DIAGRAMMES

F. MOUEN

Sur la caractérisation sémantique des catégories de structures

Diagrammes, tome 11 (1984), p. 1-63
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1984__11__1_0>

Diagrammes, Vol. 11, 1984.

SUR LA CARACTERISATION SEMANTIQUE DES CATEGORIES DE STRUCTURES (+)

F. Mouen.

INTRODUCTION.

On sait, depuis C. Chevalley (avec ses "catégories marquées"),F. W. Lawvere (avec ses "théories"), J. Bénabou (avec ses "types"),C. Ehresmann (avec ses "esquisses projectives")... , que l'on peut décrire un type de structures algébriques à l'aide d'une catégorie munie de limites projectives d'un certain genre (ou, plus généralement, de cônes projectifs). Alors, les foncteurs continus (i. e. transformant les cônes projectifs distingués en limites projectives) d'une telle esquisse projective vers la catégorie des ensembles sont les réalisations, ou modèles du type de structures algébriques ainsi décrit, c'est-à-dire sont les structures algébriques (classiques) de ce type: elles sont donc les objets d'une catégorie dite projectivement esquissable.

De ce point de vue, les catégories projectivement esquissables sont définies extrinsèquement, i. e. comme catégories de réalisations d'une esquisse projective donnée a priori. Réciproquement, on sait définir intrinsèquement de telles catégories: ce sont les catégories localement présentables de Gabriel-Ulmer (voir (L.P.L.G.)).

On sait, depuis C. Ehresmann (avec ses "esquisses mixtes"),que l'on peut décrire un type de structures non nécessairement algébriques (par exemple, les modèles d'une théorie du 1^{er} ordre classique - voir (L.C.R.F.)) à l'aide d'une catégorie munie tant de cônes projectifs que de cônes inductifs d'un certain genre. Alors, les foncteurs continus et co-continus (i. e. transformant les cônes projectifs distingués en limites projectives et les cônes inductifs distingués en limites inductives) d'une telle esquisse mixte vers la catégorie des ensembles sont les réalisations, ou modèles, du type de structures (non nécessairement algébriques) ainsi décrit, c'est-à-dire sont les structures de ce type: elles sont les les objets d'une catégorie dite (mixtement) esquissable.

(+) Thèse de $3^{ième}$ Cycle, préparée sous la direction de C. Lair, présentée à l'Université Paris 7, devant le Jury constitué de MM. F. Norguet (Président), J.-L. Krivine, L. Coppey et C. Lair.

De nouveau, de ce point de vue, les catégories esquissables sont donc définies extrinsèquement et le problème réciproque se pose de les caractériser intrinsèquement "à la Gabriel-Ulmer".
Une première réponse à cette question a été fournie par Diers (voir (C.A.L.O.)): ses catégories localisables (dont il donne effectivement une caractérisation intrinsèque, à la Gabriel-Ulmer) sont exactement les catégories de réalisations d'une esquisse mixte où les cônes inductifs distingués sont discrètement indexés (i. e. se réalisent en des sommes).
Une deuxième réponse à cette question est fournie par Lair (voir (C.M.C.E.)): il fournit une caractérisation intrinsèque complète de toutes les catégories esquissables, au moyen de ses catégories modelables. Cependant, cette réponse est insatisfaisante dans la mesure où elle ne s'énonce pas en des termes analogues à ceux de Gabriel-Ulmer.
C'est justement le but de ce travail de fournir une caractérisation intrinsèque, à la Gabriel-Ulmer, des catégories esquissables et, donc, de fournir ainsi une réponse complète et satisfaisante au problème posé.

Nous consacrons le Chap. I au rappel de la terminologie, des notations et des résultats préliminaires qui nous sont utiles dans toute la suite.
Le Chap. II est consacré à une re-présentation et à une re-démonstration des résultats de Gabriel-Ulmer: nous y montrons, notamment, qu'on peut aboutir à leurs résultats sous des conditions plus faibles que celles qu'ils utilisent.
Le Chap. III nous sert à établir effectivement que les catégories localisables de Diers sont bien exactement les catégories de réalisations d'esquisses mixtes où les cônes inductifs distingués sont discrètement indexés: implicite en (C.A.L.O.), parce que n'utilisant pas les termes de la théorie des esquisses, il nous a semblé judicieux d'expliciter son résultat en les termes de cette théorie (ne serait-ce que pour éclaircir la hiérarchie allant du cas particulier des catégories localement présentables de Gabriel-Ulmer au cas le plus général des catégories modelables de Lair, en passant par le cas, dont on établit qu'il est donc intermédiaire, des catégories localisables de Diers).
Au Chap. IV, nous établissons finalement le résultat que nous avons en vue.

Nous invitons instamment le lecteur à lire (au moins une fois) en "parallèle" les Chap. II, III et IV: ils ont d'ailleurs été rédigés dans cette optique! En effet, si nous avons re-présenté et re-démontré les résultats de Gabriel-Ulmer au Chap. II, si nous avons adapté en termes de la théorie des esquisses ceux de Diers au Chap. III, ce n'est pas seulement (même si cela y contribue) par souci d'esthétisme ou pour énoncer les hypothèses minimales nécessaires à l'obtention de ces résultats. C'est, beaucoup plus fondamentalement, d'une part pour introduire et justifier pleinement les considérations techniques du Chap. IV (et c'était, en procédant ainsi, le seul moyen de souligner leur étroit rapport avec le cas initialement traité par Gabriel-Ulmer) et, d'autre part, pour faire apparaitre en quoi la caractérisation intrinsèque (ou, si l'on préfère, sémantique) des catégories localement présentables ou localisables est, en fait et malgré les apparences, une caractérisation de nature "géométrique" de ces catégories, au même titre qu'une esquisse (projective ou quelconque) peut être regardée, suivant en cela l'idée fondamentale initiale de C. Ehresmann, comme une "syntaxe géométrique" d'un type de structure donné.

CHAPITRE I: GENERALITES.

1. *Préliminaires.*

Dans tout ce travail, nous raisonnons dans un bon modèle d'une théorie (aussi "naïve" que possible) des ensembles *et* classes, vérifiant notamment les axiomes de l'infini, du choix, des univers (i. e. de l'existence d'ordinaux inaccessibles majorant strictement tout ordinal donné) ...

Précisons, également, que "ordinal" signifie "ordinal d'un *ensemble* bien ordonné", "ordinal régulier" signifie "ordinal *infini* régulier" et que les cardinaux sont considérés comme étant des ordinaux particuliers (i. e. initiaux).

2. *Petitesse.*

On dit qu'une classe est *petite* si, et seulement si, c'est un ensemble.
On dit qu'une catégorie $\underline{E}$ est *localement petite* si, et seulement si, pour tous objets E et E' de $\underline{E}$, la classe $\mathrm{Hom}_{\underline{E}}(E,E')$ est un ensemble (i. e. est petite).
On dit qu'une catégorie $\underline{E}$ est *petite* dès lors que la classe $\mathrm{Ob}\,\underline{E}$, de ses objets, et la classe $\mathrm{Fl}\,\underline{E}$, de ses flèches, sont des ensembles (i. e. sont petites).

On note Ens (resp. Cat) la catégorie, localement petite, dont les objets sont les ensembles (resp. les catégories petites) et dont les flèches sont les applications (resp. les foncteurs).

Si α est un ordinal régulier, on dit qu'un ensemble E est α-*petit*, et l'on note $E < \alpha$, si, et seulement si, son cardinal $\overline{E}$ est strictement inférieur à α.
De même, on dit qu'une catégorie petite $\underline{E}$ est α-*petite*, et l'on note $\underline{E} < \alpha$,

si, et seulement si, l'ensemble de ses objets et l'ensemble de ses flèches sont α-petits.
Si $\underline{E}$ est une catégorie (quelconque) et si $F: \underline{E} \longrightarrow Ens$ est un foncteur, on dit qu'il est α-<u>petit</u>, et l'on note $F < \alpha$, si, et seulement si, pour tout objet E de $\underline{E}$, on a $F(E) < \alpha$.
Enfin, si $\underline{E}$ est une catégorie quelconque et si G est un ensemble d'objets de $\underline{E}$, on dit qu'il est <u>pleinement</u> α-<u>petit</u> (<u>dans</u> $\underline{E}$) si, et seulement si, la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$, ayant G pour ensemble d'objets, est α-petite (ce qui impose que G est, au moins, un ensemble α-petit).

3. <u>Cônes et limites</u>.

Soit $F: \underline{I} \longrightarrow \underline{E}$ un foncteur. Une transformation naturelle s du foncteur F vers le foncteur constant sur un objet E de $\underline{E}$ sera appelée un <u>cône inductif</u>, <u>indexé par</u> $\underline{I}$, <u>de base</u> F, <u>de sommet</u> E dans $\underline{E}$ et notée $(s_I: F(I) \longrightarrow E)_{I \in \underline{I}}$.
Bien entendu, un tel cône inductif peut <u>présenter</u> E comme une limite inductive dans $\underline{E}$ du foncteur F. Dans ce cas, nous dirons aussi que ce cône inductif est une <u>limite inductive</u> (<u>naturalisée</u>). S'il en est ainsi, nous dirons qu'il s'agit:

- d'une <u>somme</u> (naturalisée) si, et seulement si, $\underline{I}$ est une catégorie discrète,
- d'une limite inductive <u>petitement indexée</u> si, et seulement si, $\underline{I}$ est une petite catégorie,
- d'une limite inductive <u>connectivement indexée</u> si, et seulement si, $\underline{I}$ est une catégorie connexe.

Soit α un ordinal régulier.
On dit qu'une catégorie $\underline{I}$ est α-<u>filtrante</u> si, et seulement si:

- pour toute catégorie α-petite $\underline{J}$ et tout foncteur $G: \underline{J} \longrightarrow \underline{I}$, il existe un cône inductif $(G(J) \longrightarrow I)_{J \in \underline{J}}$ de base G dans $\underline{I}$.

On dit qu'une limite inductive $(s_I: F(I) \longrightarrow E)_{I \in \underline{I}}$, d'un foncteur $F: \underline{I} \to \underline{E}$, est α-<u>filtrée</u> si, et seulement si, $\underline{I}$ est une catégorie α-filtrante.
Si $\underline{E}$ est une catégorie localement petite, on dit qu'un objet E' de $\underline{E}$ est α-<u>présentable</u> (<u>dans</u> $\underline{E}$) si, et seulement si:

- pour toute limite inductive $(s_I : F(I) \longrightarrow E)_{I \in \underline{I}}$, petitement indexée et α-filtrée dans $\underline{E}$, $(\mathrm{Hom}_{\underline{E}}(E', s_I) : \mathrm{Hom}_{\underline{E}}(E', F(I)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{E}}(E', E))_{I \in \underline{I}}$ est une limite inductive dans $\underline{\mathrm{Ens}}$.

On dit qu'une limite inductive $(s_I : F(I) \longrightarrow E)_{I \in \underline{I}}$ d'un foncteur $F : \underline{I} \longrightarrow \underline{E}$, où $\underline{E}$ est une catégorie localement petite, est α-<u>présentée</u> si, et seulement si:

- pour tout objet I de $\underline{I}$, $F(I)$ est un objet α-présentable de $\underline{E}$.

Enfin, on dit qu'une limite inductive $(s_I : F(I) \longrightarrow E)_{I \in \underline{I}}$, d'un foncteur $F : \underline{I} \longrightarrow \underline{E}$, est α-<u>indexée</u> si, et seulement si, $\underline{I}$ est une catégorie α-petite. Dans ces conditions, il est facile de prouver que:

<u>Proposition</u> 1 . <u>Dans une catégorie localement petite, le sommet de toute limite inductive</u> α-<u>indexée et</u> α-<u>présentée est un objet</u> α-<u>présentable</u>.

Dualement, on utilise des notations et une terminologie analogue pour ce qui concerne les cônes projectifs et les limites projectives: nous laissons au lecteur le soin de les préciser.

4. <u>Diagrammes et diagrammes localement limites</u>.

On dit qu'un foncteur $\delta : \underline{D} \longrightarrow \underline{E}$ est aussi un <u>diagramme indexé par</u> $\underline{D}$ <u>dans</u> $\underline{E}$. Lorsqu'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on le note aussi $(\delta(D))_{D \in \underline{D}}$.
Lorsque $\underline{D}$ est une catégorie discrète, on dit que le diagramme $(\delta(D))_{D \in \underline{D}}$ est une <u>famille</u> (<u>indexée par</u> $\underline{D}$) <u>dans</u> $\underline{E}$
Lorsque $\underline{D}$ est une catégorie petite, on dit que $(\delta(D))_{D \in \underline{D}}$ est un diagramme <u>petit</u> dans $\underline{E}$.
Enfin, les objets $\delta(D)$ de $\underline{E}$, lorsque D parcourt la classe des objets de $\underline{D}$, sont appelés les <u>objets du diagramme</u>, ou encore les <u>éléments de la famille</u> considérée - lorsque $\underline{D}$ est discrète.

Soit α un ordinal régulier et $(\delta(D))_{D \in \underline{D}}$ un diagramme de la catégorie $\underline{E}$. On dit qu'il s'agit d'un diagramme α-<u>petit</u> si, et seulement si, $\underline{D}$ est une catégorie α-petite.
On dit qu'il s'agit d'un diagramme α-<u>présenté</u> si, et seulement si, $\underline{E}$ est localement petite et tous les objets de ce diagramme sont des objets α-présentables de $\underline{E}$.

Soit $F: \underline{I} \longrightarrow \underline{E}$ un foncteur, où $\underline{E}$ est une catégorie localement petite et $\delta: \underline{D} \longrightarrow \underline{E}$ un diagramme de $\underline{E}$.
On dit que $(s_{I,D}: F(I) \longrightarrow \delta(D))_{(I,D)\in \underline{I} \times \underline{D}}$ est un <u>diagramme localement limite inductive naturalisée</u> (et que $(\delta(D))_{D\in \underline{D}}$ est un <u>diagramme localement limite inductive</u>) de F si, et seulement si:

- pour toute flèche $i: I \longrightarrow I'$ de $\underline{I}$ et toute flèche $d: D \longrightarrow D'$ de $\underline{D}$, on a $\delta(d).s_{I,D} = s_{I',D'}.F(i)$,
- pour tout cône inductif $(s'_I: F(I) \longrightarrow E)_{I\in \underline{I}}$, indexé par $\underline{I}$, de base F et de sommet E, dans $\underline{E}$, il existe au moins un objet D de $\underline{D}$ et une flèche $s: \delta(D) \longrightarrow E$ de $\underline{E}$ tels que:

  + $s.s_{I,D} = s'_I$, pour tout objet I de $\underline{I}$,
  + si D' est un autre objet de $\underline{D}$ et $s': \delta(D') \longrightarrow E$ est une autre flèche de $\underline{E}$ tels que $s'.s_{I,D'} = s'_I$, pour tout objet I de $\underline{I}$, alors s et s' sont deux objets d'une même composante connexe de la catégorie $\underline{D}/E$.

On constatera facilement que $(\delta(D))_{D\in \underline{D}}$ est un diagramme localement limite inductive du foncteur F si, et seulement si:

- naturellement en tout objet E de $\underline{E}$, on a

$$\varprojlim \left(\underline{I}^{op} \xrightarrow[F^{op}]{} \underline{E}^{op} \xrightarrow[\mathrm{Hom}_{\underline{E}}(-,E)]{} \mathrm{Ens}\right) \approx \varinjlim \left(\underline{D}^{op} \xrightarrow[\delta^{op}]{} \underline{E}^{op} \xrightarrow[\mathrm{Hom}_{\underline{E}}(-,E)]{} \mathrm{Ens}\right),$$

(on pourra consulter (C.M.C.F.), où l'on trouvera des exemples).

Si $\underline{I}$ est une catégorie petite, on dit qu'il s'agit d'un diagramme localement limite inductive <u>petitement indexée</u>.
Si $\underline{I}$ est discrète, on dit qu'il s'agit d'un diagramme localement <u>somme</u>.
Si $\underline{D}$ est une catégorie petite, on dit qu'il s'agit d'un diagramme <u>petit</u> localement limite inductive.
Si $\underline{D}$ est discrète, on dit qu'il s'agit d'une <u>famille</u> localement limite inductive.
Si α est un ordinal régulier, on dit qu'il s'agit:

- d'un diagramme localement limite inductive α-<u>indexée</u>, si $\underline{I}$ est une catégorie α-petite,
- d'un diagramme localement limite inductive α-<u>présentée</u>, si, pour tout objet I

de $\underline{I}$, $F(I)$ est un objet α-présentable de $\underline{E}$,

- d'un diagramme α-petit localement limite inductive, si $\underline{D}$ est une catégorie α-petite,

- d'un diagramme α-présenté localement limite inductive, si, pour tout objet D de $\underline{D}$, $\delta(D)$ est un objet α-présentable de $\underline{E}$.

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que:

Proposition 2 . Si α est un ordinal régulier et si $\underline{E}$ est une catégorie localement petite, les objets de toute famille localement limite inductive α-indexée et α-présentée sont des objets α-présentables de la catégorie $\underline{E}$.

On remarquera, par contre, que, sous les mêmes hypothèses, on ne peut affirmer, en général, que les objets d'un diagramme (même petit), non nécessairement discret, localement limite inductive α-indexée et α-présentée, sont automatiquement des objets α-présentables de $\underline{E}$.

5. Commutation, génération et création .

Soit $U: \underline{E} \longrightarrow \underline{E}'$ un foncteur entre deux catégories localement petites. Si $(s_{I,D}: F(I) \longrightarrow \delta(D))_{(I,D) \in \underline{I} \times \underline{D}}$ est un diagramme localement limite inductive d'un foncteur $F: \underline{I} \longrightarrow \underline{E}$, on dit que U commute avec ce diagramme localement limite inductive si, et seulement si, $(U(s_{I,D}):UF(I) \rightarrow U\delta(D))_{(I,D)\in \underline{I}\times\underline{D}}$ est un diagramme localement limite inductive de $U.F: \underline{I} \longrightarrow \underline{E}'$.
En particulier, un foncteur peut donc commuter avec des familles localement limites inductives (si $\underline{D}$ est discrète) ou des limites inductives (si $\underline{D} \approx \underline{1}$) et donc aussi, dualement, avec des limites projectives.
Si $F: \underline{I} \longrightarrow \underline{E}$ est un foncteur et si $(s'_I: UF(I) \longrightarrow E')_{I\in\underline{I}}$ est une limite inductive de $U.F: \underline{I} \longrightarrow \underline{E}'$, on dit que U génère (resp. crée) une limite inductive (de F) si, et seulement si, il existe une limite inductive $(s_I: F(I) \longrightarrow E)_{I\in\underline{I}}$ de F dans $\underline{E}$, avec laquelle U commute (resp. telle que $U(s_I) = s'_I$, pour tout objet I de $\underline{I}$).
Nous laissons au lecteur le soin de définir les foncteurs générant (resp. créant) certaines familles, ou certains diagrammes, localement limites inductives.

