DIAGRAMMES

C. LAIR

Sesqui-monades et monades locales

Diagrammes, tome 9 (1983), exp. nº 1, p. L1-L32
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1983__9__A1_0>

Diagrammes, Volume 9, Paris 1983.

SESQUI-MONADES ET MONADES LOCALES

C. Lair

Introduction.

Si $F: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur (d'oubli) entre catégories de structures algébriques, il vérifie (comme de très nombreux autres foncteurs !):

(i) tout objet C de $\underline{C}$ engendre un objet libre B_C de $\underline{B}$, i. e. tel que $\mathrm{Hom}_{\underline{B}}(B_C,B) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C,FB)$, naturellement en tout objet B de $\underline{B}$.

Tout foncteur $F: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ vérifiant (i) admet un adjoint à gauche $F': \underline{C} \longrightarrow \underline{B}$. L'adjonction de F' à gauche de F définit une monade $\underline{T} = (T = F.F' , \epsilon , \mu)$ sur $\underline{C}$. A la monade $\underline{T}$ est alors associée une catégorie $\mathrm{Alg}(\underline{T})$ (des algèbres de $\underline{T}$) et un foncteur (de comparaison) $V: \underline{B} \longrightarrow \mathrm{Alg}(\underline{T})$. Lorsque V est un isomorphisme, on dit que F est monadique et ceci signifie que les objets (et les morphismes) de $\underline{B}$ sont définissables dans le seul langage de $\underline{C}$, i. e. sont des systèmes de flèches de $\underline{C}$ devant vérifier un système d'équations (sur ce point de vue, désormais bien classique, on pourra consulter, par exemple, (A.O.F.S.)).

Le foncteur d'oubli de la catégorie des corps vers celle des ensembles (par exemple) ne vérifie pas (i). Cependant, il vérifie, comme de nombreux autres foncteurs $F: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$, la condition plus faible:

(ii) tout objet C de $\underline{C}$ <u>engendre une famille multi-libre</u> $(B_{CD})_{D\in \underline{D}_C}$ (où $\underline{D}_C$ est une catégorie discrète) d'objets de $\underline{B}$ vérifiant $\coprod_{\underline{D}_C} \mathrm{Hom}_{\underline{B}}(B_{CD}, B) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C, FB)$, naturellement en tout objet B de $\underline{B}$.

Si $\underline{A}$ est une catégorie, on note $\mathrm{Fam}(\underline{A})$ la catégorie des familles de $\underline{A}$, i. e. la catégorie telle que:

- ses objets sont les foncteurs $f: \underline{D} \longrightarrow \underline{A}$, où $\underline{D}$ est une catégorie discrète,

- ses morphismes sont les $(g,h): f \longrightarrow f'$ tels que $g: \underline{D} \longrightarrow \underline{D}'$ est un foncteur et $h: f.g \Longrightarrow f'$ est une transformation naturelle.

Clairement, $\underline{A}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fam}(\underline{A})$. De même, au foncteur $F: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ est associé un prolongement $\mathrm{Fam}(F): \mathrm{Fam}(\underline{B}) \longrightarrow \mathrm{Fam}(\underline{C})$.

Il est facile de prouver que $F: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ vérifie (ii) si, et seulement si, $\mathrm{Fam}(F)$ vérifie (i), c'est-à-dire admet un adjoint à gauche $\tilde{F}'$, appelé <u>multi-adjoint à gauche de</u> F. L'adjonction de $\tilde{F}'$ à gauche de $\mathrm{Fam}(F)$ définit donc une monade $\underline{\tilde{T}}$ sur $\mathrm{Fam}(\underline{C})$, appelée <u>multi-monade sur</u> $\underline{C}$. On dispose, alors, d'un plongement et d'un foncteur canonique (de comparaison)

$$\underline{B} \longrightarrow \mathrm{Fam}(\underline{B}) \xrightarrow{\tilde{V}} \mathrm{Alg}(\underline{\tilde{T}}) .$$

Lorsque $\tilde{V}$ est un isomorphisme, i. e. lorsque $\mathrm{Fam}(F)$ est monadique, on dit que F est <u>multi-monadique</u> et ceci signifie que les objets de $\underline{B}$ (et ses morphismes) sont <u>définissables dans le seul langage de</u> $\underline{C}$, i. e. sont des <u>systèmes de flèches de</u> $\underline{C}$ <u>devant vérifier un système d'équations et soumises à des conditions d'existence et unicité de solutions d'un autre système d'équations</u> (en certaines inconnues !).
Ce point de vue fécond, de la multi-monadicité, est développé en (M.A.M.C.) qu'il faut donc consulter.

Le foncteur d'oubli de la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, de caractéristiques différentes de 0 et 1 , vers celle des anneaux commutatifs, unitaires, ne vérifie pas (ii). Cependant, comme tous les foncteurs d'oubli entre catégories de modèles de théories du 1^er^ ordre classique (voir (C.M.C.E.) et (L.C.R.F.)) et de nombreux autres foncteurs $F: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$, il vérifie la condition encore plus faible (voir (C.M.C.F.)):

(iii) tout objet C de $\underline{C}$ <u>engendre un diagramme localement libre</u> $(b_{Cd}: B_{CD} \longrightarrow B_{CD'})_{d: D \longrightarrow D' \in \underline{D}_C}$ (où $\underline{D}_C$ est une catégorie non nécessairement discrète appartenant à une classe $\mathbb{D}$,fixée, de catégories) de $\underline{B}$, i. e. tel que

$$\varinjlim_{\underline{D}_C} \mathrm{Hom}_{\underline{B}}(B_{CD}, B) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(C, FB) \quad ,$$

naturellement en tout objet B de $\underline{B}$.

Si $\mathbb{D} \supset \{\mathbb{1}\}$ est une classe fixée de catégories et si $\underline{A}$ est une catégorie, on note $\mathbb{D}$-Pro-$\underline{A}$ la catégorie des $\mathbb{D}$-pro-objets de $\underline{A}$, i. e. la catégorie telle que:

- ses objets sont les foncteurs $f: \underline{D} \longrightarrow \underline{A}$ tels que $\underline{D}$ appartient à $\mathbb{D}$,
- ses morphismes sont les $(f,\partial,f'): f \longrightarrow f'$ tels que ∂ est élément de $\varprojlim_{\underline{D'}} \varinjlim_{\underline{D}} \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(fD, f'D')$.

Clairement, $\underline{A}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathbb{D}$-Pro-$\underline{A}$. De même, au foncteur $F: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ est associé un prolongement $\mathbb{D}$-Pro-F: $\mathbb{D}$-Pro-$\underline{B} \longrightarrow \mathbb{D}$-Pro-$\underline{C}$.

Il est facile de constater que $F: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ vérifie (iii) si, et seulement si, $\mathbb{D}$-Pro-F vérifie (i), c'est-à-dire admet un adjoint à gauche $\overleftarrow{F}'$, appelé $\mathbb{D}$-<u>pro-adjoint à gauche de</u> F . L'adjonction de $\overleftarrow{F}'$ à gauche de $\mathbb{D}$-Pro-F définit donc une monade $\overline{\underline{T}}$ sur $\mathbb{D}$-Pro-$\underline{C}$, appelée $\mathbb{D}$-<u>pro-monade sur</u> $\underline{C}$. De nouveau, on dispose d'un plongement et d'un foncteur canonique (de

comparaison) $\underline{B} \longrightarrow \mathbb{D}\text{-Pro-}\underline{B} \xrightarrow{\overline{V}} \mathrm{Alg}(\overline{\underline{T}})$.
Lorsque $\overline{V}$ est un isomorphisme, i. e. lorsque $\mathbb{D}$-Pro-F est monadique, on dit que F est $\mathbb{D}$-pro-monadique et ceci signifie que les objets de $\underline{B}$ (et ses flèches) sont définissables dans le seul langage de $\underline{C}$, i. e. sont des systèmes de flèches de $\underline{C}$ devant vérifier un système d'équations et soumises à des conditions d'existence et maximalité d'une famille de solutions d'un autre sytème d'équations (en certaines inconnues).
Ce point de vue de la $\mathbb{D}$-pro-monadicité est développé en (P.C.M.F.) que l'on peut consulter.

