ou $n(-)$, au lieu de n .

4. Cônes et limites.

Soit $F: \underline{I} \longrightarrow \underline{B}$ un foncteur du graphe multiplicatif $\underline{I}$ vers le graphe multiplicatif $\underline{B}$.

On dit que $((b_I: B \longrightarrow F(I))_{I \in Ob\, \underline{I}}, F)$ (resp. $((b'_I: F(I) \longrightarrow B')_{I \in Ob\, \underline{I}}, F)$) est un <u>cône projectif</u> (resp. <u>inductif</u>) <u>de base</u> F dans $\underline{B}$ si, et seulement si:

- $(b_I: B \longrightarrow F(I))_{I \in Ob\, \underline{I}}$ (resp. $(b'_I: F(I) \longrightarrow B')_{I \in Ob\, \underline{I}}$) est une famille de flèches de $\underline{B}$,

- pour toute flèche $i: I \longrightarrow I'$ de $\underline{I}$, on a: $(F(i), b_I)$ (resp. $(b'_{I'}, F(i))$) est un couple de flèches composables de $\underline{B}$ et $F(i).b_I = b_{I'}$ (resp. $b'_{I'}.F(i) = b'_I$).

Si aucune confusion sur F n'est possible, on dira aussi qu'un tel cône est de <u>base</u> $\underline{I}$. On préferera, également, le noter:

- $(b_I : B \longrightarrow F(I))_{I \in \underline{I}}$. (resp. $(b'_I : F(I) \longrightarrow B')_{I \in \underline{I}}$.

Bien entendu, si $\underline{B}$ est une catégorie, un tel cône peut être une limite projective (resp. inductive). Dans ce cas, si aucune confusion n'est possible quant à la famille des <u>projections</u> (resp. <u>co-projections</u>) $(b_I)_{I \in \mathrm{Ob}\,\underline{I}}$ (resp. $(b'_I)_{I \in \mathrm{Ob}\,\underline{I}}$) , on notera indifféremment:

- $B = \varprojlim (F) = \varprojlim_{I \in \underline{I}} (F(I))$ (resp. $B' = \varinjlim (F) = \varinjlim_{I \in \underline{I}} (F(I))$).

Un tel cône, ou une telle limite, sera dit <u>petit</u> si, et seulement si, $\underline{I}$ est un graphe multiplicatif petit. Il sera dit <u>fini</u> si, et seulement si, $\underline{I}$ est une catégorie finie. Si α est un ordinal régulier, il sera dit α-<u>projectif</u> (resp. α-<u>inductif</u>) si, et seulement si:

- (il est petit et) l'ensemble $\mathrm{Fl}\,\underline{I}$ est de cardinal strictement inférieur à α .

5. <u>Esquisses</u>.

On dit que $/\underline{S}/ = (\underline{S}, \mathbb{P})$ est une <u>esquisse</u> (<u>projective</u>) si, et seulement si (voir (E.T.S.A.)):

- $\underline{S}$ est un graphe multiplicatif,
- $\mathbb{P}$ est une classe de cônes projectifs de $\underline{S}$, dits <u>distingués</u>.

On dit que $/\underline{S}/$ est <u>petite</u> (resp. <u>finie</u>) si, et seulement si:

- $\underline{S}$ est un graphe multiplicatif petit (resp. fini),
- $\mathbb{P}$ est un ensemble (resp. un ensemble fini),
- les éléments de $\mathbb{P}$ sont des cônes projectifs petits (resp. finis).

Si α est un ordinal régulier, on dit que $/\underline{S}/$ est une <u>esquisse α-projective</u> si, et seulement si:

- les éléments de $\mathbb{P}$ sont des cônes α-projectifs.

6. Structures algébriques (ensemblistes).

Soit $/\underline{S}/$ une esquisse projective.

On dit que $/R/ : /\underline{S}/ \longrightarrow$ Ens est une <u>réalisation de</u> $/\underline{S}/$ <u>dans la catégorie</u> Ens , ou encore une <u>structure algébrique</u> (<u>ensembliste</u>) <u>d'espèce</u> $/\underline{S}/$ si, et seulement si (voir (E.T.S.A.)):

- R: $\underline{S} \longrightarrow$ Ens est un foncteur (dit <u>sous-jacent</u> à la réalisation),
- l'image par R de tout cône projectif distingué (i. e. de tout élément de $\mathbb{P}$) est une limite projective de Ens.

Dans ces conditions, on note $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ la <u>catégorie des structures algébriques d'espèce</u> $/\underline{S}/$ (et de leurs <u>homomorphismes</u>), i. e. la catégorie dont les objets sont ces réalisations et dont les flèches sont les transformations naturelles entre les foncteurs qui leurs sont sous-jacents.

Ainsi, il n'est pas difficile de montrer que les catégories de structures algébriques "usuelles" (groupes, anneaux, catégories petites, ...) sont équivalentes à des catégories de structures algébriques d'espèces des esquisses projectives petites (et même finies).

7. Structures algébriques générales et co-structures.

Soit $/\underline{S}/$ une esquisse projective et $\underline{C}$ une catégorie.

On dit que $/R/ : /\underline{S}/ \longrightarrow \underline{C}$ est une <u>réalisation de</u> $/\underline{S}/$ <u>dans</u> $\underline{C}$, ou encore une <u>$\underline{C}$-structure algébrique d'espèce</u> $/\underline{S}/$, ou encore une structure algébrique d'espèce $/\underline{S}/$ interne à $\underline{C}$, si et seulement si (voir (C.O.S.S.)):

- R: $\underline{S} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur (dit <u>sous-jacent</u> à la réalisation),

- l'image par R de tout cône projectif distingué (i. e. de tout élément de $\mathbb{P}$) est une limite projective dans $\underline{C}$.

Dans ces conditions, on note $\underline{C}^{/\underline{S}/}$ la catégorie des <u>C-structures algébriques d'espèce</u> $/\underline{S}/$ (et de leurs <u>homomorphismes</u>), i. e. la catégorie dont les objets sont ces réalisations et dont les flèches sont les transformations naturelles entre les foncteurs qui leurs sont sous-jacents.
Ainsi, par exemple, la catégorie des groupes topologiques est équivalente à la catégorie des Top-structures algébriques d'espèce l'esquisse projective (finie) des groupes (si Top désigne la catégorie des espaces topologiques et applications continues).

On dira qu'une $\underline{C}^{op}$-structure algébrique d'espèce $/\underline{S}/$ est une <u>C-co-structure d'espèce</u> $/\underline{S}/$ et même, s'il n'y a aucune ambiguïté sur $\underline{C}$, une <u>co-structure d'espèce</u> $/\underline{S}/$.

8. <u>Produit tensoriel d'esquisses projectives.</u>

Soit $/\underline{S}/ = (\underline{S}, \mathbb{P})$ et $/\underline{S}'/ = (\underline{S}', \mathbb{P}')$ deux esquisses projectives.

A tout objet S (resp. S') de $\underline{S}$ (resp. $\underline{S}'$) , nous associons le foncteur

$$\begin{array}{rrcl} (S,-): & \underline{S}' & \longrightarrow & \underline{S} \times \underline{S}' \\ & S'_1 \in \mathrm{Ob}\, \underline{S}' & \longmapsto & (S, S'_1) \\ & s' \in \mathrm{Fl}\, \underline{S}' & \longmapsto & (\mathrm{Id}_S, s') \end{array}$$

(resp.
$$\begin{array}{rrcl} (-,S'): & \underline{S} & \longrightarrow & \underline{S} \times \underline{S}' \\ & S_1 \in \mathrm{Ob}\, \underline{S} & \longmapsto & (S_1, S') \\ & s \in \mathrm{Fl}\, \underline{S} & \longmapsto & (s, \mathrm{Id}_{S'}) \end{array}$$
).

Alors, nous désignons par $(S, \mathbb{P}')$ (resp. $(\mathbb{P}, S')$) la classe des cônes projectifs de $\underline{S} \times \underline{S}'$, images par $(S,-)$ (resp. $(-,S')$) des éléments de $\mathbb{P}'$ (resp. $\mathbb{P}$).

Dans ces conditions, nous posons (voir (E.G.C.E.)):

- $$\mathbb{P} \boxtimes \mathbb{P}' = \Big(\bigcup_{S \in \mathrm{Ob}\, \underline{S}} (S, \mathbb{P}') \Big) \cup \Big(\bigcup_{S' \in \mathrm{Ob}\, \underline{S}'} (\mathbb{P}, S') \Big) ,$$

- $/\underline{S}/ \boxtimes /\underline{S}'/ = (\underline{S} \times \underline{S}', \mathbb{P} \boxtimes \mathbb{P}')$.

Ainsi, $/\underline{S}/ \boxtimes /\underline{S}'/$ est une esquisse projective, dite <u>produit tensoriel de</u> $/\underline{S}/$ <u>par</u> $/\underline{S}'/$, et qui vérifie la propriété suivante (voir (E.G.C.E.)):

- pour toute catégorie $\underline{C}$ (possédant "suffisamment" de limites projectives), on a des équivalences de catégories

$$(Ens^{/\underline{S}/})^{/\underline{S}'/} \sim Ens^{/\underline{S}/\boxtimes/\underline{S}'/} \sim (Ens^{/\underline{S}'/})^{/\underline{S}/} .$$

Remarquons, enfin, que si $/\underline{S}/$ et $/\underline{S}'/$ sont des esquisses projectives petites (resp. finies, α-projectives) alors $/\underline{S}/\boxtimes/\underline{S}'/$ est une esquisse projective petite (resp. finie, α-projective).

9. <u>Structures et co-structures multiples</u>.

Soit $/\underline{S}/$ une esquisse projective.

Pour tout entier n , on définit l'esquisse projective $\boxtimes^n/\underline{S}/$, <u>puissance tensorielle</u> $n^{\text{ième}}$ <u>de</u> $/\underline{S}/$, par récurrence comme suit:

- $\boxtimes^0/\underline{S}/ = (\underline{1},\emptyset)$, encore notée $\underline{1}$, (où $\underline{1}$ est la catégorie n'ayant qu'un seul objet Ω et Id_Ω pour seule flèche),
- $\boxtimes^1/\underline{S}/ = /\underline{S}/$,
- si $n > 2$ et $\boxtimes^{n-1}/\underline{S}/$ est définie, alors $\boxtimes^n/\underline{S}/ = /\underline{S}/\boxtimes(\boxtimes^{n-1}/\underline{S}/)$.

Dans ces conditions, si $\underline{C}$ est une catégorie et $n \in \mathbb{N}$, une $\underline{C}$-structure algébrique d'espèce $\boxtimes^n/\underline{S}/$ sera appelée <u>$\underline{C}$-structure algébrique</u> n-<u>uple d'espèce</u> $/\underline{S}/$. De même, une $\underline{C}$-co-structure d'espèce $\boxtimes^n/\underline{S}/$ sera appelée <u>$\underline{C}$-co-structure</u> n-<u>uple d'espèce</u> $/\underline{S}/$.

Par exemple, les catégories doubles (de (C.A.S.T.)) sont des structures algébriques (ensemblistes) 2-uples d'espèce l'esquisse de catégories. De même, les structures algébriques (ensemblistes) doubles d'espèce l'esquisse des groupes (i. e. les <u>groupes doubles</u>) sont les groupes abéliens.

10. Homomorphismes entre esquisses projectives.

Soit $/\underline{S}/ = (\underline{S}, \mathbb{P})$ et $/\underline{S}'/ = (\underline{S}', \mathbb{P}')$ deux esquisses projectives.

On dit que $/R/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ est une réalisation , ou homomorphisme, de $/\underline{S}/$ vers $/\underline{S}'/$ si, et seulement si (voir (E.T.S.A.)):

- $R : \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$ est un foncteur,
- $R(\mathbb{P}) \subset \mathbb{P}'$.

Dans ces conditions, si $\underline{C}$ est une catégorie, une telle réalisation induit un foncteur ("composition par /R/"):

$$\underline{C}^{/R/} : \underline{C}^{/\underline{S}'/} \longrightarrow \underline{C}^{/\underline{S}/}$$
$$/R'/ \longmapsto /R'.R/ \quad .$$

En particulier, si $/R/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ est une réalisation entre esquisses projectives petites, nous avons ("théorème du faisceau associé"):

- le foncteur $\mathrm{Ens}^{/R/} : \mathrm{Ens}^{/\underline{S}'/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ admet un adjoint à gauche.

(voir (C.O.S.S.)).

11. Co-structures canoniques.

Soit $/\underline{S}/$ une esquisse projective petite.

A tout objet S de $\underline{S}$, nous associons la réalisation $/\mathrm{Sel}_S/ : \underline{1} \longrightarrow /\underline{S}/$ telle que $\mathrm{Sel}_S : \underline{1} \longrightarrow \underline{S}$ est le foncteur ("sélection de S ") qui associe S à l'unique objet de $\underline{1}$.
Ainsi, cette réalisation induit le foncteur "évaluation en S " :

$$ev_S = \mathrm{Ens}^{/\mathrm{Sel}_S/} : \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{1} = \mathrm{Ens}$$
$$/R/ \longmapsto R(S) \quad ,$$

et, d'après le "théorème du faisceau associé", ce foncteur admet un adjoint à gauche:

$$q_S : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} \quad .$$

De même, à toute flèche $s: S \longrightarrow S'$ de $\underline{S}$ est associée une transformation naturelle "évaluation en s" :

$$ev_s : ev_S \longrightarrow ev_{S'} : Ens^{/\underline{S}/} \longrightarrow Ens ,$$

telle que:

- pour tout objet $/R/$ de $Ens^{/\underline{S}/}$, on a $ev_s(/R/) = R(s)$.

Par adjonction, il en résulte donc une transformation naturelle:

$$q_s : q_{S'} \longrightarrow q_S \quad : Ens \longrightarrow Ens^{/\underline{S}/} .$$

Dans ces conditions, nous obtenons ainsi un foncteur (canoniquement associé à $/\underline{S}/$):

$$\begin{array}{rcl} Y_{/\underline{S}/} : \underline{S} & \longrightarrow & (Ens^{/\underline{S}/})^{op} \\ S & \longmapsto & q_S(1) \\ s & \longmapsto & q_s(1) \end{array} .$$

Alors, on sait que (<u>"lemme de Yoneda pour les esquisses projectives petites"</u> - voir (F.O.S.A.)):

- <u>naturellement en tout objet</u> $/R/ : /\underline{S}/ \longrightarrow Ens$ <u>de</u> $Ens^{/\underline{S}/}$ <u>et naturellement en tout objet</u> S <u>de</u> $\underline{S}$, <u>on a</u>

$$R(S) \sim Hom_{Ens^{/\underline{S}/}}(Y_{/\underline{S}/}(S), /R/) ,$$

- $/Y_{/\underline{S}/}/ : /\underline{S}/ \longrightarrow (Ens^{/\underline{S}/})^{op}$ est une réalisation (c'est donc une $Ens^{/\underline{S}/}$-co-structure d'espèce $/\underline{S}/$: nous dirons, plus simplement, que c'est la <u>co-structure canoniquement associée à</u> $/\underline{S}/$).

12. <u>Densité des co-structures canoniques.</u>

Soit $/\underline{S}/$ une esquisse projective petite.

Si $/R/ : /\underline{S}/ \longrightarrow Ens$ est une réalisation, nous lui associons le graphe multiplicatif $H(/R/)$ (<u>de ses hypermorphismes</u>) défini comme suit (voir (C.A.S.T.)):

- ses objets sont les couples (S,x) tels que S est un objet de $\underline{S}$ et x est élément de $R(S)$,

- ses flèches sont les couples $(s,x)\colon (S,x) \longrightarrow (S',R(s)(x))$ tels que $s\colon S \longrightarrow S'$ est une flèche de $\underline{S}$ et x est élément de $R(S)$,

- les deux flèches $(s,x)\colon (S,x) \longrightarrow (S',R(s)(x))$ et $(s',x')\colon (S',x') \longrightarrow (S'',R(s')(x'))$ sont composables si, et seulement si $x' = R(s)(x)$ et $s\colon S \longrightarrow S'$ et $s'\colon S' \longrightarrow S''$ sont composables dans $\underline{S}$, auquel cas la composée est $(s'.s,x)\colon (S,x) \longrightarrow (S'',R(s')(x'))$.

Nous disposons d'un foncteur "projection":

$$\begin{array}{rcl} h(/R/)\colon H(/R/) & \longrightarrow & \underline{S} \\ (S,x) & \longmapsto & S \\ (s,x) & \longmapsto & s \end{array} \quad .$$

Dans ces conditions, nous savons alors que (<u>"densité de la co-structure canonique</u>") (voir (F.O.S.A.)):

- <u>si</u> $/R/$ <u>est un objet de</u> $Ens^{/\underline{S}/}$, <u>alors on a</u>:

$$\begin{aligned} /R/ &= \varinjlim ((Y_{/\underline{S}/})^{op}.h(/R/)^{op}) \\ &= \varinjlim (H(/R/)^{op} \xrightarrow{h(/R/)^{op}} \underline{S}^{op} \xrightarrow{(Y_{/\underline{S}/})^{op}} Ens^{/\underline{S}/}) \end{aligned} \quad ;$$

ce que nous écrirons aussi, en posant $H(/R/)(S,x) = S_x$ ($= S$) , pour tout objet (S,x) de $H(/R/)$,

$$/R/ = \varinjlim_{\substack{x \in R(S) \\ S \in Ob\, \underline{S}}} Y_{/S/}(S_x) \quad .$$

13. <u>Idées</u>.

Soit $/\underline{S}/ = (\underline{S}, \mathbb{P})$ une esquisse projective.

On dit que le graphe orienté Σ est une <u>idée de</u> $/\underline{S}/$ si, et seulement si:

- Σ est un sous-graphe orienté du graphe orienté sous-jacent à $\underline{S}$,
- pour toute esquisse projective $/\underline{C}/$,associée à une catégorie $\underline{C}$ munie d'un choix de (suffisamment) de limites projectives (constituant les cônes projectifs distingués de $/\underline{C}/$), et tous homomorphismes (ou réalisations) $/R/,/R'/: /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{C}/$, si $R_{|\Sigma} = R'_{|\Sigma}$ alors $R = R'$,
- Σ est le plus petit sous-graphe orienté de $\underline{S}$ possédant ces deux (premières) propriétés,

(voir (I.M.S.A.) , où une définition plus précise est fournie - mais dont nous n'avons pas le besoin explicite ici).

Intuitivement, dire que Σ est une idée pour $/\underline{S}/$ c'est dire que $/\underline{S}/$ admet un système de générateurs (dans un sens que justement (I.M.S.A.) précise). Dans ce qui suit, lorsqu'il s'agira de montrer (rapidement) qu'un type de structures algébriques admet une esquisse, le plus souvent nous nous contenterons d'en décrire une idée (le soin étant laissé au lecteur d'engendrer, à partir de cette idée, l'esquisse voulue).

14. Structures algébriques duales (de même espèce) et espèces duales.

Soit $/\underline{S}/ = (\underline{S}, \mathbb{P})$ une esquisse projective (petite).

Si $P = (s_I: S \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$ est un cône projectif distingué (i. e. un élément de $\mathbb{P}$), nous notons $G(P)$ le groupe des automorphismes du graphe multiplicatif $\underline{I}$.

Si $g: \underline{I} \longrightarrow \underline{I}$ est un tel automorphisme, on en déduit donc un nouveau cône projectif (non nécessairement distingué)

$$P_g = (s_{g(I)}:S \longrightarrow S_{g(I)})_{I \in \underline{I}} .$$

Considérons, maintenant, le groupe produit:

$$G(\mathbb{P}) = \prod_{P \in \mathbb{P}} G(P) .$$

Alors, à tout élément $g = (g_P)_{P \in \mathbb{P}}$ de $G(\mathbb{P})$, nous associons l'ensemble de cônes projectifs $\mathbb{P}_g = \{ P_{g_P} / P \in \mathbb{P} \}$, de sorte que

$/\underline{S}/_g = (\underline{S}, \mathbb{P}_g)$ est encore une esquisse projective.

Il est alors facile de vérifier que, si $\underline{C}$ est une catégorie et si $/R/ : /\underline{S}/ \longrightarrow \underline{C}$ est une réalisation, alors $/R/_g : /\underline{S}/_g \longrightarrow \underline{C}$ est encore une réalisation (de <u>même</u> foncteur sous-jacent). Ainsi, obtient-on un isomorphisme:

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{\underline{C},g} : & \underline{C}^{/\underline{S}/} & \longrightarrow & \underline{C}^{/\underline{S}/_g} \\ & /R/ & \longrightarrow & /R/_g \quad . \end{array}$$

Dans ces conditions (voir (D.S.A.E.)):

- si $/\underline{S}/$ et $/\underline{S}/_g$ <u>ne sont pas</u> isomorphes, nous dirons que $/\underline{S}/_g$ est une espèce de structures algébriques <u>duale</u> de l'espèce de structures algébriques $/\underline{S}/$ (et $\gamma_{\underline{C},g}$ est un isomorphisme entre catégories de $\underline{C}$-structures algébriques dont les espèces sont duales),

- si $/Q/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}/_g$ est un isomorphisme, alors

$$\underline{C}^{/\underline{S}/} \xrightarrow[\gamma_{\underline{C},g}]{\qquad\qquad} \underline{C}^{/\underline{S}/_g} \xrightarrow[\underline{C}^{/Q/}]{\qquad\qquad} \underline{C}^{/\underline{S}/}$$

est un automorphisme de $\underline{C}^{/\underline{S}/}$: nous dirons que c'est un <u>automorphisme de dualisation des</u> $\underline{C}$-<u>structures algébriques de (même) espèce</u> $/\underline{S}/$ (ainsi, si $/R/$ est un objet de $\underline{C}^{/\underline{S}/}$, alors $/R/_g . /Q/ = /R.Q/$ est aussi objet de $\underline{C}^{/\underline{S}/}$, que l'on appelle $\underline{C}$-structure algébrique d'espèce $/\underline{S}/$, <u>duale</u> de la $\underline{C}$-structure algébrique, de même espèce, $/R/$)

Clairement, les automorphismes de dualisation des $\underline{C}$-structures algébriques d'espèce $/\underline{S}/$ constituent un groupe que l'on note $\mathrm{Dual}(\underline{C}^{/\underline{S}/})$,

Par exemple, les magmas unitaires à gauche sont les structures algébriques (ensemblistes) d'une certaine espèce ("l'esquisse de magma unitaire à gauche") et les magmas unitaires à droite sont les structures algébriques (ensemblistes) d'une espèce <u>duale</u> de cette première espèce.
De même, l'automorphisme de Cat , qui à toute catégorie petite $\underline{C}$ associe sa catégorie duale $\underline{C}^{op}$, est un automorphisme de dualisation de structures algébriques (ensemblistes) de <u>même</u> espèce (à savoir l'esquisse de catégories).