6. Diagrammes localement libres.

Soit $U: \underline{E} \longrightarrow \underline{E}'$ un foncteur entre deux catégories localement petites, $\delta: \underline{D} \longrightarrow \underline{E}$ un diagramme de $\underline{E}$ et E' un objet de $\underline{E}'$.
On dit que $(e_D: E' \longrightarrow U(\delta(D)))_{D\in\underline{D}}$ est un diagramme localement libre naturalisé, sur E', relativement à U (et que $(\delta(D))_{D\in\underline{D}}$ est un diagramme localement libre, sur E', relativement à U) si, et seulement si:

- pour toute flèche $d: D \longrightarrow D'$ de $\underline{D}$, on a $U(\delta(d)).e_D = e_{D'}$,
- pour tout objet E de $\underline{E}$ et toute flèche $f: E' \longrightarrow U(E)$, il existe au moins un objet D de $\underline{D}$ et une flèche $e: \delta(D) \longrightarrow E$ tels que:
  + $U(e).e_D = f$,
  + si D' est un autre objet de $\underline{D}$ et $e': \delta(D') \longrightarrow E$ est une autre flèche de $\underline{E}$ tels que $U(e').e_{D'} = f$, alors e et e' sont deux objets d'une même composante connexe de la catégorie $\underline{D}/E$.

On constatera facilement que $(\delta(D))_{D\in\underline{D}}$ est un diagramme localement libre sur E' si, et seulement si:

- naturellement en tout objet E de $\underline{E}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\underline{E}'}(E',U(E)) \approx \underrightarrow{\lim} \left(\underline{D}^{op} \xrightarrow[\delta^{op}]{} \underline{E}^{op} \xrightarrow[\mathrm{Hom}_{\underline{E}}(-,E)]{} \mathrm{Ens}\right)$$

(on pourra consulter (C.M.C.F.) , où l'on trouvera des exemples).

Si $\underline{D}$ est une catégorie petite, on dit qu'il s'agit d'un petit diagramme localement libre.
Si $\underline{D}$ est une catégorie discrète, on dit qu'il s'agit d'une famille localement libre (et l'on retrouve la notion initialement introduite en (C.A.L.O.)). Si $\underline{D} \approx \underline{1}$, le seul objet du diagramme localement libre considéré est alors un objet libre sur E', au sens classique.
Si α est un ordinal régulier, on dit qu'il s'agit:

- d'un diagramme α-petit localement libre, lorsque $\underline{D}$ est une catégorie α-petite,
- d'un diagramme α-présenté localement libre, lorsque les objets de ce diagramme sont des objets α-présentables de la catégorie $\underline{E}$.

On dira que le foncteur U admet les petits diagrammes (resp. les petites familles) localement libres si, et seulement si, tout objet de $\underline{E}$ possède un petit diagramme (resp. une petite famille) localement libre relativement à U . Si α est un ordinal régulier, on dira que U admet les diagrammes α-petits (resp. α-présentés) localement libres si, et seulement si, tout objet de $\underline{E}$ possède un diagramme α-petit (resp. α-présenté) localement libre relativement à U . On utilise une terminologie analogue pour les petites familles localement libres.

7. Densité et génération propre.

On dit qu'une sous-catégorie pleine $\underline{E}'$ d'une catégorie $\underline{E}$ est dense dans $\underline{E}$ si, et seulement si:

- tout objet E de $\underline{E}$ est limite inductive dans $\underline{E}$ du foncteur canonique

$$\underline{E}'/E \longrightarrow \underline{E}' \longrightarrow \underline{E} \ .$$

On dit qu'une flèche $e: E' \longrightarrow E$ d'une catégorie $\underline{E}$ est un épimorphisme propre de $\underline{E}$ si, et seulement si:

- e est un épimorphisme de $\underline{E}$,
- si $m: E'' \longrightarrow E$ est un monomorphisme de $\underline{E}$ et s'il existe une flèche $e': E' \longrightarrow E''$ de $\underline{E}$ telle que $m.e' = e$, alors m est un isomorphisme de $\underline{E}$.

Dans ces conditions, on dit qu'un ensemble G, d'objets de $\underline{E}$, est un ensemble générateur (resp. localement générateur) propre si, et seulement si:

- pour tout objet E de $\underline{E}$, il existe une somme (resp. une petite famille somme locale) $(s_y: E_y \longrightarrow E')_{y\in Y}$ (resp. $(s_{y,x}: E_y \longrightarrow E'_x)_{(y,x)\in Y\times X}$) d'une petite famille $(E_y)_{y\in Y}$ d'objets de G et il existe un épimorphisme propre (resp. un élément x de X et un épimorphisme propre) $e: E' \longrightarrow E$ (resp. $e: E'_x \longrightarrow E$).

Soit $\underline{E}$ une catégorie localement petite et $\delta: \underline{D} \longrightarrow \underline{E}$ un petit diagramme de $\underline{E}$. Si D est un objet de $\underline{D}$, on dit qu'une flèche $e: \delta(D) \longrightarrow E$ est un épimorphisme localement propre de $\underline{E}$, relativement au petit diagramme $(\delta(D))_{D\in\underline{D}}$, si, et seulement si:

- pour toutes flèches $f,g: E \longrightarrow E_1$ de $\underline{E}$, la condition " f.e est connectée à g.e dans $\underline{D}/E_1$ " implique f = g (nous dirons alors que e est un épimorphisme $\underline{D}$-local de $\underline{E}$),

- si $m: E'' \longrightarrow E$ est un monomorphisme de $\underline{E}$ et s'il existe un objet D' de $\underline{D}$ et une flèche $e': \delta(D') \longrightarrow E''$ tels que $m.e'$ et e soient dans une même composante connexe de $\underline{D}/E$, alors m est un isomorphisme.

(On remarquera qu'un épimorphisme localement propre, relativement à un diagramme indexé par une petite catégorie discrète, est exactement un épimorphisme propre, au sens précédent.)

Dans ces conditions, on dit qu'un ensemble G d'objets de $\underline{E}$ est un ensemble localement générateur localement propre si, et seulement si:

- pour tout objet E de $\underline{E}$, il existe un petit diagramme $(s_{y,D}: E_y \longrightarrow E'_D)_{(y,D)\in Y\times\underline{D}}$, localement somme d'une petite famille $(E_y)_{y\in Y}$ d'objets de G , et il existe un objet D de $\underline{D}$ et un épimorphisme $e: E'_D \longrightarrow E$ localement propre, relativement au diagramme $(E'_D)_{D\in\underline{D}}$.

8. Esquisses α-projectives.

On dit que $/\underline{S}/ = (\underline{S}, \mathbb{P})$ est une esquisse projective petite si, et seulement si:

- $\underline{S}$ est une petite catégorie,
- $\mathbb{P}$ est un ensemble de cônes projectifs (dits distingués) petitement indexés de $\underline{S}$.

On appelle alors réalisation de $/\underline{S}/$ dans Ens , et l'on note $R:/\underline{S}/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$, tout foncteur $R: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ qui transforme les cônes projectifs distingués en des limites projectives de Ens .

Dans ces conditions, nous notons $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie de foncteurs $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ dont les objets sont ces réalisations et $j: \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ le foncteur injection canonique.

Alors, on sait que ("théorème du faisceau associé"):

Théorème 1 . Si $/\underline{S}/$ est une esquisse projective petite, le foncteur injection canonique $j: \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ admet un adjoint à gauche.

Si $q: \mathrm{Ens}^{\underline{S}} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ désigne l'adjoint à gauche du foncteur j et si

$Y': \underline{S}^{op} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ désigne le plongement de Yoneda, on en déduit un foncteur de Yoneda $Y = q.Y': \underline{S}^{op} \longrightarrow Ens^{/\underline{S}/}$. Clairement, on a alors:

- naturellement en tout objet S de $\underline{S}$ et en tout objet R de $Ens^{/\underline{S}/}$,

$$Hom(Y(S),R) \approx R(S) \quad .$$

De même, associons à toute réalisation $R: /\underline{S}/ \longrightarrow Ens$, sa catégorie d'hypermorphismes, i. e. la catégorie $H(R)$ telle que:

- ses objets sont les couples (S,x) tels que S soit objet de $\underline{S}$ et x soit élément de $R(S)$,

- ses morphismes sont les $((S,x),s,(S',x')): (S,x) \longrightarrow (S',x')$ tels que $s: S \longrightarrow S'$ soit flèche de $\underline{S}$ et $R(s)(x) = x'$,

et notons $h(R): H(R) \longrightarrow \underline{S}$ le foncteur tel que:

- $h(R)(S,x) = S$, pour tout objet (S,x) de $H(R)$,

- $h(R)((S,x),s,(S',x')) = s$, pour toute flèche $((S,x),s,(S',x'))$ de $H(R)$.

Alors, nous avons (densité du foncteur de Yoneda):

Proposition 3 . Si $/\underline{S}/$ est une esquisse projective petite, tout objet R de $Ens^{/\underline{S}/}$ est limite inductive du foncteur $H(R)^{op} \xrightarrow[h(R)^{op}]{} \underline{S}^{op} \xrightarrow[Y]{} Ens^{/\underline{S}/}$.

Si α est un ordinal régulier, on appelle esquisse α-projective toute esquisse projective petite $/S/ = (\underline{S}, \mathbb{P})$ telle que:

- les éléments de $\mathbb{P}$ sont des cônes projectifs α-indexés de $\underline{S}$.

Dans ces conditions, on établit facilement que:

Proposition 4 . Si $/\underline{S}/$ est une esquisse α-projective, pour tout objet S de $\underline{S}$, l'objet $Y(S)$ est α-présentable dans $Ens^{/\underline{S}/}$.

9. $(\alpha, \mathbb{D})$-esquisses.

On dit que $//\underline{S}// = (\underline{S}, \mathbb{P}, \Pi)$ est une esquisse $\mathbb{D}$-inductive petite, ou encore une $\mathbb{D}$-esquisse petite, si, et seulement si:

- $\underline{S}$ est une petite catégorie,

- $\mathbb{P}$ est un ensemble de cônes projectifs (dits distingués) petitement indexés de $\underline{S}$,

- Π est un ensemble de cônes inductifs (dits distingués) discrètement et petitement indexés de $\underline{S}$.

On appelle alors réalisation de $/\!/\underline{S}/\!/$ dans Ens , et l'on note $R: /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow \text{Ens}$, tout foncteur $R: \underline{S} \longrightarrow \text{Ens}$ qui transforme les cônes projectifs distingués en limites projectives de Ens et les cônes inductifs distingués en sommes de Ens .

Dans ces conditions, nous notons $\text{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie de foncteurs $\text{Ens}^{\underline{S}}$, dont les objets sont ces réalisations, et $j: \text{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/} \longrightarrow \text{Ens}$ le foncteur injection canonique.

Alors, on sait que ("théorème de la petite famille de faisceaux associés" - voir, par exemple, (C.M.C.F.)):

Théorème 2 . Si $/\!/\underline{S}/\!/$ est une $\mathbb{D}$-esquisse petite, le foncteur injection canonique $j: \text{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/} \longrightarrow \text{Ens}^{\underline{S}}$ admet les petites familles localement libres.

En particulier, si $Y': \underline{S}^{op} \longrightarrow \text{Ens}^{\underline{S}}$ désigne le plongement de Yoneda, pour tout objet S de $\underline{S}$, l'objet $Y'(S)$ de $\text{Ens}^{\underline{S}}$ admet une petite famille $(Y_x(S))_{x \in X_S}$ d'objets de $\text{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$, localement libre relativement à j . On a alors:

- naturellement en tout objet S de $\underline{S}$ et en tout objet R de $\text{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$,

$$\sum_{x \in X_S} \text{Hom}(Y_x(S),R) \approx R(S) \quad .$$

Si α est un ordinal régulier, on appelle esquisse α-projective et $\mathbb{D}$-inductive petite, ou $(\alpha, \mathbb{D})$-esquisse, toute $\mathbb{D}$-esquisse petite $/\!/\underline{S}/\!/$ $(\underline{S}, \mathbb{P}, \Pi)$ telle que:

- les éléments de $\mathbb{P}$ sont des cônes projectifs α-indexés de $\underline{S}$.

Dans ces conditions, on établit facilement que:

Proposition 5 . Si $/\!/\underline{S}/\!/$ est une $(\alpha, \mathbb{D})$-esquisse, pour tout objet S de $\underline{S}$, la famille $(Y_x(S))_{x \in X_S}$ d'objets de $\text{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$, localement libre sur $Y'(S)$, est constituée d'objets α-présentables de $\text{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$.

10. Esquisses θ-petites.

On dit que $/\!/\underline{S}/\!/ = (\underline{S}, \mathbb{P}, \Pi)$ est une esquisse (mixte) petite si, et seulement si:

- $\underline{S}$ est une petite catégorie,
- $\mathbb{P}$ est un ensemble de cônes projectifs (dits distingués) petitement indexés de $\underline{S}$,
- Π est un ensemble de cônes inductifs (dits distingués) petitement indexés de $\underline{S}$.

On appelle encore réalisation de $/\!/\underline{S}/\!/$ dans Ens, et l'on note $R: /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$, tout foncteur $R: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ qui transforme les cônes projectifs distingués en limites projectives et les cônes inductifs distingués en limites inductives de Ens. Dans ces conditions, nous notons $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie de foncteurs $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ dont les objets sont ces réalisations et $j: \mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ le foncteur injection canonique.
Alors, on sait que ("théorème du petit diagramme de faisceaux associé " -voir, par exemple, (C.M.C.F.)):

Théorème 3. *Si $/\!/\underline{S}/\!/$ est une esquisse petite, le foncteur injection canonique $j: \mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ admet les petits diagrammes localement libres.*

En particulier, si $Y': \underline{S}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ désigne le plongement de Yoneda, pour tout objet S de $\underline{S}$, l'objet $Y'(S)$ de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ admet un petit diagramme $(Y_D(S))_{D\in\underline{D}_S}$ dans $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$, localement libre relativement à j. On a alors:

- naturellement en tout objet S de $\underline{S}$ et en tout objet R de $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$,

$$\varinjlim_{D\in\underline{D}_S{}^{op}} \mathrm{Hom}(Y_D(S),R) \approx R(S) \quad .$$

Si θ est un ordinal inaccessible, on appelle esquisse θ-petite toute esquisse petite $/\!/\underline{S}/\!/ = (\underline{S}, \mathbb{P}, \Pi)$ telle que:

- $\underline{S}$ est une catégorie θ-petite,
- $\mathbb{P}$ et Π sont des ensembles θ-petits,

- tout élément de $\mathbb{P}$ (resp. $\mathbb{I}$) est un cône projectif (resp. inductif) θ-indexé de $\underline{S}$.

Notons alors:

- i la borne supérieure des cardinaux $\overline{\mathrm{Fl}\,\underline{I}}$ des catégories indexant les cônes projectifs de $\underline{S}$, appartenant à $\mathbb{P}$,

- α l'ordinal régulier w_{i+1}, d'indice $i+1$,

- s le cardinal de $\mathrm{Fl}\,\underline{S}$,

- i' le cardinal de $\mathbb{P}$ et j' le cardinal de $\mathbb{I}$

- j la borne supérieure des cardinaux $\overline{\mathrm{Fl}\,\underline{J}}$ des catégories indexant les cônes inductifs de $\underline{S}$, appartenant à $\mathbb{I}$,

- β l'ordinal régulier $w_{\sup(\alpha,s,i',j,j')+1}$, dit <u>associé à</u> $/\!/\underline{S}/\!/$.

Comme θ est inaccessible, il en résulte que $\beta < \theta$.
Dans ces conditions, notons $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})_\beta$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ dont les objets sont les réalisations $R: /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ telles que $\overline{R} < \beta$.
Clairement, $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})_\beta$ est équivalente à une de ses sous-catégories pleines $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})'_\beta$ qui est θ-petite.
Alors, on établit en (C.M.C.E.) que:

<u>Proposition</u> 6 . <u>Si</u> θ <u>est un ordinal inaccessible, si</u> $/\!/\underline{S}/\!/$ <u>est une esquisse (mixte)</u> θ-<u>petite, si</u> β <u>est l'ordinal régulier associé, alors tout objet</u> R' <u>de</u> $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ <u>qui est</u> β-<u>petit admet un diagramme</u> θ-<u>petit et</u> β-<u>présenté, relativement à</u> $j: \mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ <u>(à savoir, avec les notations qui précèdent, le diagramme</u> $R'/(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})'_\beta \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})'_\beta \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$).

Cette proposition précise le théorème 3 qui précède, et généralise les propositions 4 et 5 précédentes, moyennant quelque précaution supplémentaire dans la détermination de l'ordinal régulier β .

CHAPITRE II: CATEGORIES PROJECTIVEMENT ESQUISSABLES, CATEGORIES PROJECTIVEMENT MODELABLES ET CATEGORIES LOCALEMENT PRESENTABLES.

Dans tout ce Chapitre II, on désigne par α un ordinal régulier.

1. Catégories α-projectivement esquissables.

On dit qu'une catégorie $\underline{E}$ est α-projectivement esquissable si, et seulement si:

(PE) il existe une esquisse α-projective petite $/\underline{S}/$ telle que les catégories $\underline{E}$ et $Ens^{/\underline{S}/}$ soient équivalentes.

Par exemple, les catégories de structures algébriques "usuelles" (monoïdes, groupes, anneaux, graphes, graphes multiplicatifs, catégories, monoïdes d'opérateurs, modules, catégories d'opérateurs ...) sont $\aleph_0$-projectivement esquissables: il est très facile, en effet, de construire explicitement une esquisse $\aleph_0$-projective petite pour chacun de ces types de structures.

Rappelons que:

Proposition 7 . Si $\underline{E}$ est une catégorie α-projectivement esquissable, alors elle possède toutes les limites projectives petitement indexées.