Formellement, le point de vue de la $\mathbb{D}$-pro-monadicité englobe celui de la multi-monadicité (prendre $\mathbb{D}$ comme étant la classe des catégories discrètes) et celui de la monadicité (prendre $\mathbb{D} = \{\mathbb{1}\}$: en ce sens, c'est une ré-écriture "généralisante" du point de vue de la multi-monadicité.

Intuitivement, le point de vue de la $\mathbb{D}$-pro-monadicité contient celui de la multi-monadicité car des conditions d'existence et unicité (de familles de solutions d'équations) sont évidemment des conditions d'existence et maximalité particulières: elles ont d'ailleurs ceci de particulier qu'elles sont (pour un logicien) "du 1^{er} ordre" alors que les conditions de maximalité sont "du $2^{ème}$ ordre" , ou encore qu'elles s'expriment algébriquement au contraire des secondes.

C'est pourquoi le point de vue de la $\mathbb{D}$-pro-monadicité (comme généralisant celui de la monadicité, i. e. celui de la mesure de l'algébricité des objets de $\underline{B}$ sur ceux de $\underline{C}$) ne saurait être pleinement satisfaisant.

Si $\mathbb{D} \supset \{\mathbb{1}\}$ est une classe de catégories et si $\underline{A}$ est une catégorie, notons $\mathbb{D}$-$\underline{A}$ la catégorie des $\mathbb{D}$-diagrammes de $\underline{A}$, i. e. la catégorie telle que:

- ses objets sont les foncteurs $f: \underline{D} \longrightarrow \underline{A}$ tels que $\underline{D}$ appartient à $\mathbb{D}$,

- ses morphismes sont les $(f,\partial,f'): f \longrightarrow f'$ tels que:

  + $\partial: \underline{D}^{op} \times \underline{D}' \longrightarrow$ Ens est sous-foncteur de

$$\underline{D}^{op} \times \underline{D}' \xrightarrow[f^{op} \times f]{} \underline{A}^{op} \times \underline{A} \xrightarrow[\mathrm{Hom}_{\underline{A}}]{} \mathrm{Ens} \ ,$$

  + pour tout objet D' de $\underline{D}'$, le foncteur $\partial(-,D'): \underline{D}^{op} \longrightarrow$ Ens admet une catégorie d'hypermorphismes non vide, connexe (et l'on peut même imposer: dont la duale appartient à $\mathbb{D}$).

Clairement, on dispose d'un plongement $\underline{A} \longrightarrow \mathbb{D}\text{-}\underline{A}$ et, si $F: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur, il possède un prolongement $\mathbb{D}\text{-}F: \mathbb{D}\text{-}\underline{B} \longrightarrow \mathbb{D}\text{-}\underline{C}$.

En fait, $\mathbb{D}\text{-}\underline{A}$ est plus qu'une catégorie: c'est une 2-catégorie dont les Hom sont des ordres (c'est une di-catégorie, au sens de la première partie de ce travail) et $\mathbb{D}\text{-}F$ est un 2-foncteur (un di-foncteur, dans la terminologie adoptée ici). De plus, on dispose d'un pseudo-foncteur particulier (appelé ici semi-foncteur gauche) $\mathbb{D}\text{-Pro-}\underline{A} \longrightarrow \mathbb{D}\text{-}\underline{A}$ transformant toute flèche de $\mathbb{D}\text{-Pro-}\underline{A}$ en une (1-) flèche de $\mathbb{D}\text{-}\underline{A}$ qui est maximum dans sa composante connexe, pour l'ordre de son Hom; ceci explique les conditions de maximalité apparaissant dans le point de vue de la $\mathbb{D}$-pro-monadicité et montre que l'on peut, maintenant, s'en débarrasser.

Dans la deuxième partie de ce travail (qui paraitra dans le volume suivant de Diagrammes), nous montrerons que, si $F: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ est un foncteur vérifiant (iii), le di-foncteur $\mathbb{D}\text{-}F$ admet un "adjoint à gauche généralisé" $\overline{\overline{F}}'$, <u>appelé adjoint local à gauche</u> de F . Nous établirons que, sous certaines conditions, l'adjonction généralisée de $\overline{\overline{F}}'$ à gauche de $\mathbb{D}\text{-}F$ définit une "monade généralisée" sur $\mathbb{D}\text{-}\underline{C}$, appelée <u>monade locale sur</u> $\underline{C}$, et que l'on dispose alors d'un plongement et d'un foncteur canonique (de comparaison) $\underline{B} \longrightarrow \mathbb{D}\text{-}\underline{B} \xrightarrow{\overline{\overline{V}}} \mathrm{Alg}(\overline{\overline{\underline{T}}})$ (où $\mathrm{Alg}(\overline{\overline{\underline{T}}})$

est la catégorie des "algèbres généralisées" de la monade généralisée $\underline{\overline{\overline{T}}}$ associée à l'adjonction de $\overline{\overline{F}}'$ à gauche de $\mathbb{D}$-F). Enfin, il sera prouvé que, si $\overline{\overline{V}}$ est un isomorphisme, i. e. si $\mathbb{D}$-F est "monadique généralisé" (auquel cas on dit que F est <u>localement monadique</u>), ceci signifie bien que les objets de $\underline{B}$ (et ses flèches) sont <u>définissables dans le seul langage de</u> $\underline{C}$ <u>par des sytèmes de flèches de</u> $\underline{C}$ <u>devant vérifier un système d'équations et soumises à des conditions d'existence de familles de solutions d'un autre système d'équations</u> (en certaines inconnues).

Bien entendu, pour mener à bien ce programme, il nous a fallu tout d'abord préciser ce que l'on entend précisément par adjonction, monade, algèbre et monadicité ... "généralisées" : c'est le but de la première partie de ce travail.

Première Partie

SESQUI-MONADES

CHAPITRE I: DI-CATEGORIES, SEMI-FONCTEURS, SEMI-TRANSFORMATIONS, MODIFICATIONS.

1. Di-catégories.

On dit que $\underline{\underline{C}} = (\underline{C}, \leq)$ est une di-catégorie si, et seulement si:

(DC 1) $\underline{C}$ est une catégorie,

(DC 2) $\leq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathrm{Fl}\,\underline{C}$ des flèches de $\underline{C}$,

(DC 3) pour toutes flèches x_1 et x_2 de $\underline{C}$ telles que $x_1 \leq x_2$, on a nécessairement domaine x_1 = domaine x_2 et co-domaine x_1 = co-domaine x_2,

(DC 4) pour toutes flèches $x: X \longrightarrow X'$, $x'_s: X' \longrightarrow X''$ (où $s = 1,2$) et $x'': X'' \longrightarrow X'''$ de $\underline{C}$ telles que $x'_1 \leq x'_2$, on a $x''.x'_1 \leq x''.x'_2$ et $x'_1.x \leq x'_2.x$.

Dans la suite, on pose $\mathrm{Ob}\,\underline{\underline{C}} = \mathrm{Ob}\,\underline{C}$ et $\mathrm{Fl}\,\underline{\underline{C}} = \mathrm{Fl}\,\underline{C}$. Si X et X' sont deux objets de $\underline{\underline{C}}$, on pose aussi:

- $\underline{C}(X,X') = \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X,X') = \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(X,X')$,
- $\underline{\underline{C}}(X,X') = (\underline{C}(X,X'), \leq_{\text{induit}})$.

Si $\mathcal{U}$ est un univers (voir (T.H.E.N.)), on dit qu'une di-catégorie $\underline{\underline{C}}$ est localement $\mathcal{U}$-petite si, et seulement si:

(DC 5) pour tous objets X et X' de $\underline{\underline{C}}$, l'ensemble $\underline{C}(X,X')$ est élément de $\mathcal{U}$.