15. Variance d'homomorphismes entre structures algébriques.

Soit $/\underline{S}/$ une esquisse projective (petite) et $\underline{C}$ une catégorie.

Si g et g' sont deux éléments du groupe des automorphismes de dualisation des $\underline{C}$-structures algébriques d'espèce $/\underline{S}/$, i. e. s'ils sont éléments de $\mathrm{Dual}(\underline{C}^{/\underline{S}/})$, on dit que $h: /R/ \dashrightarrow /R'/$ est un homomorphisme (g',g)-variant de la $\underline{C}$-structure algébrique $/R/:/\underline{S}/ \longrightarrow \underline{C}$ vers la $\underline{C}$-structure algébrique $/R'/:/\underline{S}/ \longrightarrow \underline{C}$ si, et seulement si (voir (D.S.A.E.)):

- $h: g(/R/) \longrightarrow g'(/R'/)$ est une flèche de $\underline{C}^{/\underline{S}/}$ (i. e. un "véritable" homomorphisme).

Si $e = \mathrm{Id}_{\underline{C}^{/\underline{S}/}}$, un homomorphisme (e,g)-variant sera appelé homomorphisme g-contra-variant et un homomorphisme (g',e)-variant sera appelé homomorphisme g'-co-variant.

Il est facile de vérifier que les homomorphismes contra-variants (resp. covariants) à variances parcourant $\mathrm{Dual}(\underline{C}^{/\underline{S}/})$ constituent les flèches d'une catégorie ayant mêmes objets que $\underline{C}^{/\underline{S}/}$ et admettant $\underline{C}^{/\underline{S}/}$ pour sous-catégorie.

Par exemple, si $\underline{C} = \mathrm{Ens}$ et $/\underline{S}/$ est l'esquisse de catégories (voir (E.T.S.A.)), alors $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ est équivalente à Cat et l'on a:

$$\mathrm{Dual}(\mathrm{Cat}) = (\{\mathrm{Id}_{\mathrm{Cat}},(-)^{\mathrm{op}}\}, \circ) .$$

Ainsi, un homomorphisme $(-)^{\mathrm{op}}$-contra-variant (resp. $(-)^{\mathrm{op}}$-co-variant) $h: \underline{A} \dashrightarrow \underline{B}$, de la petite catégorie $\underline{A}$ vers la petite catégorie $\underline{B}$, est un foncteur $h: (\underline{A})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \underline{B}$ (resp. $h: \underline{A} \longrightarrow (\underline{B})^{\mathrm{op}}$) , i. e. un foncteur contra-variant (au sens usuel) de $\underline{A}$ vers $\underline{B}$.

16. Morphismes entre structures algébriques.

Désignons par Esq la catégorie dont les objets sont les esquisses projectives petites et dont les flèches sont les homomorphismes entre ces esquisses.

Nous notons alors Prot la sous-catégorie pleine de Esq dont les objets sont les <u>prototypes projectifs petits</u> i. e. les esquisses projectives petites $/\underline{S}/ = (\underline{S}, \mathbb{P})$ telles que (voir (E.T.S.A.)):

- $\underline{S}$ est une catégorie (nécessairement petite),

- tout cône projectif distingué (i. e. tout élément de $\mathbb{P}$) est une limite projective de $\underline{S}$.

Alors, on sait que ("<u>existence du prototype engendré par une esquisse</u>"):

- <u>le foncteur injection canonique</u> i: Prot $\longrightarrow$ Esq <u>admet un adjoint à gauche</u> π: Esq $\longrightarrow$ Prot (voir (E.T.S.A.)).

Désignons, maintenant, par $/\underline{S}_{Cat}/$ l'esquisse projective petite dont le graphe orienté sous-jacent, les équations de définition de la loi de composition des flèches de $\underline{S}$ et les cônes projectifs distingués sont précisés par le diagramme 1 (ci-joint). Alors, $/\underline{S}_{Cat}/$ est l'esquisse des catégories, puisqu'il est facile de vérifier que les catégories Cat et $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_{Cat}/}$ sont équivalentes.

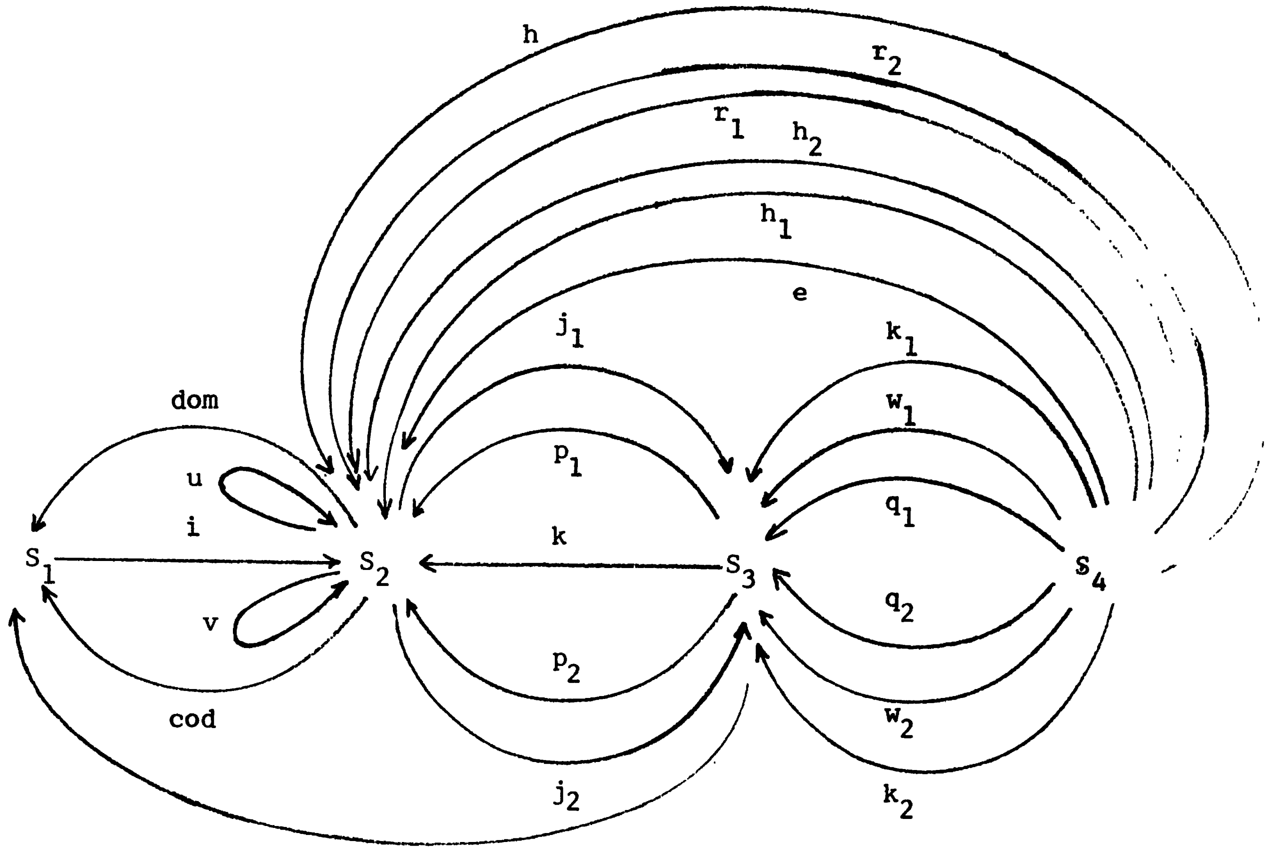
Dans ces conditions, nous dirons qu'un foncteur $Z: \underline{S}_{Cat} \longrightarrow \mathrm{Esq}^{op}$ est une <u>pro-co-catégorie</u> (<u>dans</u> Esq) si, et seulement si:

- $/\pi^{op}.Z/: \underline{S}_{Cat} \longrightarrow \mathrm{Prot}^{op}$ est une réalisation (i. e. une Prot-co-structure d'espèce l'esquisse des catégories, ou encore une co-catégorie dans Prot).

Si $\underline{C}$ est une catégorie, si $Z: \underline{S}_{Cat} \longrightarrow \mathrm{Esq}^{op}$ est une pro-co-catégorie, si $/R/: Z(S_1) \longrightarrow \underline{C}$ et $/R'/: Z(S_1) \longrightarrow \underline{C}$ sont deux réalisations, i. e. deux $\underline{C}$-structures algébriques d'espèce $Z(S_1)$, nous dirons que $/M/: /R/ \dashrightarrow /R'/$ est un <u>morphisme</u> (<u>d'espèce</u> $Z(S_2)$, ou, plus précisément encore, <u>d'espèce</u> Z) de $/R/$ vers $/R'/$ si, et seulement si (voir (C.R.M.S.)):

- $/M/: Z(S_2) \longrightarrow \underline{C}$ est une réalisation,

- $/M/.Z(dom) = /R/$ et $/M/.Z(cod) = /R'/$.



graphe orienté sous-jacent

$$\mathrm{dom}.i = \mathrm{Id}_{S_1} \qquad p_1.j_1 = \mathrm{Id}_{S_2} \qquad p_2.j_1 = i.\mathrm{dom} = u$$

$$\mathrm{cod}.i = \mathrm{Id}_{S_1} \qquad p_1.j_2 = i.\mathrm{cod} = v \qquad p_2.j_2 = \mathrm{Id}_{S_2}$$

$$\mathrm{dom}.p_1 = d \qquad k.j_1 = \mathrm{Id}_{S_2}$$

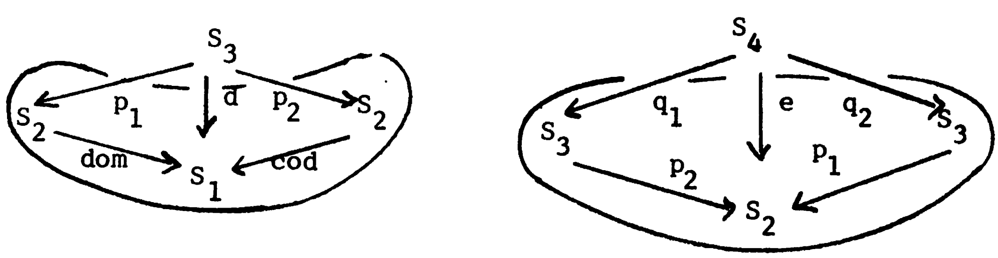
$$\mathrm{cod}.p_2 = d \qquad k.j_2 = \mathrm{Id}_{S_2}$$

$$p_2.q_1 = e \qquad p_1.w_1 = k.q_1 = h_1 \qquad p_2.w_1 = p_2.q_2 = r_2$$

$$p_1.q_2 = e \qquad p_1.w_2 = p_1.q_1 = r_1 \qquad p_2.w_2 = k.q_2 = h_2$$

$$k.k_1 = k.k_2 = h$$

équations de définition



cônes projectifs distingués

<u>Diagramme</u> 1

Nous désignons, alors, par $\underline{C}(Z)$ la <u>catégorie des $\underline{C}$-structures algébriques d'espèce</u> $Z(S_1)$ <u>et de leurs morphismes d'espèce</u> Z , i. e. la catégorie telle que:

- ses objets sont les $\underline{C}$-structures algébriques d'espèce $Z(S_1)$,
- ses flèches sont les morphismes d'espèce Z entre ces structures,
- la composition des flèches est donnée par $Z(k)$.

Bien entendu, les catégories $\underline{C}^{Z(S_1)}$ et $\underline{C}(Z)$ ont exactement les mêmes objets (à savoir les $\underline{C}$-structures algébriques d'espèce $Z(S_1)$) mais leurs flèches sont, en générales, totalement différentes.

Notons que, si $/\underline{S}/$ est une esquisse projective petite, il lui est <u>associée</u> une pro-co-catégorie $Z_{/\underline{S}/}: \underline{S}_{Cat} \longrightarrow Esq^{op}$ <u>canonique</u> telle que (notamment):

- $Z(S_1) = \underline{1} \boxtimes /\underline{S}/ \approx /\underline{S}/$,
- $Z(S_2) = \underline{2} \boxtimes /\underline{S}/$ (où $\underline{2}$ est identifiée à l'esquisse $(\underline{2},\emptyset)$),
- $Z(S_3) = \underline{3} \boxtimes /\underline{S}/$ (où $\underline{3}$ est identifiée à l'esquisse $(\underline{3},\emptyset)$),
- $Z(S_4) = \underline{4} \boxtimes /\underline{S}/$ (où $\underline{4}$ est identifiée à l'esquisse $(\underline{4},\emptyset)$).

Alors, il est facile de vérifier que $\underline{C}^{/\underline{S}/}$ et $\underline{C}(Z_{/\underline{S}/})$ sont des catégories isomorphes, autrement dit que les homomorphismes "naturels" entre $\underline{C}$-structures algébriques d'espèce $/\underline{S}/$ sont des <u>morphismes canoniques</u> (i. e. de l'espèce $Z_{/\underline{S}/}$ canoniquement associée à $/\underline{S}/$).

Par exemple, si $/\underline{S}/$ est une esquisse projective petite et si E désigne la classe (d'objets de $Ens^{/\underline{S}/}$) des structures algébriques ensemblistes d'espèce $/\underline{S}/$, la catégorie $\mathbb{E}$, des <u>couples</u> d'éléments de E , est isomorphe à la catégorie $Ens(Z'_{/\underline{S}/})$, où $Z'_{/\underline{S}/}: \underline{S}_{Cat} \longrightarrow Esq^{op}$ est la pro-co-catégorie telle que (notamment):

- $Z'_{/\underline{S}/}(S_1) = /\underline{S}/$,
- $Z'_{/\underline{S}/}(S_2) = /\underline{S}/ + /\underline{S}/$ dans Esq ,
- $Z'_{/\underline{S}/}(S_3) = /\underline{S}/ + /\underline{S}/ + /\underline{S}/$ dans Esq ,
- $Z'_{/\underline{S}/}(S_4) = /\underline{S}/ + /\underline{S}/ + /\underline{S}/ + /\underline{S}/$ dans Esq .

17. Quelques rappels sur les bi-modules.

Soit A et B deux anneaux unitaires.
Il est facile de vérifier que le Z-module $A \otimes_{Z} B$, produit tensoriel (dans la catégorie des groupes abéliens) du Z-module (sous-jacent à) A par le Z-module (sous-jacent à) B, est canoniquement muni d'une structure de (A,B)-bi-module que nous notons, pour simplifier, $A * B$.

Soit A, B et C trois anneaux unitaires.
Si M est un (A,B)-bi-module et si N est un (B,C)-bi-module, ils admettent un (A,C)-bi-module "produit tensoriel de M par N", que nous notons $M \otimes_{A,B,C} N$ (ou encore, plus simplement, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, $M \otimes N$).
En particulier, nous poserons $(A * B) \otimes_{A,B,C} (B * C) = A * B * C$ (qui est donc un (A,C)-bi-module).

Soit A, B et C trois anneaux unitaires.
Si M (resp. N) est un (A,B)-bi-module (resp. un (B,C)-bi-module), et si P est un (A,C)-bi-module, l'ensemble des applications A-linéaires (resp. C-linéaires) à gauche (resp. à droite) de M (resp. N) vers P est canoniquement muni d'une structure de (B,C)-bi-module (resp. de (A,B)-bi-module) que nous notons $[_{A,B} M , P [_{A,B,C}$ (resp. $]_{B,C} N , P]_{A,B,C}$) (1).

Soit A et B deux anneaux unitaires.
Nous désignons par $/\underline{S}_{(A,B)\text{-Bim}}/$ l'esquisse projective petite des (A,B)-bi-modules, dont une idée est représentée par le diagramme 2 ci-joint (esquisse que nous laissons le soin au lecteur de préciser entièrement !).
Alors, il est facile de vérifier que la co-structure canonique

$$/ Y_{/\underline{S}_{(A,B)\text{-Bim}}/} / : /\underline{S}_{(A,B)\text{-Bim}}/ \longrightarrow ((A,B)\text{-Bim})^{op}$$

est telle que (notamment):

---

(1) La notation utilisée ici, et qui pourra paraître lourde, prendra tout son sens au Chap. II, § 15 .

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"'] & S \arrow[loop above, "\alpha_a"] \arrow[loop below, "\beta_b"'] & S \times S \arrow[l, "+"]
\end{tikzcd}
$$

α_a (où a varie dans A)

β_b (où b varie dans B)

<u>Diagramme</u> 2

- $Y_{/\underline{S}_{(A,B)-Bim}/}(S) = A * B$.

Soit A , B et C trois anneaux unitaires.
Il est facile de vérifier que l'on définit bien une co-structure (i. e. une réalisation)

$$/M_{A,B,C}/ : /\underline{S}_{(A,B)-Bim}/ \boxtimes /S_{(B,C)-Bim}/ \longrightarrow ((A,C)-Bim)^{op}$$

lorsque l'on pose, naturellement en tout objet S' de $\underline{S}_{(A,B)-Bim}$ et en tout objet S" de $\underline{S}_{(B,C)-Bim}$:

- $M_{A,B,C}(S',S") = Y_{/\underline{S}_{(A,B)-Bim}/}(S') \underset{A,B,C}{\boxtimes} Y_{/\underline{S}_{(B,C)-Bim}/}(S")$.

En particulier, nous avons donc:

- $M_{A,B,C}(S,S) = A * B * C$.

CHAPITRE II : SYSTEMES TENSORIELS ET SYSTEMES TENSORIELS BI-FERMES.

1. Systèmes multiplicatifs.

On dit que $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\boxtimes)$ est un <u>système multiplicatif</u> (<u>de catégories</u>) si, et seulement si:

- $\underline{C}$ est une catégorie,
- $\underline{T} = (\underline{T}_c)_{c \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}$ est une famille de catégories (indexée par la classe $\mathrm{Fl}\,\underline{C}$ des flèches de $\underline{C}$),
- $\boxtimes = (-_{c'}\boxtimes_{c} - : \underline{T}_{c'} \times \underline{T}_{c} \longrightarrow \underline{T}_{c'.c})_{(c',c) \in \underline{C}*\underline{C}}$ est une famille de foncteurs (indexée par la classe $\underline{C}*\underline{C}$ des couples de flèches composables de $\underline{C}$).

Dans ces conditions, nous dirons aussi que $(\underline{T},\boxtimes)$ est un <u>$\underline{C}$-système multiplicatif</u>.

2. Systèmes multiplicatifs associatifs.

On dit que $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\boxtimes,a)$ est un <u>système multiplicatif associatif</u> si, et seulement si:

- $(\underline{C};\underline{T},\boxtimes)$ est un système multiplicatif,
- $a = (a_{c'',c',c} : (-_{c''}\boxtimes_{c'} -)_{c''.c'}\boxtimes_{c} - \longrightarrow -_{c''}\boxtimes_{c'.c}(-_{c'}\boxtimes_{c} -))_{(c'',c',c) \in \underline{C}*\underline{C}*\underline{C}}$ est une famille d'équivalences naturelles (indexée par la classe $\underline{C}*\underline{C}*\underline{C}$ des triplets de flèches composables de $\underline{C}$).

Dans ces conditions, nous dirons aussi que $(\underline{T},\boxtimes,a)$ est un <u>$\underline{C}$-système</u>

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
((-\boxtimes_{c''',c''}-)\boxtimes_{c'''.c'',c'}-)\boxtimes_{c'''.c''.c',c}- \arrow[rr, "a_{c''',c'',c'}\ \boxtimes_{c'''.c''.c',c}-"'] \arrow[d, "a_{c'''.c'',c',c}"] & & (-\boxtimes_{c''',c''.c'}(-\boxtimes_{c'',c'}-))\boxtimes_{c'''.c''.c',c}- \arrow[d, "a_{c''',c''.c',c}"] \\
(-\boxtimes_{c''',c''}-)\boxtimes_{c'''.c'',c'.c}(-\boxtimes_{c',c}-) \arrow[dr, "a_{c''',c'',c'.c}"'] & & -\boxtimes_{c''',c''.c'.c}((-\boxtimes_{c'',c'}-)\boxtimes_{c''.c',c}-) \arrow[dl, "-\boxtimes_{c''',c''.c'.c}\ a_{c'',c',c}"] \\
& -\boxtimes_{c''',c''.c'.c}(-\boxtimes_{c'',c'.c}(-\boxtimes_{c',c}-)) &
\end{tikzcd}
$$

<u>Diagramme</u> 3

<u>multiplicatif associatif</u>.

Un tel système (ou $\underline{C}$-système) multiplicatif associatif sera dit <u>cohérent</u> si, et seulement si:

- pour tout quadruplet (c''', c'', c', c) de flèches composables de $\underline{C}$, le diagramme d'équivalences naturelles 3 (ci-joint) est commutatif.

3. <u>Systèmes multiplicatifs unitaires</u>.