Preuve. Il suffit, évidemment, d'établir que, si $/\underline{S}/$ est une esquisse α-projective petite, alors $Ens^{/\underline{S}/}$ est à limites projectives petitement indexées.
Or, on sait que la catégorie de foncteurs $Ens^{\underline{S}}$ possède toutes les limites projectives petitement indexées (il suffit de les y calculer "point par point").
La commutation des limites projectives petitement indexées dans Ens montre alors que le foncteur inclusion canonique $j: Ens^{/\underline{S}/} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ crée ces limites projectives, d'où la conclusion. Fin de la preuve.

Nous avons également:

Proposition 8 . Si $\underline{E}$ est une catégorie α-projectivement esquissable, alors elle possède toutes les limites inductives petitement indexées.

Preuve. Il suffit, évidemment, d'établir que, si $/\underline{S}/$ est une esquisse α-projective petite, alors $Ens^{/\underline{S}/}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées. Or, on sait que $Ens^{\underline{S}}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées (il suffit de les y calculer point par point). De plus, on sait que le foncteur inclusion canonique $j: Ens^{/\underline{S}/} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ admet un adjoint à gauche: la conclusion en résulte (mais les limites inductives dans $Ens^{/\underline{S}/}$ ne se calculent plus nécessairement point par point). Fin de la preuve.

2. Catégories α-projectivement modelables.

On dit qu'une catégorie $\underline{E}$ est α-projectivement modelable si, et seulement si:

(PM1) $\underline{E}$ est une catégorie localement petite,

(PM2) $\underline{E}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées et α-filtrées,

(PM3) $\underline{E}$ contient une sous-catégorie $\underline{E}'$ telle que:

- (i) $\underline{E}'$ est petite,
- (ii) $\underline{E}'$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{E}$,
- (iii) $\underline{E}'$ est une sous-catégorie dense dans $\underline{E}$,
- (iv) tout objet de $\underline{E}'$ est un objet α-présentable de $\underline{E}$,
- (v) $\underline{E}'$ possède toutes les limites inductives α-indexées et le foncteur inclusion canonique $\underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$ commute avec ces limites.

Nous montrons au §4 que les catégories α-projectivement modelables sont exactement les catégories α-projectivement esquissables: ceci fournit autant d'exemples qu'il est souhaitable (mais il peut être intéressant, dans les cas particuliers, de vérifier directement qu'une catégorie de structures algébriques usuelles - par exemple - est $\aleph_0$-projectivement modelable, sans utiliser une esquisse du type de structures considéré mais en prenant pour $\underline{E}'$ la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ dont les objets sont les structures finiment présentées). On notera, d'ailleurs, que la définition d'une catégorie α-projectivement modelable est intrinsèque à cette catégorie, au contraire de celle d'une catégorie α-projectivement esquissable.

En tout état de cause, nous pouvons déjà établir que:

Proposition 9 . Si $\underline{E}$ est une catégorie α-projectivement modelable, si $\underline{E}_\alpha$ désigne la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ ayant pour objets les objets α-présentables de $\underline{E}$ et si $\underline{E}'$ est une sous-catégorie de $\underline{E}$ vérifiant les conditions (PM3)(i) à (PM3)(v) , alors le foncteur inclusion canonique $\underline{E}' \longrightarrow \underline{E}_\alpha$ est une équivalence de catégories.

Preuve. Si E est un objet quelconque de $\underline{E}$, la condition (v) assure que la catégorie $\underline{E}'/E$ est α-filtrante; de même, les conditions (PM1) et (PM3)(i) assurent que $\underline{E}'/E$ est petite. La condition (iii) assure alors que le cône inductif $(s_e = e : E'_e = E' \longrightarrow E)_{(e:\, E' \longrightarrow E) \in \underline{E}'/E}$ est une limite inductive petitement indexée et α-filtrée dans $\underline{E}$. En conséquence, si, de plus, E est un objet α-présentable de $\underline{E}$, il existe un objet E' de $\underline{E}'$ et deux flèches $e'\colon E \longrightarrow E'$ et $e\colon E' \longrightarrow E$ de $\underline{E}$ (auquel cas $e\colon E' \longrightarrow E$ est un objet de $\underline{E}'/E$) telles que $e.e' = Id_E$. On en déduit, facilement, que $e\colon E' \longrightarrow E$ est un conoyau, dans $\underline{E}$, du couple de flèches de $\underline{E}'$ (puisque, en vertu de (ii), $\underline{E}'$ est pleine) $Id_{E'}$, $e'.e : E' \longrightarrow E'$. D'après (v), il en résulte que E est isomorphe à un objet de $\underline{E}'$. Ceci permet de conclure. Fin de la preuve.

De même, montrons que:

Proposition 10. Si $\underline{E}$ est une catégorie α-projectivement modelable, alors elle possède toutes les limites projectives petitement indexées.

Preuve. Notons $\underline{E}'$ une sous-catégorie de $\underline{E}$ vérifiant les conditions (PM3)(i) à (PM3)(v).
Si $\underline{I}$ est une catégorie petite et si $F\colon \underline{I} \longrightarrow \underline{E}$ est un foncteur, désignons par $\underline{J}$ la catégorie telle que:

- ses objets sont les cônes projectifs $c = (e_I\colon E' \longrightarrow F(I))_{I \in \underline{I}}$ de $\underline{E}$, tels que E' soit un objet de $\underline{E}'$,

- ses morphismes sont les $(c, e'\colon E' \longrightarrow E'', c')\colon c \longrightarrow c'$ tels que $e'\colon E' \longrightarrow E''$ est une flèche de $\underline{E}'$ et $e'_I.e' = e_I$, pour tout objet I de $\underline{I}$.

Il est clair, d'après (PM1) et (PM3)(i), que $\underline{J}$ est petite. De plus, $\underline{E}'$ vérifiant (PM3)(v), il en résulte que $\underline{J}$ est α-filtrante. Par conséquent, en vertu de (PM2), le foncteur canonique:

$$\begin{array}{lcl} G: & \underline{J} & \longrightarrow \underline{E} \\ & (e_I : E' \longrightarrow F(I))_{I \in \underline{I}} & \longmapsto E' \end{array}$$

admet une limite inductive E. En utilisant (PM3)(iii) et (PM3)(iv), il est alors facile d'établir que E est <u>aussi</u> une limite projective de F. <u>Fin de la preuve</u>.

La preuve de la proposition 10 précédente nous autorise à dire que les limites projectives petitement indexées dans $\underline{E}$ se calculent "point par point" (comme dans les catégories $Ens^{/\underline{S}/}$ de réalisations d'une esquisse α-projective petite), étant entendu que les "points" d'un objet E de $\underline{E}$ sont les ensembles $Hom_{\underline{E}}(E',E)$, où E' varie dans $\underline{E}'$ (alors que les points d'une réalisation $R: \underline{S} \longrightarrow Ens$ d'une esquisse α-projective petite $/\underline{S}/$ sont les ensembles $R(S)$, quand S varie dans $\underline{S}$).
Par analogie, on peut se demander si une catégorie α-projectivement modelable possède toutes les limites inductives petitement indexées (non nécessairement α-filtrées). La réponse est affirmative, mais elles ne s'y calculent pas point par point (au sens précédent) en général: établir ce résultat revient, en fait, à prouver que les catégories α-projectivement modelables sont α-projectivement esquissables, ce que nous ferons au § 4. Notons, cependant, que les axiomes (PM2), (PM3)(iii) et (PM3)(iv) assurent que les limites inductives petitement indexées <u>et</u> α-<u>filtrées</u> se calculent encore point par point (au sens précédent) dans une telle catégorie.

3. <u>Catégories localement α-présentables.</u>

On dit qu'une catégorie $\underline{E}$ est <u>localement</u> α-<u>présentable</u> si, et seulement si:

(LP1) $\underline{E}$ est localement petite,

(LP2) $\underline{E}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées et α-filtrées,

(LP3) $\underline{E}$ possède toutes les limites inductives α-indexées et α-présentées, (LP4) $\underline{E}$ possède un ensemble générateur propre formé d'objets α-présentables.

Nous montrons au §5 que les catégories localement α-présentables sont exactement les catégories α-projectivement modelables et donc aussi les catégories α-projectivement esquissables (et c'est là le but essentiel de ce Chapitre II): ceci fournit donc autant d'exemples qu'il est souhaitable de catégories localement α-présentables (mais il peut être intéressant, dans la pratique, de vérifier directement qu'une catégorie de structures algébriques usuelles - par exemple - est localement $\aleph_0$-présentable, en prenant pour ensemble de générateurs propre seulement quelques structures libres à quelques générateurs bien choisies). On remarquera, comme précédemment, que la définition d'une catégorie localement α-présentable est intrinsèque à cette catégorie.
Enfin, il convient de signaler que la définition des catégories localement α-présentables introduite ici reprend, bien entendu, l'essentiel de celle de Gabriel-Ulmer (voir (L.P.L.G.)). On notera, cependant, que les conditions que nous imposons sont, formellement, plus faibles que les leurs (qui s'en déduisent): ceci ne correspond pas seulement à un souci esthétique mais permet, aussi, une meilleure généralisation et une meilleure comparaison avec ces généralisations, dans les situations plus générales étudiées aux Chapitres III et IV.

4. Catégories α-projectivement esquissables et catégories α-projectivement modelables.

Montrons que:

Proposition 11. Les catégories α-projectivement esquissables sont des catégories α-projectivement modelables.

Preuve. Il suffit d'établir que, si $/\underline{S}/$ est une esquisse α-projective petite, la catégorie $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ est α-projectivement modelable.
Le graphe multiplicatif $\underline{S}$ étant petit, la catégorie de foncteurs $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ est localement petite et donc aussi sa sous-catégorie pleine $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$. La condition (PM1) est donc vérifiée.
On sait, en vertu de la proposition 8, que $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées. En particulier, elle est donc à limites inductives petitement indexées et α-filtrées et la condition (PM2) est également vérifiée.

On sait que les limites inductives petitement indexées se calculent point par point dans la catégorie de foncteurs $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$; comme, d'autre part, les limites inductives petitement indexées et α-filtrées commutent, dans Ens , aux limites projectives α-indexées, on en déduit que le foncteur d'inclusion $j: \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ crée les limites inductives petitement indexées et α-filtrées, ou encore que ces dernières limites inductives se calculent point par point dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$. Si $Y: \underline{S}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ est le foncteur de Yoneda, on sait que, naturellement en tout objet S de $\underline{S}$ et en tout objet R de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$, on a:

- $\mathrm{Hom}(Y(S),R) \approx R(S)$.

On en conclut facilement que, pour tout objet S de $\underline{S}$, l'objet $Y(S)$ est α-présentable dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$.

Dans ces conditions, construisons une sous-catégorie $\underline{E}' = \underline{E}'_{\alpha}$ de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ par récurrence transfinie comme suit:

- on note $\underline{E}'_0$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ dont les objets sont les $Y(S)$, quand S varie dans $\underline{S}$; elle est donc petite, pleine, dense (puisque le foncteur de Yoneda est dense) et ses objets, d'après ce qui précède, sont bien α-présentables;

- si $\lambda < \alpha$ et si la sous-catégorie $\underline{E}'_{\lambda}$ de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ est définie, contient $\underline{E}'_0$, est petite, pleine, dense et si ses objets sont α-présentables dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$, on note $\underline{E}'_{\lambda+1}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ ayant pour objets, outre ceux de $\underline{E}'_{\lambda}$, une limite inductive choisie (qui existe, puisque $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ est à limites inductives petitement indexées) pour tout foncteur $\underline{I} \longrightarrow \underline{E}'_{\lambda} \hookrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$, où $\underline{I}$ varie dans un ensemble de représentants choisis des classes d'équivalence, modulo la relation d'isomorphisme, des catégories α-petites; évidemment, $\underline{E}'_{\lambda+1}$ est encore petite, pleine, dense, elle contient $\underline{E}'_{\lambda}$ et ses objets sont encore α-présentables dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$, puisque limites inductives α-indexées et α-présentées;

- si $\lambda \leq \alpha$ est un ordinal limite et si $(\underline{E}'_{\lambda'})_{\lambda' < \lambda}$ est une famille définie de sous-catégories emboitées de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$, petites, pleines, denses et dont les objets sont α-présentables dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$, on pose $\underline{E}'_{\lambda} = \bigcup_{\lambda' < \lambda} \underline{E}'_{\lambda'}$; on obtient ainsi une sous-catégorie de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ qui est encore petite, pleine, dense et dont les objets sont α-présentables dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$.

En particulier, $\underline{E}'_{\alpha} = \underline{E}'$ vérifie donc (i), (ii), (iii) et (iv). Clairement, elle vérifie aussi (v) par construction. La condition (PM3) est donc établie. Fin de la preuve.

Réciproquement, montrons que:

Proposition 12. Les catégories α-projectivement modelables sont des catégories α-projectivement esquissables.

Preuve. Supposons que $\underline{E}$ est une catégorie α-projectivement modelable et notons $\underline{E}'$ une sous-catégorie de $\underline{E}$ vérifiant les conditions (PM3)(i) à (PM3)(v). Posons $\underline{S} = \underline{E}'^{op}$ et distinguons dans $\underline{S}$ tout cône projectif dual d'un cône limite inductive choisie (qui existe, d'après (v)) $(e_I: F(I) \longrightarrow E')_{I \in \underline{I}}$, pour tout foncteur $F: \underline{I} \longrightarrow \underline{E}'$, où $\underline{I}$ varie dans un ensemble de représentants choisis des classes d'équivalence, modulo la relation d'isomorphisme, des catégories α-petites: on obtient ainsi une esquisse α-projective $/\underline{S}/$, petite en vertu de (PM3)(i). De plus, nous disposons également d'un foncteur (inclusion canonique) $Z: \underline{S}^{op} = \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$ qui est, en vertu de (PM3)(ii) et (PM3)(iii), plein, fidèle, dense.
A tout objet E de $\underline{E}$, on associe alors le foncteur:

$$M(E): \underline{S} \xrightarrow[Z^{op}]{} \underline{E}^{op} \xrightarrow[\mathrm{Hom}(-,E)]{} \mathrm{Ens} \qquad ;$$

par construction et en vertu de (PM3)(v), $M(E)$ est évidemment une réalisation de $/\underline{S}/$. On définit donc, ainsi, un foncteur:

$$\begin{aligned} M: \underline{E} &\longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} \\ E &\longrightarrow M(E) \ . \end{aligned}$$

Inversement, si $R: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est une réalisation de $/\underline{S}/$, il est facile de constater que la catégorie duale $H(R)^{op}$ de sa catégorie d'hypermorphismes est petite (puisque $\underline{S}$ est petite) et α-filtrante (puisque R commute aux limites projectives α-indexées). On lui associe alors une limite inductive choisie

$$N(R) = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\ (H(R)^{op} \xrightarrow[h(R)^{op}]{} \underline{S}^{op} \xrightarrow[Z]{} \underline{E}\ )$$

dans $\underline{E}$ (et elle existe bien, en vertu de (PM2)). On définit donc ainsi un foncteur:

$$\begin{aligned} N: \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} &\longrightarrow \underline{E} \\ R &\longmapsto N(R) \ . \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que, naturellement en tout objet E de $\underline{E}$, on dispose, par construction, d'un isomorphisme $\underline{E}'/E \approx H(M(E))^{op}$ rendant le diagramme de foncteurs ci-dessous commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\underline{E}'/E \arrow[r, phantom, "\approx"] \arrow[ddr] & H(M(E))^{op} \arrow[d, "h(M(E))^{op}"] \\
& \underline{S}^{op} \arrow[d, "Z"] \\
& \underline{E}
\end{tikzcd} .$$

En vertu de (PM3)(iii), on en déduit que, naturellement en tout objet E de $\underline{E}$, on a:

$$E \approx N(M(E)) .$$

De même, naturellement en tout objet R de $Ens^{/\underline{S}/}$, on dispose d'un isomorphisme $\underline{E}'/N(R) \approx H(R)^{op}$, puisque $N(R)$ est, par construction, une limite inductive petitement indexée et α-filtrée dans $\underline{E}$ et tout objet de E' est, en vertu de (PM3)(iv), α-présentable. Il en résulte que, naturellement en tout objet S de $\underline{S} = \underline{E}'^{op}$, on a:

$$M(N(R))(S) = Hom(S,N(R)) \approx R(S) .$$

Il en résulte que, naturellement en tout objet R de $Ens^{/\underline{S}/}$, on a:

$$R \approx M(N(R)).$$

Par conséquent, les catégories $\underline{E}$ et $Ens^{/\underline{S}/}$ sont équivalentes. *Fin de la preuve*.

Il résulte trivialement de la proposition 12 précédente et de la proposition 8 que:

Proposition 13. *Si* $\underline{E}$ *est une catégorie* α-*projectivement modelable, alors elle possède toutes les limites inductives petitement indexées*.

Preuve. Bien entendu, les propositions 8 et 12 précédentes suffisent largement à prouver l'assertion. Cependant, on peut détailler "une autre" preuve (i. e. une preuve présentée de manière plus interne à $\underline{E}$) comme suit.
Si $\underline{I}'$ est une petite catégorie et si $F': \underline{I}' \longrightarrow \underline{E}$ est un foncteur, on note

$\underline{J}'$ la catégorie telle que:

- ses objets sont les couples (E',C) où E' est un objet de $\underline{E}'$ et C est une composante connexe de la catégorie comma E'/F',

- ses morphismes sont les $((E',C),e',(E'',C'))$: $(E',C) \longrightarrow (E'',C')$ tels que e': $E' \longrightarrow E''$ est une flèche de $\underline{E}'$ appliquant (par composition) la composante connexe C' dans la composante connexe C.

Clairement, on dispose d'un foncteur canonique:

$$\begin{aligned} G': \underline{J}' &\longrightarrow \underline{E}' \\ (E',C) &\longmapsto E' \end{aligned} \quad ,$$

et ce foncteur est évidemment une co-fibration discrète.
Si $\underline{J}'$ est évidemment petite elle n'est pas, en général (sauf, par exemple, si $\underline{I}'$ est α-filtrante), α-filtrante. On ne peut donc pas calculer la limite inductive (dont rien n'assure a priori l'existence!) du foncteur $\underline{J}' \xrightarrow[G']{} \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$.