A toute catégorie $\underline{C}$ on associe la di-catégorie triviale $\mathrm{Di}(\underline{C}) = (\underline{C}, =)$.

Bien entendu, une di-catégorie est une 2-catégorie particulière.

2. Semi-foncteurs.

Si $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont deux di-catégories, on dit que $F = (\mathrm{Ob}\ F, \mathrm{Fl}\ F) : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un semi-foncteur si, et seulement si:

(SF 1) $\mathrm{Ob}\ F : \mathrm{Ob}\ \underline{\underline{B}} \longrightarrow \mathrm{Ob}\ \underline{\underline{C}}$ est une application,

(SF 2) $\mathrm{Fl}\ F : (\mathrm{Fl}\ \underline{\underline{B}}, \leq) \longrightarrow (\mathrm{Fl}\ \underline{\underline{C}}, \leq)$ est une application croissante,

(SF 3) pour toute flèche $x : X \longrightarrow X'$ de $\underline{\underline{B}}$, on a $(\mathrm{Fl}\ F)(x) : (\mathrm{Ob}\ F)(X) \longrightarrow (\mathrm{Ob}\ F)(X')$,

(SF 4) pour tout objet X de $\underline{\underline{B}}$, les flèches $\mathrm{Id}_{(\mathrm{Ob}\ F)(X)}$ et $(\mathrm{Fl}\ F)(\mathrm{Id}_X)$ sont connectées dans l'ensemble ordonné $\underline{\underline{C}}((\mathrm{Ob}\ F)(X),(\mathrm{Ob}\ F)(X))$,

(SF 5) pour toutes flèches $x : X \longrightarrow X'$ et $x' : X' \longrightarrow X''$ de $\underline{\underline{B}}$, les flèches $(\mathrm{Fl}\ F)(x').(\mathrm{Fl}\ F)(x)$ et $(\mathrm{Fl}\ F)(x'.x)$ sont connectées dans $\underline{\underline{C}}((\mathrm{Ob}\ F)(X),(\mathrm{Ob}\ F)(X''))$.

Dans la suite, pour tout objet X de $\underline{\underline{B}}$, on pose $F(X) = (\mathrm{Ob}\ F)(x)$. De même, pour toute flèche x de $\underline{\underline{B}}$, on pose $F(x) = (\mathrm{Fl}\ F)(x)$.

On dit qu'un semi-foncteur $F : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est gauche (resp. droit) si, et seulement si:

(SF 6) pour tout objet X de $\underline{\underline{B}}$, on a $F(\mathrm{Id}_X) \geq \mathrm{Id}_{F(X)}$ (resp. $F(\mathrm{Id}_X) \leq \mathrm{Id}_{F(X)}$),

(SF 7) pour toutes flèches $x : X \longrightarrow X'$ et $x' : X' \longrightarrow X''$ de $\underline{\underline{B}}$, on a $F(x'.x) \geq F(x').F(x)$, (resp. $F(x'.x) \leq F(x').F(x)$).

On dit qu'un semi-foncteur à la fois gauche et droit est un di-foncteur.

A toute di-catégorie $\underline{\underline{C}}$ on associe le <u>di-foncteur identité de</u> $\underline{\underline{C}}$, soit $Id_{\underline{\underline{C}}} = (Id_{Ob\ \underline{C}}, Id_{Fl\ \underline{C}}) : \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$.

Si $F : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ et $G : \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ sont deux semi-foncteurs, alors $F.G = (Ob\ F\ .\ Ob\ G\ ,\ Fl\ F\ .\ Fl\ G) : \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un semi-foncteur, appelé <u>composé de</u> F <u>par</u> G .

Il est clair que, si F et G sont gauches (resp. droits), alors $F.G$ est encore gauche (resp. droit). En particulier, si F et G sont deux di-foncteurs, $F.G$ est aussi un di-foncteur.

Si $\mathcal{U}$ est un univers, on note $\text{Di-Cat}_{\mathcal{U}D}$ (resp. $\text{Di-Cat}_{\mathcal{U}S_g}$, $\text{Di-Cat}_{\mathcal{U}S_d}$, $\text{Di-Cat}_{\mathcal{U}S}$) la catégorie dont les objets sont les di-catégories localement $\mathcal{U}$-petites et dont les morphismes sont les di-foncteurs (resp. les semi-foncteurs gauches, les semi-foncteurs droits, les semi-foncteurs).

On obtient, ainsi, un diagramme commutatif de foncteurs plongements

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Di-Cat}_{\mathcal{U}S_g} \arrow[dr] & \\
\text{Cat}_{\mathcal{U}} \arrow[r] & \text{Di-Cat}_{\mathcal{U}D} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{Di-Cat}_{\mathcal{U}S} . \\
 & & \text{Di-Cat}_{\mathcal{U}S_d} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Bien entendu, les di-foncteurs sont des 2-foncteurs particuliers. Les semi-foncteurs gauches (resp. droits) sont des pseudo-foncteurs gauches (resp. droits) particuliers.

3. <u>Structure longitudinale des semi-transformations</u>.

Si F, $F' : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ sont deux semi-foncteurs, on dit que $N = (N_X)_{X \in Ob\ \underline{\underline{B}}} : F \Longrightarrow F' : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est une *semi-transformation* si, et seulement si:

(ST 1) pour tout objet X de $\underline{\underline{B}}$, on a $N_X : F(X) \longrightarrow F'(X)$,

(ST 2) pour toute flèche $x : X \longrightarrow X'$ de $\underline{\underline{B}}$, les flèches $F'(x).N_X$ et $N_{X'}.F(x)$ sont connectées dans l'ensemble ordonné $\underline{\underline{C}}(F(X), F'(X'))$.

Dans la suite, pour tout objet X de $\underline{\underline{B}}$, on posera $N(X) = N_X$.

On dit qu'une semi-transformation $N : F \Longrightarrow F' : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est *gauche* (resp. *droite*)si et seulement si:

(ST 3) pour toute flèche $x : X \longrightarrow X'$ de $\underline{\underline{B}}$, on a $F'(x).N(X) \geq N(X').F(x)$ (resp. $F'(x).N(X) \leq N(X').F(x)$).

On dit qu'une semi-transformation à la fois gauche et droite est une *di-transformation*.

A tout semi-foncteur $F : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ on associe la *di-transformation identité de* F, soit

$$Id_F = (Id_{F(X)})_{X \in \mathrm{Ob}\, \underline{\underline{B}}} : F \Longrightarrow F : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}} .$$

Si $N : F \Longrightarrow F' : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ et $N' : F' \Longrightarrow F'' : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ sont deux semi-transformations, on note

$$N' \boxdot N : F \Longrightarrow F' : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$$

la semi-tranformation, dite *composée longitudinale de* N *avec* N', telle que:

- pour tout objet X de $\underline{\underline{B}}$, on a $(N' \boxdot N)(X) = N'(X).N(X)$.

Il est clair que, si N et N' sont toutes deux gauches (resp. droites), alors $N' \boxdot N$ est encore gauche (resp. droite). En particulier, si N et N' sont deux di-transformations, alors $N' \boxdot N$ est aussi une di-transformation.

Si $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont deux di-catégories, on note $(\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}})_{ZZ}$, la catégorie telle que:

- ses objets sont les di-foncteurs $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ (resp. les semi-foncteurs gauches, les semi-foncteurs droits, les semi-foncteurs) si $Z = D$ (resp. si $Z = S_g$, $Z = S_d$, $Z = S$),
- ses morphismes sont les di-transformations (resp. les semi-transformations gauches, les semi-transformations droites, les semi-transformations) si $Z' = D$ (resp. $Z' = S_g$, $Z' = S_d$, $Z' = S$).