On dit que $\Pi = (\underline{C}; \underline{T}, \boxtimes, I, u)$ est un <u>système multiplicatif unitaire à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>) si, et seulement si:

- $(\underline{C}; \underline{T}, \boxtimes)$ est un système multiplicatif,
- $I = (I_C \in \mathrm{Ob}\, \underline{T}_{\mathrm{Id}_C})_{C \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}}$ est une famille d'objets (indexée par la classe $\mathrm{Ob}\, \underline{C}$ des objets de $\underline{C}$),
- $u = (u_c : - \boxtimes_{c, \mathrm{dom}(c)} I_{\mathrm{dom}(c)} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\underline{T}_c})_{c \in \mathrm{Fl}\, \underline{C}}$ (resp. $u = (u_c : I_{\mathrm{cod}(c)}\, \boxtimes_{\mathrm{Id}_{\mathrm{cod}(c)}, c} - \longrightarrow \mathrm{Id}_{\underline{T}_c})_{c \in \mathrm{Fl}\, \underline{C}}$) est une famille d'équivalences naturelles (indexée par la classe $\mathrm{Fl}\, \underline{C}$ des flèches de $\underline{C}$).

Dans ces conditions, nous dirons aussi que $(\underline{T}, \boxtimes, I, u)$ est un <u>$\underline{C}$-système multiplicatif unitaire à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>).

De plus, on dit que $\Pi = (\underline{C}; \underline{T}, \boxtimes, I, g, d)$ est un <u>système multiplicatif unitaire</u> si, et seulement si:

- $(\underline{C}; \underline{T}, \boxtimes, I, d)$ est un système multiplicatif unitaire à droite,
- $(\underline{C}; \underline{T}, \boxtimes, I, g)$ est un système multiplicatif unitaire à gauche.

Dans ces conditions, nous dirons aussi que $(\underline{T}, \boxtimes, I, g, d)$ est un <u>$\underline{C}$-système multiplicatif unitaire</u>.

Enfin, un tel système (ou $\underline{C}$-système) multiplicatif unitaire sera dit <u>cohérent</u> si, et seulement si:

- $(\underline{C}; \underline{T}, \boxtimes, I, d)$ est un système multiplicatif unitaire à droite,
- $(\underline{C}; \underline{T}, \boxtimes, I, g)$ est un système multiplicatif unitaire à gauche,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(-\boxtimes_{c',c}-)\boxtimes_{c'.c,Id_C} I_C \arrow[rr, "a_{c',c,Id_C}"] \arrow[dr, "d_{c'.c}"'] & & -\boxtimes_{c',c}(-\boxtimes_{c,Id_C} I_C) \arrow[dl, "-\boxtimes_{c',c} d_c"] \\
& -\boxtimes_{c',c}- &
\end{tikzcd}$$

(cohérence de l'associativité et de l'unitarité à droite)

<u>Diagramme</u> 4

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(-\boxtimes_{c',Id_{C'}} I_{C'})\boxtimes_{c',c}- \arrow[rr, "a_{c',Id_{C'},c}"] \arrow[dr, "d_{c'}\boxtimes_{c',c}-"'] & & -\boxtimes_{c',c}(I_{C'}\boxtimes_{Id_{C'},c}-) \arrow[dl, "-\boxtimes_{c',c} g_c"] \\
& -\boxtimes_{c',c}- &
\end{tikzcd}$$

(cohérence de l'associativité et des unitarités à droite et à gauche)

<u>Diagramme</u> 5

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(I_{C''}\boxtimes_{Id_{C''},c'}-)\boxtimes_{c',c}- \arrow[rr, "a_{Id_{C''},c',c}"] \arrow[dr, "g_{c'}\boxtimes_{c',c}-"'] & & I_{C''}\boxtimes_{Id_{C''},c'.c}(-\boxtimes_{c',c}-) \arrow[dl, "g_{c'.c}"] \\
& -\boxtimes_{c',c}- &
\end{tikzcd}$$

(cohérence de l'associativité et de l'unitarité à gauche)

<u>Diagramme</u> 6

- pour tout objet C de $\underline{C}$, on a:

$$(g_{Id_C}(I_C): I_C \; Id_C \boxtimes_{Id_C} \; I_C \longrightarrow I_C) = (d_{Id_C}(I_C): I_C \; Id_C \boxtimes_{Id_C} \; I_C \longrightarrow I_C).$$

4. Systèmes tensoriels.

On dit que $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\boxtimes,a,I,g,d)$ est un système tensoriel (de catégories) si, et seulement si:

- $(\underline{C};\underline{T},\boxtimes,a)$ est un système multiplicatif associatif et cohérent,
- $(\underline{C};\underline{T},\boxtimes,I,g,d)$ est un système multiplicatif unitaire et cohérent,
- pour toutes flèches $c: C \longrightarrow C'$ et $c': C' \longrightarrow C''$ de $\underline{C}$, les trois diagrammes de transformations naturelles 4 , 5 et 6 (ci-joints) sont commutatifs (ce qui exprime la cohérence de l'associativité avec l'unitarité).

Dans ces conditions, nous dirons aussi que $(\underline{T},\boxtimes,a,I,g,d)$ est un $\underline{C}$-système tensoriel.

5. Exemples de systèmes multiplicatifs et tensoriels.

Si $\underline{C} = \underline{1}$, il est facile de vérifier qu'un $\underline{C}$-système multiplicatif s'identifie à une catégorie multiplicative, au sens de (C.A.M.U.), et réciproquement. De même, un $\underline{C}$-système tensoriel s'identifie à une catégorie monoïdale, au sens de (C.L.C.A.), et réciproquement.

Si $\underline{C} = \mathbb{A}m$ est la catégorie des couples d'anneaux unitaires, les constructions rappelées au Chap. I , §17 , montrent que la famille des catégories de bimodules $((A,B)\text{-}Bim)_{(A,B) \in Fl\, \mathbb{A}m}$ est sous-jacente à un $\underline{C}$-système tensoriel "canonique".

De même, il est facile de construire le $\mathbb{C}att$-système tensoriel (resp. le $\mathbb{M}\mathrm{om}$-système tensoriel ...) des couples de catégories petites (resp. de monoïdes ...) opérant (de chaque côté) sur un ensemble, ou une catégorie petite (resp. un monoïde ...), lorsque $\mathbb{C}\mathrm{att}$ (resp. $\mathbb{M}\mathrm{om}$ ...) désigne la catégorie des <u>couples</u> de catégories petites (resp. de monoïdes ...).

Si $\underline{C}$ est une catégorie n'ayant qu'un seul objet (i. e. si $\underline{C}$ est un monoïde), si M est un autre monoïde et si $\Omega\colon \underline{C} \times M \longrightarrow M$ est une opération, à gauche, du monoïde $\underline{C}$ sur le monoïde M, notons:

- pour toute flèche c de $\underline{C}$, $\underline{T}_c$ la catégorie discrète identifiée à l'ensemble $\{c\} \times M$,

- pour toutes flèches (i. e. tous éléments) c et c' (nécessairement composables) de $\underline{C}$ et tous éléments m et m' de M,

$$(c',m') \,{}_{c',c}\boxtimes\, (c,m) = (c'.c, m'.\Omega(c',m)) .$$

Alors, il est facile de vérifier que $((\underline{T}_c)_{c \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}, (-\,{}_{c',c}\boxtimes\,-)_{(c',c)\in \underline{C}*\underline{C}})$ est un $\underline{C}$-système multiplicatif, sous-jacent à un $\underline{C}$-système tensoriel $\mathfrak{M}$ canoniquement associé au produit semi-direct du monoïde $\underline{C}$ par le monoïde M.

On étudie plus exhaustivement d'autres exemples naturels et utiles au Chap. II.

6. <u>Morphismes de systèmes multiplicatifs.</u>

Soit $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\boxtimes)$ et $\mathbb{T}^{\wedge} = (\underline{C}^{\wedge};\underline{T}^{\wedge},\boxtimes)$ deux systèmes multiplicatifs.

On dit que $(F;H,h)\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}^{\wedge}$ est un <u>morphisme du système multiplicatif</u> $\mathbb{T}$ <u>vers le système multiplicatif</u> $\mathbb{T}^{\wedge}$ si, et seulement si:

- $F\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{C}^{\wedge}$ est un foncteur:

- $H = (H_c\colon \underline{T}_c \longrightarrow \underline{T}^{\wedge}_{F(c)})_{c \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}$ est une famille de foncteurs,

- $h = (h_{c',c}\colon H_{c'}(-)\,{}_{F(c'),F(c)}\boxtimes\, H_c(-) \longrightarrow H_{c'.c}(-\,{}_{c',c}\boxtimes\,-))_{(c',c) \in \underline{C}*\underline{C}}$

est une famille de transformations naturelles.

En particulier, nous dirons que $(F;H,h)\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}^{\wedge}$ est un *homomorphisme du système multiplicatif* $\mathbb{T}$ *vers le système multiplicatif* $\mathbb{T}^{\wedge}$ si, et seulement si:

- $(F;H,h)\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}^{\wedge}$ est un morphisme de $\mathbb{T}$ vers $\mathbb{T}^{\wedge}$,
- pour tout couple (c',c) de flèches composables de $\underline{C}$, les deux foncteurs $H_{c'}(-)_{F(c')}\boxtimes_{F(c)}H_{c}(-)$ et $H_{c'.c}(-_{c'}\boxtimes_{c}-)$ sont égaux et la transformation naturelle $h_{c',c}$ est l'identité.

De même, si $\underline{C} = \underline{C}'$ et si $(Id_{\underline{C}};H,h)\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}^{\wedge}$ est un morphisme (resp. un homomorphisme) de $\mathbb{T}$ vers $\mathbb{T}^{\wedge}$, nous dirons que $(H,h)\colon (\underline{T},\boxtimes) \longrightarrow (\underline{T}^{\wedge},\boxtimes)$ est un *$\underline{C}$-morphisme* (resp. un *$\underline{C}$-homomorphisme*) *du $\underline{C}$-système multiplicatif* $(\underline{T},\boxtimes)$ *vers le $\underline{C}$-système multiplicatif* $(\underline{T}^{\wedge},\boxtimes)$.

7. *Morphismes de sytèmes multiplicatifs associatifs*.

Soit $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\boxtimes,a)$ et $\mathbb{T}^{\wedge} = (\underline{C}^{\wedge};\underline{T}^{\wedge},\boxtimes,a^{\wedge})$ deux systèmes multiplicatifs associatifs (resp. associatifs et cohérents).

On dit que $(F;H,h)\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}^{\wedge}$ est un *morphisme du système multiplicatif associatif* (resp. *associatif et cohérent*) $\mathbb{T}$ *vers le système multiplicatif associatif* (resp. *associatif et cohérent*) $\mathbb{T}^{\wedge}$ si, et seulement si:

- $(F;H,h)\colon (\underline{C};\underline{T},\boxtimes) \longrightarrow (\underline{C}^{\wedge};\underline{T}^{\wedge},\boxtimes)$ est un morphisme de systèmes multiplicatifs,
- pour tout triplet (c'',c',c) de flèches composables de $\underline{C}$, le diagramme de transformations naturelles 7 (ci-joint) est commutatif.

On définit facilement, comme précédemment, les *homomorphismes entre systèmes multiplicatifs associatifs* (resp. *associatifs et cohérents*) les *$\underline{C}$-morphismes entre $\underline{C}$-systèmes multiplicatifs associatifs* (resp. *associatifs et cohérents*) et les *$\underline{C}$-homomorphismes entre $\underline{C}$-systèmes multiplicatifs associatifs* (resp. *associatifs et cohérents*).

$$\begin{tikzcd}
(H_{c''}(-)\boxtimes_{F(c''),F(c')}H_{c'}(-))\boxtimes_{F(c''.c'),F(c)}H_c(-) \arrow[r, "\hat{a}_{F(c''),F(c'),F(c)}"'] \arrow[d, "h_{c'',c'}\boxtimes_{F(c''.c'),F(c)}H_c(-)"] & H_{c''}(-)\boxtimes_{F(c''),F(c'.c)}(H_{c'}(-)\boxtimes_{F(c'),F(c)}H_c(-)) \arrow[d, "H_{c''}(-)\boxtimes_{F(c''),F(c'.c)}h_{c',c}"'] \\
H_{c''.c'}(-\boxtimes_{c'',c'}-)\boxtimes_{F(c''.c'),F(c)}H_c(-) \arrow[d, "h_{c''.c',c}"] & H_{c''}(-)\boxtimes_{F(c''),F(c'.c)}(H_{c'.c}(-\boxtimes_{c',c}-)) \arrow[d, "h_{c'',c'.c}"'] \\
H_{c''.c'.c}((-\boxtimes_{c'',c'}-)\boxtimes_{c''.c',c}-) \arrow[r, "H_{c''.c'.c}(a_{c'',c',c})"'] & H_{c''.c'.c}(-\boxtimes_{c'',c'.c}(-\boxtimes_{c',c}-))
\end{tikzcd}$$

<u>Diagramme</u> 7

8. Morphismes de systèmes multiplicatifs unitaires.

Si $\Pi = (\underline{C};\underline{T},\blacksquare,I,u)$ et $\Pi^{\wedge} = (\underline{C}^{\wedge};\underline{T}^{\wedge},\blacksquare,I^{\wedge},u^{\wedge})$ sont deux systèmes multiplicatifs unitaires à droite (resp. à gauche), on dit que $(F;H,h,k)\colon \Pi \longrightarrow \Pi^{\wedge}$ est un morphisme du système multiplicatif unitaire à droite (resp. à gauche) Π vers le système multiplicatif unitaire à droite (resp. à gauche) $\Pi^{\wedge}$ si, et seulement si:

- $(F;H,h)\colon (\underline{C};\underline{T},\blacksquare) \longrightarrow (\underline{C}^{\wedge};\underline{T}^{\wedge},\blacksquare)$ est un morphisme de systèmes multiplicatifs,

- $k = (k_C\colon I^{\wedge}_{F(C)} \longrightarrow H_{Id_C}(I_C))_{C \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}}$ est une famille de flèches,

- pour toute flèche $c\colon C \longrightarrow C'$ de $\underline{C}$, le diagramme de transformations naturelles 8 (ci-joint) est commutatif.

En particulier, nous dirons que $(F;H,h,k)\colon \Pi \longrightarrow \Pi^{\wedge}$ est un homomorphisme du système multiplicatif unitaire à droite (resp. à gauche) Π vers le système multiplicatif unitaire à droite (resp. à gauche) $\Pi^{\wedge}$ si, et seulement si:

- $(F;H,h)\colon (\underline{C};\underline{T},\blacksquare) \longrightarrow (\underline{C}^{\wedge};\underline{T}^{\wedge},\blacksquare)$ est un homomorphisme de systèmes multiplicatifs,

- pour tout objet C de $\underline{C}$, on a $I^{\wedge}_{F(C)} = H_{Id_C}(I_C)$ et k_C est la flèche identité.

On définit facilement les $\underline{C}$-morphismes entre $\underline{C}$-systèmes multiplicatifs unitaires à droite (resp. à gauche) et les $\underline{C}$-homomorphismes correspondants.

Si $\Pi = (\underline{C};\underline{T},\blacksquare,I,g,d)$ et $\Pi^{\wedge} = (\underline{C}^{\wedge};\underline{T}^{\wedge},\blacksquare,I^{\wedge},g^{\wedge},d^{\wedge})$ sont deux systèmes multiplicatifs unitaires (resp. unitaires et cohérents), on dit que $(F;H,h,k)\colon \Pi \longrightarrow \Pi^{\wedge}$ est un morphisme du système multiplicatif unitaire (resp. unitaire et cohérent) Π vers le système multiplicatif uni-

$$\begin{tikzcd}
H_c(-) \boxtimes_{F(c),Id_{F(C)}} H_{Id_C}(I_C) \arrow[r, "h_{c,Id_C}"'] & H_c(- \boxtimes_{c,Id_C} I_C) \\
H_c(-) \boxtimes_{F(c),Id_{F(C)}} I_{\hat{F}(C)} \arrow[u, "H_c(-) \boxtimes_{F(c),Id_{F(C)}} k_C"'] \arrow[r, "u_{\hat{F}(c)}"] & H_c(-) \arrow[u, "H_c(u_c)"]
\end{tikzcd}$$

(compatibilité avec l'unitarité à droite)

(resp.

$$\begin{tikzcd}
H_{Id_{C'}} \boxtimes_{Id_{F(C')},F(c)} H_c(-) \arrow[r, "h_{Id_{C'},c}"'] & H_c(Id_{C'} \boxtimes_{C',c} -) \\
I_{\hat{F}(C')} \boxtimes_{Id_{F(C')},F(c)} H_c(-) \arrow[u, "k_{C'} \boxtimes_{Id_{F(C')},F(c)} H_c(-)"'] \arrow[r, "u_{\hat{F}(c)}"] & H_c(-) \arrow[u, "H_c(u_c)"]
\end{tikzcd}$$

(compatibilité avec l'unitarité à gauche))

Diagramme 8

taire (resp. unitaire cohérent) $\mathbb{T}^\wedge$ si, et seulement si:

- $(F;H,h,k)\colon (\underline{C};\underline{T},\boxtimes,I,d) \longrightarrow (\underline{C}^\wedge;\underline{T}^\wedge,\boxtimes,I^\wedge,d^\wedge)$ est un morphisme de systèmes multiplicatifs unitaires à droite,

- $(F;H,h,k)\colon (\underline{C};\underline{T},\boxtimes,I,g) \longrightarrow (\underline{C}^\wedge;\underline{T}^\wedge,\boxtimes,I^\wedge,g^\wedge)$ est un morphisme de systèmes multiplicatifs unitaires à gauche.

On définit tout aussi facilement les homomorphismes entre systèmes multiplicatifs unitaires (resp. unitaires cohérents), les C-morphismes entre C-systèmes multiplicatifs unitaires (resp. unitaires cohérents) et, enfin, les C-homomorphismes correspondants.

9. Morphismes de systèmes tensoriels.

Soit $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\boxtimes,a,I,g,d)$ et $\mathbb{T}^\wedge = (\underline{C}^\wedge;\underline{T}^\wedge,\boxtimes,a^\wedge,I^\wedge,g^\wedge,d^\wedge)$ deux systèmes tensoriels.

On dit que $(F;H,h,k)\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}^\wedge$ est un morphisme (resp. un homomorphisme) du système tensoriel $\mathbb{T}$ vers le système tensoriel $\mathbb{T}^\wedge$ si, et seulement si:

- $(F;H,h)\colon (\underline{C};\underline{T},\boxtimes,a) \longrightarrow (\underline{C}^\wedge;\underline{T}^\wedge,\boxtimes,a^\wedge)$ est un morphisme (resp. un homomorphisme) de systèmes multiplicatifs associatifs (et cohérents),

- $(F;H,h,k)\colon (\underline{C};\underline{T},\boxtimes,I,g,d) \longrightarrow (\underline{C}^\wedge;\underline{T}^\wedge,\boxtimes,I^\wedge,g^\wedge,d^\wedge)$ est un morphisme (resp. un homomorphisme) de systèmes multiplicatifs unitaires (et cohérents).

On définit facilement les C-morphismes et les C-homomorphismes entre C-systèmes tensoriels.

10. Exemples de morphismes et homomorphismes entre systèmes multiplicatifs et tensoriels.

Si $\underline{C} = \underline{1}$, il est facile de vérifier qu'un $\underline{C}$-morphisme entre $\underline{C}$-systèmes tensoriels (qui s'identifient à des catégories monoïdales) s'identifie à un foncteur monoïdal, au sens de (C.L.C.A.), et réciproquement. De même, un $\underline{C}$-homomorphisme s'identifie à un foncteur monoïdal <u>strict</u> et réciproquement.

A tout couple (A,B) d'anneaux unitaires associons le couple $F(A,B)$ de leurs monoïdes multiplicatifs sous-jacents et associons à tout homomorphisme $f: M \longrightarrow M'$, entre (A,B)-bimodules, l'homomorphisme $H_{(A,B)}(f)$, sous-jacent, du couple de monoïdes $F(A,B)$, opérant sur l'<u>ensemble</u> M vers le couple de monoïdes $F(A,B)$, opérant sur l'<u>ensemble</u> M' . Clairement $(F;(H_{(A,B)})_{(A,B) \in \mathrm{Fl}\ \mathbb{A}\mathrm{m}}$ est sous-jacent à un morphisme (qui n'est pas un homomorphisme) du système tensoriel "canonique" des catégories de bimodules vers le système tensoriel des catégories de couples de monoïdes d'opérateurs sur des ensembles.

Si $\underline{C}$ est un monoïde, si M et M' sont deux autres monoïdes, si $\Omega: \underline{C} \times M \longrightarrow M$ et $\Omega': \underline{C} \times M' \longrightarrow M'$ sont des opérations, à gauche, du monoïde $\underline{C}$ sur les monoïdes M et M' , alors tout $\underline{C}$-morphisme du $\underline{C}$-système tensoriel $\mathfrak{M}$ vers le $\underline{C}$-système tensoriel $\mathfrak{M}'$ s'identifie à une famille d'<u>applications</u> $(f_c: M \longrightarrow M')_{c \in \underline{C}}$ telles que:

- pour tout couple (c',c) d'éléments de $\underline{C}$ et tout couple (m_2,m_1) d'éléments de M , on a $f_{c'.c}(m_2.\Omega(c',m_1)) = f_{c'}(m_2).\Omega'(c',f_c(m_1))$.

En particulier, les familles constantes $(f_c = f)_{c \in \underline{C}}$ de cette forme s'identifient aux homomorphismes de monoïdes $f: M \longrightarrow M'$, compatibles avec les opérations Ω et Ω' .

11. <u>Catégories de morphismes entre systèmes multiplicatifs et tensoriels</u>.

Nous dirons qu'un système multiplicatif (resp. un système multiplicatif associatif, associatif et cohérent, unitaire à droite, unitaire à gauche, unitaire, unitaire et cohérent, un système tensoriel) $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\mathbf{M}, \dots)$ est <u>petit</u> si, et seulement si:

- $\underline{C}$ est une catégorie petite.
- pour toute flèche c de $\underline{C}$, la catégorie $\underline{T}_c$ est petite.