Cependant, le foncteur G' engendre certainement une co-fibration discrète $\overline{G}'$: $\overline{\underline{J}}' \longrightarrow \underline{E}'$ qui crée les limites inductives α-indexées. Il en résulte que $\overline{\underline{J}}'$ est petite et α-filtrante et donc que le foncteur $\overline{\underline{J}}' \xrightarrow[\overline{G}']{} \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$ admet bien une limite inductive E, qui est la limite inductive de F'.
(Avec les notations précédentes, on voit facilement que $\underline{J}'^{op}$ est la catégorie des hypermorphismes du foncteur limite inductive dans $\underline{Ens}^{\underline{S}}$ des $M(F(I))$ et que $\overline{\underline{J}}'^{op}$ est celle de la réalisation de $/\underline{S}/$ engendrée par ce dernier.) Fin de la preuve.

Des propositions 11 et 12 précédentes, on déduit évidemment que:

Théorème 4. Les catégories α-projectivement esquissables sont exactement les catégories α-projectivement modelables.

5. Catégories localement α-présentables et catégories α-projectivement modelables.

Montrons que:

Proposition 14. Les catégories α-projectivement modelables sont des catégories localement α-présentables.

Preuve. Supposons que $\underline{E}$ est α-projectivement modelable et désignons par $\underline{E}'$ une sous-catégorie de $\underline{E}$ vérifiant (PM3)(i) à (PM3)(v).
Comme (PM1) est vérifiée, (LP1) l'est trivialement.
De même, comme (PM2) est vérifiée, (LP2) l'est.
En vertu de (PM3)(v) et de la proposition 9, (LP3) est également vraie.
Montrons, enfin, que l'ensemble (c'en est bien un, vu (PM3)(i)) des objets de $\underline{E}'$ est bien un ensemble générateur propre de $\underline{E}$.
Si E est un objet de $\underline{E}$, la condition (PM3)(iii) assure que $(s_e = e : E'_e = E' \longrightarrow E)_{(e:\, E' \longrightarrow E) \in \underline{E}'/E}$ est un cône limite inductive canonique dans $\underline{E}$. Désignons, alors, par $(s'_e : E'_e = E' \longrightarrow \overline{E})_{(e:\, E' \longrightarrow E) \in \mathrm{Ob}\underline{E}'/E}$ un cône (discret) somme de la famille $(E'_e = E')_{e \in \mathrm{Ob}\underline{E}'/E}$ dans la catégorie $\underline{E}$ (cette somme existe, vue la proposition 13). Alors, il existe un unique morphisme $s: \overline{E} \longrightarrow E$ de $\underline{E}$ tel que:

- pour toute flèche $e: E' \longrightarrow E$, où E' est objet de $\underline{E}'$, on a $s.s'_e = s_e = e$.

Si $f,g: E \longrightarrow E_1$ sont deux flèches de $\underline{E}$ telles que $f.s = g.s$, on en déduit que $f.s_e = g.s_e$, pour tout objet $e: E' \longrightarrow E$ de $\underline{E}'/E$, par conséquent $f = g$, puisque E est une limite inductive. En d'autres termes, $s: \overline{E} \longrightarrow E$ est un épimorphisme de $\underline{E}$.
Si $m: E_2 \longrightarrow E$ est un monomorphisme de $\underline{E}$, il définit un foncteur injectif (composition par m) $\underline{E}'/m : \underline{E}'/E_2 \longrightarrow \underline{E}'/E$. Si, de plus, $s': \overline{E} \longrightarrow E_2$ est une flèche de $\underline{E}$ telle que $m.s' = s$, on obtient un foncteur

$$\begin{aligned} n : \underline{E}'/E &\longrightarrow \underline{E}'/E_2 \\ e &\longmapsto s'.s'_e \end{aligned}$$

dont on établit facilement qu'il est inverse de $\underline{E}'/m$. En vertu de (PM3)(iii), on en déduit que m est un isomorphisme de $\underline{E}$. Autrement dit, $s : \overline{E} \longrightarrow E$ est un épimorphisme propre. D'où la proposition. Fin de la preuve.

Réciproquement, montrons que:

Proposition 15. Les catégories localement α-présentables sont des catégories α-projectivement modelables.

Preuve. Supposons que $\underline{E}$ est une catégorie localement α-présentable et désignons par G un ensemble générateur propre.
Puisque (LP1) est vérifiée, (PM1) l'est.
De même, puisque (LP2) est vérifiée, (PM2) l'est trivialement.

Nous construisons une sous-catégorie $\underline{E}' = \underline{E}'_\alpha$ de $\underline{E}$ par récurrence transfinie comme suit:

- on note $\underline{E}'_0$ la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ dont G est l'ensemble des objets; en vertu de (LP1), elle est petite et, en vertu de (LP4), ses objets sont α-présentables dans $\underline{E}$;

- si $\lambda < \alpha$ et si la sous-catégorie $\underline{E}'_\lambda$ de $\underline{E}$ est définie, contient $\underline{E}'_0$, est petite, pleine et si ses objets sont α-présentables dans $\underline{E}$, on note $\underline{E}'_{\lambda+1}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ ayant pour objets, outre ceux de $\underline{E}'_\lambda$, une limite inductive choisie (qui existe, en vertu de (LP3)) pour tout foncteur $\underline{I} \longrightarrow \underline{E}'_\lambda \longrightarrow \underline{E}$, où $\underline{I}$ varie dans un ensemble de représentants choisis des classes d'équivalence, modulo la relation d'isomorphisme, des catégories α-petites; évidemment, $\underline{E}'_{\lambda+1}$ est encore petite, pleine, elle contient $\underline{E}'_\lambda$ et ses objets sont toujours α-présentables dans $\underline{E}$, puisque limites inductives α-indexées et α-présentées;

- si $\lambda \leq \alpha$ est un ordinal limite et si $(\underline{E}'_{\lambda'})_{\lambda' < \lambda}$ est une famille définie de sous-catégories emboitées de $\underline{E}$, petites, pleines et dont les objets sont α-présentables dans $\underline{E}$, on pose $\underline{E}'_\lambda = \bigcup_{\lambda'<\lambda} \underline{E}'_{\lambda'}$; on obtient, ainsi, une sous-catégorie de $\underline{E}$ qui est encore petite, pleine et dont les objets sont α-présentables dans $\underline{E}$.

En particulier, $\underline{E}'_\alpha = \underline{E}'$ vérifie (PM3)(i), (PM3)(ii), (PM3)(iv) et, par construction, (PM3)(v).

Il nous reste à montrer que $\underline{E}'$ est dense dans $\underline{E}$. Pour ce faire, supposons que E est un objet de $\underline{E}$. Comme nous venons d'établir que la condition (PM3)(v) est vérifiée par $\underline{E}'$, on en déduit que la catégorie $\underline{E}'/E$ est α-filtrante (et évidemment petite, puisque $\underline{E}'$ est petite et $\underline{E}$ localement petite). En conséquence, le foncteur canonique $\underline{E}'/E \longrightarrow \underline{E}' \longrightarrow E$ admet, en vertu de (LP2), un cône limite inductive $(s_e : E'_e = E' \longrightarrow \tilde{E})_{(e:\, E' \longrightarrow E) \in \underline{E}'/E}$ et il existe donc une unique flèche $m: \tilde{E} \longrightarrow E$ de $\underline{E}$ telle que:

- pour toute flèche $e: E' \longrightarrow E$ de $\underline{E}$, où E' est objet de $\underline{E}'$, on a $m.s_e = e$.

Comme (LP4) est vérifiée, on sait qu'il existe par ailleurs un épimorphisme propre $s: \overline{E} \longrightarrow E$ de $\underline{E}$, où $\overline{E}$ est le sommet d'un cône discret

$(p_x: E'_x \longrightarrow \overline{E})_{x\in X}$, somme dans $\underline{E}$ d'une famille petite $(E_x)_{x\in X}$ d'objets de l'ensemble de générateurs propre G , qui sont des objets particuliers de $\underline{E}'$.
On en déduit qu'il existe une unique flèche $s': \overline{E} \longrightarrow \tilde{E}$ telle que:

- pour tout élément x de X , on a $s'.p_x = s_{s.p_x}$.

Il en résulte, en particulier, que $m.s' = s$.
Si $f,g: E_1 \longrightarrow \tilde{E}$ sont deux flèches de $\underline{E}$ telles que $m.f = m.g$, pour toute flèche $e_1: E' \longrightarrow E_1$, où E' est objet de $\underline{E}'$ (et donc est α-présentable), il existe (puisque $\tilde{E}$ est une limite inductive petitement indexée et α-filtrée) un objet $e(f): E'(f) \longrightarrow E$ (resp. $e(g): E'(g) \longrightarrow E$) de $\underline{E}'/E$ et une flèche $e'(f): E' \longrightarrow E'(f)$ (resp. $e'(g): E' \longrightarrow E'(g)$) dans $\underline{E}$ tels que:

- $s_{e(f)}.e'(f) = f.e_1$ (resp. $s_{e(g)}.e'(g) = g.e_1$) .

Il en résulte que:

- $e(f).e'(f) = m.s_{e(f)}.e'(f) = m.f.e_1 = m.g.e_1 = m.s_{e(g)}.e'(g) = e(g).e'(g)$,

(et nous notons e cette valeur commune).
On en déduit que:

- $s_{e(f)}.e'(f) = s_e = s_{e(g)}.e'(g)$.

Autrement dit, pour toute flèche $e_1: E' \longrightarrow E_1$, où E' varie dans $\underline{E}'$, on a:

- $f.e_1 = g.e_1$.

En utilisant, pour l'objet E_1 des constructions et notations analogues à celles concernant l'objet E , on en déduit que:

- $f.m_1 = g.m_1$ (puisque $\tilde{E}_1$ est une limite inductive),
- $f.s_1 = f.m_1.s'_1 = g.m_1.s'_1 = g.s_1$.

Mais s_1 est un épimorphisme (propre), donc $f = g$ et m est un monomorphisme.
Comme $s = m.s'$, il en résulte que m est un isomorphisme (puisque s est un épimorphisme <u>propre</u>). Donc E est aussi limite inductive canonique du foncteur $\underline{E}'/E \longrightarrow \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$.
On peut donc affirmer que $\underline{E}'$ est dense dans $\underline{E}$, i. e. que la condition (PM3)(iii) est également vérifiée. <u>Fin de la preuve</u>.

Des deux propositions 14 et 15 précédentes, on déduit immédiatement que:

Théorème 5 . Les catégories α-projectivement modelables sont exactement les catégories localement α-présentables.

Bien entendu, ce théorème (ou la seule proposition 15) permet d'affirmer que les catégories localement α-présentables possèdent toutes les limites projectives et inductives petitement indexées. Cependant, sans calculs supplémentaires auxiliaires (i. e. sans procéder à une complétion - par limites inductives α-indexées - de l'ensemble générateur propre), on ne peut établir directement l'existence ne serait-ce que des limites projectives: ainsi, on peut relire la preuve de la proposition 15 comme une preuve de l'existence de ces limites (et non comme une preuve de l'équivalence de deux classes de catégories).

6. Catégories α-projectivement esquissables et catégories localement α-présentables.

Des théorèmes 4 et 5 on déduit immédiatement:

Théorème 6 . Les catégories α-projectivement esquissables sont exactement les catégories localement α-présentables.

C'était, évidemment, le but essentiel de ce Chapitre II que de retrouver ce résultat (connu). On notera, cependant, que l'introduction de la notion de catégorie α-projectivement modelable, outre qu'elle permet un découpage de la preuve du théorème 6 précédent (et facilite donc la lecture), permet de situer plus précisément le rôle de chacun des axiomes considérés. Plus fondamentalement encore, elle permet de généraliser aux situations étudiées au Chapitre III et, surtout, au Chapitre IV les considérations précédentes.

CHAPITRE III: CATEGORIES $(\alpha, \mathbb{D})$-ESQUISSABLES, CATEGORIES $(\alpha, \mathbb{D})$-MODELABLES ET CATEGORIES α-LOCALISABLES.

Dans tout ce Chapitre III, on désigne par α un ordinal régulier.

1. Catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissables.

On dit qu'une catégorie $\underline{E}$ est $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissable si, et seulement si:

(DE) il existe une esquisse α-projective et $\mathbb{D}$-inductive petite $/\!/\underline{S}/\!/$ telle que les catégories $\underline{E}$ et $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ soient équivalentes.

Par exemple, la catégorie des anneaux locaux, ou celle des corps, sont $(\alpha_0, \mathbb{D})$-esquissables: il est très facile, en effet, de construire explicitement une esquisse mixte, pour chacun de ces types de structures, où les seuls cônes projectifs distingués sont de base finie et où les seuls cônes inductifs distingués sont de bases petites et discrètes. On trouvera de nombreux autres exemples en (C.A.L.O.), étant entendu que les catégories α-localisables, qui y sont introduites sont exactement les catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissables, comme nous l'établirons au § 6 .

Rappelons que:

Proposition 16 . *Si $\underline{E}$ est une catégorie $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissable, alors elle possède toutes les limites projectives petitement et connectivement indexées.*

Preuve. Il suffit, évidemment, d'établir que, si $/\!/\underline{S}/\!/$ est une esquisse α-projective et $\mathbb{D}$-inductive petite, alors $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ est à limites projectives petitement et connectivement indexées. Or, on sait que la catégorie de foncteurs $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ possède toutes les limites projectives petitement indexées (il suffit de les y calculer "point par point"). En particulier, elle possède toutes celles qui sont indexées de manière connexe. La commutation des limites projectives petitement et connectivement indexées, dans Ens , tant avec les limites projectives α-indexées qu'avec les limites inductives discrètement et petitement indexées montre alors que le foncteur inclusion canonique $Ens^{//\underline{S}//} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ crée les limites projectives petitement et connectivement indexées, d'où la conclusion. Fin de la preuve.

Nous avons également:

Proposition 17 . Si $\underline{E}$ est une catégorie $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissable, alors elle possède toutes les petites familles localement limites inductives petitement indexées.

Preuve. Il suffit, évidemment, d'établir que, si $//\underline{S}//$ est une esquisse α-projective et $\mathbb{D}$-inductive petite, alors $Ens^{//\underline{S}//}$ possède toutes les petites familles localement limites inductives petitement indexées. Or, on sait que $Ens^{\underline{S}}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées (il suffit de les y calculer point par point). De plus, on sait que le foncteur injection canonique $j: Ens^{//\underline{S}//} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ admet les petites familles localement libres: la conclusion en résulte. Fin de la preuve.

2. Catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-modelables.

On dit qu'une catégorie $\underline{E}$ est $(\alpha, \mathbb{D})$-modelable si, et seulement si:

(DM1) $\underline{E}$ est une catégorie localement petite,

(DM2) $\underline{E}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées et α-filtrées,

(DM3) $\underline{E}$ contient une sous-catégorie $\underline{E}'$ telle que:

(i) $\underline{E}'$ est petite,

(ii) $\underline{E}'$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{E}$,

(iii) $\underline{E}'$ est une sous-catégorie dense dans $\underline{E}$,

(iv) tout objet de $\underline{E}'$ est un objet α-présentable de $\underline{E}$,

(v) $\underline{E}'$ possède les petites familles localement limites inductives α-indexées et le foncteur inclusion canonique $\underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$ commute avec ces petites familles localement limites.

Nous montrons au §4 que les catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-modelables sont exactement les catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissables. Comme nous montrons au §5 que ces dernières sont exactement les catégories α-localisables de (C.A.L.O.), on y trouvera autant d'exemples (nombreux) qu'il est souhaitable (mais il peut être intéressant de vérifier directement que la catégorie des anneaux locaux, ou celle des corps - par exemple - est $(\aleph'_0, \mathbb{D})$-modelable sans utiliser une esquisse de ces types de structures "presque algébriques"; inversement, il peut être intéressant de construire une esquisse, aussi "petite" que possible, présentant une catégorie $(\alpha, \mathbb{D})$-modelable comme catégorie de structures "presque algébriques").
On notera que la définition d'une catégorie $(\alpha, \mathbb{D})$-modelable est intrinsèque à cette catégorie, au contraire de celle d'une catégorie $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissable.

En tout état de cause, nous pouvons déjà établir que:

Proposition 18 . *Si $\underline{E}$ est une catégorie $(\alpha, \mathbb{D})$-modelable, si $\underline{E}_\alpha$ désigne la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ ayant pour objets les objets α-présentables de $\underline{E}$ et si $\underline{E}'$ est une sous-catégorie de $\underline{E}$ vérifiant les conditions* (DM3)(i) *à* (DM3)(v), *alors le foncteur inclusion canonique $\underline{E}' \longrightarrow \underline{E}_\alpha$ est une équivalence.*

Preuve. Si E est un objet quelconque de $\underline{E}$, la condition (v) assure que la catégorie $\underline{E}'/E$ est α-filtrante; de même, les conditions (DM1) et (DM3)(i) assurent que $\underline{E}'/E$ est petite. La condition (iii) assure alors que le cône inductif $(s_e = e : E'_e = E' \longrightarrow E)_{(e:\, E' \longrightarrow E) \in \underline{E}'/E}$ est une limite inductive petitement indexée et α-filtrée dans $\underline{E}$. En conséquence, si, de plus, E est un objet α-présentable de $\underline{E}$, il existe un objet E' de $\underline{E}'$ et deux flèches $e': E \longrightarrow E'$ et $e: E' \longrightarrow E$ de $\underline{E}$ (auquel cas $e: E' \longrightarrow E$ est un objet de $\underline{E}'/E$) telles que $e.e' = Id_E$. On en déduit, facilement, que $e: E' \rightarrow E$ est un conoyau, dans $\underline{E}$, du couple de flèches de $\underline{E}'$ (puisque, en vertu de (ii), $\underline{E}'$ est pleine) $Id_{E'}$, $e'.e : E' \longrightarrow E'$. Autrement dit, $\{E\}$ est une petite famille localement limite inductive finiment indexée d'un foncteur à valeurs dans $\underline{E}'$: d'après (v), il en résulte que E est isomorphe à un objet de $\underline{E}'$. Ceci permet de conclure. Fin de la preuve.

Le lecteur aura certainement remarqué que la preuve précédente est presque recopiée mot pour mot sur celle de la proposition 9 du Chapitre II, §2 .

De même, montrons que:

Proposition 19 . Si $\underline{E}$ est une catégorie $(\alpha, \mathbb{D})$-modelable, alors elle possède toutes les limites projectives petitement et connectivement indexées.