Posons $D < S_g$, $D < S_d$, $S_g < S$ et $S_d < S$. Pour tout couple (Z,Z') et tout couple (Z_1,Z_1') de $\{D,S_g,S_d,S\} \times \{D,S_g,S_d,S\}$ tels que $Z \leq Z_1$ et $Z' \leq Z_1'$, on a donc un foncteur plongement

$$(\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}})_{ZZ'} \longrightarrow (\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}})_{Z_1Z_1'} .$$

Bien entendu, les di-transformations sont des 2-transformations naturelles particulières. De même, les semi-transformations gauches (resp. droites) sont des pseudo-transformations naturelles particulières.

4. <u>Modifications</u>.

Si $N_1,N_2: F \Longrightarrow F' : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ sont deux semi-transformations, on dit que N_2 est une <u>modification de</u> N_1 et l'on note $N_1 \leq N_2: F \Longrightarrow F' : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$, si et seulement si:

(MO 1) pour tout objet X de $\underline{\underline{B}}$, on a $N_1(X) \leq N_2(X)$.

Si $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont deux di-catégories, on note $((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}}))_{ZZ'}$ la di-catégorie $((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}})_{ZZ'}, \leq)$, où $Z,Z' \in \{D,S_g,S_d,S\}$.

Si (Z,Z') et (Z_1,Z_1') sont deux couples appartenant à l'ensemble $\{D,S_g,S_d,S\}$ et tels que $Z \leq Z_1$ et $Z' \leq Z_1'$, on obtient un di-foncteur plongement:

$$((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}}))_{ZZ'} \longrightarrow ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}}))_{Z_1Z'_1} \quad .$$

Si $N_1, N_2 : F \Longrightarrow F' : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ sont deux semi-transformations, on dit qu'elles sont <u>quasi-connectées</u> si, et seulement si:

(QC 1) pour tout objet X de $\underline{\underline{B}}$, les flèches $N_1(X)$ et $N_2(X)$ sont connectées dans $\underline{\underline{C}}(F(X),F'(X))$.

Evidemment, la relation de quasi-connection sur l'ensemble $Fl\ ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}}))_{ZZ'}$ est plus fine que la relation de connection pour l'ordre (des modifications).

5. <u>Structure latérale des semi-transformations.</u>

Si $G: \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ est un semi-foncteur et si $N: F \Longrightarrow F': \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est une semi-transformation, on note $N.G: F.G \Longrightarrow F'.G : \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ la semi-transformation, dite <u>composée latérale de</u> N <u>avec</u> G , telle que:

- pour tout objet X de $\underline{\underline{A}}$, on a $(N.G)(X) = N(G(X))$.

Il est clair que, si N est une semi-transformation gauche (resp. droite), alors $N.G$ est encore une semi-transformation gauche (resp. droite). A fortiori, si N est une di-transformation, $N.G$ en est aussi une.

Si $G: \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ est un semi-foncteur, la composition latérale avec G définit donc un di-foncteur

$$((\underline{\underline{C}}^{G}))_{SZ'} : ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}}))_{SZ'} \longrightarrow ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{A}}}))_{SZ'} \quad ,$$

pour tout Z' appartenant à $\{D,S_g,S_d,S\}$.

De plus, si G est un semi-foncteur gauche (resp. un semi-foncteur droit, un di-foncteur) $((\underline{\underline{C}}^{G}))_{SZ'}$, admet un di-foncteur restriction

$$((\underline{\underline{C}}^{G}))_{S_gZ'} : ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}}))_{S_gZ'} \longrightarrow ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{A}}}))_{S_gZ'}$$

(resp.
$$((\underline{\underline{C}}^{G}))_{S_dZ'} : ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}}))_{S_dZ'} \longrightarrow ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{A}}}))_{S_dZ'} ,$$
$$((\underline{\underline{C}}^{G}))_{DZ'} : ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{B}}}))_{DZ'} \longrightarrow ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{A}}}))_{DZ'}).$$

Si $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un semi-foncteur et si $M: G \Longrightarrow G': \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ est une semi-transformation, on note $F.M: F.G \Longrightarrow F.G' : \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ la semi-transformation, dite <u>composée latérale de</u> F avec M, telle que:

- pour tout objet X de $\underline{\underline{A}}$, on a $(F.M)(X) = F(M(X))$.

Si $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un di-foncteur, la composition latérale par F définit un di-foncteur:

$$((F^{\underline{\underline{A}}}))_{ZZ'} : ((\underline{\underline{B}}^{\underline{\underline{A}}}))_{ZZ'} \longrightarrow ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{A}}}))_{ZZ'} ,$$

pour tous Z et Z' appartenant à $\{D, S_g, S_d, S\}$.

Par contre, si $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est seulement un semi-foncteur, la composition latérale par F ne définit pas nécessairement un semi-foncteur mais ce que l'on peut appeler un "<u>quasi-semi-foncteur</u>"

$$\left[F^{\underline{\underline{A}}}\right]_{SS} : ((\underline{\underline{B}}^{\underline{\underline{A}}}))_{SS} \longrightarrow ((\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{A}}}))_{SS} ,$$

i. e. qui vérifie:

(QSF 1) $\left[F^{\underline{\underline{A}}}\right]_{SS}$ commute aux applications domaine et co-domaine,

(QSF 2) $\left[F^{\underline{\underline{A}}}\right]_{SS}$ est croissante,

(QSF 3) pour tout semi-foncteur $G: \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$, les semi-transformations $F.Id_G$ et $Id_{F.G}$ sont quasi-connectées,

(QSF 4) pour toutes semi-transformations $M: G \Longrightarrow G' : \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ et $M': G' \Longrightarrow G'' : \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$, les semi-transformations $F.(M' \boxminus M)$ et $(F.M') \boxminus (F.M)$ sont quasi-connectées.

6. Compléments.

Nous rassemblons ici quelques (brefs) compléments techniques qui nous seront utiles dans la suite.

Si $\underline{\underline{A}}$ est une di-catégorie, on note $\underline{\underline{A}}^{op} = (\underline{A}^{op}, \underline{<})$ sa di-catégorie duale. On note $\underline{\underline{A}}^{*} = (\underline{A}, \underline{<}^{op})$ sa di-catégorie $\underline{<}$-duale. Enfin, on pose $\underline{\underline{A}}^{* op} = (\underline{\underline{A}}^{*})^{op} = (\underline{\underline{A}}^{op})^{*}$ et on l'appelle la di-catégorie di-duale de $\underline{\underline{A}}$.

Si $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont deux di-catégories, on note $\underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}} = (\underline{A} \times \underline{B}, \underline{<} \times \underline{<})$ et on l'appelle la di-catégorie produit de $\underline{\underline{A}}$ par $\underline{\underline{B}}$ (si $\mathcal{U}$ est un univers et si $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont deux di-catégories localement $\mathcal{U}$-petites, $\underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}}$ est produit de $\underline{\underline{A}}$ par $\underline{\underline{B}}$ dans $\text{Di-Cat}_{\mathcal{U}D}$, $\text{Di-Cat}_{\mathcal{U}S_d}$, $\text{Di-Cat}_{\mathcal{U}S_g}$ et $\text{Di-Cat}_{\mathcal{U}S}$).

Si $\mathcal{U}$ est un univers, on note $\underline{\underline{\text{Ord}}}_{\mathcal{U}}$ la di-catégorie localement $\mathcal{U}$-petite telle que:

- ses objets sont les ensembles ordonnés $(E, \underline{<})$ tels que E appartient à $\mathcal{U}$,
- ses morphismes sont les applications croissantes,
- si $f, f' : (E, \underline{<}) \longrightarrow (E', \underline{<})$ sont deux applications croissantes, on pose $f \underline{<} f'$ si, et seulement si, $f(x) \underline{<} f'(x)$ pour tout élément x de E.