Alors, nous notons Sm_H (resp. Sma_H , $Smac_H$, $Smud_H$, $Smug_H$, Smu_H , $Smuc_H$, St_H) la catégorie dont les objets sont ces systèmes multiplicatifs (resp. ...) petits et dont les flèches sont les <u>homomorphismes</u> entre ces systèmes.
Ainsi, on obtient le diagramme commutatif de foncteurs d'oubli (tous fidèles et dont certains sont pleins) 9 ci-joint et l'on a:

<u>Proposition</u> 1 . <u>Les différentes catégories figurant dans le diagramme commutatif de foncteurs</u> 9 <u>(ci-joint) sont toutes localement finiment présentables (au sens de</u> (L.P.L.G.)), <u>en particulier elles sont complètes et co-complètes, et les différents foncteurs qui y figurent admettent tous des adjoints à gauche</u>.

<u>Preuve</u>. En effet, Sm_H est équivalente à la catégorie des réalisations d'une esquisse petite et finiment projective (au sens du Chap. I, §5) et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter) engendrée par le graphe Σ_m (qui en est une <u>idée</u> , au sens du Chap. I, §13), représenté par le diagramme 10 (ci-joint); ainsi, au système multiplicatif $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\blacksquare)$ est associé l'unique foncteur $R_{\mathbb{T}}: \Sigma_m \longrightarrow$ Ens tel que (notamment):

- $R_{\mathbb{T}}(S_1) = \text{Ob }\underline{C}$, $R_{\mathbb{T}}(S_2) = \text{Fl }\underline{C}$, $R_{\mathbb{T}}(S_3) = \underline{C}*\underline{C}$,
- $R_{\mathbb{T}}(E_1) = \coprod_{c \in \text{Fl }\underline{C}} \text{Ob }\underline{T}_c$, $R_{\mathbb{T}}(E_2) = \coprod_{c \in \text{Fl }\underline{C}} \text{Fl }\underline{T}_c$ et

$R_{\mathbb{T}}(E_3) = \coprod_{c \in \text{Fl }\underline{C}} \underline{T}_c * \underline{T}_c$ (qui sont les ensembles respectifs d'objets, de flèches et de couples de flèches composables de la catégorie somme $\coprod_{c \in \text{Fl }\underline{C}} \underline{T}_c$),

- $R_{\mathbb{T}}(E'_3) = \coprod_{(c',c) \in \underline{C}*\underline{C}} \underline{T}_{c'} \times \underline{T}_c$,

- pour $i = 1,2$, $R_{\mathbb{T}}(\text{comp}_i)$ est l'application de composition des couples de flèches composables (de $\underline{C}$ ou de $\coprod_{c \in \text{Fl }\underline{C}} \underline{T}_c$) ,

- $R_{\mathbb{T}}(\text{tens})$ est l'application "produit tensoriel" ,

- $R_{\mathbb{T}}(p)$ est la projection qui associe à tout élément (x,c) l'élément c .

$$
\begin{tikzcd}
 & Smac_H \arrow[rr, "plein"] & & Sma_H \arrow[dr] & \\
St_H \arrow[ur] \arrow[d] & & & Smud_H \arrow[r] & Sm_H \\
Smuc_H \arrow[r, "plein"'] & Smu_H \arrow[urr] \arrow[drr] & & & \\
 & & & Smug_H \arrow[uur] &
\end{tikzcd}
$$

<u>Diagramme</u> 9

$$
\begin{tikzcd}
 & E'_3 \arrow[d, "tens"] & \\
E_1 \arrow[r, "id_2"] & E_2 \arrow[l, bend right, "dom_2"'] \arrow[l, bend left, "cod_2"] \arrow[d, "p"] & E_3 \arrow[l, "comp_2"'] \\
S_1 \arrow[r, "id_1"] & S_2 \arrow[l, bend right, "dom_1"'] \arrow[l, bend left, "cod_1"] & S_3 = S_2 * S_2 \arrow[l, "comp_1"']
\end{tikzcd}
$$

<u>Diagramme</u> 10

De même, Sma_H et $Smac_H$ (resp. $Smud_H$ et $Smug_H$) sont équivalentes à des catégories de réalisations d'esquisses petites et finiment projectives (que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter) admettant pour idée commune le graphe Σ_{ma} (resp. Σ_{mudg}), représenté par le diagramme 11 (ci-joint) où ass (resp. Unit et unit) décrit (resp. décrivent) l'isomorphisme d'associativité (resp. le choix d'unités et l'isomorphisme d'unitarité).
On conclut alors facilement. Fin de la preuve.

De même, nous notons Sm (resp. Sma , Smac , Smud , Smug , Smu , Smuc , St) la catégorie dont les objets sont les systèmes multiplicatifs (resp. ...) petits et dont les flèches sont les morphismes (quelconques) entre ces systèmes.
Ainsi, on obtient le diagramme commutatif de foncteurs d'oubli (tous fidèles et dont certains sont pleins) 12 ci-joint. Notons, d'ailleurs, que les diverses catégories qui y figurent sont encore "esquissables" -au sens généralisé Chap. I, §16.

12. Catégories de morphismes entre $\underline{C}$-systèmes multiplicatifs et tensoriels.

Soit $\underline{C}$ une catégorie (quelconque).

On dit qu'un $\underline{C}$-système multiplicatif (resp. un $\underline{C}$-système multiplicatif associatif, associatif et cohérent, unitaire à droite, unitaire à gauche, unitaire, unitaire et cohérent, un $\underline{C}$-système tensoriel) $\mathbb{T} = (\underline{T}, \boxtimes, \ldots)$ est petit si, et seulement si:

- pour toute flèche c de $\underline{C}$, la catégorie $\underline{T}_c$ est petite.

Alors, nous notons $\underline{C}\text{-}Sm_H$ (resp. $\underline{C}\text{-}Sma_H$, $\underline{C}\text{-}Smac_H$, $\underline{C}\text{-}Smud_H$, $\underline{C}\text{-}Smug_H$, $\underline{C}\text{-}Smu_H$, $\underline{C}\text{-}Smuc_H$, $\underline{C}\text{-}St_H$) la catégorie dont les objets sont ces $\underline{C}$-systèmes multiplicatifs (resp. ...) petits et dont les flèches sont les $\underline{C}$-homomorphismes entre ces $\underline{C}$-systèmes.
Ainsi, on obtient le diagramme commutatif de foncteurs d'oubli (tous fidèles et dont certains sont pleins) 13 ci-joint et l'on a:

$$
\begin{tikzcd}
 & E'_3 \arrow[d, "\mathrm{tens}"] & & \\
E_1 \arrow[r, "id_2"] & E_2 \arrow[l, bend right, "dom_2"'] \arrow[l, bend left, "cod_2"] \arrow[d, "p"] & E_3 \arrow[l, "comp_2"'] & \\
S_1 \arrow[r, "id_1"'] & S_2 \arrow[l, bend right, "dom_1"'] \arrow[l, bend left, "cod_1"] & S_2 * S_2 = S_3 \arrow[l, "comp_1"'] & S_2 * S_2 * S_2 \arrow[ull, "ass"']
\end{tikzcd}
$$

(resp.

$$
\begin{tikzcd}
 & E'_3 \arrow[d, "\mathrm{tens}"] & \\
E_1 \arrow[r, "id_2"] & E_2 \arrow[l, bend right, "dom_2"'] \arrow[l, bend left, "cod_2"] \arrow[d, "p"'] & E_3 \arrow[l, "comp_2"'] \\
S_1 \arrow[u, "\mathrm{Unit}"] \arrow[r, "id_1"'] & S_2 \arrow[l, bend right, "dom_1"'] \arrow[l, bend left, "cod_1"] \arrow[u, bend right, "\mathrm{unit}"'] & S_3 \arrow[l, "comp_1"']
\end{tikzcd}
$$

)

<u>Diagramme</u> 11

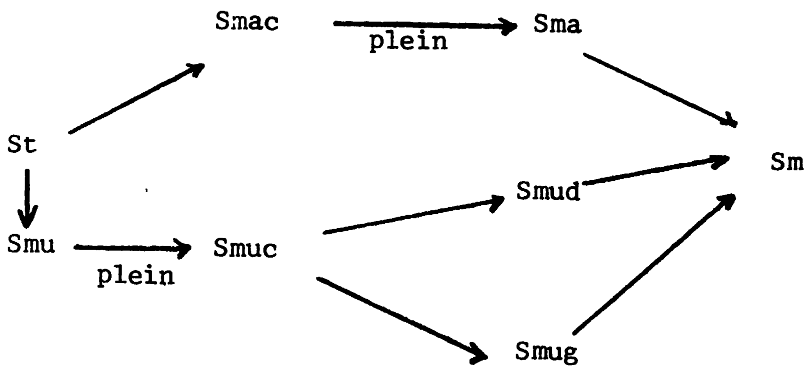


Diagramme 12

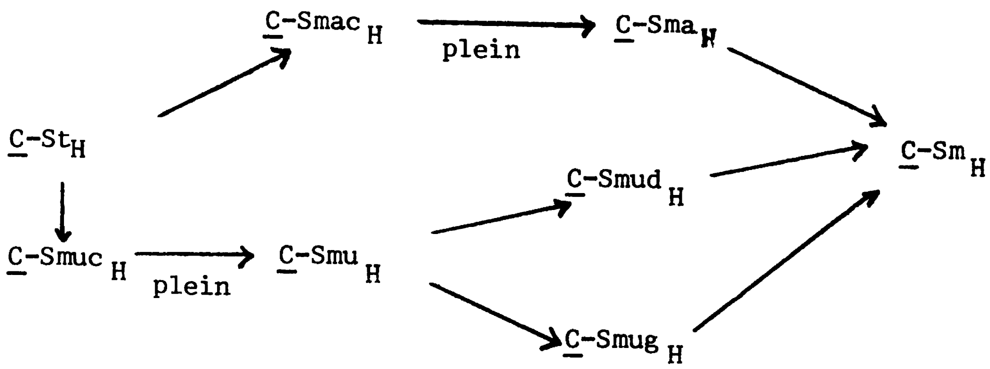


Diagramme 13

Proposition 2 . *Si* $\underline{C}$ *est une catégorie petite, les différentes catégories figurant dans le diagramme* 13 *(ci-joint) sont toutes localement finiment présentables (au sens de* (L.P.L.G.)), *en particulier elles sont complètes et co-complètes, et les différents foncteurs qui y figurent admettent tous des adjoints à gauche.*

Preuve. En effet, $\underline{C}\text{-Sm}_H$ est équivalente à la catégorie des réalisations d'une esquisse petite et finiment projective (au sens du Chap. I,§5, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter) engendrée par le graphe $\underline{C}\text{-}\Sigma_m$ (qui en est une *idée*, au sens du Chap. I,§13) représenté par le diagramme 14 ci-joint.
De même, $\underline{C}\text{-Sma}_H$ (resp. $\underline{C}\text{-Smud}_H$) est équivalente à une catégorie de réalisations d'une esquisse petite et finiment projective (que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter) admettant pour idée le graphe $\underline{C}\text{-}\Sigma_{ma}$ (resp. $\underline{C}\text{-}\Sigma_{mud}$) représenté par le diagramme 15 ci-joint.
On conclut alors facilement. *Fin de la preuve.*

On en déduit que, si $F\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{C}^\wedge$ est un foncteur, il induit un foncteur:

$$\begin{aligned} F\text{-Sm}_H\colon \underline{C}^\wedge\text{-Sm}_H &\longrightarrow \underline{C}\text{-Sm}_H \\ (\underline{T}^\wedge, \boxtimes) &\longmapsto ((\underline{T}^\wedge_{F(c)})_{c \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}, \boxtimes) \end{aligned}$$

(resp. ...) et l'on a:

Proposition 3 . *Si* $F\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{C}^\wedge$ *est un foncteur entre deux catégories petites, le foncteur* $F\text{-Sm}_H$ (resp. ...) *qu'il induit admet un adjoint à gauche.*

Ainsi, par exemple, tout $\underline{C}$-système tensoriel engendre librement une catégorie monoïdale (i. e. un $\underline{1}$-système tensoriel): de ce point de vue, les $\underline{C}$-systèmes tensoriels peuvent être regardés comme des "systèmes de générateurs et de relations pour les catégories monoïdales".

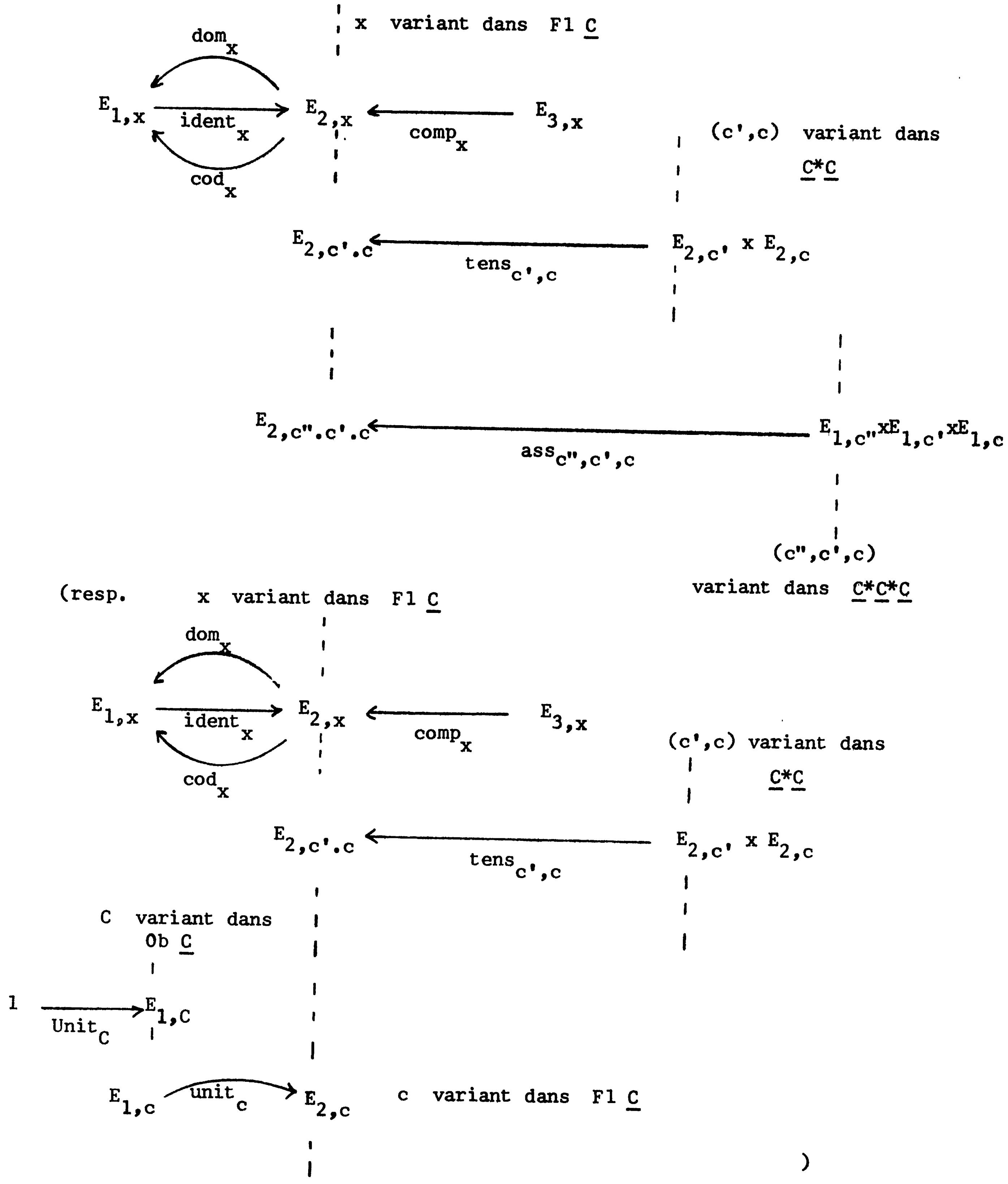
Nous noterons, enfin, $\underline{C}$-Sm (resp. $\underline{C}$-Sma , $\underline{C}$-Smac , $\underline{C}$-Smud , $\underline{C}$-Smug , $\underline{C}$-Smu , $\underline{C}$-Smuc , $\underline{C}$-St) la catégorie dont les objets sont les $\underline{C}$-systèmes multiplicatifs (resp. ...) *petits* et dont les flèches sont les $\underline{C}$-morphismes (quelconques) entre ces $\underline{C}$-systèmes.

$$\begin{tikzcd}
E_{1,x} \arrow[r, "\mathrm{ident}_x"'] & E_{2,x} \arrow[l, bend right, "\mathrm{dom}_x"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{cod}_x"] & E_{3,x} = E_{2,x} * E_{2,x} \arrow[l, "\mathrm{comp}_x"] \\
& E_{2,c} & \\
& E_{2,c'.c} & E_{2,c'} \times E_{2,c} \arrow[ul, dashed, "2^{\text{ème}}\ \text{proj.}"'] \arrow[l, "\mathrm{tens}_{c',c}"] \arrow[dl, dashed, "1^{\text{ère}}\ \text{proj.}"] \\
& E_{2,c'} &
\end{tikzcd}$$

x , c , c' variant
dans Fl $\underline{C}$

(c',c) variant
dans $\underline{C}*\underline{C}$

<u>Diagramme</u> 14



<u>Diagramme</u> 15

Alors, on obtient le diagramme commutatif de foncteurs d'oubli (tous fidèles et dont certains sont pleins) 16 ci-joint et les diverses catégories qui y figurent sont encore des catégories "esquissables" - au sens généralisé du Chap. I,§16.De plus, si $F: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}^{\wedge}$ est un foncteur, il induit encore un foncteur $F\text{-}Sm : \underline{C}^{\wedge}\text{-}Sm \longrightarrow \underline{C}\text{-}Sm$ (resp. ...), admettant $F\text{-}Sm_H$ (resp. ...) pour restriction.

13. Systèmes multiplicatifs et tensoriels opposés.

Il est clair que, si $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\mathbb{B}, \ldots)$ est un système multiplicatif (resp. un système multiplicatif associatif, associatif et cohérent, unitaire à droite, unitaire à gauche, unitaire, unitaire et cohérent, un système tensoriel), alors $\mathbb{T}^{op} = (\underline{C};\underline{T}^{op} = (\underline{T}_c{}^{op})_{c \in Fl\, \underline{C}}, \mathbb{B}^{op}, \ldots)$ est encore un système multiplicatif (resp. ...), que l'on appelle l'opposé de $\mathbb{T}$. Alors, si $\mathbb{T}$ et $\mathbb{T}^{\wedge}$ sont deux systèmes multiplicatifs (resp. ...) et si $\mathbb{H}: \mathbb{T}^{op} \longrightarrow \mathbb{T}^{\wedge op}$ est un morphisme de systèmes multiplicatifs (resp. ...), on dit encore que $\mathbb{H}: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}^{\wedge}$ est un co-morphisme du système multiplicatif (resp. ...) $\mathbb{T}$ vers le système multiplicatif (resp. ...) $\mathbb{T}^{\wedge}$ .Ainsi, en particulier, les co-homomorphismes sont exactement les homomorphismes.

Dans ces conditions, nous notons Sm_{co} (resp. Sma_{co} , $Smac_{co}$, $Smud_{co}$, $Smug_{co}$, Smu_{co} , $Smuc_{co}$, St_{co}) la catégorie dont les objets sont les systèmes multiplicatifs (resp. ...) petits et dont les flèches sont les co-morphismes entre ces systèmes. On obtient donc le diagramme de foncteurs d'oubli (tous fidèles et dont certains sont pleins) 17 ci-joint ainsi qu'un isomorphisme d'opposition:

$$(-)^{op} : Sm \longrightarrow Sm_{co}$$

(resp. ...) admettant une restriction

$$(-)^{op}_H : Sm_H \longrightarrow Sm_H$$

(resp. ...), qui, compte tenu de la proposition 1 , est bien un automorphisme de dualisation de structures de même espèce (au sens du Chap. I,§14).

De même, on définit facilement le $\underline{C}$-opposé d'un $\underline{C}$-système multiplicatif (resp. ...) et les $\underline{C}$-co-morphismes entre ces $\underline{C}$-systèmes (de sorte que, en particulier, les $\underline{C}$-co-homomorphismes sont exactement les $\underline{C}$-homomorphismes).
Si l'on note $\underline{C}\text{-Sm}_{co}$ (resp. $\underline{C}\text{-Sma}_{co}$, $\underline{C}\text{-Smac}_{co}$, $\underline{C}\text{-Smud}_{co}$, $\underline{C}\text{-Smug}_{co}$, $\underline{C}\text{-Smu}_{co}$, $\underline{C}\text{-Smuc}_{co}$, $\underline{C}\text{-St}_{co}$) la catégorie dont les objets sont les $\underline{C}$-systèmes multiplicatifs (resp. ...) petits et dont les flèches sont les $\underline{C}$-co-morphismes entre ces $\underline{C}$-systèmes, on obtient le diagramme commutatif de foncteurs d'oubli (tous fidèles et dont certains sont pleins) 18 ci-joint et un isomorphisme de $\underline{C}$-opposition

$$\underline{C}\text{-}(-)^{op} : \underline{C}\text{-Sm} \longrightarrow \underline{C}\text{-Sm}_{co}$$

(resp. ...) admettant une restriction

$$\underline{C}\text{-}(-)^{op}_{H} : \underline{C}\text{-Sm}_{H} \longrightarrow \underline{C}\text{-Sm}_{H}$$

(resp. ...) qui, compte tenu de la proposition 2 , est bien un automorphisme de dualisation de structures de même espèce (au sens du Chap. I, §14).