Preuve. Notons $\underline{E}'$ une sous-catégorie de $\underline{E}$ vérifiant les conditions (DM3)(i) à (DM3)(v).
Si $\underline{I}$ est une catégorie petite et si $F: \underline{I} \longrightarrow \underline{E}$ est un foncteur, désignons par $\underline{J}$ la catégorie telle que:

- ses objets sont les cônes projectifs $c = (e_I: E' \longrightarrow F(I))_{I \in \underline{I}}$ de $\underline{E}$, tels que E' soit un objet de $\underline{E}'$,

- ses morphismes sont les $(c, e': E' \longrightarrow E'', c'): c \longrightarrow c'$ tels que $e': E' \longrightarrow E''$ est une flèche de $\underline{E}'$ et $e'_I . e' = e_I$, pour tout objet I de $\underline{I}$.
Il est clair, d'après (DM1) et (DM3)(i), que $\underline{J}$ est petite. En général, on ne peut toutefois pas conclure, même en utilisant (DM3)(v), que $\underline{J}$ est α-filtrante; cependant, il est facile de voir que cela est exact si $\underline{I}$ est connexe . Par conséquent, dans ce cas, le foncteur canonique

$$\begin{aligned} G : \quad & \underline{J} \longrightarrow \underline{E} \\ & (e_I: E' \longrightarrow F(I))_{I \in \underline{I}} \longmapsto E' \end{aligned}$$

admet, en vertu de (DM2), une limite inductive E . En utilisant (DM3)(iii) et (DM3)(iv), il est alors facile d'établir que E est aussi une limite projective de F . Fin de la preuve.

Le lecteur aura certainement remarqué que la preuve précédente est largement recopiée sur celle de la proposition 10 du Chapitre II, §2 .

La preuve de la proposition 19 précédente nous autorise à dire, de nouveau, que les limites projectives petitement et connectivement indexées dans $\underline{E}$ se calculent point par point (comme dans les catégories $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ de réalisations d'une esquisse α-projective et $\mathbb{D}$-inductive petite), étant entendu que les points d'un objet E de $\underline{E}$ sont les ensembles $\mathrm{Hom}_{\underline{E}}(E', E)$, où E' varie dans $\underline{E}'$ (tandis que les points d'une réalisation $R: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ d'une esquisse α-projective et $\mathbb{D}$-inductive petite $/\!/\underline{S}/\!/$ sont les ensembles $R(S)$, quand S varie dans $\underline{S}$).
Par analogie, on peut se demander si une catégorie $(\alpha, \mathbb{D})$-modelable possède

toutes les petites familles localement limites inductives petitement indexées (non nécessairement α-filtrées). La réponse est affirmative: établir ce résultat revient, en fait, à prouver que les catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-modelables sont $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissables, ce que nous ferons au § 4 . Notons, cependant, que les axiomes (DM3)(iii) et (DM3)(iv) assurent que les limites inductives petitement indexées et α-filtrées se calculent encore point par point (au sens précédent) dans une telle catégorie.

3. Catégories α-localisables.

On dit qu'une catégorie $\underline{E}$ est α-localisable si, et seulement si:

(LO1) $\underline{E}$ est localement petite,

(LO2) $\underline{E}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées et α-filtrées,

(LO3) $\underline{E}$ possède toutes les petites familles localement limites inductives α-indexées et α-présentées.

(LO4) $\underline{E}$ possède un ensemble localement générateur propre formé d'objets α-présentables.

La définition des catégories α-localisables introduite ici reprend, bien entendu, l'essentiel de celle donnée par Diers en (C.A.L.O.), où l'on trouvera de très nombreux exemples. On notera, cependant, que les conditions que nous imposons sont, formellement, plus faibles que les siennes (qui s'en déduisent): ceci ne correspond toujours pas qu'à un souci esthétique mais permet, en même temps qu'une généralisation à la situation étudiée au Chapitre IV, une meilleure comparaison avec cette généralisation, ou avec le cas particulier étudié au Chapitre II.

4. Catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissables et catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-modelables.

Montrons que:

<u>Proposition</u> 20 . <u>Les catégories</u> $(\alpha, \mathbb{D})$-<u>esquissables sont des catégories</u> $(\alpha, \mathbb{D})$-<u>modelables</u>.

Preuve. Il suffit d'établir que, si $//\underline{S}//$ est une esquisse α-projective et $\mathbb{D}$-inductive petite, la catégorie de réalisations $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ est $(\alpha, \mathbb{D})$-modelable.

Le graphe multiplicatif $\underline{S}$ étant petit, la catégorie de foncteurs $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ est, évidemment, petite et donc aussi sa sous-catégorie pleine $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$. La condition (DM1) est donc vérifiée.

On sait que la catégorie de foncteurs $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées: il suffit de les y calculer point par point. De plus, les limites inductives petitement indexées et α-filtrées commutant, dans Ens, tant aux limites inductives (petitement et discrètement indexées) qu'aux limites projectives α-indexées, on en déduit que le foncteur inclusion canonique $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ crée les limites inductives petitement indexées et α-filtrées (qui se calculent donc, aussi, point par point dans $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$). La condition (DM2) est donc également vérifiée.

On sait que le foncteur inclusion canonique $j: \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ admet les petites familles localement libres. Si $Y': \underline{S}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ est le foncteur de Yoneda, ceci impose, en particulier, que, pour tout objet S de $\underline{S}$, l'objet $Y'(S)$ de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ admet une petite famille $(Y_x(S))_{x \in X_S}$ localement libre dans $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$. Notons G l'ensemble (car $\underline{S}$ est petit) des $Y_x(S)$, quand S varie dans $\underline{S}$ et x varie dans X_S.

Comme les limites inductives petitement indexées et α-filtrées se calculent point par point dans $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$, comme, naturellement en tout objet S de $\underline{S}$ et en tout objet R de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$, on a (par définition):

- $\mathrm{Hom}(Y'(S),R) \approx \sum_{x \in X_S} \mathrm{Hom}(Y_x(S),R) \approx R(S)$,

on en déduit facilement que, pour tout objet S de $\underline{S}$ et tout élément x de X_S, l'objet $Y_x(S)$ est α-présentable dans $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$.

Dans ces conditions, construisons une sous-catégorie $\underline{E}' = \underline{E}'_\alpha$ de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ par récurrence transfinie comme suit:

- on note $\underline{E}'_0$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ dont l'ensemble des objets est G ; elle est donc petite, pleine et ses objets (d'après ce qui précède) sont α-présentables;

- si $\lambda < \alpha$ et si la sous-catégorie $\underline{E}'_\lambda$ de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ est définie, contient $\underline{E}'_0$, est petite et pleine et si ses objets sont α-présentables dans $Ens^{//\underline{S}//}$, on note $\underline{E}'_{\lambda+1}$ la sous-catégorie pleine de $Ens^{//\underline{S}//}$ ayant pour objets, outre ceux de $\underline{E}'_{\lambda}$, les objets E_x, quand x varie dans X, d'une petite famille $(E_x)_{x\in X}$ localement limite inductive choisie (qui existe, en vertu de la proposition 17) pour tout foncteur $\underline{I} \longrightarrow \underline{E}'_{\lambda} \longrightarrow Ens^{//\underline{S}//}$, où $\underline{I}$ varie dans un ensemble de représentants choisis des classes d'équivalence, modulo la relation d'isomorphisme, des catégories α-petites; évidemment, $\underline{E}'_{\lambda+1}$ est encore petite et pleine, elle contient $\underline{E}'_{\lambda}$ et ses objets sont encore α-présentables dans $Ens^{//\underline{S}//}$, puisqu'éléments de petites familles localement limites inductives α-indexées et α-présentées;

- si $\lambda \leq \alpha$ est un ordinal limite et si $(\underline{E}'_{\lambda'})_{\lambda' < \lambda}$ est une famille définie de sous-catégories emboitées de $Ens^{//\underline{S}//}$, petites, pleines et dont les objets sont α-présentables dans $Ens^{//\underline{S}//}$, on pose $\underline{E}'_{\lambda} = \bigcup_{\lambda' < \lambda} \underline{E}'_{\lambda'}$; on obtient, ainsi, une sous-catégorie de $Ens^{//\underline{S}//}$ qui est encore petite, pleine et dont les objets sont bien α-présentables dans $Ens^{//\underline{S}//}$.

En particulier, $\underline{E}'_{\alpha} = \underline{E}'$ vérifie donc (i), (ii), (iv) et, par construction, (v). Pour conclure, il reste donc à prouver que $\underline{E}'$ vérifie également (iii): clairement, il suffit, pour ce faire, d'établir que $\underline{E}'_0$ est dense dans $Ens^{//\underline{S}//}$, or ceci résulte de sa construction et de la densité du foncteur de Yoneda $Y': \underline{S}^{op} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$. La condition (DM3) est donc établie. <u>Fin de la preuve</u>.

Le lecteur aura remarqué que la preuve de la proposition précédente est calquée largement sur celle de la proposition 11 du Chapitre II, §4 ;

Réciproquement, montrons que:

<u>Proposition</u> 21 . <u>Les catégories</u> $(\alpha, \mathbb{D})$-<u>modelables sont des catégories</u> $(\alpha, \mathbb{D})$-<u>esquissables</u>.

<u>Preuve</u>. Supposons que $\underline{E}$ est une catégorie $(\alpha, \mathbb{D})$-modelable et notons $\underline{E}'$ une sous-catégorie de $\underline{E}$ vérifiant les conditions (DM3)(i) à (DM3)(v).

Notons $\underline{S}$ la sous-catégorie pleine de $Ens^{\underline{E}}$ dont les objets sont:

- les foncteurs représentables $Hom(E',-): \underline{E} \longrightarrow Ens$ (ce qui a bien un sens, d'après (DM1)) dès que E' est objet de $\underline{E}'$,

- les foncteurs sommes canoniques $\sum_{x\in X} Hom(E'_x, -)$ et les foncteurs limites projectives canoniques $\varprojlim_{I\in\underline{I}} \mathrm{Hom}(E'_I,-)$ (i. e. calculés point par point, canoniquement) dans $\mathrm{Ens}^{\underline{E}}$, dès que $(E'_x)_{x\in X}$ est une petite famille localement limite inductive choisie (qui existe en vertu de (DM3)(v)) d'un quelconque foncteur $\underline{I}^{op} \longrightarrow \underline{E}'$, où $\underline{I}^{op}$ varie dans un ensemble de représentants choisis des classes d'équivalence, modulo la relation d'isomorphisme, des catégories α-petites.

Clairement, la classe des objets de $\underline{S}$ est un ensemble et l'on dispose d'un foncteur plein et fidèle:

$$\begin{aligned} \underline{E}'^{op} &\longrightarrow \underline{S} \\ E' &\longmapsto \mathrm{Hom}(E',-) \end{aligned}$$

identifiant $\underline{E}'^{op}$ à une sous-catégorie pleine de $\underline{S}$; d'autre part, si $\sum_{x\in X} \mathrm{Hom}(E'_x,-)$ et $\varprojlim_{I\in\underline{I}} \mathrm{Hom}(E'_I,-)$ sont deux objets de $\underline{S}$ tels que décrits précédemment, naturellement en tout objet E de $\underline{E}$, on a (par définition des petites familles localement limites inductives):

- $\left(\sum_{x\in X} \mathrm{Hom}(E'_x,-)\right)(E) = \sum_{x\in X} \mathrm{Hom}(E'_x,E) \approx \varprojlim_{I\in\underline{I}} \mathrm{Hom}(E'_I,E) = \left(\varprojlim_{I\in\underline{I}} \mathrm{Hom}(E'_I,-)\right)(E)$,

il en résulte donc $\sum_{x\in X} \mathrm{Hom}(E'_x,-) \approx \varprojlim_{I\in\underline{I}} \mathrm{Hom}(E'_I,-)$ dans $\underline{S}$; autrement dit encore, tout objet de $\underline{S}$ est à la fois une somme (éventuellement indexée par $\underline{1}$) petitement indexée et une limite projective (éventuellement indexée par $\underline{1}$) α-indexée d'un foncteur à valeurs dans la sous-catégorie pleine et petite (en vertu de (DM3)(i)) $\underline{E}'^{op}$; on en déduit facilement que $\underline{S}$ est une catégorie petite.

Distinguons dans $\underline{S}$ les sommes canoniques $\sum_{x\in X} \mathrm{Hom}(E'_x,-)$ et les limites projectives canoniques $\varprojlim_{I\in\underline{I}} \mathrm{Hom}(E'_I,-)$ telles que décrites précédemment: on obtient ainsi une esquisse α-projective et $\mathbb{D}$-inductive $/\!/\underline{S}/\!/$ qui est petite, par construction.

A tout objet E de $\underline{E}$, on associe le foncteur "évaluation en E"

$$\begin{aligned} M(E):\quad & \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens} \\ & (s: S \longrightarrow S') \longmapsto (s_E: S(E) \longrightarrow S'(E)) . \end{aligned}$$

Clairement, les limites tant projectives qu'inductives distinguées se calculant point par point dans la sous-catégorie pleine $\underline{S}$ de $\mathrm{Ens}^{\underline{E}}$ et vue la définition de $//\underline{S}//$, $M(E)$ est une réalisation de $//\underline{S}//$. On définit donc, de cette manière, un foncteur:

$$\begin{aligned} M : \underline{E} &\longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \\ E &\longmapsto M(E) \end{aligned} \quad .$$

Inversement, si $R: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est une réalisation de $//\underline{S}//$, il est facile de constater que la catégorie duale $H(R')^{op}$ de la catégorie d'hypermorphismes du foncteur $R': \underline{E}'^{op} \longrightarrow \underline{S} \xrightarrow[R]{} \mathrm{Ens}$ est petite et α-filtrante (en vertu de (DM3)(v), du choix des limites projectives et inductives distinguées dans $//\underline{S}//$ et justement parce que R est une réalisation). On lui associe alors une limite inductive choisie

$$N(R) = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\ (H(R')^{op} \xrightarrow[h(R')^{op}]{} \underline{E}' \longrightarrow E)$$

dans $\underline{E}$ (et elle existe bien, en vertu de (DM2)). On définit ainsi un foncteur:

$$\begin{aligned} N: \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} &\longrightarrow \underline{E} \\ R &\longmapsto N(R) \end{aligned} \quad .$$

Il est facile de vérifier que, naturellement en tout objet E de $\underline{E}$, on dispose, par construction, d'un isomorphisme $\underline{E}'/E \approx H(M(E)')^{op}$ rendant le diagramme de foncteurs ci-dessous commutatif:

$$\begin{tikzcd} \underline{E}'/E \arrow[ddr] & \approx & H(M(E)')^{op} \arrow[d, "h(M(E'))^{op}"] \\ & & \underline{E}' \arrow[dl] \\ & \underline{E} & \end{tikzcd} \quad .$$

En vertu de (DM3)(iii), on en déduit que, naturellement en tout objet E de $\underline{E}$, on a:

$$E \approx N(M(E)).$$

De même, naturellement en tout objet R de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$, on dispose d'un isomorphisme $\underline{E}'/N(R) \approx H(R')^{op}$, puisque $N(R)$ est, par construction, une limite inductive petitement indexée et α-filtrée dans $\underline{E}$ et tout objet de $\underline{E}'$ est, en vertu de (PM3)(iv), α-présentable. Il en résulte que, naturellement en tout objet S de la sous-catégorie pleine $\underline{E}'^{op}$ de $\underline{S}$, on a:

$$M(N(R))(S) = \mathrm{Hom}_{\underline{E}}(S,N(R)) \approx R(S) .$$

Par construction (tout objet de $\underline{S}$ étant limite distinguée d'un foncteur à valeurs dans $\underline{E}'^{op}$ et R et M(N(R)) étant des réalisations), on en déduit que, naturellement en tout objet S de $\underline{S}$, on a

$$M(N(R))(S) \approx R(S) .$$

Par conséquent, naturellement en tout objet R de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$, il vient:

$$R \approx M(N(R)) .$$

Les catégories $\underline{E}$ et $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ sont donc équivalentes. Fin de la preuve.

Le lecteur aura remarqué que la démonstration précédente est inspirée de celle de la proposition 12 du Chapitre II, §4 . Cependant, la construction de l'esquisse $//\underline{S}//$ associée à la catégorie $\underline{E}$ nécessite un peu plus de subtilité qu'auparavant: en effet, elle ne s'identifie pas à la duale d'une sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ (i. e. elle n'est pas représentée dans $\underline{E}$) mais à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{E}}$ dont les objets ne sont pas tous des foncteurs représentables (mais des limites projectives α-indexées de foncteurs représentables, ou encore des sommes petitement indexées de foncteurs représentables). Ceci est dû au défaut d'existence de suffisamment de limites inductives (même α-indexées) dans $\underline{E}$.

Il résulte trivialement de la proposition 21 précédente et de la proposition 17 que:

Proposition 22. Si $\underline{E}$ est une catégorie $(\alpha, \mathbb{D})$-modelable, alors elle possède toutes les petites familles localement limites inductives petitement indexées.

Preuve. Evidemment, les propositions 17 et 21 précédentes suffisent amplement à prouver l'assertion. Cependant, on peut détailler "une autre" preuve (i. e. une preuve présentée de manière plus interne à $\underline{E}$) comme suit.
Si $\underline{I}'$ est une petite catégorie et si $F' : \underline{I}' \longrightarrow \underline{E}$ est un foncteur, on note $\underline{J}'$ la catégorie telle que:

- ses objets sont les couples (E',C) où E' est un objet de $\underline{E}'$ et C est une composante connexe de la catégorie comma E'/F' ,

- ses morphismes sont les $((E',C),e',(E'',C')): (E',C) \longrightarrow (E'',C')$ tels que $e': E' \longrightarrow E''$ est une flèche de $\underline{E}'$ appliquant (par composition) la composante connexe C' dans la composante connexe C .

Clairement, on dispose d'un foncteur canonique:

$$G' : \underline{J}' \longrightarrow \underline{E}'$$
$$(E',C) \longmapsto E' \quad ,$$

et ce foncteur est bien entendu une co-fibration discrète.

Evidemment, $\underline{J}'$ est petite mais, en général, elle n'est pas α-filtrante (sauf lorsque $\underline{I}'$ est α-filtrante). On ne peut donc pas calculer la limite inductive (dont rien n'assure l'existence) du foncteur $\underline{J}' \xrightarrow[G']{} \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$.