Si $\mathcal{U}$ est un univers et $\underline{\underline{A}}$ est une di-catégorie localement $\mathcal{U}$-petite, on note

$$\underline{\underline{A}}(-,-): \underline{\underline{A}}^{op} \times \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{Ord}}_{\mathcal{U}}$$

le di-foncteur admettant pour foncteur sous-jacent

$$\underline{A}(-,-): \underline{A}^{op} \times \underline{A} \longrightarrow Ens_{\mathcal{U}} \quad .$$

Si $H: \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{A}}'$ est un semi-foncteur entre di-catégories localement $\mathcal{U}$-petites, on pose:

- $\underline{\underline{A}}'(H-,-) = \underline{\underline{A}}'(-,-).\ (H^{op} \times Id_{\underline{\underline{A}}'}): \underline{\underline{A}}^{op} \times \underline{\underline{A}}' \longrightarrow \underline{\underline{Ord}}_{\mathcal{U}}$
- $\underline{\underline{A}}'(-,H-) = \underline{\underline{A}}'(-,-).\ (Id_{\underline{\underline{A}}'}{}^{op} \times H): \underline{\underline{A}}'^{op} \times \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{Ord}}_{\mathcal{U}}.$

Si $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un semi-foncteur, on dit qu'il est <u>homogène</u> si, et seulement si:

(HO 1) pour tout objet X de B, on a $F(Id_X) = Id_{F(X)}$.

Bien entendu, le composé de deux semi-foncteurs homogènes est encore homogène et un di-foncteur est toujours homogène.

o 0 o

CHAPITRE II: QUASI-ADJONCTIONS, SEMI-ADJONCTIONS, SESQUI-ADJONCTIONS, DI-ADJONCTIONS.

1. Quasi-projecteurs. Semi-projecteurs.

Si $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un semi-foncteur droit, si C est un objet de $\underline{\underline{C}}$, si B_C est un objet de $\underline{\underline{B}}$ et si $e_C: C \longrightarrow F(B_C)$ est une flèche de $\underline{\underline{C}}$, on dit que $(C, B_C, e_C, e_C^!)$ est un F-*quasi-projecteur* si, et seulement si:

(QP 1) $e_C^!$ associe à tout objet B de $\underline{\underline{B}}$ et à toute flèche $x: C \longrightarrow F(B)$ de $\underline{\underline{C}}$ une flèche $e_C^!(B,x): B_C \longrightarrow B$ de $\underline{\underline{B}}$ telle que $F(e_C^!(B,x)).e_C \leq x$,

(QP 2) si B est un objet de $\underline{\underline{B}}$, si $y: B_C \longrightarrow B$ est une flèche de $\underline{\underline{B}}$ et si $x: C \longrightarrow F(B)$ est une flèche de $\underline{\underline{C}}$ tels que $F(y).e_C \leq x$, alors $y \leq e_C^!(B,x)$.

On dit qu'un F-quasi-projecteur $(C, B_C, e_C, e_C^!)$ est un F-*semi-projecteur* si, et seulement si:

(QP 3) si B est un objet de $\underline{\underline{B}}$ et si $x: C \longrightarrow F(B)$ est une flèche de $\underline{\underline{C}}$, on a $F(e_C^!(B,x)).e_C = x$.

On dit qu'un semi-foncteur droit F *admet la famille de quasi-projecteurs* (resp. *de semi-projecteurs*) $(C, B_C, e_C, e_C^!)_{C \in \mathrm{Ob}\, \underline{\underline{C}}}$ si, et seulement si:

(QP 4) pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, $(C, B_C, e_C, e_C^!)$ est un F-quasi-projecteur (resp. un F-semi-projecteur).

Par di-dualité, on définit les quasi-co-projecteurs et les semi-co-projecteurs relatifs à un semi-foncteur gauche, ainsi que les semi-foncteurs gauches admettant une famille de quasi-co-projecteurs (resp. de semi-co-projecteurs).

2. Quasi-adjonctions. Semi-adjonctions. Sesqui-adjonctions. Di-adjonctions.

Si $\mathcal{U}$ est un univers, si $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont deux di-catégories localement $\mathcal{U}$-petites, si $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un semi-foncteur droit, si $F': \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ est un semi-foncteur gauche, on dit que (F',E,M,F) est une quasi-adjonction si, et seulement si:

(QA 1) $E: \underline{\underline{B}}(F'-,-) \Longrightarrow \underline{\underline{C}}(-,F-): \underline{\underline{C}}^{op} \times \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{Ord}}_{\mathcal{U}}$ est une semi-transformation gauche,

(QA 2) $M: \underline{\underline{C}}(-,F-) \Longrightarrow \underline{\underline{B}}(F'-,-): \underline{\underline{C}}^{op} \times \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{Ord}}_{\mathcal{U}}$ est une semi-transformation droite,

(QA 3) pour tout objet B de $\underline{\underline{B}}$ et tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, l'application croissante $M(C,B): \underline{\underline{C}}(C,FB) \longrightarrow \underline{\underline{B}}(F'C,B)$ est adjointe à droite de l'application croissante $E(C,B): \underline{\underline{B}}(F'C,B) \longrightarrow \underline{\underline{C}}(C,FB)$.

Dans ces conditions, prouvons que:

Proposition 1. Si $\mathcal{U}$ est un univers, si $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un semi-foncteur droit entre di-catégories localement $\mathcal{U}$-petites et si F admet une famille $(C,B_C,e_C,e'_C)_{C \in Ob\, \underline{\underline{C}}}$ de quasi-projecteurs, alors il lui est associée une quasi-adjonction (F',E,M,F).

Preuve. Pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, posons $F'(C) = B_C$ et, pour toute flèche $x: C \longrightarrow C'$ de $\underline{\underline{C}}$, posons $F'(x) = e'_C(B_{C'},e_{C'}.x)$.
Si $x_1,x_2: C \longrightarrow C'$ sont deux flèches de $\underline{\underline{C}}$ telles que $x_1 \leq x_2$, nous avons donc:

- $F(e'_C(B_{C'},e_{C'}.x_1)).e_C \leq e_{C'}.x_1 \leq e_{C'}.x_2$,

on en conclut que $F'(x_1) \leq F'(x_2)$.
Si C est un objet de $\underline{\underline{C}}$, nous avons:

- $F(Id_{F'C}).e_C \leq Id_{FF'C}.e_C = e_C.Id_C$,

et donc $Id_{F'C} \leq F'(Id_C)$.

Si $x: C \longrightarrow C'$ et $x': C' \longrightarrow C''$ sont deux flèches de $\underline{\underline{C}}$, on a:

- $F(F'(x').F'(x)).e_C \leq FF'(x').FF'(x).e_C \leq FF'(x').e_{C'}.x \leq$
$\leq e_{C''}.x'.x$,

par conséquent $F'(x').F'(x) \leq F'(x'.x)$.

Nous avons donc construit un semi-foncteur gauche $F': \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$, "quasi-adjoint à gauche" de F .

Pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, tout objet B de $\underline{\underline{B}}$ et toute flèche $y: F'C \longrightarrow B$ de $\underline{\underline{B}}$, posons $E(C,B)(y) = F(y).e_C$.

On définit bien, ainsi, une application croissante

$$E(C,B): \underline{\underline{B}}(F'C,B) \longrightarrow \underline{\underline{C}}(C,FB) .$$

Pour toutes flèches $c: C' \longrightarrow C$ de $\underline{\underline{C}}$, $b: B \longrightarrow B'$ de $\underline{\underline{B}}$ et $y: F'C \longrightarrow B$ de $\underline{\underline{B}}$, nous avons:

- $E(C,B').\underline{\underline{B}}(F'c,b)(y) = F(b.y.F'c).e_{C'} \leq Fb.Fy.FF'c.e_{C'} \leq$
$\leq Fb.Fy.e_C.c = \underline{\underline{C}}(c,Fb).E(C,B)(y)$,

par conséquent $E: \underline{\underline{B}}(F'-,-) \Longrightarrow \underline{\underline{C}}(-,F-): \underline{\underline{C}}^{op} \times \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{Ord}}_{\mathcal{U}}$ est bien une semi-transformation gauche.

Pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, tout objet B de $\underline{\underline{B}}$ et toute flèche $x: C \longrightarrow FB$ de $\underline{\underline{C}}$, posons $M(C,B)(x) = e_C^!(B,x)$.

Si $x_1,x_2: C \longrightarrow FB$ sont deux flèches de $\underline{\underline{C}}$ telles que $x_1 \leq x_2$, nous avons:

- $F(M(C,B)(x_1)).e_C = F(e_C^!(B,x_1)).e_C \leq x_1 \leq x_2$,

et donc $M(C,B)(x_1) \leq e_C^!(B,x_2) = M(C,B)(x_2)$.

Ainsi, on a bien défini une application croissante

$$M(C,B): \underline{\underline{C}}(C,FB) \longrightarrow \underline{\underline{B}}(F'C,B) .$$

Pour toutes flèches $c: C' \longrightarrow C$ de $\underline{\underline{C}}$, $b: B \longrightarrow B'$ de $\underline{\underline{B}}$ et $x: C \longrightarrow FB$ de $\underline{\underline{C}}$, on a:

- $F(\underline{\underline{B}}(F'c,b).M(C,B)(x)).e_{C'} = F(b.e_C^!(B,x).F'c).e_{C'} \leq$
$\leq Fb.F(e_C^!(B,x)).FF'c.e_{C'} \leq Fb.F(e_C^!(B,x)).e_C.c \leq Fb.x.c$,

il en résulte que:

$- B(F'c,b).M(C,B)(x) \leq e^{!}_{C'}(B',Fb.x.c) = M(C',B').\underline{\underline{C}}(c,Fb)(x)$.

Par conséquent, $M: \underline{\underline{C}}(-,F-) \Longrightarrow \underline{\underline{B}}(F'-,-): \underline{\underline{C}}^{op} \times \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{Ord}}_{\mathcal{U}}$
est bien une semi-transformation droite.

On conclut, alors, facilement. //

Par "di-dualité", on peut évidemment énoncer:

Proposition 2. Si $\mathcal{U}$ est un univers, si $F': \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ est un semi-foncteur gauche entre di-catégories localement $\mathcal{U}$-petites et si F' admet une famille $(B,C_B,m_B,m'_B)_{B \in Ob\,\underline{\underline{B}}}$ de semi-coprojecteurs, alors il lui est associée une quasi-adjonction (F',E,M,F).

La réciproque de la proposition 1 (ou de la proposition 2) n'est vraie que dans certains cas particuliers. Plus précisément, si $\mathcal{U}$ est un univers, si $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont deux di-catégories localement $\mathcal{U}$-petites, si $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un semi-foncteur droit et si $F': \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ est un semi-foncteur gauche, on dit que (F',E,M,F) est une quasi-adjonction gauche si, et seulement si, c'est une quasi-adjonction et:

(QA 4) F est homogène,

(QA 5) pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, tout objet B de $\underline{\underline{B}}$ et toute flèche $y: F'C \longrightarrow B$ de $\underline{\underline{B}}$, on a
$E(C,B)(y) = F(y).E(C,F'C)(Id_{F'C})$,

(QA 6) pour toute flèche $x: C \longrightarrow C'$ de $\underline{\underline{C}}$, on a
$F'(x) = M(C,F'C')(E(C',F'C')(Id_{F'C'}).x)$.

Dans ces conditions nous avons:

Proposition 3. Si $\mathcal{U}$ est un univers, si $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un semi-foncteur droit et homogène entre di-catégories localement $\mathcal{U}$-petites, alors F admet une famille $(C,B_C,e_C,e^{!}_C)_{C \in Ob\,\underline{\underline{C}}}$ de quasi-projecteurs si, et seulement si, F admet une quasi-adjonction gauche (F',E,M,F) .

<u>Preuve</u>. Supposons que F admet la famille $(C,B_C,e_C,e'_C)_{C\in \mathrm{Ob}\,\underline{\underline{C}}}$ de quasi-projecteurs. D'après la proposition 1 (dont nous reprenons les notations et constructions de la preuve), il lui est associée une quasi-adjonction (F',E,M,F). Pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, tout objet B de $\underline{\underline{B}}$ et toute flèche $y: F'(C) \longrightarrow B$ de $\underline{\underline{B}}$, on a:

- $E(C,B)(y) = Fy.e_C = Fy.Id_{FB_C}.e_C = Fy.FId_{B_C}.e_C = Fy.E(C,F'C)(Id_{F'C})$,

et donc (QA 5) est vérifiée.

On en déduit que les applications croissantes

$$E(C,B)\ ,\ F(-).e_C : \underline{\underline{B}}(F'C,B) \longrightarrow \underline{\underline{C}}(C,FB)$$

sont égales. Comme $E(C,B)$ admet $M(C,B)$ pour adjointe à droite et $F(-).e_C$ admet, par définition, $e'_C(B,-)$ pour adjointe à droite, on a donc $M(C,B) = e'_C(B,-)$. Il en résulte que, pour toute flèche $x: C \longrightarrow C'$ de $\underline{\underline{C}}$, on a:

- $F'(x) = e'_C(F'C',e_{C'}.x) = M(C,F'C')(e_{C'}.x) =$
$= M(C,F'C')(E(C',F'C')(Id_{F'C'}).x)$,

et donc (QA 6) est vérifiée.

Inversement, supposons que (F',E,M,F) est une quasi-adjonction gauche. Si l'on pose:

- pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, $e_C = E(C,F'C)(Id_{F'C})$,
- pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, tout objet B de $\underline{\underline{B}}$ et toute flèche $x: C \longrightarrow FB$ de $\underline{\underline{C}}$, $e'_C(B,x) = M(C,B)(x)$,

on montre facilement que F admet bien $(C,F'C,e_C,e'_C)_{C\in \mathrm{Ob}\,\underline{\underline{C}}}$ pour famille de quasi-projecteurs. //

Par "di-dualité", on dit que (F',E,M,F) est une quasi-adjonction <u>droite</u> si, et seulement si, c'est une quasi-adjonction et:

(QA 7) F' est homogène,

(QA 8) pour tout objet B de $\underline{\underline{B}}$, tout objet C de $\underline{\underline{C}}$ et toute flèche $x: C \longrightarrow FB$ de $\underline{\underline{C}}$, on a

$M(C,B)(x) = M(FB,B)(Id_{FB}).F'(x)$,

(QA 9) pour toute flèche $y: B \longrightarrow B'$ de $\underline{\underline{B}}$, on a
$F(y) = E(FB,B')(y.M(FB,B)(Id_{FB}))$.

On peut donc énoncer la proposition "di-duale" de la proposition 3:

Proposition 4. *Si* $\mathcal{U}$ *est un univers, si* $F': \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ *est un semi-foncteur gauche et homogène entre di-catégories localement* $\mathcal{U}$*-petites, alors* F' *admet une famille* $(B,C_B,m_B,m'_B)_{B \in Ob\, \underline{\underline{B}}}$ *de quasi-co-projecteurs si, et seulement si,* F' *admet une quasi-adjonction droite* (F',E,M,F) .

Plus particulièrement encore, on dit que (F',E,M,F) est une *semi-adjonction gauche* si, et seulement si, c'est une quasi-adjonction gauche et:

(QA 10) $E \boxdot M = Id_{\underline{\underline{C}}(-,F-)}$.

On prouve, alors, facilement que:

Proposition 5. *Si* $\mathcal{U}$ *est un univers, si* $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ *est un semi-foncteur droit et homogène entre di-catégories localement* $\mathcal{U}$*-petites, alors* F *admet une famille* $(C,B_C,e_C,e'_C)_{C \in Ob\, \underline{\underline{C}}}$ *de semi-projecteurs si, et seulement si,* F *admet une semi-adjonction gauche* (F',E,M,F) .