14. Systèmes multiplicatifs et tensoriels inverses.

Il est clair que, si $\Pi = (\underline{C};\underline{T},\boxtimes = (-_{c'}\boxtimes_{c}\sim)_{(c',c) \in \underline{C}*\underline{C}'} \ldots)$ est un système multiplicatif (resp. un système multiplicatif associatif, associatif et cohérent, unitaire à droite, unitaire à gauche, unitaire, unitaire et cohérent, un système tensoriel) , alors

$$\Pi = (\underline{C}^{op};\underline{T},\boxtimes^{inv} = (\sim {}_{c}\boxtimes^{inv}_{c'} - \; = - {}_{c'}\boxtimes_{c} \sim)_{(c,c') \in \underline{C}^{op} * \underline{C}^{op}} ,\ldots)$$

est encore un système multiplicatif (resp. un système multiplicatif associatif, associatif et cohérent, unitaire à gauche, unitaire à droite, unitaire, unitaire et cohérent, un système tensoriel) que l'on appelle l'inverse de Π .
Il en résulte un isomorphisme d'inversion

$$(-)^{inv} : \text{Sm} \longrightarrow \text{Sm}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{C}\text{-Smac} \arrow[r, "\text{plein}"'] & \underline{C}\text{-Sma} \arrow[dr] & \\
\underline{C}\text{-St} \arrow[ur] \arrow[d] & & & \underline{C}\text{-Sm} \\
\underline{C}\text{-Smuc} \arrow[r, "\text{plein}"'] & \underline{C}\text{-Smu} \arrow[r] \arrow[dr] & \underline{C}\text{-Smud} \arrow[ur] & \\
 & & \underline{C}\text{-Smug} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

<u>Diagramme</u> 16

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Smac}_{co} \arrow[r, "\text{plein}"'] & \text{Sma}_{co} \arrow[dr] & \\
\text{St}_{co} \arrow[ur] \arrow[d] & & & \text{Sm}_{co} \\
\text{Smuc}_{co} \arrow[r, "\text{plein}"'] & \text{Smu}_{co} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{Smud}_{co} \arrow[ur] & \\
 & & \text{Smug}_{co} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

<u>Diagramme</u> 17

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{C}\text{-Smac}_{co} \arrow[r, "\text{plein}"'] & \underline{C}\text{-Sma}_{co} \arrow[dr] & \\
\underline{C}\text{-St}_{co} \arrow[ur] \arrow[d] & & & \underline{C}\text{-Sm}_{co} \\
\underline{C}\text{-Smuc}_{co} \arrow[r, "\text{plein}"'] & \underline{C}\text{-Smu}_{co} \arrow[r] \arrow[dr] & \underline{C}\text{-Smud}_{co} \arrow[ur] & \\
 & & \underline{C}\text{-Smug}_{co} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

<u>Diagramme</u> 18

(resp.

$$(-)^{inv}_{a} : Sma \longrightarrow Sma \quad ,$$

$$(-)^{inv}_{ac} : Smac \longrightarrow Smac \quad ,$$

$$(-)^{inv}_{dg} : Smud \longrightarrow Smug \quad ,$$

$$(-)^{inv}_{gd} : Smug \longrightarrow Smud \quad ,$$

$$(-)^{inv}_{u} : Smu \longrightarrow Smu \quad ,$$

$$(-)^{inv}_{uc} : Smuc \longrightarrow Smuc \quad ,$$

$$(-)^{inv}_{t} : St \longrightarrow St$$

)

admettant une restriction

$$(-)^{inv}_{H} : Sm_H \longrightarrow Sm_H$$

(resp. ....)

qui, compte tenu de la proposition 1 , est un automorphisme (resp. un **automorphisme** ou un isomorphisme, selon les cas) de dualisation de structures de même espèce (resp. de dualisation ou entre catégories de structures algébriques d'espèces duales), au sens du Chap. I, §14).

De même, on définit facilement le $\underline{C}^{op}$-système multiplicatif (resp. ...) $\underline{C}$-inverse d'un $\underline{C}$-système multiplicatif (resp. ...) et l'on obtient ainsi un isomorphisme de $\underline{C}$-inversion

$$\underline{C}\text{-}(-)^{inv} : \underline{C}\text{-}Sm \longrightarrow \underline{C}^{op}\text{-}Sm$$

(resp. ....)

admettant une restriction

$$\underline{C}\text{-}(-)^{inv}_{H} : \underline{C}\text{-}Sm_H \longrightarrow \underline{C}^{op}\text{-}Sm_H$$

(resp. ....)

qui, compte tenu de la proposition 2 , est un isomorphisme entre catégories de structures algébriques d'espèces duales, au sens du Chap. I, §14.

15. Systèmes multiplicatifs et tensoriels fermés et bi-fermés.

On dit que le système multiplicatif $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\boxtimes)$ est fermé à gauche si, et seulement si:

- pour tout couple (c',c) de flèches composables de $\underline{C}$ et tout objet X de $\underline{T}_c$, le foncteur $- {}_{c',c}\boxtimes\, X : \underline{T}_{c'} \longrightarrow \underline{T}_{c'.c}$ admet un adjoint à droite $\underset{c}{[} X , - \underset{c',c}{[} : \underline{T}_{c'.c} \longrightarrow \underline{T}_{c'}$.

Ainsi, pour tout couple (c',c) de flèches composables de $\underline{C}$, on dispose d'un foncteur (de fermeture à gauche)

$$\underset{c}{[} - , - \underset{c',c}{[} : \underline{T}_c^{op} \times \underline{T}_{c'.c} \longrightarrow \underline{T}_{c'}$$

de sorte que, naturellement en tous objets X de $\underline{T}_c$, X' de $\underline{T}_{c'}$ et X'' de $\underline{T}_{c'.c}$, on a l'isomorphisme:

- $\mathrm{Hom}_{\underline{T}_{c'.c}}(X' {}_{c',c}\boxtimes\, X , X'') \sim \mathrm{Hom}_{\underline{T}_{c'}}(X', \underset{c}{[} X,X'' \underset{c',c}{[}\,)$.

De même, on dit que le système multiplicatif $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\boxtimes)$ est fermé à droite si, et seulement si:

- pour tout couple (c',c) de flèches composables de $\underline{C}$ et tout objet X' de $\underline{T}_{c'}$, le foncteur $X' {}_{c',c}\boxtimes\, - : \underline{T}_c \longrightarrow \underline{T}_{c'.c}$ admet un adjoint à droite $\underset{c'}{]} X' , - \underset{c',c}{]} : \underline{T}_{c'.c} \longrightarrow \underline{T}_c$.

Autrement dit, $\mathbb{T}$ est fermé à droite si, et seulement si, son système inverse est fermé à gauche, au sens précédent.
En tout état de cause, pour tout couple (c',c) de flèches composables de $\underline{C}$, on dispose alors d'un foncteur (de fermeture à droite)

$$\underset{c'}{]} - , - \underset{c',c}{]} : \underline{T}_{c'}^{op} \times \underline{T}_{c'.c} \longrightarrow \underline{T}_c$$

de sorte que, naturellement en tous objets X de $\underline{T}_c$, X' de $\underline{T}_{c'}$ et X'' de $\underline{T}_{c'.c}$, on a l'isomorphisme:

- $\mathrm{Hom}_{\underline{T}_{c'.c}}(X' {}_{c',c}\boxtimes\, X , X'') \sim \mathrm{Hom}_{\underline{T}_c}(X, \underset{c'}{]} X',X'' \underset{c',c}{]}\,)$.

Bien entendu, on dira qu'un système multiplicatif associatif (resp. associatif et cohérent, unitaire à droite, unitaire à gauche, unitaire, unitaire et cohérent, un système tensoriel) est <u>fermé à gauche</u> si, et seulement si, son système multiplicatif sous-jacent est fermé à gauche; de même, on dira qu'il est <u>fermé à droite</u> si, et seulement si, ce système multiplicatif sous-jacent est fermé à droite; enfin, on dira qu'il est <u>bi-fermé</u> si, et seulement si, il est fermé à gauche <u>et</u> fermé à droite.

Notons que, si $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\boxtimes,a)$ est un système multiplicatif associatif et cohérent, fermé à gauche (resp. à droite), alors, pour tout triplet (c'',c',c) de flèches composables de $\underline{C}$, on a, naturellement en tous objets X de $\underline{T}_c$ (resp. X' de $\underline{T}_{c'}$), X' de $\underline{T}_{c'}$ (resp. X'' de $\underline{T}_{c''}$) et Y de $\underline{T}_{c''.c'.c}$:

$$\big[\, X' \;{}_{c',c}\!\boxtimes X \,,\, Y \,\big[_{c'',c'.c} \;\sim\; \big[\, X' \,,\, \big[\, X \,,\, Y \,\big[_{c''.c',c} \,\big[_{c'',c'} \quad\text{dans } \underline{T}_{c''}$$

(resp.

$$\big]\, X'' \;{}_{c'',c'}\!\boxtimes X' \,,\, Y \,\big]_{c''.c',c} \;\sim\; \big]\, X' \,,\, \big]\, X'' \,,\, Y \,\big]_{c'',c'.c} \,\big]_{c',c} \quad\text{dans } \underline{T}_{c}\text{).}$$

On définit, enfin, facilement les $\underline{C}$-systèmes multiplicatifs (resp. ...) <u>fermés à gauche</u>, <u>fermés à droite</u> ou <u>bi-fermés</u>.

16. <u>Exemples de systèmes tensoriels fermés ou bi-fermés.</u>

Si $\underline{C} = \underline{1}$, il est facile de vérifier qu'un $\underline{C}$-système tensoriel fermé à gauche (resp. à droite, bi-fermé) s'identifie à une catégorie monoïdale fermée à gauche (resp. à droite, bi-fermée), au sens de (C.L.C.A.), et réciproquement.

Clairement, les considérations du Chap. I, §17, montrent que le système tensoriel des catégories de bimodules est bi-fermé...

Si $\underline{C}$ est un groupe, si M est un autre groupe et si $\Omega: \underline{C} \times M \to M$ est une opération, à gauche, du groupe $\underline{C}$ sur le groupe M, alors le $\underline{C}$-système tensoriel $\mathfrak{M}$, canoniquement associé au produit semi-direct du groupe $\underline{C}$ par le groupe M, est bi-fermé. En effet, pour tout couple

$((c',m'),(c,m))$ d'éléments de $\underline{C} \times M$, il suffit de poser:

- $\underset{c}{[}(c,m),(c',m')_{c'.c^{-1}}[_{,c} = (c',m') \boxtimes_{c',c^{-1}} (c,m)^{-1}$

- $\underset{c}{]}(c,m),(c',m')_{c,c^{-1}}]_{.c'} = (c,m)^{-1} \boxtimes_{c^{-1},c'} (c',m')$.

CHAPITRE III : SYSTEMES MULTIPLICATIFS ET TENSORIELS BI-FERMES DE CATEGORIES DE STRUCTURES ALGEBRIQUES.

1. Procession d'esquisses.

On dit que $\mathbb{S} = (\underline{C};/\underline{S}/)$ est une procession d'esquisses (projectives petites) si, et seulement si:

- $\underline{C}$ est une catégorie,
- $/\underline{S}/ = (/\underline{S}_c/)_{c \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}$ est une famille d'esquisses (projectives petites), (indexée par la classe $\mathrm{Fl}\,\underline{C}$ des flèches de $\underline{C}$).

Dans ces conditions, nous dirons aussi que $/\underline{S}/ = (/\underline{S}_c/)_{c \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}$ est une $\underline{C}$-procession d'esquisses (projectives petites).

2. Procession de co-structures.

On dit que $\mathbb{Z} = (\underline{C};/\underline{S}/,/Z/)$ est une procession de co-structures (et l'on pourra noter $\mathbb{Z}\colon /\underline{S}/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/})^{op}$) si, et seulement si:

- $(\underline{C};/\underline{S}/)$ est une procession d'esquisses (projectives petites),
- $/Z/ = (/Z_c/\colon /\underline{S}_c/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_c/})^{op})_{c \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}$ est une famille de réalisations.

Dans ces conditions, nous dirons également que $(/\underline{S}/,/Z/)$ est une $\underline{C}$-procession de co-structures.

Ainsi, en particulier, à toute procession d'esquisses projectives petites $/\underline{S}/$ est associée la procession de co-structures, dite canonique, $\mathbb{Y} = (\underline{C};/S/,(/Y_c/)_{c \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}})$ où, pour toute flèche c de $\underline{C}$, on a:

- $/Y_c/ = /Y_{/\underline{S}_c/}/ : /\underline{S}_c/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_c/})^{op}$ est la co-structure canonique associée à $/\underline{S}_c/$.

3. Processus multiplicatif de co-structures.

On dit que $\mathbb{M} = (\underline{C};/\underline{S}/,/M/)$ est un processus multiplicatif de co-structures (et l'on peut noter $\mathbb{M}: /\underline{S}/\blacksquare/\underline{S}/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/})^{op}$) si,et seulement si:

- $(\underline{C};/\underline{S}/)$ est une procession d'esquisses,
- $/M/ = (/M_{c',c}/ : /\underline{S}_{c'},/\blacksquare/\underline{S}_c/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_{c'.c}/})^{op})_{(c',c)\in \underline{C}*\underline{C}}$ est une famille de réalisations (indexée par la classe $\underline{C}*\underline{C}$ des couples de flèches composables de $\underline{C}$).

Dans ces conditions, nous dirons aussi que $(/\underline{S}/,/M/)$ est un $\underline{C}$-processus multiplicatif de co-structures.

4. Processus multiplicatif de co-structures associé à un système multiplicatif bi-fermé de catégories de structures algébriques.

Supposons que:

- $\underline{C}$ est une catégorie (quelconque),
- $/\underline{S}/ = (/\underline{S}_c/)_{c\in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}$ est une $\underline{C}$-procession d'esquisses projectives petites (alors, pour toute flèche c de $\underline{C}$, on pose $\underline{T}_c = \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_c/}$ et l'on note $/Y_c/ : /\underline{S}_c/ \longrightarrow \underline{T}_c^{op}$ la co-structure canonique associée à $/\underline{S}_c/$),
- $\mathbb{T} = (\underline{T} = (\underline{T}_c)_{c\in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}, \blacksquare)$ est un système multiplicatif bi-fermé (des catégories de structures algébriques $\underline{T}_c = \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_c/}$).

Alors, pour tout couple (c',c) de flèches composables de $\underline{C}$, on dispose du foncteur:

$$M(\mathbb{T})_{c',c} : \underline{S}_{c'} \times \underline{S}_c \xrightarrow[Y_{c'} \times Y_c]{} (\underline{T}_{c'} \times \underline{T}_c)^{op} \xrightarrow[(-_{c'}\blacksquare_c -)^{op}]{} (\underline{T}_{c'.c})^{op}.$$

Comme $\mathbb{T}$ est bi-fermé, pour tout objet X (resp. X') de $\underline{T}_c$ (resp. $\underline{T}_{c'}$), le foncteur $- {}_{c',c}\boxtimes X : \underline{T}_{c'} \longrightarrow \underline{T}_{c'.c}$ (resp. $X' {}_{c',c}\boxtimes - : \underline{T}_c \longrightarrow \underline{T}_{c'.c}$) admet un adjoint à droite: il en résulte que $(- {}_{c',c}\boxtimes X)^{op}$ (resp. $(X' {}_{c',c}\boxtimes -)^{op}$) commute aux limites projectives. On en déduit donc que $/M(\mathbb{T})_{c'.c}/ : /\underline{S}_{c'}/\boxtimes/\underline{S}_c/ \longrightarrow (\underline{T}_{c'.c})^{op}$ est une réalisation. Autrement dit, $\mathbb{M}(\mathbb{T}) = (/\underline{S}/, /M(\mathbb{T}))$ est un $\underline{C}$-processus multiplicatif de co-structures (dit <u>associé par construction standard à</u> $\mathbb{T}$).

Nous pouvons donc énoncer:

<u>Proposition 4</u> . <u>A tout système multiplicatif bi-fermé de catégories de structures algébriques est associé par construction standard un processus multiplicatif de co-structures.</u>

5. <u>Système multiplicatif bi-fermé de catégories de structures algébriques associé à un processus multiplicatif de co-structures.</u>

Supposons que:

- $\underline{C}$ est une catégorie (quelconque),
- $/\underline{S}/ = (/\underline{S}_c/)_{c \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}$ est une $\underline{C}$-procession d'esquisses projectives petites (alors, pour toute flèche c de $\underline{C}$, on pose $\underline{T}_c = \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_c/}$ et l'on note $/Y_c/ : /\underline{S}_c/ \longrightarrow \underline{T}_c^{\,op}$ la co-structure canonique associée à $/\underline{S}_c/$),
- $\mathbb{M} = (/\underline{S}/, /M/)$ est un $\underline{C}$-processus multiplicatif de co-structures.

Pour tout couple (c',c) de flèches composables de $\underline{C}$ et tous objets X de $\underline{T}_c$ et X' de $\underline{T}_{c'}$, on dispose des deux présentations canoniques en termes de limites inductives (voir le Chap. I , §12):

- $X = \varinjlim \left(H(X)^{op} \xrightarrow[h(X)^{op}]{} \underline{S}_c^{\,op} \xrightarrow[Y_c^{\,op}]{} \underline{T}_c\right) = \varinjlim\limits_{\substack{x \in X(S) \\ S \in \mathrm{Ob}\,\underline{S}_c}} Y_c(S_x)$,
- $X' = \varinjlim \left(H(X')^{op} \xrightarrow[h(X')^{op}]{} \underline{S}_{c'}^{\,op} \xrightarrow[Y_{c'}^{\,op}]{} \underline{T}_{c'}\right) = \varinjlim\limits_{\substack{x' \in X'(S') \\ S' \in \mathrm{Ob}\,\underline{S}_{c'}}} Y_{c'}(S'_{x'})$,

on pose alors:

$$X' \underset{c',c}{\overset{\mathbb{M}}{\boxtimes}} X = \varinjlim \left((H(X') \times H(X))^{op} \xrightarrow[(h(X') \times h(X))^{op}]{} (\underline{S}_{c'} \times \underline{S}_{c})^{op} \xrightarrow[M_{c',c}^{op}]{} \underline{T}_{c',c} \right) .$$

Clairement, on définit ainsi (par "naturalité") un foncteur:

$$- \underset{c',c}{\overset{\mathbb{M}}{\boxtimes}} - : \underline{T}_{c'} \times \underline{T}_{c} \longrightarrow \underline{T}_{c',c} \qquad .$$

Autrement dit, $\mathbb{T}(\mathbb{M}) = (\underline{T} = (\underline{T}_c)_{c \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}, \overset{\mathbb{M}}{\boxtimes})$ est un $\underline{C}$-système multiplicatif (que l'on dit <u>associé au processus multiplicatif de co-structures</u> $\mathbb{M}$ <u>par construction standard</u>).

Pour tout couple (c',c) de flèches composables de $\underline{C}$ et tous objets X (resp. X') de $\underline{T}_c$ (resp. $\underline{T}_{c'}$) et X'' de $\underline{T}_{c',c}$, on a:

- $/\mathrm{Hom}_{\underline{T}_{c',c}}(M_{c',c}(-,-),X'')/ : /\underline{S}_{c'}/\boxtimes/\underline{S}_c/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est une réalisation,

en conséquence, il lui correspond, par l'isomorphisme

$$\mathrm{Ens}^{(/\underline{S}_{c'}/\boxtimes/\underline{S}_c/)} \approx (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_c/})^{/\underline{S}_{c'}/}$$

$$\text{(resp.} \quad \mathrm{Ens}^{(/\underline{S}_{c'}/\boxtimes/\underline{S}_c/)} \approx (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_{c'}/})^{/\underline{S}_c/} \qquad),$$

une réalisation:

- $\boxed{c' \mid c}\, X'' : /\underline{S}_{c'}/ \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_c/}$ (resp. $\boxed{\begin{smallmatrix} c' \\ c \end{smallmatrix}}\, X'' : /\underline{S}_c/ \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_{c'}/}$),

il en résulte alors que:

- $\underset{c}{[}\, X \,,\, X'' \underset{c',c}{[} = /\mathrm{Hom}_{\underline{T}_c}(X, \boxed{c' \mid c}\, X''(-))/ : /\underline{S}_{c'}/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$

(resp. $\underset{c'}{]}\, X' \,,\, X'' \underset{c',c}{]} = /\mathrm{Hom}_{\underline{T}_{c'}}(X', \boxed{\begin{smallmatrix} c' \\ c \end{smallmatrix}}\, X''(-))/ : /\underline{S}_c/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$)

est une réalisation, i. e. est un objet de $\underline{T}_{c'}$ (resp. $\underline{T}_c$) .

On définit donc ainsi, par naturalité, un foncteur:

$$\underset{c}{[} - , - \underset{c',c}{[} : \underline{T}_c^{op} \times \underline{T}_{c',c} \longrightarrow \underline{T}_{c'}$$

$$\text{(resp.} \quad \underset{c'}{]} - , - \underset{c',c}{]} : \underline{T}_{c'}^{op} \times \underline{T}_{c',c} \longrightarrow \underline{T}_c \qquad).$$

Alors, il est facile d'établir qu'il s'agit là d'un foncteur de fermeture à gauche (resp. à droite) pour le $\underline{C}$-système multiplicatif $\mathbb{T}(\mathbb{M})$.

Nous pouvons donc énoncer:

<u>Proposition</u> 5 . <u>A tout processus multiplicatif de co-structures est associé par construction standard un système multiplicatif bi-fermé de catégories de structures algébriques.</u>

6. <u>Réciprocité des constructions standard.</u>

Soit $\mathbb{S} = (\underline{C};/\underline{S}/)$ et $\mathbb{S}^\wedge = (\underline{C}^\wedge,/\underline{S}^\wedge/)$ deux processions d'esquisses projectives petites.