Cependant, le foncteur G' <u>engendre une petite famille</u> $(\overline{G}'_x : \overline{\underline{J}}'_x \longrightarrow \underline{E}')_{x \in X}$ de co-fibrations discrètes qui <u>créent</u> les petites familles localement limites inductives α-indexées. Il en résulte que, pour tout élément x de X , la catégorie $\overline{\underline{J}}'_x$ est petite et α-filtrante et donc que le foncteur $\overline{\underline{J}}'_x \longrightarrow \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$ admet bien une limite inductive E_x . Il est alors facile de constater que la petite famille $(E_x)_{x \in X}$ est localement limite inductive de F' .

(Avec les notations précédentes, on voit aisément que la famille $(\overline{\underline{J}}'^{op}_x)_{x \in X}$ est celle des catégories d'hypermorphismes $(H(R_x'))_{x \in X}$ de la petite famille de <u>réalisations</u> $(R_x)_{x \in X}$ de $//\underline{S}//$, localement libre sur le <u>foncteur</u> $R: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$, limite inductive dans $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ des <u>foncteurs</u> $M(F(I))$, et vérifiant, par conséquent $H(R') = \underline{J}'^{op}$.) <u>Fin de la preuve.</u>

Le lecteur aura de nouveau remarqué que la présentation de la preuve de la proposition 22 précédente est inspirée de celle de la preuve de la proposition 13 du Chapitre II, §4 . Cependant elle nécessite quelque subtilité technique supplémentaire (éclairée et justifiée par la remarque de fin de preuve).

Des propositions 20 et 21 précédentes, on déduit que:

<u>Théorème 7</u> . <u>Les catégories</u> $(\alpha, \mathbb{D})$-<u>esquissables sont exactement les catégories</u> $(\alpha, \mathbb{D})$-<u>modelables</u>.

5. <u>Catégories α-localisables et catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-modelables.</u>

Montrons que:

<u>Proposition</u> 23 . <u>Les catégories</u> $(\alpha, \mathbb{D})$-<u>modelables sont des catégories</u> α-<u>localisables</u>.

<u>Preuve</u>. Supposons que $\underline{E}$ est $(\alpha, \mathbb{D})$ – modelable et désignons par $\underline{E}'$ une sous-catégorie de $\underline{E}$ vérifiant (DM3)(i) à (DM3)(v).
Comme (DM1) est vérifiée, (LO1) l'est.
De même, comme (DM2) est vérifiée, (LO2) l'est.
En vertu de (DM3)(v) et de la proposition 18 , (LO3) est également vraie.
Montrons, enfin, que l'ensemble (c'en est bien un, vu (DM3)(i)) des objets de $\underline{E}'$ est bien un ensemble localement générateur propre de $\underline{E}$.
Si E est un objet de $\underline{E}$, la condition (DM3)(iii) assure que $(s_e = e : E_e' = E' \longrightarrow E)_{(e:\, E' \longrightarrow E) \in \underline{E}'/E}$ est un cône limite inductive canonique dans $\underline{E}$. Désignons par

$$(s'_{e,x} : E_e' = E' \longrightarrow \overline{E}_x)_{((e:\, E' \longrightarrow E),x) \in \mathrm{Ob}(\underline{E}'/E) \times X}$$

une petite famille localement somme naturalisée de la famille $(E_e' = E')_{e \in \mathrm{Ob}\underline{E}'/E}$ dans la catégorie $\underline{E}$ (elle existe en vertu de la proposition 22). Il existe alors un unique élément x de X et une unique flèche $s: \overline{E}_x \longrightarrow E$ tels que:

- pour toute flèche $e: E' \longrightarrow E$, où E' est objet de $\underline{E}'$, on a $s.s'_{e,x} = s_e = e$.

Si $f,g : E \longrightarrow E_1$ sont deux flèches de $\underline{E}$ telles que $f.s = g.s$, on en déduit que $f.s_e = g.s_e$, pour tout objet $e: E' \longrightarrow E$ de $\underline{E}'/E$, par conséquent $f = g$, puisque E est une limite inductive. En d'autres termes, $s: \overline{E}_x \longrightarrow E$ est un épimorphisme de $\underline{E}$.
Si $m: E_2 \longrightarrow E$ est un monomorphisme de $\underline{E}$, il définit un foncteur injectif (composition par m) $\underline{E}'/m: \underline{E}'/E_2 \longrightarrow \underline{E}'/E$. Si, de plus, $s': \overline{E}_x \longrightarrow E_2$ est une flèche de $\underline{E}$ telle que $m.s' = s$, on obtient un foncteur

$$n : \underline{E}'/E \longrightarrow \underline{E}'/E_2$$
$$e \longmapsto s'.s'_{e,x}$$

dont on établit facilement qu'il est inverse de $\underline{E}'/m$. En vertu de (DM3)(iii), on en déduit que m est un isomorphisme de $\underline{E}$. Autrement dit, $s: \overline{E}_x \longrightarrow E$ est un épimorphisme propre. D'où la proposition. <u>Fin de la preuve</u>.

La preuve de cette proposition 23 est évidemment calquée sur celle de la proposition 14 du Chapitre II, §5 .

Réciproquement, montrons que:

Proposition 24 . Les catégories α-localisables sont des catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-modelables.

Preuve. Supposons que $\underline{E}$ est une catégorie α-localisable et désignons par G un ensemble localement générateur propre.
Puisque (LO1) est vérifiée, (DM1) l'est .
De même, puisque (LO2) est vérifiée, (DM2) l'est.
Nous construisons une sous-catégorie $\underline{E}' = \underline{E}'_{\alpha}$ de $\underline{E}$ par récurrence transfinie comme suit:

- on note $\underline{E}'_0$ la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ dont G est l'ensemble des objets; en vertu de (LO1), elle est petite et, en vertu de (LO4) ses objets sont α-présentables dans $\underline{E}$;

- si $\lambda < \alpha$ et si la sous-catégorie $\underline{E}'_{\lambda}$ de $\underline{E}$ est définie, contient $\underline{E}'_0$, est petite, pleine et si ses objets sont α-présentables dans $\underline{E}$, on note $\underline{E}'_{\lambda+1}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ ayant pour objets, outre ceux de $\underline{E}'_{\lambda}$, les objets E_x , quand x varie dans X , d'une petite famille $(E_x)_{x\in X}$ localement limite inductive choisie (qui existe en vertu de (LO3)) pour tout foncteur $\underline{I} \longrightarrow \underline{E}'_{\lambda} \longrightarrow \underline{E}$, où $\underline{I}$ varie dans un ensemble de représentants choisis des classes d'équivalence, modulo la relation d'isomorphisme, des catégories α-petites; évidemment, $\underline{E}'_{\lambda+1}$ est encore petite, pleine, elle contient $\underline{E}'_{\lambda}$ et ses objets sont toujours α-présentables dans $\underline{E}$, puisqu'éléments de petites familles localement limites inductives α-indexées et α-présentées;

- si $\lambda \leq \alpha$ est un ordinal limite et si $(\underline{E}'_{\lambda'})_{\lambda' < \lambda}$ est une famille définie de sous-catégories emboitées de $\underline{E}$, petites, pleines et dont les objets sont α-présentables dans $\underline{E}$, on pose $\underline{E}'_{\lambda} = \bigcup_{\lambda' < \lambda} \underline{E}'_{\lambda'}$; on obtient, ainsi, une sous-catégorie de $\underline{E}$ qui est encore petite, pleine et dont les objets sont α-présentables dans $\underline{E}$.
En particulier, $\underline{E}'_{\alpha} = \underline{E}'$ vérifie (DM3)(i), (DM3)(ii), (DM3)(iv) et, par construction, (DM3)(v).
Il nous reste à montrer que $\underline{E}'$ est dense dans $\underline{E}$. Pour ce faire, supposons

que E est un objet de $\underline{E}$. Comme nous venons d'établir que la condition (DM3)(v) est vérifiée par $\underline{E}'$, on en déduit que la catégorie $\underline{E}'/E$ est α-filtrante (et évidemment petite, puisque $\underline{E}'$ est petite et $\underline{E}$ localement petite). En conséquence, le foncteur canonique $\underline{E}'/E \longrightarrow \underline{E}' \longrightarrow E$ admet, en vertu de (LO2), un cône limite inductive $(s_e : E'_e = E' \longrightarrow \tilde{E})_{(e:\, E' \longrightarrow E) \in \underline{E}'/E}$ et il existe donc une unique flèche $m: \tilde{E} \longrightarrow E$ de $\underline{E}$ telle que:

- pour toute flèche $e: E' \longrightarrow E$ de $\underline{E}$, où E' est objet de $\underline{E}'$, on a $m.s_e = e$.

Comme (LO4) est vérifiée, on sait qu'il existe un élément z de l'ensemble Z et un épimorphisme propre $s: \overline{E}_z \longrightarrow E$ de $\underline{E}$, où

$$(p_{x,z} : E'_x \longrightarrow E_z)_{(x,z) \in X \times Z}$$

est une petite famille localement somme d'une famille petite $(E'_x)_{x \in X}$ d'objets de l'ensemble localement générateur propre G, qui sont donc des objets particuliers de $\underline{E}'$. On en déduit qu'il existe un unique élément z' de Z et une unique flèche $s': \overline{E}_{z'} \longrightarrow \tilde{E}$ tels que:

- pour tout élément x de X, on a $s'.p_{x,z'} = s_{s.p_{x,z}}$.

Il en résulte que:

- pour tout élément x de X, on a $m.s'.p_{x,z'} = m.s_{s.p_{x,z}} = s.p_{x,z}$,

ce qui assure (par définition des petites familles localement sommes):

- $z = z'$ et $m.s' = s$.

Si $f,g: E_1 \longrightarrow \tilde{E}$ sont deux flèches de $\underline{E}$ telles que $m.f = m.g$, pour toute flèche $e_1 : E' \longrightarrow E_1$, où E' est objet de $\underline{E}'$ (et donc α-présentable), il existe (puisque $\tilde{E}$ est une limite inductive petitement indexée et α-filtrée) un objet $e(f): E'(f) \longrightarrow E$ (resp. $e(g): E'(g) \longrightarrow E$) de $\underline{E}'/E$ et une flèche $e'(f): E' \longrightarrow E'(f)$ (resp. $e'(g): E' \longrightarrow E'(g)$) dans $\underline{E}$ tels que:

- $s_{e(f)}.e'(f) = f.e_1$ (resp. $s_{e(g)}.e'(g) = g.e_1$).

On en déduit que:

- $e(f).e'(f) = m.s_{e(f)}.e'(f) = m.f.e_1 = m.g.e_1 = m.s_{e(g)}.e'(g) = e(g).e'(g)$,

(et nous notons e cette valeur commune).

Il en résulte que:

- $s_{e(f)}.e'(f) = s_e = s_{e(g)}.e'(g)$.

Autrement dit, pour toute flèche $e_1 : E' \longrightarrow E_1$, où E' varie dans $\underline{E}'$, on a:

- $f.e_1 = g.e_1$.

En utilisant, pour l'objet E_1, des constructions, propriétés et notations analogues à celles concernant l'objet E , on en déduit:

- $f.m_1 = g.m_1$ (puisque $\tilde{E}_1$ est une limite inductive),

- $f.s_1 = f.m_1.s_1' = g.m_1.s_1' = g.s_1$.

Mais s_1 est un <u>épimorphisme</u> (propre), donc $f = g$ et m est un monomorphisme. Comme $s = m.s'$, il en résulte que m est un isomorphisme (puisque s est un épimorphisme <u>propre</u>). Donc E est aussi limite inductive canonique du foncteur $\underline{E}'/E \longrightarrow \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$.
On peut donc affirmer que $\underline{E}'$ est dense dans $\underline{E}$, i. e. que la condition (DM3)(iii) est également vérifiée. <u>Fin de la preuve</u>.

La preuve précédente est largement inspirée de celle de la proposition 15 du Chapitre II, §5 . Cependant, elle nécessite quelque précaution supplémentaire pour la mise en oeuvre de l'ensemble <u>localement</u> générateur propre considéré.

Des deux propositions 23 et 24 précédentes, on déduit immédiatement que:

<u>Théorème</u> 8. <u>Les catégories</u> $(\alpha, \mathbb{D})$-<u>modelables sont exactement les catégories</u> α-<u>localisables</u>.

Bien sûr, ce théorème (ou la seule proposition 24) permet d'affirmer que les catégories α-localisables possèdent toutes les limites projectives petitement et connectivement indexées, en même temps qu'elles possèdent toutes les petites familles localement limites inductives petitement indexées. Cependant, sans calculs auxiliaires supplémentaires (i. e. sans procéder à une "complétion locale" - par petites familles localement limites inductives α-indexées - de l'ensemble localement générateur propre), on ne peut établir directement l'existence de ces limites projectives ou de ces petites familles localement limites inductives: ainsi, on peut relire la preuve de la proposition 24 comme une preuve de <u>l'existence</u> de ces limites ou limites locales (et non comme une preuve de l'<u>équivalence</u> de deux classes de catégories).

6. Catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissables et catégories α-localisables.

Des théorèmes 7 et 8 on déduit immédiatement:

Théorème 9 . Les catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissables sont exactement les catégories α-localisables.

C'était, évidemment, le but essentiel de ce Chapitre III que d'établir ce résultat (également établi en (C.M.C.F.), mais dans un cadre un peu plus restrictif).
On pourra comparer ce résultat ("esquissabilité des catégories localisables de Diers") à celui établi en (C.A.L.O.) ("les catégories localisables sont des catégories de foncteurs localement continus"): nous établissons que les catégories localisables sont des catégories de foncteurs continus et co-continus, i. e. respectant la géométrie d'une petite catégorie (ou d'un graphe multiplicatif), alors que les foncteurs localement continus n'en respectent pas la géométrie (mais seulement le "calcul" ensembliste sur certains de ses Hom).
Le point de vue dual de ces remarques syntaxiques vaut pour les catégories α-projectivement modelables ou $(\alpha, \mathbb{D})$-modelables: on peut considérer que les axiomes qui les définissent sont des axiomes géométriques (concernant essentiellement la puissance et la nature de la filtrabilité de certaines catégories associées), alors que les axiomes définissant tant les catégories localement α-présentables que les catégories α-localisables apparaissent plus comme des conditions de calcul de certaines limites (i. e. de certains objets). C'est là, à notre avis, tout l'intérêt des catégories modelables (outre l'avantage technique, qu'elles présentent, de hiérarchiser les preuves que nous avons établies): celà sera encore plus manifeste dans la situation plus générale étudiée au Chapitre IV.

CHAPITRE IV: CATEGORIES ESQUISSABLES, CATEGORIES MODELABLES ET CATEGORIES MODELISABLES.

Dans tout ce Chapitre IV, on désigne par θ un ordinal inaccessible.

1. Catégories θ-esquissables.

On dit qu'une catégorie $\underline{E}$ est θ-(mixtement)-esquissable si, et seulement si:

(ME) il existe une esquisse (mixte) θ-petite $/\!/\underline{S}/\!/$ telle que les catégories $\underline{E}$ et $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ soient équivalentes.

Par exemple, la catégorie des anneaux unitaires de caractéristique différente de 0 et 1 est θ_0-esquissable (si l'on désigne par θ_0 le premier ordinal inaccessible): il est très facile, en effet, de construire explicitement une esquisse mixte θ_0-petite pour ce type de structures. Plus généralement (et plus systématiquement), on sait que les catégories de modèles de théories du 1^{er} ordre classiques sont θ_0-esquissables (voir (L.C.R.F.)): ce résultat fournit autant d' exemples qu'il est souhaitable!

Contrairement aux cas des catégories projectivement esquissables (Chap. II) et des catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-esquissables (Chap. III) on ne peut affirmer, a priori, qu'une catégorie,dont on sait seulement qu'elle est θ-esquissable, possède les limites projectives indexées par un type particulier de catégories petites (non isomorphes à $\underline{1}$!): on pourra cependant consulter (F.O.S.A.) et (C.M.C.F.) sur cette question.

Par contre, nous avons:

Proposition 25 . Si $\underline{E}$ est une catégorie θ-esquissable, alors elle possède les petits diagrammes localement limites inductives petitement indexées.

Preuve. Il suffit, évidemment, d'établir que, si $/\!/\underline{S}/\!/$ est une esquisse θ-petite, alors $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ possède tous les petits diagrammes localement limites inductives petitement indexées. Or, on sait que $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées (il suffit de les y calculer point par point). De plus, on sait que le foncteur injection canonique $j: Ens^{/\!/\underline{S}/\!/} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ admet les petits diagrammmes localement libres: la conclusion en résulte. Fin de la preuve.

2. Catégories θ-modelables.

On dit qu'une catégorie $\underline{E}$ est θ-modelable si, et seulement si, il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ tel que:

(MM1) $\underline{E}$ est une catégorie localement petite,

(MM2) $\underline{E}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées et β-filtrées,

(MM3) $\underline{E}$ contient une sous-catégorie $\underline{E}'$ telle que:

(i) $\underline{E}'$ est θ-petite,

(ii) $\underline{E}'$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{E}$,

(iii) $\underline{E}'$ est une sous-catégorie dense dans $\underline{E}$,

(iv) tout objet de $\underline{E}'$ est un objet β-présentable de $\underline{E}$,

(v) $\underline{E}'$ possède les diagrammes θ-petits localement limites inductives β-indexées, le foncteur inclusion canonique $\underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$ commute avec ces petits diagrammes localement limites et génère les conoyaux contractiles.

Nous montrons au §4 que les catégories θ-modelables sont exactement les catégories θ-esquissables: ceci fournit autant d'exemples qu'il est souhaitable, compte tenu des remarques du §1 précédent (mais il est, évidemment, intéressant de vérifier directement qu'une catégorie de modèles d'une théorie du 1^{er} ordre - par exemple - est θ_0-esquissable, sans utiliser une esquisse du type de structures considéré mais en prenant pour $\underline{E}'$ la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ dont les objets sont les modèles β-présentés, pour un certain ordinal régulier $\beta < \theta$ qu'il faut, dans chaque cas, correctement déterminer).

Dans le même ordre d'idée, on notera que la définition d'une catégorie θ-modelable est intrinsèque à cette catégorie, au contraire de celle de catégorie θ-esquissable.

On comparera facilement, mais utilement, la définition précédente avec celles de catégories α-projectivement modelables et de catégories $(\alpha, \mathbb{D})$-modelables des Chap. II, §2 et Chap. III, §2.

Etablissons que:

Proposition 26. Si $\underline{E}$ est une catégorie θ-modelable, si $\beta < \theta$ est un ordinal régulier et $\underline{E}'$ est une sous-catégorie de $\underline{E}$, vérifiant les conditions (MM1), (MM2) et (MM3)(i) à (MM3)(v), et si $\underline{E}_\beta$ désigne la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ ayant pour objets les objets β-présentables de $\underline{E}$, alors le foncteur inclusion canonique $\underline{E}' \longrightarrow \underline{E}_\beta$ est une équivalence.

Preuve. Si E est un objet quelconque de $\underline{E}$, la condition (v) assure que la catégorie $\underline{E}'/E$ est β-filtrante; de même, les conditions (MM1) et (MM3)(i) assurent que $\underline{E}'/E$ est petite. La condition (iii) assure alors que le cône inductif $(s_e = e : E'_e = E' \longrightarrow E)_{(e:\, E' \longrightarrow E) \in \underline{E}'/E}$ est une limite inductive petitement indexée et β-filtrée dans $\underline{E}$. En conséquence, si, de plus, E est un objet β-présentable de $\underline{E}$, il existe un objet E' de $\underline{E}'$ et deux flèches $e' : E \longrightarrow E'$ et $e : E' \longrightarrow E$ de $\underline{E}$ (auquel cas $e : E' \longrightarrow E$ est un objet de $\underline{E}'/E$) telles que $e.e' = Id_E$. On en déduit, facilement, que $e : E' \longrightarrow E$ est un conoyau, dans $\underline{E}$, du couple de flèches de $\underline{E}'$ (puisque, en vertu de (ii), $\underline{E}'$ est pleine) $Id_{E'}, e'.e : E' \longrightarrow E'$. Puisque, d'après (v), le foncteur inclusion $\underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$ génère les conoyaux contractiles, il en résulte que E est isomorphe à un objet de $\underline{E}'$. Ceci permet de conclure. Fin de la preuve.

Le lecteur remarquera certainement que cette preuve est presque recopiée mot pour mot sur celles des propositions 9 du Chap. II, §2 et 18 du Chap. III, §2.

Contrairement à ce que l'on a pu établir aux propositions 10 du Chap. II, §2 et 19 du Chap. III, §2, on ne peut affirmer ici qu'une catégorie θ-modelable possède les limites projectives indexées par un type particulier de catégories petites (non isomorphes à $\underline{1}$); cette "impossibilité a priori" est à rapprocher de la remarque faite au §1, concernant les catégories θ-esquissables. De même, on ne peut affirmer a priori qu'une catégorie θ-esquissable possède les petits diagrammes localement limites inductives petitement indexées: le prouver revient, en fait, à établir que ces catégories sont θ-esquissables (ce que nous ferons au §4): des remarques analogues (cette fois) ont été faites aux Chap. II, §2 et III, §2 .

3. Catégories θ-modélisables.

On dit qu'une catégorie $\underline{E}$ est θ-modélisable si, et seulement si, il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ tel que:

(MS1) $\underline{E}$ est localement petite,

(MS2) $\underline{E}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées et β-filtrées,

(MS3) $\underline{E}$ possède les diagrammes θ-petits, β-présentés, localement limites inductives β-indexées et β-présentées,

(MS4) $\underline{E}$ possède un ensemble, pleinement θ-petit, localement générateur localement propre, formé d'objets β-présentables de $\underline{E}$.

On comparera facilement, mais fructueusement, la définition (originale) de catégorie θ-modélisable à celles de catégorie localement α-présentable (Chap. II, §3) et de catégorie α-localisable (Chap. III, §3) : c'est justement pour permettre cette comparaison facile que nous avons affaibli les définitions initiales de Gabriel-Ulmer (voir (L.P.L.G.)) et de Diers (voir (C.A.L.O.)), tout en conservant un énoncé "à la Gabriel-Ulmer" (ce qui n'est pas tout à fait le cas de celui de la définition de catégorie θ-modelable du §2 , ou de celle, équivalente, donnée initialement en (C.M.C.E.)).

4. Catégories θ-esquissables et catégories θ-modelables.

Montrons que:

Proposition 27 . Les catégories θ-esquissables sont des catégories θ-modelables.

Preuve. Il suffit d'établir que, si $/\!/\underline{S}/\!/$ est une esquisse θ-petite, la catégorie de réalisations $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ est θ-modelable.

Le graphe multiplicatif $\underline{S}$ étant petit, la catégorie de foncteurs $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ est, localement petite et donc aussi sa sous-catégorie pleine $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$. La condition (MM1) est donc vérifiée.

Supposons que $/\!/\underline{S}/\!/ = (\underline{S}, \mathbb{P}, \mathbb{I})$ et notons, alors:

- i la borne supérieure des cardinaux $\overline{\mathrm{Fl}\ \underline{I}}$ des bases $\underline{I}$ des cônes projectifs distingués (i. e. appartenant à $\mathbb{P}$) de $/\!/\underline{S}/\!/$,

- α l'ordinal régulier w_{i+1} d'indice $i+1$,

- s le cardinal de $\mathrm{Fl}\ \underline{S}$,

- i' le cardinal de $\mathbb{P}$,

- j la borne supérieure des cardinaux $\overline{\mathrm{Fl}\ \underline{J}}$ des bases $\underline{J}$ des cônes inductifs distingués (i. e. appartenant à $\mathbb{I}$) de $/\!/\underline{S}/\!/$,

- j' le cardinal de $\mathbb{I}$,

- β l'ordinal régulier $w_{\sup(\alpha,s,i',j,j')+1}$.

Puisque θ est inaccessible, il est clair que l'ordinal régulier β est strictement inférieur à θ.

On sait que la catégorie de foncteurs $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ possède toutes les limites inductives petitement indexées: il suffit de les y calculer point par point. De plus, les limites inductives petitement indexées et β-filtrées commutant, dans Ens, tant aux limites inductives (petitement indexées) qu'aux limites projectives α-indexées (puisque, par construction, $\alpha < \beta$), on en déduit que le foncteur inclusion canonique $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ crée les limites inductives petitement indexées et β-filtrées (qui se calculent donc aussi point par point dans $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$). La condition (MM2) est donc également vérifiée.

Notons, maintenant, $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})_\beta$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ dont les objets sont les réalisations $F': /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ telles que $F' < \beta$. Comme θ est inaccessible, $\beta < \theta$ et $\underline{S} < \theta$, il est facile de constater que $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})_\beta$ est équivalente à une de ses sous-catégories pleines $\underline{E}'$ qui est θ-petite. Les conditions (MM3)(i) et (MM3)(ii) sont donc vérifiées.

Le foncteur de Yoneda $Y': \underline{S}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ est évidemment dense. De plus, comme $\underline{S} < \beta$, le foncteur $Y'(S): \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est, pour tout objet S de $\underline{S}$, un foncteur β-petit. Il en résulte, vu la proposition 6 du Chap. I, § 10, que $\underline{E}'$ est également dense dans $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$. La condition (MM3)(iii) est donc vérifiée.

Supposons que F': $/\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow Ens$ est un objet de $(Ens^{/\!/\underline{S}/\!/})_\beta$ et que $F = \varinjlim_{J\in\underline{J}} F_J$ est une limite inductive petitement indexée et β-filtrée dans $Ens^{/\!/\underline{S}/\!/}$. Nous avons, successivement:

- $Hom(F', \varinjlim_J F_J) = \int_S Hom(F'S, (\varinjlim_J F_J)(S))$,

$= \int_S Hom(F'S, \varinjlim_J (F_J(S)))$ (les limites inductives petitement indexées et β-filtrées se calculant point par point dans $Ens^{/\!/\underline{S}/\!/}$)

$= \int_S (\varinjlim_J F_J(S))^{F'(S)}$

$= \int_S \varinjlim_J (F_J(S)^{F'(S)})$ (puisque, pour tout objet S de $\underline{S}$, on a $F'(S) < \beta$ et les limites inductives petitementindexées et β-filtrées commutent dans Ens avec les limites projectives β-petites)

$= \varinjlim_J (\int_S F_J(S)^{F'(S)})$ (puisque, les limites inductives petitement indexées et β-filtrées commutent dans Ens avec les limites projectives β-petites et, $\underline{S}$ étant β-petite, la catégorie subdivision qui lui est associée l'est aussi)

$= \varinjlim_J (\int_S Hom(F'S,FS))$

$= \varinjlim_J Hom(F',F_J)$.

On en déduit donc que tout objet de $(Ens^{/\!/\underline{S}/\!/})_\beta$ est un objet β-présentable de $Ens^{/\!/\underline{S}/\!/}$. Il en est donc de même pour tout objet de sa sous-catégorie pleine $\underline{E}'$ et la condition (MM3)(iv) est bien vérifiée.

Il est clair que le foncteur inclusion canonique $\underline{E}' \longrightarrow Ens^{/\!/\underline{S}/\!/}$ génère les conoyaux contractiles (puisqu'ils se calculent point par point dans $Ens^{/\!/\underline{S}/\!/}$).

Supposons que $\underline{J}$ est une catégorie β-petite, F est un objet de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ et $f: \underline{J} \longrightarrow \underline{E}'/F$ est un foncteur. Alors, le foncteur

$$\underline{J} \xrightarrow[f]{} \underline{E}'/F \xrightarrow[\text{canonique}]{} \underline{E}' \hookrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \hookrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$$

admet une limite inductive $(g_J: F_J \longrightarrow G')_{J \in \underline{J}}$ calculée point par point. On en déduit que $G' < \beta$ et qu'il existe une unique flèche $g: G' \longrightarrow F$ de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ telle que, pour tout objet J de $\underline{J}$, on ait $g.g_J = (f(J): F'_J \longrightarrow F)$. De la proposition 6 du Chap. I, §10 , résulte que le foncteur projection canonique

$$G'/\underline{E}' \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$$

est un diagramme θ-petit, localement libre sur G', relativement au foncteur inclusion canonique $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$. Par conséquent, il existe au moins un objet F' de $\underline{E}'$ et deux flèches $g': G' \longrightarrow F'$ et $g'': F' \longrightarrow F$ de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ tels que $g = g''.g'$. Ceci signifie que la catégorie $\underline{E}'/F$ est β-filtrante. On en déduit facilement que la condition (MM3)(v) est vérifiée. <u>Fin de la preuve</u>.

Le lecteur aura certainement remarqué que la preuve précédente est sensiblement plus délicate que celles des propositions 11 du Chap. II, §4 et 20 du Chap. III, §4: ceci provient essentiellement du fait que l'ordinal régulier β n'est pas donné a priori (contrairement à l'ordinal régulier α) ou, plus précisément encore, qu'il ne dépend pas que de la taille des seuls cônes projectifs distingués de l'esquisse $//\underline{S}//$.

Signalons également que la preuve précédente est très largement inspirée de celle fournie initialement en (C.M.C.E.).

Réciproquement, montrons que:

<u>Proposition</u> 28 . <u>Les catégories</u> θ-<u>modelables sont des catégories</u> θ-<u>esquissables</u>.

<u>Preuve</u>. Supposons que $\underline{E}$ est une catégorie θ-modelable et notons $\beta < \theta$ un ordinal régulier et $\underline{E}'$ une sous-catégorie de $\underline{E}$ vérifiant les conditions (MM2) et (MM3)(i) à (MM3)(v).

Supposons que $\underline{D}$ est une catégorie β-petite et que $\delta: \underline{D} \longrightarrow \underline{E}'$ est un foncteur. Notons alors $\underline{D}'$ la catégorie (évidemment petite) dont les objets sont les cônes inductifs $D' = (s'_D: \delta D \longrightarrow E')_{D \in \underline{D}}$ de $\underline{E}'$ et dont les morphismes $d': D' \longrightarrow D''$ sont les flèches $d': E' \longrightarrow E''$ de $\underline{E}'$ telles que $d'.s'_D = s''_D$ pour tout objet D de $\underline{D}$. Désignons aussi par $\delta': \underline{D}' \longrightarrow \underline{E}'$ le foncteur défini par $\delta'(D') = E'$. De (MM3)(i), on déduit que $\underline{D}' < \theta$ et, de (MM3)(v), il résulte facilement que $\delta' : \underline{D}' \longrightarrow \underline{E}'$ (resp. $\underline{D}' \xrightarrow[\delta']{} \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$) est un diagramme localement limite inductive, dit canonique, du foncteur $\delta : \underline{D} \to \underline{E}'$ (resp. $\underline{D} \xrightarrow[\delta]{} \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$).

Dans toute la suite de cette preuve, on choisit désormais une seule catégorie $\underline{D}$ dans chaque composante connexe du sous-groupoïde de Cat des foncteurs inversibles. Alors, l'ensemble V des foncteurs $\delta : \underline{D} \longrightarrow \underline{E}'$ tels que $\underline{D} < \beta$ est, en vertu de (MM3)(i), θ-petit.

Dans ces conditions, désignons par $\underline{S}$ la sous-catégorie pleine de $Ens^{\underline{E}}$ dont les objets sont:

- d'une part les foncteurs $Hom_{\underline{E}}(E',-) : \underline{E} \longrightarrow Ens$ (ce qui a bien un sens, d'après (MM1)) , dès que E' est objet de $\underline{E}'$,

- d'autre part les foncteurs $\varprojlim_{D \in \underline{D}^{op}} Hom_{\underline{E}}(\delta D,-)$ et $\varinjlim_{D' \in \underline{D}'^{op}} Hom_{\underline{E}}(\delta' D',-)$, dès que δ est élément de V .

Clairement, puisque V et $\underline{E}'$ (d'après (MM3)(i)) sont θ-petits, la classe des objets de $\underline{S}$ est un ensemble θ-petit et l'on dispose d'un foncteur plein et fidèle:

$$\begin{aligned} y: \ & \underline{E}'^{op} \longrightarrow \underline{S} \\ & E' \longrightarrow Hom_{\underline{E}}(E',-) \end{aligned}$$

identifiant $\underline{E}'^{op}$ à une sous-catégorie pleine de $\underline{S}$; d'autre part, si $\varprojlim_{D \in \underline{D}^{op}} Hom_{\underline{E}}(\delta D,-)$ et $\varinjlim_{D' \in \underline{D}'^{op}} Hom_{\underline{E}}(\delta' D',-)$ sont deux objets de $\underline{S}$ tels que décrits précédemment, naturellement en tout objet E de $\underline{E}$, on a (par définition des petits diagrammes localement limites inductives):

$$\begin{aligned} - \Big(\varprojlim_{D \in \underline{D}^{op}} Hom_{\underline{E}}(\delta D,-)\Big)(E) = \varprojlim_{D \in \underline{D}^{op}} Hom_{\underline{E}}(\delta D,E) & \approx \varinjlim_{D' \in \underline{D}'^{op}} Hom_{\underline{E}}(\delta' D',E) \\ & = \Big(\varinjlim_{D' \in \underline{D}'^{op}} Hom_{\underline{E}}(\delta' D',-)\Big)(E) \ , \end{aligned}$$

il en résulte donc $\varprojlim_{D \in \underline{D}^{op}} Hom_{\underline{E}}(\delta D,-) \approx \varinjlim_{D' \in \underline{D}'^{op}} Hom_{\underline{E}}(\delta' D',-)$ dans $\underline{S}$; autrement dit, tout objet de $\underline{S}$ est à la fois une limite inductive θ-indexée (éventuellement indexées par $\underline{1}$) et une limite projective β-indexée (éventuellement indexée par $\underline{1}$) d'un foncteur à valeurs dans la sous-catégorie pleine et θ-petite (d'après (MM3)(i)) $\underline{E}'^{op}$; on en déduit facilement que $\underline{S}$ est une catégorie θ-petite.

Distinguons dans $\underline{S}$ les limites projectives et les limites inductives telles que décrites précédemment: on obtient bien ainsi une esquisse $/\!/\underline{S}/\!/$ qui est θ-petite.

A tout objet E de $\underline{E}$, on associe le foncteur "évaluation en E "

$$\begin{array}{rl} M(E): & \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens} \\ & (s: S \longrightarrow S') \longmapsto (s_E: S(E) \longrightarrow S'(E)). \end{array}$$

Clairement, les limites projectives et inductives distinguées de $/\!/\underline{S}/\!/$ se calculant point par point dans la sous-catégorie pleine $\underline{S}$ de $\mathrm{Ens}^{\underline{E}}$, il en résulte que M(E) est une réalisation de $/\!/\underline{S}/\!/$. On définit donc ainsi un foncteur:

$$\begin{array}{rl} M: \underline{E} & \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/} \\ E & \longmapsto M(E) \ . \end{array}$$

Inversement, si $R: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est une réalisation de $/\!/\underline{S}/\!/$, il est facile de constater que la catégorie duale $H(R')^{op}$ de la catégorie d'hypermorphismes du foncteur $R': \underline{E}'^{op} \hookrightarrow \underline{S} \xrightarrow[R]{} \mathrm{Ens}$ est petite et β-filtrante (en vertu de (MM3)(v), du choix des limites projectives et inductives distinguées dans $/\!/\underline{S}/\!/$ et justement parce que R est une réalisation). On lui associe alors une limite inductive choisie

$$N(R) = \varinjlim \left(H(R')^{op} \xrightarrow[h(R')^{op}]{} \underline{E}' \hookrightarrow \underline{E} \right)$$

dans $\underline{E}$ (et elle existe bien, en vertu de (MM2)). On définit ainsi un foncteur:

$$\begin{array}{rl} N: \mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/} & \longrightarrow \underline{E} \\ R & \longmapsto N(R) \ . \end{array}$$

Il est facile de vérifier que, naturellement en tout objet E de $\underline{E}$, on dispose, par construction, d'un isomorphisme $\underline{E}'/E \approx H(M(E)')^{op}$ rendant le diagramme de foncteurs ci-dessous commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\underline{E}'/E \arrow[r, phantom, "\approx"] \arrow[ddr] & & H(M(E)')^{op} \arrow[dl] \\
 & & \underline{E}' \arrow[dl] \\
 & \underline{E} &
\end{tikzcd}$$

En vertu de (MM3)(iii), on en déduit que, naturellement en tout objet E de $\underline{E}$, on a:

$$E \approx N(M(E)) .$$

De même, naturellement en tout objet R de $Ens^{//\underline{S}//}$, on dispose d'un isomorphisme $\underline{E}'/N(R) \approx H(R')^{op}$, puisque N(R) est, par construction, une limite inductive petitement indexée et β-filtrée dans $\underline{E}$ et tout objet de $\underline{E}'$ est, en vertu de (MM3)(iv) , β-présentable. Il en résulte que, naturellement en tout objet S de la sous-catégorie pleine $\underline{E}'^{op}$ de $\underline{S}$, on a:

$$M(N(R))(S) = Hom_{\underline{E}}(S,N(R)) \approx R(S) .$$

Par construction (tout objet de $\underline{S}$ étant limite distinguée, ou triviale, d'un foncteur à valeurs dans $\underline{E}'^{op}$ et R et M(N(R)) étant des réalisations), on en déduit que, naturellement en tout objet S de $\underline{S}$, on a:

$$M(N(R))(S) \approx R(S) .$$

Par conséquent, naturellement en tout objet R de $Ens^{//\underline{S}//}$, il vient:

$$R \approx M(N(R)) .$$

Les catégories $\underline{E}$ et $Ens^{//\underline{S}//}$ sont donc équivalentes. Fin de la preuve.