On dit que $\mathbb{R} = (F;/R/): \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}^\wedge$ est un <u>homomorphisme</u> (ou encore une <u>réalisation</u>) <u>de la procession</u> $\mathbb{S}$ <u>vers la procession</u> $\mathbb{S}^\wedge$ si, et seulement si:

- $F: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}^\wedge$ est un foncteur,
- $/R/ = (/R_c/: /\underline{S}^\wedge_{F(c)}/ \longrightarrow /\underline{S}_c/)_{c \in \mathrm{Fl}\,\underline{C}}$ est une famille de réalisations [1].

Alors, on note Pe la catégorie dont les objets sont les processions d'esquisses projectives petites et dont les flèches sont ces homomorphismes.

Soit $\mathbb{M} = (\underline{C};/\underline{S}/,/M/)$ et $\mathbb{M}^\wedge = (\underline{C}^\wedge;/\underline{S}^\wedge/,/M^\wedge/)$ deux processus multiplicatifs de co-structures admettant des processions d'esquisses projectives petites sous-jacentes. On dit que $(\mathbb{R},r): \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}^\wedge$ est un <u>morphisme du processus multiplicatif de co-structures</u> $\mathbb{M}$ <u>vers le processus multiplicatif de co-structures</u> $\mathbb{M}^\wedge$ si, et seulement si:

- $\mathbb{R}: (\underline{C};/\underline{S}/) \longrightarrow (\underline{C}^\wedge;/\underline{S}^\wedge/)$ est un homomorphisme de processus d'esquisses projectives petites (alors, pour toute flèche c de $\underline{C}$, on note $L_c: \mathrm{Ens}^{/\underline{S}^\wedge_{F(c)}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_c/}$ l'adjoint à gauche du foncteur algébrique $\mathrm{Ens}^{/R_c/}: \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_c/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}^\wedge_{F(c)}/}$),
- $r = (r_{c',c}: L_{c'.c}.M^\wedge_{F(c'),F(c)} \longrightarrow M_{c',c}.(R_{c'} \times R_c))_{(c',c) \in \underline{C}*\underline{C}}$ est une famille de transformations naturelles.

Alors, on note Pmc la catégorie dont les objets sont de tels processus

---

[1] La raison du sens qui a été choisi, pour chacune des $/R_c/$, apparaîtra clairement à la proposition 6.

multiplicatifs de co-structures et dont les flèches sont ces morphismes.

Disons maintenant, précisément, que $(\underline{C};/\underline{S}/,\underline{T},\mathbb{M})$ est un <u>système multiplicatif bi-fermé de catégories de structures algébriques</u> si, et seulement si:

- $(\underline{C};/\underline{S}/)$ est une procession d'esquisses projectives petites,
- $(\underline{C};\underline{T},\mathbb{M})$ est un système multiplicatif bi-fermé,
- pour toute flèche c de $\underline{C}$, on a $\underline{T}_c = \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_c/}$.

Si $(\underline{C};/\underline{S}/,\underline{T},\mathbb{M})$ et $(\underline{C}^\wedge;/\underline{S}^\wedge/,\underline{T}^\wedge,\mathbb{M})$ sont deux systèmes multiplicatifs bi-fermés de catégories de structures algébriques, on dit que

$$(F;/R/,H,h):\ (\underline{C};/\underline{S}/,\underline{T},\mathbb{M}) \longrightarrow (\underline{C}^\wedge;/\underline{S}^\wedge/,\underline{T}^\wedge;\mathbb{M})$$

est un <u>morphisme du système multiplicatif bi-fermé de catégories de structures algébriques</u> $(\underline{C};/\underline{S}/,\underline{T},\mathbb{M})$ <u>vers le système multiplicatif bi-fermé de catégories de structures algébriques</u> $(\underline{C}^\wedge;/\underline{S}^\wedge/,\underline{T}^\wedge,\mathbb{M})$ si, et seulement si:

- $\mathbb{R} = (F;/R/):\ (\underline{C};/\underline{S}/) \longrightarrow (\underline{C}^\wedge;/\underline{S}^\wedge/)$ est un homomorphisme de processions d'esquisses projectives petites,
- $(F;H,h):\ (\underline{C};\underline{T},\mathbb{M}) \longrightarrow (\underline{C}^\wedge;\underline{T}^\wedge,\mathbb{M})$ est un morphisme de systèmes multiplicatifs bi-fermés,
- pour toute flèche c de $\underline{C}$, on a

$$H_c = \mathrm{Ens}^{/R_c/} : T_c = \mathrm{Ens}^{/S_c/} \longrightarrow \underline{T}^\wedge_{F(c)} = \mathrm{Ens}^{/\underline{S}^\wedge_{F(c)}/}.$$

Alors, on note $\mathrm{Smbf}_{\mathrm{alg}}$ la catégorie dont les objets sont ces systèmes multiplicatifs bi-fermés de catégories de structures algébriques et dont les flèches sont ces morphismes.

Clairement, l'application (définie au §4 précédent) qui à un système multiplicatif bi-fermé de catégories de structures algébriques $\mathbb{T}$ associe le processus multiplicatif de co-structures

$\mathbb{M}(\mathbb{T})$ se prolonge en un foncteur ("<u>processus multiplicatif de co-structures associé par construction standard</u>")

$$\mathbb{M}(-)\ :\ \mathrm{Smb}_{\mathbf{alg}} \longrightarrow \mathrm{Pmc}$$

De même, il est clair que l'application (définie au §5 précédent) qui à un processus multiplicatif de co-structures $\mathbb{M}$ **associe le** système multiplicatif bi-fermé de catégories de structures algébriques $\mathbb{T}(\mathbb{M})$, **se prolonge en un foncteur (dit " système** <u>multiplicatif bi-fermé de catégories de structures algébriques associé par construction standard</u>"):

$$\mathbb{T}(-)\ :\ \mathrm{Pmc} \longrightarrow \mathrm{Smbf}_{\mathbf{alg}} \quad .$$

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que ("réciprocité - à l'équivalence près - des constructions standard"):

<u>Proposition</u> 6 . <u>Les deux foncteurs</u>

$$\mathbb{M}(-)\ :\ \mathrm{Smbf}_{\mathbf{alg}} \rightleftarrows \mathrm{Pmc}\ :\ \mathbb{T}(-)$$

<u>définissent une équivalence de catégories.</u>

7. <u>Exemple.</u>

Si $/\underline{S}/$ désigne la famille $(/\underline{S}_{(A,B)\text{-}Bim}/)_{(A,B)\in \mathrm{Fl}\ \mathbb{A}m}$ des esquisses projectives petites de bi-modules (considérées au Chap. I , §17) alors, il est clair que $(\mathbb{A}m;/\underline{S}/)$ est une procession d'esquisses projectives petites.
De même, si $/M/$ désigne la famille

$$(/M_{A,B,C}/:/\underline{S}_{(A,B)\text{-}Bim}/\blacksquare/\underline{S}_{(B,C)\text{-}Bim}/\longrightarrow ((A,C)\text{-}Bim)^{op})_{((A,B),(B,C))\in \mathbb{A}m * \mathbb{A}m}$$

des co-structures considérées au Chap. I , §17 , alors il est clair que $(\mathbb{A}m;/\underline{S}/,/M/)$ est un processus multiplicatif de co-structures: c'est exactement celui qui est associé, par construction standard, au système multiplicatif bi-fermé canonique des catégories de bi-modules.

8. <u>Tests standard.</u>

Soit $\mathbb{M} = (\underline{C};/\underline{S}/,/M/)$ un processus multiplicatif de co-structures (et l'on note alors $\mathbb{T}(\mathbb{M}) = (\underline{C};\underline{T},\overset{\mathbb{M}}{\boxtimes})$ le système multiplicatif bi-fermé qui lui est associé par construction standard).

On dit que $\mathbb{M}$ vérifie le <u>test standard d'associativité</u> (ou que $(\mathbb{M},\alpha = (\alpha_{c'',c',c})_{(c'',c',c) \in \underline{C}*\underline{C}*\underline{C}})$ est un <u>processus multiplicatif associatif de co-structures</u>) si, et seulement si:

- pour tout triplet (c'',c',c) de flèches composables de $\underline{C}$, on a une équivalence naturelle

$$\alpha_{c'',c',c}: M_{c'',c'}(-,-)\overset{\mathbb{M}}{\boxtimes}_{c''.c',c} Y_c(-) \longrightarrow Y_{c''}(-)\overset{\mathbb{M}}{\boxtimes}_{c'',c'.c} M_{c',c}(-,-).$$

Nous laissons au lecteur le soin de préciser à quelle condition nécessaire et suffisante $\mathbb{M}$ vérifie le <u>test standard d'associativité cohérente</u> (ou ce qu'est un <u>processus multiplicatif associatif et cohérent de co-structures</u>).

Dans ces conditions, il est clair qu'à un processus multiplicatif associatif (resp. associatif et cohérent) de co-structures $(\mathbb{M},\alpha)$ correspond, par construction standard, un système multiplicatif associatif (resp. associatif et cohérent) bi-fermé $(\underline{C};\underline{T},\overset{\mathbb{M}}{\boxtimes},a)$ où, pour tout triplet (c'',c',c) de flèches composables de $\underline{C}$, on a:

$$a_{c'',c',c}(Y_{c''}(-),Y_{c'}(-),Y_c(-)) = \alpha_{c'',c',c}(-,-,-)\ .$$

Bien entendu, la réciproque est vraie: nous laissons au lecteur le soin de formuler cette réciprocité en termes d'équivalence de catégories (par analogie avec le §6).

On dit que $\mathbb{M}$ vérifie le <u>test standard d'unitarité à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>) <u>pour la famille d'objets</u> $I = (I_C \in \mathrm{Ob}\, \underline{T}_{\mathrm{Id}_C})_{C \in \mathrm{Ob}\, \underline{C}}$ (ou que $(\mathbb{M},I,\mu)$ est un <u>processus multiplicatif unitaire à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>) <u>de co-structures</u>) si, et seulement si:

- pour toute flèche $c: C \longrightarrow C'$ de $\underline{C}$, on a une équivalence naturelle

$$\mu_c: Y_c(-)\overset{\mathbb{M}}{\boxtimes}_{c,\mathrm{Id}_C} I_C \longrightarrow Y_c(-)$$

(resp. $$\mu_c: I_{C'}\ \overset{\mathbb{M}}{\boxtimes}_{\mathrm{Id}_{C'},c}\ Y_c(-) \longrightarrow Y_c(-)$$).

Nous laissons au lecteur le soin de préciser à quelle condition nécessaire et suffisante $\mathbb{M}$ vérifie le test standard d'unitarité (resp. d'unitarité cohérente) (ou ce qu'est un processus multiplicatif unitaire (resp. unitaire et cohérent) de co-structures). De même, il précisera facilement ce qu'est un processus tensoriel de co-structures.
Dans ces conditions, il est clair qu'à un processus multiplicatif unitaire à droite (resp. à gauche) de co-structures $(\mathbb{M},I,\mu)$ correspond, par construction standard, un système multiplicatif unitaire à droite (resp. à gauche) bi-fermé $(\underline{C};\underline{T},\overset{\mathbb{M}}{\blacksquare},I,u)$ où, pour toute flèche $c: C \to C'$ de $\underline{C}$, on a:

$$u_c(Y_c(-)) = \mu_c(-) \quad .$$

De même, à un processus multiplicatif unitaire (resp. unitaire et cohérent, à un processus tensoriel) de co-structures correspond un système multiplicatif unitaire (resp. unitaire et cohérent, un système tensoriel) bi-fermé.
Bien entendu, les diverses réciproques sont vraies: le lecteur les formulera sans difficulté en termes d'équivalences de catégories (par analogie avec le §6).

9. Application 1: Existence de structures de catégories multiplicatives bi-fermées sur une catégorie de structures algébriques.

Si $\underline{C} = \underline{1}$ (est la catégorie n'ayant qu'un seul objet Ω et une seule flèche $0 = Id_\Omega : \Omega \longrightarrow \Omega$), la donnée d'une $\underline{C}$-procession d'esquisses projectives petites s'identifie à la donnée d'une esquisse projective petite $/\underline{S}_0/$. De même, la donnée d'un $\underline{C}$-processus multiplicatif de co-structures s'identifie à celle d'une co-structure double

$$/M_0/ : /\underline{S}_0/\blacksquare/\underline{S}_0/ \longrightarrow (Ens^{/\underline{S}_0/})^{op} \quad .$$

En conséquence, en vertu de la proposition 6 , les diverses structures de catégories multiplicatives (resp. multiplicatives associatives, ...) bi-fermées sur $Ens^{/\underline{S}_0/}$ sont "classifiées" par les diverses co-structures doubles (resp. les diverse co-structures doubles vérifiant le test standard d'associativité, ...) : on retrouve, ainsi, les résultats de (F.S.C.A.).

10. Exemples.

Il est établi en (C.C.F.W.) qu'il n'existe pas de structure de catégorie monoïdale bi-fermée (i. e. de $\underline{1}$-système tensoriel bi-fermé) sur la catégorie Demgrp des demi-groupes: en effet, si $/\underline{S}_0/$ est une esquisse de demi-groupe, il est impossible de construire une co-structure double (i. e. un co-demi-groupe double) $/M_0/ : /\underline{S}_0/\boxtimes/\underline{S}_0/ \longrightarrow (\mathrm{Demgrp})^{op}$ qui soit sous-jacente à un $\underline{1}$-processus tensoriel de co-structures.

De même, il est établi en (C.C.F.W.) qu'il n'existe qu'une seule (à isomorphisme près) structure de catégorie monoïdale bi-fermée sur la catégorie Grpab des groupes abéliens (à savoir l'usuelle): en effet, si $/\underline{S}_0/$ est une esquisse de groupes abéliens, on ne peut construire qu'une seule (à isomorphisme près) co-structure double (i. e. qu'un seul co-groupe abélien double) $/M_0/ : /\underline{S}_0/\boxtimes/\underline{S}_0/ \longrightarrow (\mathrm{Grpab})^{op}$ qui soit sous-jacente à un $\underline{1}$-processus tensoriel de co-structures. Précisément, il est facile de vérifier que $/\underline{S}_0/\boxtimes/\underline{S}_0/$ est aussi une esquisse de groupes abéliens ("les groupes abéliens doubles sont ... les groupes abéliens"), i. e. que l'on a:

$$\mathrm{Grpab} \sim \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_0/} \sim \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_0/\boxtimes/\underline{S}_0/}$$ **alors, nécessairement** $/M_0/ = Y_{/\underline{S}_0/\boxtimes/\underline{S}_0/} : /\underline{S}_0/\boxtimes/\underline{S}_0/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_0/\boxtimes/\underline{S}_0/})^{op} \sim (\mathrm{Grpab})^{op}$.

11. Application 2: Systèmes multiplicatifs bi-fermés associés par dualité.

Supposons que:

- $/\underline{S}_1/$ est une esquisse projective petite,
- $/M_{1,1}/ : /\underline{S}_1/ \blacksquare /\underline{S}_1/ \longrightarrow (Ens^{/\underline{S}_1/})^{op}$ est une co-structure double (et donc, d'après le §9 précédent - ou (F.S.C.A.), il lui correspond, par construction standard, une catégorie multiplicative bi-fermé $(Ens^{/\underline{S}_1/}, {}_{1}\blacksquare_{1})$)
- G est un sous-groupe du groupe $Dual(Ens^{/\underline{S}_1/})$ des automorphismes de dualisation des structures algébriques d'espèce $/\underline{S}_1/$ (au sens du Chap. I, §14).

Dans ces conditions, posons:

- pour tout élément g de G, $/\underline{S}_g/ = /\underline{S}_1/$,
- pour tout couple (g',g) d'éléments de G,

$$M_{g',g}(-,-) = g'(Y_{/\underline{S}_1/}(-))\ {}_{1}\blacksquare_{1}\ g(Y_{/\underline{S}_1/}(-)) \quad .$$

Clairement, en identifiant G à une catégorie particulière, on voit que $(G;/\underline{S}/ = (/\underline{S}_g/)_{g \in G})$ est une procession d'esquisses projectives petites et $(G;/\underline{S}/,/M/ = (/M_{g',g}/)_{(g',g) \in G \times G})$ est un processus multiplicatif de co-structures.
En vertu de la proposition 5 du §5 précédent, on en déduit, par construction standard, un système multiplicatif bi-fermé

$$(G;(Ens^{/\underline{S}_g/} = Ens^{/\underline{S}_1/})_{g \in G}, (-\ {}_{g'}\blacksquare_{g}\ -)_{(g',g) \in G \times G})$$

dit <u>associé par</u> G-<u>dualité à la catégorie multiplicative bi-fermée</u> $(Ens^{/\underline{S}_1/}, {}_{1}\blacksquare_{1})$ et tel que, pour tout couple (g',g) d'éléments de G et naturellement en tous objets X, X' et X'' de $Ens^{/\underline{S}_1/}$, on a:

- $X'\ {}_{g'}\blacksquare_{g}\ X = g'(X')\ {}_{1}\blacksquare_{1}\ g(X)$,
- $[_{g} X , X'' [_{g',g} \sim g'^{-1}(\{ g(X),X''\{)$ (si $\{-,-\{$ désigne la fermeture à gauche de la catégorie multiplicative bi-fermée $(Ens^{/\underline{S}_1/}, {}_{1}\blacksquare_{1})$),
- $]_{g'} X' , X'']_{g',g} \sim g^{-1}(\}g'(X'),X'' \})$ (si $\}-,-\}$ désigne la fermeture à droite de la catégorie multiplicative bi-fermée $(Ens^{/\underline{S}_1/}, {}_{1}\blacksquare_{1})$.

Ainsi, la famille $(-\ {}_{g',g}\boxtimes\ -)_{(g',g)\in G\times G}$ de produits tensoriels, associés au produit tensoriel "initial" $-\ {}_{1,1}\boxtimes\ -$, permet-elle de "classifier" plus que les seuls homomorphismes entre structures d'espèce $/\underline{S}_1/$; elle permet aussi de prendre en compte les homomorphismes (g',g)-variants, au sens du Chap. I, §15. De plus il est clair que, si la catégorie multiplicative bi-fermée initiale est sous-jacente à une structure de catégorie multiplicative associative (resp. associative cohérente, unitaire à droite, unitaire à gauche, unitaire et cohérente, à une catégorie monoïdale) bi-fermée, alors le système multiplicatif bi-fermé associé par G-dualité est sous-jacent à un système multiplicatif associatif (resp. associatif et cohérent, unitaire à droite, unitaire à gauche, unitaire et cohérent, à un système tensoriel) bi-fermé.

12. Exemple.

Supposons que $/\underline{S}_1/$ est l'esquisse de catégories (de sorte que $Ens^{/\underline{S}_1/} \sim Cat$) et que $/M_{1,1}/ : /\underline{S}_1/\boxtimes/\underline{S}_1/ \longrightarrow (Cat)^{op}$ est la co-structure double associée, par construction standard, à la structure de catégorie cartésienne fermée $(Cat, \times)$.

Dans ces conditions, nous avons $Dual(Cat) = (\{Id_{Cat}, (-)^{op}\}, \circ)$ et, si l'on prend $G = Dual(Cat)$, il vient :

- naturellement en toutes petites catégories $\underline{A}$ et $\underline{B}$,

$$\underline{A} \underset{Id_{Cat},Id_{Cat}}{\boxtimes} \underline{B} = \underline{A} \times \underline{B} ,$$

$$\underline{A} \underset{(-)^{op},Id_{Cat}}{\boxtimes} \underline{B} = \underline{A}^{op} \times \underline{B} ,$$

$$\underline{A} \underset{Id_{Cat},(-)^{op}}{\boxtimes} \underline{B} = \underline{A} \times \underline{B}^{op} ,$$

$$\underline{A} \underset{(-)^{op},(-)^{op}}{\boxtimes} \underline{B} = \underline{A}^{op} \times \underline{B}^{op} ,$$

- naturellement en toutes petites catégories $\underline{A}$ et $\underline{B}$,

$$_{Id_{Cat}}[\,\underline{A}, \underline{B}\,[_{Id_{Cat},Id_{Cat}} = \underline{B}^{\underline{A}} = {}_{Id_{Cat}}]\,\underline{A}, \underline{B}\,]_{Id_{Cat},Id_{Cat}} ,$$

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{Cat}}[\,\underline{A}\,,\,\underline{B}\,[_{(-)^{op},\mathrm{Id}_{\mathrm{Cat}}} = (\underline{B}^{\underline{A}})^{op} = {}_{\mathrm{Id}_{\mathrm{Cat}}}]\,\underline{A}\,,\,\underline{B}\,]_{\mathrm{Id}_{\mathrm{Cat}},(-)^{op}}\ ,$$

$$(-)^{op}[\,\underline{A}\,,\,\underline{B}\,[_{\mathrm{Id}_{\mathrm{Cat}},(-)^{op}} = \underline{B}^{(\underline{A}^{op})} = {}_{(-)^{op}}]\,\underline{A}\,,\,\underline{B}\,]_{(-)^{op},\mathrm{Id}_{\mathrm{Cat}}}\ ,$$

$$(-)^{op}[\,\underline{A}\,,\,\underline{B}\,[_{(-)^{op},(-)^{op}} = (\underline{B}^{(\underline{A}^{op})})^{op} = {}_{(-)^{op}}]\,\underline{A}\,,\,\underline{B}\,]_{(-)^{op},(-)^{op}}$$

(et ces différentes fermetures prennent en compte tant les foncteurs covariants que les foncteurs contra-variants de $\underline{A}$ vers $\underline{B}$).

13. Application 3: Systèmes tensoriels bi-fermés engendrés.

Soit $\underline{G}$ un graphe orienté, dont nous notons $\mathrm{Fl}_{nt}\,\underline{G}$ la classe des flèches non triviales, et $(/\underline{S}_g/)_{g \in \mathrm{Fl}_{nt}\,\underline{G}}$ une famille d'esquisses projectives petites.

Notons $L(\underline{G})$ la catégorie librement engendrée par $\underline{G}$: elle a les mêmes objets que $\underline{G}$ et ses flèches non triviales sont les chemins propres de $\underline{G}$, à savoir les n-uplets (où n varie dans $\mathbb{N}^*$)

$$(g_n,g_{n-1},\ \ldots\ ,g_2,g_1)\colon \mathrm{dom}\ g_1 \longrightarrow \mathrm{cod}\ g_n$$

de flèches consécutives et non triviales de $\underline{G}$.

Dans ces conditions, $(L(\underline{G});(/\underline{S}_\gamma/)_{\gamma \in \mathrm{Fl}\,L(\underline{G})})$ est évidemment une procession d'esquisses projectives petites lorsque l'on a posé:

- pour tout objet G de $L(\underline{G})$, $/\underline{S}_{\mathrm{Id}_G}/ = \underline{1}$,
- pour toute flèche $\gamma = (g_n,\ \ldots\ ,g_1)$ de $L(G)$, $/\underline{S}_\gamma/ = /\underline{S}_{g_n}/\boxtimes\ \ldots\ \boxtimes/\underline{S}_{g_1}/$.

De même, $(L(G);(/\underline{S}_\gamma/)_{\gamma \in \mathrm{Fl}\,L(\underline{G})},(/M_{\gamma',\gamma}/)_{(\gamma',\gamma)\ \ L(\underline{G})*L(\underline{G})})$ est évidemment un processus multiplicatif de co-structures si, pour tout couple (γ',γ) de flèches composables de $L(\underline{G})$, on a posé:

- $/M_{\gamma',\gamma}/ = /Y_{/\underline{S}_{\gamma'.\gamma}/}/ : /\underline{S}_{\gamma'.\gamma}/ = /\underline{S}_{\gamma'}/\boxtimes/\underline{S}_\gamma/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_{\gamma'.\gamma}/})^{op}$.

Ce processus multiplicatif de co-structures vérifie trivialement le test standard d'associativité cohérente, de même qu'il vérifie le test standard d'unitarité cohérente pour la famille

$$I = (I_G = 1 \in \mathrm{Ob}\,(\mathrm{Ens} = \mathrm{Ens}^{(/\underline{S}_{\mathrm{Id}_G}/ \,=\, \underline{1})}))_{G \in \mathrm{Ob}\, L(\underline{G})} .$$

On en déduit, par construction standard, un système tensoriel bi-fermé de catégories de structures algébriques:

$$(L(\underline{G});(\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_{g_n}/\blacksquare\ldots\blacksquare/\underline{S}_{g_1}/})_{(g_n,\ldots,g_1)\in \mathrm{Fl}\, L(\underline{G})},(\mathrm{Ens}= \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_{\mathrm{Id}_G}/})_{G\in \mathrm{Ob}\,\underline{G}},\blacksquare,\ldots)$$

dit <u>canoniquement engendré par la famille de catégories de structures algébriques</u>

$$(\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_g/})_{g \,\in\, \mathrm{Fl}_{nt}\, \underline{G}} .$$

14. <u>Exemples.</u>

Soit $\underline{G}$ le graphe orienté représenté ci-dessous:

$$G_1 \xrightarrow[g_1]{} G_2 \xrightarrow[g_2]{} G_3 .$$

Choisissons pour $/\underline{S}_{g_1}/$ une esquisse projective petite de groupes et pour $/\underline{S}_{g_2}/$ une esquisse projective petite d'ensembles ordonnés (on sait que de telles esquisses existent et on laisse au lecteur le soin d'en exhiber). Alors $/\underline{S}_{(g_2,g_1)}/ = /\underline{S}_{g_2}/\blacksquare/\underline{S}_{g_1}/$ est une esquisse projective petite de groupes ordonnés.

Si Grp (resp. Ord , Grpord) désigne la catégorie des groupes (resp. des ordres, des groupes ordonnés), naturellement en tous ensembles E_1 et E_2 , en tous groupes $(E_1',\times)$ et $(E_2',\times)$, en tous ordres $(E_1'', \leq)$

et $(E_2'', \leq)$ et en tous groupes ordonnés $(E_1''', x, \leq)$ et $(E_2''', x, \leq)$, les fermetures du système tensoriel bi-fermé canoniquement engendré par la famille $(/\underline{S}_{g_1}/, /\underline{S}_{g_2}/)$ sont définies comme suit:

- pour tout $i = 1,2,3$, $\underset{Id_{G_i}}{[} E_1,E_2 \underset{Id_{G_i},Id_{G_i}}{[} = \underset{Id_{G_i}}{]} E_1,E_2 \underset{Id_{G_i},Id_{G_i}}{]}$ est l'ensemble des applications de E_1 vers E_2 ,

- $\underset{Id_{G_1}}{[} E_1,(E_1',x) \underset{g_1,Id_{G_1}}{[} = \underset{Id_{G_2}}{]} E_1,(E_1',x) \underset{Id_{G_2},g_1}{]}$ est la structure de groupe "déduite point par point de celle de E_1' " sur l'ensemble des applications de E_1 vers E_1' ,

- $\underset{Id_{G_2}}{[} E_1,(E_1'', \leq) \underset{g_2,Id_{G_2}}{[} = \underset{Id_{G_3}}{]} E_1,(E_1'', \leq) \underset{Id_{G_3},g_2}{]}$ est la structure d'ordre "déduite point par point de celle de E_1'' " sur l'ensemble des applications de E_1 vers E_1'' ,

- $\underset{Id_{G_1}}{[} E_1,(E_1''', x, \leq) \underset{(g_2,g_1),Id_{G_1}}{[} = \underset{Id_{G_3}}{]} E_1,(E_1''', x, \leq) \underset{Id_{G_3},(g_2,g_1)}{]}$ est la structure de groupe ordonné "déduite point par point de celle de E_1''' " sur l'ensemble des applications de E_1 vers E_1''' ,

- $\underset{g_1}{[} (E_1',x),(E_2',x) \underset{Id_{G_2},g_1}{[} = \underset{g_1}{]} (E_1',x),(E_2',x) \underset{g_1,Id_{G_1}}{]}$ est l'ensemble des homomorphismes de (E_1',x) vers (E_2',x) ,

- $\underset{g_2}{[} (E_1'', \leq),(E_2'', \leq) \underset{Id_{G_3},g_2}{[} = \underset{g_2}{]} (E_1'', \leq),(E_2'', \leq) \underset{g_2,Id_{G_2}}{]}$ est l'ensemble des applications croissantes de $(E_1'', \leq)$ vers $(E_2'', \leq)$,

- $\underset{(g_2,g_1)}{[} (E_1''', x, \leq),(E_2''', x, \leq) \underset{Id_{G_3},(g_2,g_1)}{[} = \underset{(g_2,g_1)}{]} (E_1''', x, \leq),(E_2''', x, \leq) \underset{(g_2,g_1),Id_{G_1}}{]}$

est l'ensemble des homomorphismes croissants de $(E_1''',x,\leq)$ vers $(E_2''',x,\leq)$,

- $\underset{g_1}{[}\,(E_1',x),(E_1''',x,\leq)\,\underset{g_2,g_1}{[}$ est la structure d'ordre "déduite point par point de celle de E_1''' " sur l'ensemble des homomorphismes de (E_1',x) vers (E_1''',x),

- $\underset{g_2}{]}\,(E_1'',\leq),(E_1''',x,\leq)\,\underset{g_2,g_1}{]}$ est la structure de groupe "déduite point par point de celle de E_1''' " sur l'ensemble des applications croissantes de $(E_1'',\leq)$ vers $(E_1''',\leq)$.

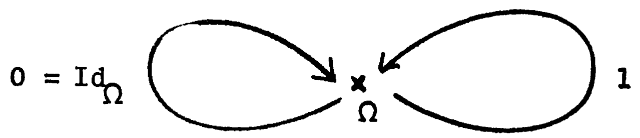
On construit alors, longuement mais facilement, les différents produits tensoriels associés.

Bien entendu, on peut varier les exemples: les considérations générales du §13 précédent indiquent que l'on peut toujours effectuer le produit tensoriel "canonique" d'une structure algébrique d'espèce quelconque par une autre structure algébrique d'espèce quelconque (éventuellement différente, ou égale ... !).

15. Application 4 : Systèmes tensoriels bi-fermés canoniques.

Soit $/\underline{S}_1/$ une esquisse projective petite.

Les considérations générales du §13 précédent permettent de lui associer un sytème tensoriel bi-fermé particulier. En effet, notons $\underline{G}$ le graphe orienté représenté ci-dessous:



Alors $L(\underline{G})$ s'identifie à la catégorie (qui est un monoïde) $(\mathbb{N},+)$ et la famille $(/\underline{S}_1/)_{1\in Fl_{nt}\,\underline{G}}$ engendre donc un système tensoriel bi-fermé. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $/\underline{S}_n/ = \boxtimes^n/\underline{S}_1/$, par construction, nous dirons que

$$((\mathbb{N},+);(\mathrm{Ens}^{\boxtimes^n/\underline{S}_1/})_{n\in\mathbb{N}}, \boxtimes, \ldots)$$

est le <u>système tensoriel bi-fermé des catégories de structures algébriques multiples d'espèce</u> $/\underline{S}_1/$ <u>canoniquement associé à</u> $/\underline{S}_1/$.

16. <u>Exemples</u>.

Si $/\underline{S}_1/$ est l'esquisse de groupes abéliens, il n'est pas difficile de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxtimes^n/\underline{S}_1/$ est encore une esquisse de groupes abéliens (i. e. les groupes abéliens n-uples sont les groupes abéliens). Alors, le système tensoriel bi-fermé de "groupes abéliens multiples"

$$((\mathbb{N},+);(\mathrm{Ens})_{0\in\mathbb{N}},(\mathrm{Grpab})_{n\geq 1}, \boxtimes, \ldots)$$

est tel que, pour tous entiers n et m, non nuls, et naturellement en tous ensembles E_1 et E_2 et en tous groupes abéliens (E_1',x) et (E_2',x) on a:

- $E_1 \; {}_{0,0}^{\boxtimes} \; E_2 = E_1 \times E_2$ dans Ens ,
- $E_1 \; {}_{0,n}^{\boxtimes} \; (E_1',x) = \coprod_{e\in E_1} (E_1',x)_e = (E_1',x) \; {}_{n,0}^{\boxtimes} \; E_1$ dans Grpab (où l'on a posé $(E_1',x)_e = (E_1',x)$, pour tout élément e de E_1),
- $(E_1',x) \; {}_{n,m}^{\boxtimes} \; (E_2',x)$ est le produit tensoriel usuel dans Grpab .

De même, si $/\underline{S}_1/$ est une esquisse de groupes, il n'est pas difficile de vérifier que, pour tout $n \geq 2$, $\boxtimes^n/\underline{S}_1/$ est une esquisse de groupes <u>abéliens</u> (i. e. les groupes n-uples sont les groupes abéliens). Alors, le système tensoriel bi-fermé des "groupes multiples"

$$((\mathbb{N},+),(\mathrm{Ens})_{0\in\mathbb{N}},(\mathrm{Grp})_{1\in\mathbb{N}},(\mathrm{Grpab})_{n\geq 2}, \boxtimes, \ldots)$$

est tel que, pour tous entiers $n \geq 2$ et $m \geq 2$ et naturellement en tous ensembles E_1 et E_2 , en tous groupes (E'_1,x) et (E'_2,x) et en tous groupes abéliens (E''_1,x) et (E''_2,x) , on a:

- $E_1 \; {}_{0,0}^{\boxtimes} \; E_2 = E_1 \times E_2$ dans Ens ,

- $E_1 \; {}_{0,1}^{\boxtimes} \; (E'_1,x) = \coprod_{e \in E_1} (E'_1,x)_e = (E'_1,x) \; {}_{1,0}^{\boxtimes} \; E_1$ dans Grp (où l'on a posé $(E'_1,x)_e = (E'_1,x)$, pour tout élément e de E_1),

- $E_1 \; {}_{0,n}^{\boxtimes} \; (E''_1,x) = \coprod_{e \in E_1} (E''_1,x)_e = (E''_1,x) \; {}_{n,0}^{\boxtimes} \; E_1$ dans Grpab (où l'on a posé $(E''_1,x)_e = (E''_1,x)$, pour tout élément e de E_1) ,

- $(E'_1,x) \; {}_{1,1}^{\boxtimes} \; (E'_2,x)$ est le produit tensoriel usuel, dans Grpab , des abélianisés de (E'_1,x) et (E'_2,x) ,

- $(E'_1,x) \; {}_{1,n}^{\boxtimes} \; (E''_1,x) = (E''_1,x) \; {}_{n,1}^{\boxtimes} \; (E'_1,x)$ est le produit tensoriel usuel, dans Grpab, de l'abélianisé de (E'_1,x) avec (E''_1,x) ,

- $(E''_1,x) \; {}_{n,m}^{\boxtimes} \; (E''_2,x)$ est le produit tensoriel usuel dans Grpab.

Enfin, si $/\underline{S}_1/$ est une esquisse de catégories, le système tensoriel bi-fermé "de catégories multiples" qui lui est canoniquement associé correspond exactement aux constructions (présentées comme particulières) de (M.U.F.U.).

17. Un exemple de classification.

On sait, en vertu de la proposition 6 du § 6 précédent, que les $\mathbb{A}m$-structures de systèmes multiplicatifs bi-fermés de la forme

$$\Pi^{\wedge} = (((A,B)\text{-Bim})_{(A,B) \in \mathrm{Fl}\; \mathbb{A}m}, \boxtimes^{\wedge}, \ldots)$$

sont associées, par constructions standard, aux $\mathbb{A}m$-processus multiplicatifs de co-structures $\mathbb{M}^{\wedge}$ de la forme:

$$((/M^{\wedge}_{A,B,C} /: /\underline{S}_{(A,B)\text{-Bim}}/\boxtimes/\underline{S}_{(B,C)\text{-Bim}}/ \longrightarrow ((A,C)\text{-Bim})^{op})_{((A,B),(B,C)) \in \mathbb{A}m * \mathbb{A}m})$$

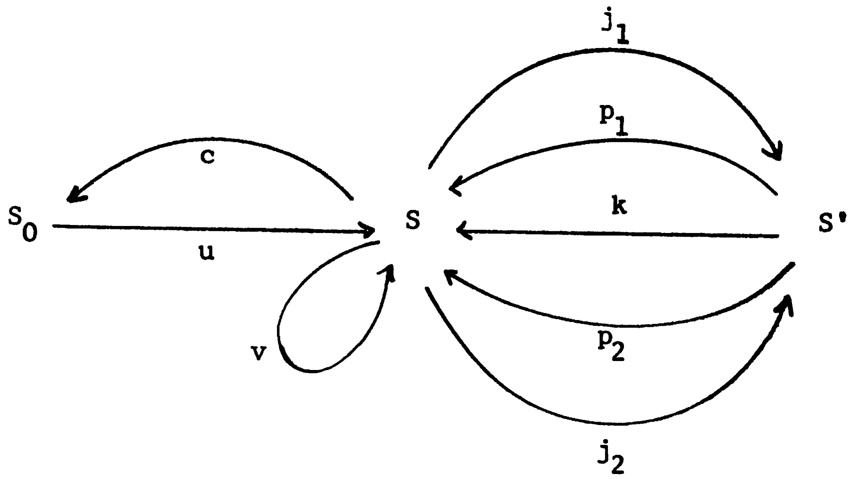
Or, pour tout couple (A,B) d'anneaux unitaires, l'esquisse projective petite $/\underline{S}_{(A,B)-Bim}/$ de (A,B)-bimodules contient l'esquisse projective petite $/\underline{S}_{maguab}/$ des magmas unitaires abéliens, dont le graphe orienté sous-jacent, les équations de définition de la composition des flèches et les cônes projectifs distingués sont précisés dans le diagramme 19 (ci-joint).

En conséquence, pour tout triplet (A,B,C) d'anneaux unitaires, $/\underline{S}_{(A,B)-Bim}/\blacksquare/\underline{S}_{(B,C)-Bim}/$ contient l'esquisse de magmas unitaires abéliens doubles. Or ces magmas unitaires abéliens doubles sont ... les magmas unitaires abéliens. Il en résulte qu'une co-structure de la forme $/M^{\wedge}_{A,B,C}/ : /\underline{S}_{(A,B)-Bim}/\blacksquare/\underline{S}_{(B,C)}/ \longrightarrow ((A,C)\text{-}Bim)^{op}$ définit au-moins un co-magma unitaire abélien. Mais les équations (Eq) (figurant dans le diagramme 19) indiquent qu'alors, on a nécessairement (en posant $M^{\wedge}_{A,B,C}(S) = E_{A,B,C}$), à isomorphisme près:

- $M^{\wedge}_{A,B,C}(S') = E_{A,B,C} + E_{A,B,C} = E_{A,B,C} \times E_{A,B,C}$ dans (A,C)-Bim ,
- $M^{\wedge}_{A,B,C}(p_1)(x) = (x,0)$, pour tout élément x de $E_{A,B,C}$,
- $M^{\wedge}_{A,B,C}(p_2)(x) = (0,x)$, pour tout élément x de $E_{A,B,C}$,
- $M^{\wedge}_{A,B,C}(k)(x) = (x,x)$, pour tout élément x de $E_{A,B,C}$,
- $M^{\wedge}_{A,B,C}(j_1)(x,y) = x$, pour tous éléments x et y de $E_{A,B,C}$,
- $M^{\wedge}_{A,B,C}(j_2)(x,y) = y$, pour tous éléments x et y de $E_{A,B,C}$,

autrement dit, ce co-magma unitaire abélien est entièrement déterminé par la seule donnée du (A,C)-bimodule $E_{A,B,C}$.

De plus, pour tout couple (A,B) d'anneaux unitaires, l'esquisse projective petite $/\underline{S}_{(A,B)-Bim}/$ contient le sous-graphe multiplicatif dont le graphe orienté sous-jacent et les équations de définition de la composition des flèches sont précisés dans le diagramme 20 (ci-joint) (et qui est la somme, dans la catégorie des graphes multiplicatifs, des monoïdes multiplicatifs sous-jacents à A et B^{op}).

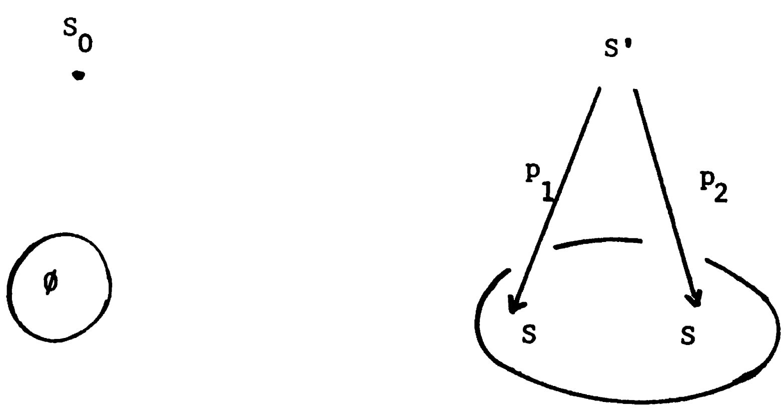


graphe orienté sous-jacent

(Eq)

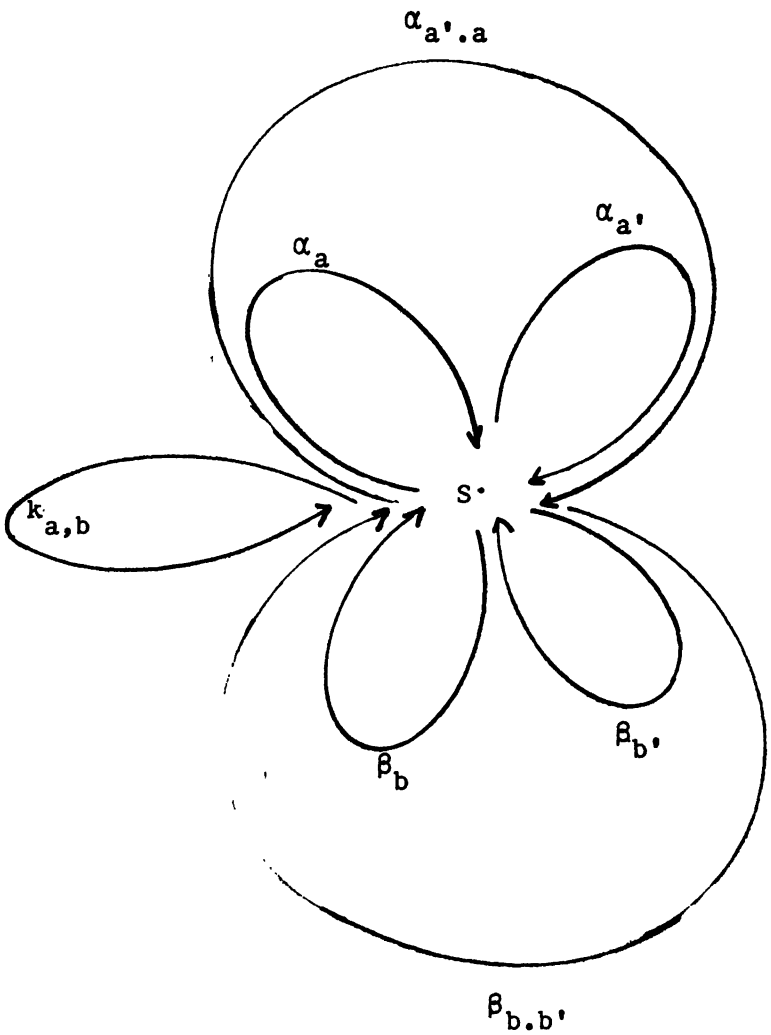
$$p_1 . j_1 = Id_S$$
$$p_2 . j_1 = u.c = v$$
$$p_1 . j_2 = u.c = v$$
$$p_2 . j_2 = Id_S$$
$$k . j_1 = Id_S$$
$$k . j_2 = Id_S$$