Cette démonstration reprend très largement celle de (C.M.C.E.). Le lecteur notera qu'elle est très analogue à celle de la proposition 21 du Chap. III, §4 , qu'elle a d'ailleurs très largement inspirée (dans un cas plus particulier).

Il résulte trivialement de la proposition précédente et de la proposition 25 que:

Proposition 29. Si $\underline{E}$ est une catégorie θ-modelable, alors elle possède tous les petits diagrammes localement limites inductives petitement indexées.

Preuve. Evidemment, les propositions 25 et 28 précédentes suffisent amplement à prouver l'assertion. Cependant, nous allons présenter (brièvement) "une autre" preuve plus interne ou intrinsèque à $\underline{E}$.
Si $\underline{I}'$ est une petite catégorie et si $F': \underline{I}' \longrightarrow \underline{E}$ est un foncteur, on note $\underline{J}'$ la catégorie telle que:

- ses objets sont les couples (E',C) où E' est un objet de $\underline{E}'$ et C est une composante connexe de la catégorie comma E'/F' ,

- ses morphismes sont les $((E',C),e',(E'',C')): (E',C) \longrightarrow (E'',C')$ tels que $e': E' \longrightarrow E''$ est une flèche de $\underline{E}'$ appliquant (par composition) la composante connexe C' dans la composante connexe C .

On dispose donc du foncteur canonique:

$$G': \underline{J}' \longrightarrow \underline{E}'$$
$$(E',C) \longmapsto E' \quad ,$$

et ce foncteur est, bien entendu, une co-fibration discrète.
Evidemment, $\underline{J}'$ est petite mais, en général, elle n'est pas β-filtrante (sauf lorsque $\underline{I}'$ est β-filtrante). On ne peut donc pas calculer la limite inductive (dont rien n'assure l'existence) du foncteur $\underline{J}' \xrightarrow[G']{} \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$.
Cependant, le foncteur G' engendre un petit diagramme $(G'_{D'}: \underline{J}'_{D'} \longrightarrow \underline{E}')_{D'\in\underline{D}'}$, indexé par une petite catégorie - non nécessairement discrète - $\underline{D}'$, de co-fibrations discrètes qui créent les petits diagrammes localement limites inductives β-indexées (mais cette affirmation devrait être détaillée!). Il en résulte que, pour tout objet D' de $\underline{D}'$, la catégorie $\underline{J}'_{D'}$ est petite et β-filtrante et donc que le foncteur $\underline{J}'_{D'} \xrightarrow[G'_{D'}]{} \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$ admet bien une limite inductive $E_{D'}$, (en vertu de (MM2)). On en déduit un petit diagramme $(E_{D'})_{D'\in\underline{D}'}$ indexé par $\underline{D}'$ dans $\underline{E}$ et l'on établit sans peine qu'il est bien localement limite inductive dans $\underline{E}$ du foncteur F' .
(Avec les notations précédentes, on voit aisément que le diagramme $(\underline{J}'_{D'})_{D'\in\underline{D}'}$ est celui des catégories d'hypermorphismes $(H(R'_{D'}))_{D'\in\underline{D}'}$, où $(R_{D'})_{D'\in\underline{D}'}$ est le diagramme de réalisations localement libre sur le foncteur $R: \underline{S} \longrightarrow Ens$, limite inductive - calculée point par point - dans $Ens^{\underline{S}}$ des foncteurs $M(F(I))$ et vérifiant, par conséquent, $H(R') = \underline{J}'^{op}$.) Fin de la preuve.

Bien entendu, la présentation de la preuve de la proposition précédente, utilisée ici, est "très analogue" à celle de la preuve de la proposition 22 du Chap. III, § 4. Mais elle nécessite encore un peu plus de subtilité technique (que la remarque de fin de preuve éclaire).

Des propositions 27 et 28 précédentes, on déduit que:

Théorème 10 . Les catégories θ-esquissables sont exactement les catégories θ-modelables.

5. Catégories θ-modélisables et catégories θ-modelables.

Montrons que:

Proposition 30 . Les catégories θ-modelables sont des catégories θ-modélisables.

Preuve. Supposons que $\underline{E}$ est θ-modelable et désignons par $\beta < \theta$ un ordinal régulier et par $\underline{E}'$ une sous-catégorie de $\underline{E}$ tels que les conditions (MM1) à (MM3) soient vérifiées.
Comme (MM1) est vérifiée, (MS1) l'est.
De même, comme (MM2) est vérifiée, (MS2) l'est.
En vertu de (MM3)(v) et de la proposition 26 , (MS3) est également vraie.
Montrons que l'ensemble pleinement θ-petit (vu (MM3)(i)) des objets de $\underline{E}'$ est bien un ensemble localement générateur localement propre de $\underline{E}$.
Si E est un objet de $\underline{E}$, la condition (MM3)(iii) assure que $(s_e = e : E'_e = E' \longrightarrow E)_{(e:\, E' \longrightarrow E) \in \underline{E}'/E}$ est un cône limite inductive canonique dans $\underline{E}$. Désignons par

$$(s'_{e,D} : E'_e = E' \longrightarrow \overline{E}_D)\ ((e:\, E' \longrightarrow E),D) \in \mathrm{Ob}(\underline{E}'/E) \times \underline{D}$$

un petit diagramme (indexé par la catégorie -non nécessairement discrète - petite $\underline{D}$) localement somme naturalisée de la famille $(E'_e = E'\ )_{e \in \mathrm{Ob}(\underline{E}'/E)}$ dans la catégorie $\underline{E}$ (elle existe en vertu de la proposition 29). Il existe alors au moins un objet D de $\underline{D}$ et une flèche $s:\, \overline{E}_D \longrightarrow E$ tels que:

- pour toute flèche $e:\, E' \longrightarrow E$, où E' est objet de $\underline{E}'$, on a $s.s'_{e,D} = s_e$.

Si $f,g : E \longrightarrow E_1$ sont telles que $f.s$ et $g.s$ soient connectées dans $\underline{D}/E_1$, on voit que $f.s_e = g.s_e$, pour tout objet $e:\, E' \longrightarrow E$ de $\underline{E}'/E$, par consé-

quent $f = g$, puisque E est une limite inductive. En d'autres termes, $s: \overline{E}_D \longrightarrow E$ est un épimorphisme $\underline{D}$-local de $\underline{E}$.
Si $m: E_2 \longrightarrow E$ est un monomorphisme de $\underline{E}$, il définit un foncteur injectif (composition par m) $\underline{E}'/m : E'/E_2 \longrightarrow \underline{E}'/E$. Si, de plus, D' est un autre objet de $\underline{D}$ et $s': \overline{E}^{\circ}_{D'} \longrightarrow E_2$ est une flèche de $\underline{E}$ tels que $s: \overline{E}_D \longrightarrow E$ et $m.s': \overline{E}'_{D'} \longrightarrow E$ sont deux objets d'une même composante connexe de la catégorie $\underline{D}/E$, on obtient un foncteur

$$
\begin{aligned}
n:\ \underline{E}'/E &\longrightarrow \underline{E}'/E_2\\
e &\longmapsto s'.s'_{e,D'}
\end{aligned}
$$

dont on établit facilement (parce que m est un monomorphisme et en utilisant la connexité) qu'il est inverse de $\underline{E}'/m$. En vertu de (MM3)(iii) , on en déduit que m est un isomorphisme de $\underline{E}$. D'où la proposition. Fin de la preuve.

On peut comparer facilement cette preuve à celle de la proposition 23 du Chap. III, §5 : elle nécessite, cependant, un peu plus de précautions (pour aboutir à un résultat "assoupli").

Réciproquement, montrons que:

Proposition 31 . Les catégories θ-modélisables sont des catégories θ-modelables.

Preuve. Supposons que $\underline{E}$ est une catégorie θ-modélisable et désignons par $\beta < \theta$ un ordinal régulier et par G un ensemble localement générateur localement propre vérifiant (MS1) à (MS4).
Puisque (MS1) est vérifiée, (MM1) l'est.
De même, puisque (MS2) est vérifiée, (MM2) l'est.
Nous construisons une sous-catégorie $\underline{E}' = \underline{E}'_{\beta}$ de $\underline{E}$ par récurrence transfinie comme suit:

- on note $\underline{E}'_0$ la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ dont G est l'ensemble des objets; en vertu de (MS4), elle est θ-petite et ses objets sont β-présentables dans $\underline{E}$;

- si $\lambda < \beta$ et si la sous-catégorie $\underline{E}'_{\lambda}$ de $\underline{E}$ est définie, contient $\underline{E}'_0$, est θ-petite, pleine et si ses objets sont β-présentables dans $\underline{E}$, on note $\underline{E}'_{\lambda+1}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{E}$ ayant pour objets, outre ceux de $\underline{E}'_{\lambda}$, les objets E_D , quand D varie dans $\underline{D}$, d'un diagramme θ-petit, β-présenté, localement limite inductive (qui existe en vertu de (MS3)) choisi (et choisi indexé par $\underline{I}$ dès que c'est possible) $(E_D)_{D\in\underline{D}}$, pour tout foncteur $\underline{I} \longrightarrow \underline{E}'_{\lambda} \hookrightarrow \underline{E}$, où $\underline{I}$ varie dans un ensemble (évidemment θ-petit) de représentants choisis des classes d'équivalence, modulo la relation d'isomorphisme , des catégories β-petites; évidemment, $\underline{E}'_{\lambda+1}$ est encore θ-petite, pleine, elle contient $\underline{E}'_{\lambda}$ et ses objets sont toujours β-présentables dans $\underline{E}$, en vertu de (MS3) (ou parce que limites inductives β-présentées et β-indexées);

- si $\lambda \leq \beta$ est un ordinal limite et si $(\underline{E}'_{\lambda'})_{\lambda' < \lambda}$ est une famille définie de sous-catégories emboitées, θ-petites, pleines et dont les objets sont β-présentables dans $\underline{E}$, on pose $\underline{E}'_{\lambda} = \bigcup_{\lambda' < \lambda} \underline{E}'_{\lambda'}$; on obtient, ainsi, une sous-catégorie de $\underline{E}$ qui est encore θ-petite, pleine et dont les objets sont β-présentables dans $\underline{E}$.

En particulier, $\underline{E}'_{\beta} = \underline{E}'$ vérifie (MM3)(i), (MM3)(ii), (MM3)(iv) et, par construction, (MM3)(v).

Il nous reste à montrer que $\underline{E}'$ est dense dans $\underline{E}$. Pour ce faire, supposons que E est un objet de $\underline{E}$. Comme nous venons d'établir que la condition (MM3)(v) est vérifiée par $\underline{E}'$, on en déduit que la catégorie $\underline{E}'/E$ est β-filtrante (et évidemment petite, puisque $\underline{E}'$ est θ-petite et $\underline{E}$ est localement petite). En conséquence, le foncteur canonique $\underline{E}'/E \longrightarrow \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$ admet, en vertu de (MS2), un cône limite inductive $(s_e : E'_e = E' \longrightarrow \tilde{E})_{(e: E' \longrightarrow E) \in \underline{E}'/E}$ et il existe donc une unique flèche $m: \tilde{E} \longrightarrow E$ de $\underline{E}$ telle que:

- pour toute flèche $e: E' \longrightarrow E$ de $\underline{E}$, où E' est objet de $\underline{E}'$, on a $m.s_e = e$.

Comme (MS4) est vérifiée, on sait qu'il existe un objet D de la catégorie $\underline{D}$ et un épimorphisme $s: \bar{E}_D \longrightarrow E$ de $\underline{E}$, localement propre relativement au diagramme $(\bar{E}_D)_{D \in \underline{D}}$, où

$$(p_{x,D} : E'_x \longrightarrow \bar{E}_D)_{(x,D) \in X \times \underline{D}}$$

est un petit diagramme localement somme d'une famille petite $(E'_x)_{x \in X}$ d'objets de l'ensemble localement générateur localement propre G , qui sont donc des objets particuliers de $\underline{E}'$. On en déduit qu'il existe un autre objet D' de $\underline{D}$ et une flèche $s': \bar{E}_{D'} \longrightarrow \tilde{E}$ tels que:

- pour tout élément x de X , on a $s'.p_{x,D'} = s_{s.p_{x,D}}$.

Il en résulte que:

- pour tout élément x de X , on a $m.s'.p_{x,D'} = m.s_{s.p_{x,D}} = s.p_{x,D}$,

ce qui assure (par définition des petits diagrammes localement sommes) que $m.s' : \overline{E}_{D'} \longrightarrow E$ et $s : \overline{E}_D \longrightarrow E$ sont dans une même composante connexe de la catégorie $\underline{D}/E$.

Si $f,g : E_1 \longrightarrow \tilde{E}$ sont deux flèches de $\underline{E}$ telles que $m.f = m.g$, alors pour toute flèche $e_1 : E' \longrightarrow E_1$, où E' est objet de $\underline{E}'$ (et donc β-présentable), il existe (puisque $\tilde{E}$ est une limite inductive petitement indexée et β-filtrée) un objet $e(f) : E'(f) \longrightarrow E$ (resp. $e(g) : E'(g) \longrightarrow E$) de $\underline{E}'/E$ et une flèche $e'(f) : E' \longrightarrow E'(f)$ (resp. $e'(g) : E' \longrightarrow E'(g)$) dans $\underline{E}$ tels que:

- $s_{e(f)}.e'(f) = f.e_1$ (resp. $s_{e(g)}.e'(g) = g.e_1$) .

On en déduit que:

- $e(f).e'(f) = m.s_{e(f)}\, e'(f) = m.f.e_1 = m.g.e_1 = m.s_{e(g)}.e'(g) = e(g).e'(g)$,

(et nous notons e cette valeur commune).

Il en résulte que:

- $s_{e(f)}.e'(f) = s_e = s_{e(g)}.e'(g)$.

Autrement dit, pour toute flèche $e_1 : E' \longrightarrow E_1$, où E' varie dans $\underline{E}'$, on a:

- $f.e_1 = g.e_1$.

En utilisant, pour l'objet E_1 des constructions, propriétés et notations analogues à celles concernant l'objet E , on en déduit:

- $f.m_1 = g.m_1$ (puisque $\tilde{E}_1$ est une limite inductive).

Donc, $f.s_1$ et $g.s_1$ (tous deux connectés à $f.m_1.s_1' = g.m_1.s_1'$) sont connectés dans $\underline{D}_1/\tilde{E}$. Or s_1 est épi $\underline{D}_1$-local (localement propre relativement au diagramme $\underline{D}_1$) , donc $f = g$ et m est un monomorphisme.

Comme s et $m.s'$ sont connectés dans $\underline{D}/E$, il en résulte que m est un isomorphisme (puisque s est un épimorphisme localement propre relativement au diagramme $(\overline{E}_D)_{D\in\underline{D}}$) . Donc E est aussi limite inductive canonique du foncteur $\underline{E}'/E \longrightarrow \underline{E}' \xrightarrow{\;-\;} \underline{E}$.

On peut donc affirmer que $\underline{E}'$ est dense dans $\underline{E}$, i. e. que la condition (MM3)(iii) est également vérifiée. Fin de la preuve.

La preuve précédente peut être facilement comparée à celles des propositions 15 du Chap. II, §5 et 24 du Chap. III, §5 : elle n'en diffère pas sensiblement quant à l'argumentation générale, mais nécessite,cependant, quelque précaution supplémentaire pour la mise en oeuvre de l'ensemble localement générateur localement propre considéré, ainsi que dans le contrôle de la "taille" des sous-catégories pleines que l'on construit.

Des deux propositions 30 et 31 précédentes, on déduit immédiatement que:

Théorème 11. Les catégories θ-modelables sont exactement les catégories θ-modélisables.

Bien entendu, ce théorème (ou la seule proposition 31) permet d'affiremer que les catégories θ-modélisables possèdent les petits diagrammes localement limites inductives petitement indexées. Cependant, sans calculs auxiliaires supplémentaires (i. e. sans procéder à une "complétion locale" - par petits diagrammes localement limites inductives β-indexées - de l'ensemble localement générateur localement propre), on ne peut établir directement l'existence de ces limites inductives locales: ainsi, on peut relire la preuve de la proposition 31 comme une preuve de l'existence de ces limites locales (et non comme une preuve de l'équivalence de deux classes de catégories)

Ajoutons, enfin, que le théorème précédent prouve l'affirmation contenue en (C.M.C.F.), §4, p. 14 .

6. Catégories θ-esquissables et catégories θ-modélisables.

Des théorèmes 10 et 11 on déduit immédiatement:

Théorème 12 . Les catégories θ-esquissables sont exactement les catégories θ-modélisables.

C'était évidemment le but, non seulement de ce Chapitre IV, mais de tout ce travail que d'établir ce résultat, i. e. de caractériser "à la Gabriel-Ulmer" les catégories (mixtement et petitement) esquissables.

BIBLIOGRAPHIE.

(C.A.L.O.) Y. Diers, Catégories localisables, Thèse, Paris, 1977.

(C.M.C.E.) C. Lair, Catégories modelables et catégories esquissables, Diagrammes 6, Paris, 1981.

(C.M.C.F.) R. Guitart et C. Lair, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes 4, Paris, 1980.

(F.O.S.A.) C. Lair, Foncteurs d'omission de structures algébriques, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, XII,2 , Paris, 1971.

(L.C.R.F.) R. Guitart et C. Lair, Limites et co-limites pour représenter les formules, Diagrammes 7, Paris 1982.

(L.P.L.G.) F. Ulmer, Locally α-presentable and locally α-generated categories, Lecture Notes in Math. 195, Springer, 1971.

SOMMAIRE.