Equations de définition



cônes projectifs distingués

<u>Diagramme</u> 19



où a varie dans A
a' varie dans A
b varie dans B
b' varie dans B

graphe orienté sous-jacent

$$\alpha_{a'}.\alpha_a = \alpha_{a'.a}$$

$$\beta_{b'}.\beta_b = \beta_{b.b'}$$

$$\alpha_a.\beta_b = \beta_b.\alpha_a = k_{a,b}$$

équations de définition

<u>Diagramme</u> 20

En conséquence, pour tout triplet (A,B,C) d'anneaux unitaires, l'esquisse projective petite $/\underline{S}_{(A,B)-Bim}/\blacksquare/\underline{S}_{(B,C)-Bim}/$ contient le sous-graphe multiplicatif dont le graphe orienté sous-jacent et les équations de définition de la composition des flèches sont précisés dans le diagramme 21 (ci-joint).
Il en résulte que, si

$$/M^{\wedge}_{A,B,C}/ : /\underline{S}_{(A,B)-Bim}/\blacksquare/\underline{S}_{(B,C)-Bim}/ \longrightarrow ((A,C)\text{-Bim})^{op}$$

est une co-structure, alors on a:

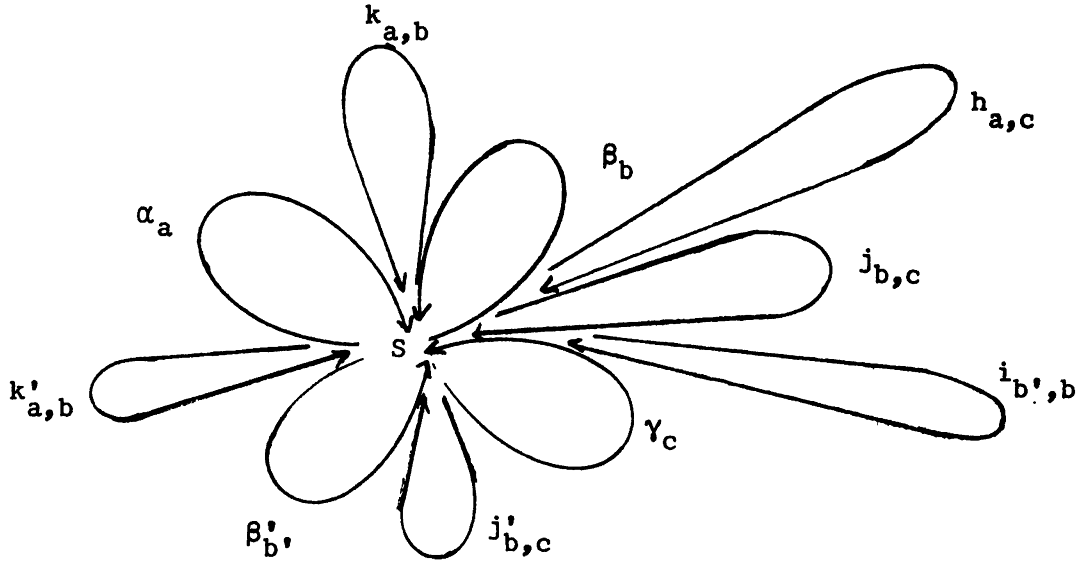
- $E_{A,B,C}$ est aussi muni d'une structure de A-module à droite,
- $E_{A,B,C}$ est aussi muni d'une structure de C-module à gauche,
- $E_{A,B,C}$ est aussi muni tant d'une structure de B-module à gauche que de B-module à droite,

- ces différentes structures de modules , à gauche et à droite, leurs structures duales de modules à droite et à gauche, les structures de A-module à gauche et de C-module à droite, sous-jacentes à $E_{A,B,C}$, et leurs structures duales de A^{op}-module à droite et de C^{op}-module à gauche sont toutes compatibles entre elles, i. e. un couple quelconque d'une structure à gauche et d'une structure à droite, prises parmi celles là , constituent un bi-module.

Ainsi, à tout $\mathbb{A}m$-processus multiplicatif de co-structures $\mathbb{M}^{\wedge}$, on peut associer une telle famille $(E_{A,B,C})_{(A,B,C) \in (\mathrm{Ob}\ \mathbb{A}m)^3}$: il est facile d'établir que la réciproque est vraie.

Dans ces conditions, le système multiplicatif bi-fermé $\mathbb{T}^{\wedge}$ qui lui est associé, par construction standard, est alors tel que:

- pour tout triplet (A,B,C) d'anneaux unitaires, pour tout (A,B)-bimodule X et pour tout (B,C)-bimodule Y , on a:



où a varie dans A
b varie dans B et b' varie dans B
c varie dans C

graphe orienté sous-jacent

$\beta_b.\alpha_a = \alpha_a.\beta_b = k_{a,b}$	
$\beta'_b.\alpha_a = \alpha_a.\beta'_b = k'_{a,b}$	$\alpha_{a'}.\alpha_a = \alpha_{a'.a}$
$\alpha_a.\gamma_c = \gamma_c.\alpha_a = h_{a,c}$	$\beta_{b'}.\beta_b = \beta_{b.b'}$
$\beta_b.\gamma_c = \gamma_c.\beta_b = j_{b,c}$	$\beta'_{b'}.\beta'_b = \beta'_{b'.b}$
$\beta'_b.\gamma_c = \gamma_c.\beta'_b = j'_{b,c}$	$\gamma_{c'}.\gamma_c = \gamma_{c.c'}$
$\beta'_{b'}.\beta_b = \beta_b.\beta'_{b'} = i_{b',b}$	

equations de définition

<u>Diagramme</u> 21

$$X \underset{(A,B),(B,C)}{\hat{\boxtimes}} Y \sim (X \underset{(A,B),(B,B)}{\boxtimes} E_{A,B,C}) \underset{(A,B),(B,C)}{\boxtimes} Y$$

$$\sim X \underset{(A,B),(B,C)}{\boxtimes} (E_{A,B,C} \underset{(B,B),(B,C)}{\boxtimes} Y)$$

(pour les structures de bimodules sous-jacentes à $E_{A,B,C}$ qui donnent un sens à ces écritures et où $\boxtimes$ désigne le produit tensoriel canonique). Ainsi, sont décrits (à isomorphismes près) tous les sytèmes multiplicatifs bi-fermés sur la famille des catégories de bi-modules.
Si l'on choisit des isomorphismes naturels (en X et Y), on décrit alors (à isomorphisme près) tous les systèmes multiplicatifs associatifs et bi-fermés sur la famille des catégories de bimodules.
Si, en particulier, on choisit pour l'un des deux isomorphismes précédents l'identité, alors on décrit (à isomorphisme près) tous les sytèmes multiplicatifs associatifs cohérents et bi-fermés sur la famille des catégories de bi-modules.
Enfin, les systèmes tensoriels bi-fermés sur la famille des catégories de bi-modules sont ceux qui sont associés (comme précédemment) aux familles de la forme $(E_{A,B,C})_{(A,B,C) \in (\mathrm{Ob}\ \mathbb{A}m)^3}$ pour lesquelles il existe une famille $(I_A \in \mathrm{Ob}\ (A,A)\text{-Bimod})_{A \in \mathrm{Ob}\ \mathbb{A}m}$ ("d'unités") vérifiant:

- pour tout couple (A,B) d'anneaux unitaires, on a

$$E_{A,A,B} \underset{(A,B),(B,B)}{\boxtimes} I_B \sim A \underset{Z}{\boxtimes} B \sim I_A \underset{(A,A),(A,B)}{} E_{A,B,B} .$$

APPENDICE. SYSTEMES TENSORIELS ET BICATEGORIES.

1. Bicatégories.

Nous renvoyons à (D.I.S.T.) pour la définition explicite des bicatégories (resp. bicatégories fermées à gauche, bicatégories fermées à droite), définition que, par ailleurs, le lecteur pourra "retrouver" à partir de celle des sytèmes tensoriels (resp. systèmes tensoriels fermés à gauche, systèmes tensoriels fermés à droite), compte tenu des considérations qui suivent. Rappelons simplement, pour fixer les notations, que les "éléments constitutifs" d'une bicatégorie $\mathbb{B}$ sont les objets (dont la classe est notée $\mathrm{Ob}\ \mathbb{B}$), les 1-flèches (dont la classe est notée $1\text{-}\mathrm{Fl}\ \mathbb{B}$) et les 2-flèches (dont la classe est notée $2\text{-}\mathrm{Fl}\ \mathbb{B}$).

Nous notons alors Bicat (resp. Bicatfg, Bicatfd) la catégorie dont les objets sont les bicatégories (resp. les bicatégories fermées à gauche, les bicatégories fermées à droite) petites et dont les flèches sont les morphismes (au sens de (D.I.S.T.) - ou que l'on définit en s'inspirant du Chap. II, § 9) entre ces bicatégories. Nous notons, de même, Bicat_H (resp. $\mathrm{Bicatfg}_H$, $\mathrm{Bicatfd}_H$) la sous-catégorie de Bicat (resp. Bicatfg, Bicatfd), ayant les mêmes objets et dont les flèches sont les seuls homomorphismes (ou encore morphismes stricts).

2. Bicatégorie associée à un système tensoriel.

Soit $\mathbb{T} = (\underline{C};\underline{T},\blacksquare,\ldots)$ un système tensoriel.

Nous lui associons la bicatégorie $\mathrm{Bic}(\mathbb{T})$ telle que (notamment):

- $\mathrm{Ob}\ \mathrm{Bic}(\mathbb{T}) = \mathrm{Ob}\ \underline{C}$,

- $1\text{-}\mathrm{Fl}\ \mathrm{Bic}(\mathbb{T})$ est la classe des $(c,X)\colon C \longrightarrow C'$, tels que $c\colon C \to C'$ est une flèche de $\underline{C}$ et X est un objet de $\underline{T}_c$ (et la composée d'une 1-flèche telle que $(c,X)\colon C \longrightarrow C'$ avec une 1-flèche $(c',X')\colon C' \longrightarrow C''$ est $(c'.c, X' {}_{c'}\!\blacksquare_{c} X)\colon C \longrightarrow C''$),

- $2\text{-}\mathrm{Fl}\ \mathrm{Bic}(\mathbb{T})$ est la classe des $(c,x)\colon (c,X) \longrightarrow (c,X')\colon C \longrightarrow C'$ tels que $c\colon C \longrightarrow C'$ est une flèche de $\underline{C}$ et $x\colon X \longrightarrow X'$ est une flèche de $\underline{T}_c$ (et la composée, dans la catégorie

$$\mathrm{Bic}(\mathbb{T})(C,C') = \coprod_{c \in \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C,C')} \underline{T}_c \qquad ,$$

d'une 2-flèche telle que $(c,x)\colon (c,X) \longrightarrow (c,X')$ avec une 2-flèche telle que $(c,x')\colon (c,X') \longrightarrow (c,X'')$ est $(c,x'.x)\colon (c,X) \longrightarrow (c,X'')$,

- les données d'unités et d'associativité sont directement déduites de celles de $\mathbb{T}$ (et les propriétés de cohérences en résultent).

Clairement, l'application qui à tout système tensoriel petit $\mathbb{T}$ associe la bi-catégorie petite $\mathrm{Bic}(\mathbb{T})$ se prolonge en un foncteur:

$$\mathrm{Bic}\colon \mathrm{St} \longrightarrow \mathrm{Bicat}$$

qui admet une restriction:

$$\mathrm{Bic}_H\colon \mathrm{St}_H \longrightarrow \mathrm{Bicat}_H \quad .$$

De plus, si $\mathbb{T}$ est un système tensoriel fermé à gauche (resp. à droite, bi-fermé), on vérifie sans peine que $\mathrm{Bic}(\mathbb{T})$ est une bicatégorie fermée à gauche (resp. à droite, bi-fermée), au sens de (D.I.S.T.). Ainsi, si l'on désigne par Stfg (resp. Stfd , Stbf) la sous-catégorie pleine de St dont les objets sont les systèmes tensoriels fermés à gauche (resp. à droite, bi-fermés) petits, le foncteur Bic admet une restriction:

$$\mathrm{Bicfg}\colon \mathrm{Stfg} \longrightarrow \mathrm{Bicatfg}$$

(resp. $\mathrm{Bicfd}\colon \mathrm{Stfd} \longrightarrow \mathrm{Bicatfd}$,

$\mathrm{Bicbf}\colon \mathrm{Stbf} \longrightarrow \mathrm{Bicatbf}$).

De même, si l'on désigne par Stfg_H (resp. Stfd_H , Stbf_H) la sous-catégorie pleine de St_H dont les objets sont encore les systèmes tensoriels fermés à gauche (resp. à droite, bi-fermés) petits, le foncteur Bic_H admet une restriction:

$$\mathrm{Bicfg}_H\colon \mathrm{Stfg}_H \longrightarrow \mathrm{Bicatfg}_H$$

(resp. $\mathrm{Bicfd}_H\colon \mathrm{Stfd}_H \longrightarrow \mathrm{Bicatfd}_H$,

$\mathrm{Bicbf}_H\colon \mathrm{Stbf}_H \longrightarrow \mathrm{Bicatbf}_H$).

3. Systèmes tensoriels associés à une bicatégorie.

Soit $\mathbb{B}$ une bicatégorie.

Nous lui associons le système tensoriel $LTens(\mathbb{B}) = (\underline{C}(\mathbb{B}),\underline{T}(\mathbb{B}),\boxtimes,\ldots)$ tel que (notamment):

- $Ob\ \underline{C}(\mathbb{B}) = Ob\ \mathbb{B}$,

- $Fl\ \underline{C}(\mathbb{B})$ est la classe des $\langle b\rangle : B \longrightarrow B'$, tels que $b: B \longrightarrow B'$ est une 1-flèche de $\mathbb{B}$ et où $\langle b\rangle$ désigne sa composante connexe dans la catégorie $\mathbb{B}(B,B')$ (et la composée d'une flèche telle que $\langle b\rangle : B \longrightarrow B'$ avec une flèche telle que $\langle b'\rangle : B' \longrightarrow B''$ est $\langle b'\boxtimes b\rangle : B \longrightarrow B''$),

- pour toute flèche $\langle b\rangle : B \longrightarrow B'$ de $\underline{C}(\mathbb{B})$, $\underline{T}(\mathbb{B})_{\langle b\rangle}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbb{B}(B,B')$ admettant la composante connexe $\langle b\rangle$ pour classe d'objets,

- la famille $\boxtimes$ de produits tensoriels, les données d'associativité et d'unitarités sont directement déduites de celles de $\mathbb{B}$ (et les propriétés de cohérences en résultent).

De même, nous associons à $\mathbb{B}$ le (second) système tensoriel $RTens(\mathbb{B}) = (\underline{C}'(\mathbb{B}),\underline{T}'(\mathbb{B}),\boxtimes,\ldots)$ tel que (notamment):

- $Ob\ \underline{C}'(\mathbb{B}) = Ob\ \mathbb{B}$,

- $Fl\ \underline{C}'(\mathbb{B})$ est la classe des couples $(B',B): B \longrightarrow B'$, tels que B et B' sont objets de $\mathbb{B}$ (et la composée d'une flèche telle que $(B',B): B \longrightarrow B'$ avec une flèche telle que $(B'',B'): B' \longrightarrow B''$ est $(B'',B): B \longrightarrow B''$),

- pour toute flèche $(B',B): B \longrightarrow B'$ de $\underline{C}'(\mathbb{B})$, on a $\underline{T}'(\mathbb{B})_{(B',B)} = \mathbb{B}(B,B')$,

- la famille $\boxtimes$ de produits tensoriels, les données d'associativité et d'unitarités sont directement déduites de celles de $\mathbb{B}$ (et les propriétés de cohérences en résultent).

Clairement, l'application qui à toute bicatégorie petite $\mathbb{B}$ associe le système tensoriel petit $LTens(\mathbb{B})$ (resp. $RTens(\mathbb{B})$) se prolonge en un foncteur:

$$\mathrm{LTens}\colon \mathrm{Bicat} \longrightarrow \mathrm{St}$$

(resp. $\mathrm{RTens}\colon \mathrm{Bicat} \longrightarrow \mathrm{St}$)

qui admet des restrictions:

$$\mathrm{LTens}_H\colon \mathrm{Bicat}_H \longrightarrow \mathrm{St}_H$$

(resp. $\mathrm{RTens}_H\colon \mathrm{Bicat}_H \longrightarrow \mathrm{St}_H$),

$$\mathrm{LTensfg}\colon \mathrm{Bicatfg} \longrightarrow \mathrm{Stfg}$$

(resp. $\mathrm{RTensfg}\colon \mathrm{Bicatfg} \longrightarrow \mathrm{Stfg}$),

$$\mathrm{LTensfd}\colon \mathrm{Bicatfd} \longrightarrow \mathrm{Stfd}$$

(resp. $\mathrm{RTensbf}\colon \mathrm{Bicatbf} \longrightarrow \mathrm{Stbf}$),

$$\mathrm{LTensfg}_H\colon \mathrm{Bicatfg}_H \longrightarrow \mathrm{Stfg}_H$$

(resp. $\mathrm{RTensfg}_H\colon \mathrm{Bicatfg}_H \longrightarrow \mathrm{Stfg}_H$),

$$\mathrm{LTensfd}_H\colon \mathrm{Bicatfd}_H \longrightarrow \mathrm{Stfd}_H$$

(resp. $\mathrm{RTensfd}_H\colon \mathrm{Bicatfd}_H \longrightarrow \mathrm{Stfd}_H$),

$$\mathrm{LTensbf}_H\colon \mathrm{Bicatbf}_H \longrightarrow \mathrm{Stbf}_H \quad .$$

4. Sur une propriété d'adjonction.

Il est facile d'établir que:

Proposition 7 . Le foncteur Bic: St $\longrightarrow$ Bicat (resp. ses diverses restrictions) admet le foncteur LTens: Bicat $\longrightarrow$ St (resp. ses diverses restrictions) pour adjoint à gauche et le foncteur RTens: Bicat $\longrightarrow$ St (resp. ses diverses restrictions) pour adjoint à droite.

Remarquons que, naturellement en toute bicatégorie $\mathbb{B}$ telle que, pour tous objets B et B' de $\mathbb{B}$, la catégorie $\mathbb{B}(B,B')$ est vide ou connexe, on a $\mathrm{LTens}(\mathbb{B}) \sim \mathrm{RTens}(\mathbb{B})$ et $\underline{C}(\mathbb{B}) \sim \underline{C}'(\mathbb{B})$ est (une catégorie associée à) un pré-ordre; c'est, par exemple, le cas du système tensoriel des catégories de bi-modules, indifféremment associé, par LTens ou RTens, à la bicatégorie ("standard") des bi-modules.

Plus précisément, si l'on note Bicatx la sous-catégorie pleine de Bicat dont les objets sont les bi-catégories à "Hom connexes" (i. e. vérifiant la condition précédente) et si l'on note Stpo la sous-catégorie pleine de St dont les objets sont les systèmes tensoriels ($\underline{C};\underline{T},\blacksquare,\ldots$) , où $\underline{C}$ est un pré-ordre, alors les restrictions

$$\text{Bicpo}: \text{Stpo} \rightleftarrows \text{Bicatx} : \text{LTensx} \sim \text{RTensx}$$

de Bic et LTens (ou RTens) définissent une équivalence.

BIBLIOGRAPHIE.

(C.A.M.U.) J. Bénabou, Catégories avec multiplication, C. R. A. S. Paris, 256, pp. 1887 - 1890, 1963.

(C.A.S.T.) C. Ehresmann, Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

(C.C.F.W.) G. M. Kelly, F. Foltz et C. Lair, Algebraic closed categories with few monoïdal biclosed structures or none, Journ. of Pure and Appli. Alg. 17, 1980.

(C.L.C.A.) S. Eilenberg et G. M. Kelly, Closed categories, Proc. of the Conf. on Cat. Alg., La Jolla 1965, Springer, 1966.

(C.O.S.S.) A. Bastiani et C. Ehresmann, Categories of sketched structures, Cah. de Top. et Géom. Diff., XIII,2 , Paris, 1972.

(C.R.M.S.) R. Guitart et C. Lair, Critères de rigidification des morphismes souples entre structures internes, Diagrammes 5, Paris, 1981.

(D.I.S.T.) J. Bénabou, Les Distributeurs, Rapport n° 33, Instit. de Math. Pure et Appli., Univ. Cath. de Louvain, 1973.

(D.S.A.E.) C. Lair, Dualités pour les structures algébriques esquissées, Cah. de Top. et Géom. Diff., XV,4 , Paris, 1974.

(E.G.C.E.) C. Lair, Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses Mathématiques 23, Paris, 1975.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types des structures algébriques, Bul. Instit. Polit. Iaşi, XIV, 1968.

(F.O.S.A.) C. Lair, Foncteurs d'omission de structures algébriques, Cah. de Top. et Géom. Diff., XII,2 , Paris, 1971.

(F.S.C.A.) C. Lair, Fermeture standard des catégories de structures algébriques, Cah. de Top. et Géom. Diff., XVIII,1 , Amiens, 1977.

(I.M.S.A.) C. Lair, Idées et maquettes de structures algébriques, Cah. de Top. et Géom. Diff., XII,1 , Paris, 1971.

(L.P.L.G.) F. Ulmer, Locally α-presentable and locally α-generated categories, Lect. Notes in Math. 195, Springer, 1971.

(M.U.F.U.) A. et C. Ehresmann, Multiple functors, Part. I à IV, Cah. de Top. et Géom. Diff., XV,3 , XIX,3 , XIX, 4 et XX,1 , Amiens, 1978 et 1979.

(P.T.G.M.) L. Coppey, Quelques problèmes typiques concernant les graphes multiplicatifs, Diagrammes 3 , Paris, 1980.

SOMMAIRE.