Par "di-dualité", on dit que (F',E,M,F) est une *semi-adjonction droite* si, et seulement si, c'est une quasi-adjonction droite et:

(QA 11) $M \boxdot E = Id_{\underline{\underline{B}}(F'-,-)}$.

Alors, il est tout aussi clair que:

Proposition 6. *Si* $\mathcal{U}$ *est un univers, si* $F': \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ *est un semi-foncteur gauche et homogène entre di-catégories localement* $\mathcal{U}$*-petites, alors* F' *admet la famille* $(B,C_B,m_B,m'_B)_{B \in Ob\, \underline{\underline{B}}}$ *de semi-co-projecteurs si, et seulement si,* F' *admet une semi-ad-*

jonction droite (F',E,M,F) .

On appelle sesqui-adjonction gauche toute quasi-adjonction (F',E,M,F) telle que:

(SAG 1) (F',E,M,F) est une semi-adjonction gauche,

(SAG 2) (F',E,M,F) est une quasi-adjonction droite,

(SAG 3) F est un di-foncteur et F' est homogène.

De même, on appelle sesqui-adjonction droite toute quasi-adjonction (F',E,M,F) telle que:

(SAD 1) (F',E,M,F) est une semi-adjonction droite,

(SAD 2) (F',E,M,F) est une quasi-adjonction gauche,

(SAD 3) F' est un di-foncteur et F est homogène.

Enfin, on appelle di-adjonction toute sesqui-adjonction à la fois gauche et droite: ce sont donc des 2-adjonctions particulières. (On remarquera que les quasi-adjonctions à la fois gauches et droites - auxquelles nous omettons volontairement de donner un nom particulier - ne sont pas, en général des di-adjonctions; de même, les semi-adjonctions à la fois gauches et droites - que nous omettons tout aussi volontairement de qualifier - ne sont pas, en général, des di-adjonctions.)

o O o

CHAPITRE III: SESQUI-MONADES. SESQUI-MONADICITE.

1. Sesqui-monades.

Si $\underline{\underline{C}}$ est une di-catégorie, on dit que $\underline{T} = (T, \varepsilon, \mu)$ est une *sesqui-monade sur* $\underline{\underline{C}}$ si, et seulement si:

(SM 1) $T : \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un semi-foncteur gauche et homogène,

(SM 2) $\varepsilon : Id_{\underline{\underline{C}}} \Longrightarrow T : \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est une di-transformation,

(SM 3) $\mu : T^2 \Longrightarrow T : \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est une semi-transformation droite,

(SM 4) $\mu \boxdot (\varepsilon . T) = Id_{Id_{\underline{\underline{C}}}} . T = \mu \boxdot (T . \varepsilon) = T . Id_{Id_{\underline{\underline{C}}}}$,

(SM 5) $\mu \boxdot (\mu . T) \leq \mu \boxdot (T . \mu)$,

(SM 6) pour toute flèche $x : C \longrightarrow C'$ de $\underline{\underline{C}}$, on a $\mu(C').T(\varepsilon(C').x) = T(x)$.

Dans ces conditions, on a:

Proposition 7. Si $\mathcal{U}$ *est un univers, si* $\underline{\underline{B}}$ *et* $\underline{\underline{C}}$ *sont deux di-catégories localement* $\mathcal{U}$*-petites, si* $F : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ *est un di-foncteur, si* $F' : \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ *est un semi-foncteur gauche et homogène, si* (F', E, M, F) *est une sesqui-adjonction gauche, alors il lui est associée une sesqui-monade* $\underline{T} = (F.F', \varepsilon, \mu)$ *sur* $\underline{\underline{C}}$

Preuve. Puisque F est un di-foncteur et F' est un semi-foncteur gauche et homogène, $F.F' = T : \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un semi-foncteur gauche et homogène et (SM 1) est donc vérifiée.

Comme (F', E, M, F) est une quasi-adjonction gauche (particulière),

il lui est associée une famille $(C,F'C,e_C,e'_C)_{C\in Ob\,\underline{\underline{C}}}$ de F-quasi-projecteurs, comme dans la preuve de la proposition 3 (dont nous reprenons les notations et constructions).
Pour toute flèche $x: C \longrightarrow C'$ de $\underline{\underline{C}}$, nous avons donc:

(1) $F'(x) = M(C,F'C')(E(C',F'C')(Id_{F'C'}).x) = e'_C(F'C',e_{C'}.x)$.

Puisque (F',E,M,F) est une semi-adjonction gauche, pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, $(C,F'C,e_C,e'_C)$ est un F-semi-projecteur.
Pour tout objet B de $\underline{\underline{B}}$, tout objet C de $\underline{\underline{C}}$ et toute flèche $x: C \longrightarrow FB$ de $\underline{\underline{C}}$, nous avons donc:

(2) $F(e'_C(B,x)).e_C = x$.

Comme (F',E,M,F) est une quasi-adjonction droite, il lui est associée (en vertu de la proposition 4) une famille $(B,FB,m_B,m'_B)_{B\in Ob\,\underline{\underline{B}}}$ de F'-quasi-co-projecteurs.
Pour tout objet B de $\underline{\underline{B}}$, nous avons donc:

(3) $m_B = M(FB,B)(Id_{FB}) = e'_{FB}(B,Id_{FB})$.

De même, en vertu de (QA 8) , pour tout objet B de $\underline{\underline{B}}$, tout objet C de $\underline{\underline{C}}$ et toute flèche $x: C \longrightarrow FB$ de $\underline{\underline{C}}$, nous avons:

(4) $e'_C(B,x) = M(C,B)(x) = M(FB,B)(Id_{FB}).F'x = m_B.F'(x)$.

Pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, posons $\varepsilon(C) = e_C : C \longrightarrow TC$.
Alors, pour toute flèche $x: C \longrightarrow C'$ de $\underline{\underline{C}}$, nous avons, en appliquant (1) et (2):

- $T(x).\varepsilon(C) = FF'(x).e_C = F(e'_C(F'C',e_{C'}.x)).e_C = e_{C'}.x = \varepsilon(C').x.$

Par conséquent, $\varepsilon : Id_{\underline{\underline{C}}} \Longrightarrow T : \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est une di-transformation et (SM 2) est vérifiée.

Pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, posons $\mu(C) = F(m_{F'C}): T^2C \longrightarrow TC.$
Alors, pour toute flèche $x: C \longrightarrow C'$ de $\underline{\underline{C}}$, nous avons, puisque F est un di-foncteur et en appliquant (4):

- $\mu(C').T^2(x) = F(m_{F'C'}).FF'Tx = F(m'_{F'C'}.F'Tx) = F(e'_{TC}(F'C',Tx)).$

D'autre part, en appliquant (3), puis (2), et puisque F est un di-foncteur, nous obtenons:

$$- F(F'x.m_{F',C}).e_{TC} = Tx.F(m_{F',C}).e_{TC} = Tx.F(e'_{TC}(F'C,Id_{TC})).e_{TC} =$$
$$= Tx.Id_{TC} = Tx \; .$$

Il en résulte que $F'x.m_{F',C} \leq e'_{TC}(F'C',Tx)$ et, puisque F est un di-foncteur, $FF'x.Fm_{F',C'} = Tx.\mu(C) \leq \mu(C').T^2(x)$.

Ceci prouve que $\mu\colon T^2 \Longrightarrow T\colon \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est une semi-transformation droite et donc que (SM 3) est vérifiée.

Pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, nous avons, en appliquant (3) et (2):

$$- \mu(C).\varepsilon(TC) = F(m_{F',C}).e_{TC} = F(e'_{TC}(F'C,Id_{TC})).e_{TC} = Id_{TC}.$$

De même, puisque F est un di-foncteur et en appliquant (4) et (1), on obtient:

$$- \mu(C).T(\varepsilon(C)) = F(m_{F',C}).FF'(e_C) = F(m_{F',C}.F'e_C) = F(e'_C(F'C,e_C)) =$$
$$= F(e'_C(F'C,e_C.Id_C)) = FF'(Id_C) = T(Id_C) \; .$$

Autrement dit, (SM 4) est vérifiée.

Pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, puisque F est un di-foncteur et en appliquant (4), on a:

$$- \mu(C).T(\mu(C)) = F(m_{F',C}.F'\mu(C)) = F(e'_{T^2C}(F'C,\mu(C))) \; .$$

En appliquant (3) et (2), il vient aussi:

$$- \mu(C).\mu(TC).e_{T^2C} = \mu(C).F(m_{F',TC}).e_{T^2C} = \mu(C).F(e'_{T^2C}(F'TC,Id_{T^2C})).e_{T^2C} =$$
$$= \mu(C).Id_{T^2C} = \mu(C).$$

Puisque F est un di-foncteur, on en déduit que

$$m_{F',C}.m_{F',TC} \leq m_{F',C}.F'\mu(C)$$

et donc que

$$\mu(C).\mu(TC) \leq \mu(C).T(\mu(C)).$$

Autrement dit, (SM 5) est vérifiée.

Enfin, pour toute flèche $x\colon C \longrightarrow C'$ de $\underline{\underline{C}}$, on a, en appliquant (1) et (4):

$- F'(x) = M(C,F'C')(E(C',F'C')(Id_{F'C'}).x) =$

$= M(C,F'C')(e_{C'}.x) = M(TC',F'C')(Id_{F'C'}).F'(e_{C'}.x) =$

$= m_{F'C'}.F'(e_{C'}.x)$.

D'où il résulte, puisque F est un di-foncteur:

$- T(x) = \mu(C').T(\varepsilon(C').x)$,

c'est-à-dire que (SM 6) est vérifiée. //

2. Sesqui-algèbres.

Supposons que $\mathcal{U}$ est un univers, $\underline{\underline{C}}$ est une di-catégorie localement $\mathcal{U}$-petite et $\underline{T} = (T, \varepsilon, \mu)$ est une sesqui-monade sur $\underline{\underline{C}}$.

Si C est un objet de $\underline{\underline{C}}$ et $\lambda: TC \longrightarrow C$ est une flèche de $\underline{\underline{C}}$, on dit que (C,λ) est une $\underline{T}$-sesqui-algèbre si, et seulement si:

(SAl 1) $\lambda.\varepsilon(C) = Id_C$,

(SAl 2) $\lambda.\mu(C) \leq \lambda.T(\lambda)$.

On pose, alors, $U((C,\lambda)) = C$.

Si (C,λ) et (C',λ') sont deux $\underline{T}$-sesqui-algèbres et si $c: C \longrightarrow C'$ est une flèche de $\underline{\underline{C}}$, on dit que $\overline{c} = ((C,\lambda),c,(C',\lambda')): (C,\lambda) \longrightarrow (C',\lambda')$ est un homomorphisme (de $\underline{T}$-sesqui-algèbres) si, et seulement si:

(HM 1) $c.\lambda \leq \lambda'.T(c)$.

On pose, alors $U(\overline{c}) = c$.

A toute $\underline{T}$-sesqui-algèbre (C,λ) on associe l'homomorphisme identique $Id_{(C,\lambda)} = \overline{Id_C}$.

Si $\overline{c}$: $(C,\lambda) \longrightarrow (C',\lambda')$ et $\overline{c'}$: $(C',\lambda') \longrightarrow (C'',\lambda'')$ sont deux homomorphismes, nous avons, puisque T est un semi-foncteur gauche:

- $\lambda''.T(c'.c) \geq \lambda''.Tc'.Tc \geq c'.\lambda'.Tc \geq c'.c.\lambda$,

par conséquent, $\overline{c'.c}$ est encore un homomorphisme, dit <u>composé de $\overline{c'}$ avec $\overline{c}$</u> .

Si $\overline{c_1},\overline{c_2}$: $(C,\lambda) \longrightarrow (C',\lambda')$ sont deux homomorphismes de $\underline{T}$-sesqui-algèbres, on note $\overline{c_1} \leq \overline{c_2}$ si, et seulement si, $c_1 \leq c_2$.

On désigne, alors, par $SAlg(\underline{T})$ la di-catégorie localement $\mathcal{U}$-petite dont les objets sont les $\underline{T}$-sesqui-algèbres et dont les morphismes sont les homomorphismes de $\underline{T}$-sesqui-algèbres. Clairement, U: $SAlg(\underline{T}) \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un di-foncteur.

Dans ces conditions, prouvons que:

<u>Proposition</u> 8. <u>Si $\mathcal{U}$ est un univers, à toute sesqui-monade $\underline{T} = (T,\varepsilon,\mu)$ sur une di-catégorie localement $\mathcal{U}$-petite $\underline{\underline{C}}$ est associée une sesqui-adjonction gauche</u> $(U',\overline{E},\overline{M},U\colon SAlg(\underline{T}) \longrightarrow \underline{\underline{C}})$.

<u>Preuve</u>. Remarquons, tout d'abord, que si C est un objet de $\underline{\underline{C}}$, si (C',λ') est une $\underline{T}$-sesqui-algèbre et si $x\colon C \longrightarrow C'$ est une flèche de $\underline{\underline{C}}$, on a:

- $(TC,\mu(C))$ est une $\underline{T}$-sesqui-algèbre,
- $\lambda'.T(\lambda'.Tx) \geq \lambda'.T\lambda'.T^2x \geq \lambda'.\mu(C').T^2x \geq (\lambda'.Tx).\mu(C)$,

par conséquent, $\varepsilon'_C((C',\lambda'),x) = \overline{\lambda'.Tx}$: $(TC,\mu(C)) \longrightarrow (C',\lambda')$ est un homomorphisme.

Montrons, maintenant, que $(C,(TC,\mu(C)),\varepsilon(C),\varepsilon'_C)_{C\in Ob\,\underline{\underline{C}}}$ est une famille de U-semi-projecteurs.

Pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, toute $\underline{T}$-sesqui-algèbre (C',λ') et toute flèche $x\colon C \longrightarrow C'$ de $\underline{\underline{C}}$, nous avons:

- $U(\overline{\lambda'.Tx}).\varepsilon(C) = \lambda'.Tx.\varepsilon(C) = \lambda'.\varepsilon(C').x = Id_{C'}.x = x$.

De plus, si $\overline{x_1}$: $(TC,\mu(C)) \longrightarrow (C',\lambda')$ est un homomorphisme tel que $x_1.\varepsilon(C) = U(\overline{x_1}).\varepsilon(C) \leq x$, il vient:

$- \lambda'.Tx \geq \lambda'.T(x_1.\varepsilon(C)) \geq \lambda'.Tx_1.T(\varepsilon(C)) \geq x_1.\mu(C).T(\varepsilon(C)) \geq x_1.$

Par conséquent, nous avons bien construit une famille de U-semi-projecteurs.

Notons $(U',\overline{E},\overline{M},U)$ la quasi-adjonction associée (comme dans la proposition 1) à cette famille. Comme U est un di-foncteur, la proposition 5 s'applique et $(U',\overline{E},\overline{M},U)$ est une semi-adjonction gauche. En conséquence (SAG 1) est vérifiée.

Montrons, maintenant, que $(U',\overline{E},\overline{M},U)$ est une quasi-adjonction droite.

Pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, on a:

$- U'(Id_C) = \overline{\mu(C).T(\varepsilon(C).Id_C)} = \overline{T(Id_C)} = \overline{Id_{TC}}$,

et donc (QA 7) est vérifiée.

Pour toute $\underline{T}$-sesqui-algèbre (C',λ') , tout objet C de $\underline{\underline{C}}$ et toute flèche $x: C \longrightarrow C'$ de $\underline{\underline{C}}$, on a:

$- \lambda'.T\lambda' \geq \lambda'.\mu(C')$, donc $\overline{\lambda'} : (TC',\mu(C')) \longrightarrow (C',\lambda')$ est un homomorphisme,

$- \mu(C').T^2x \geq Tx.\mu(C)$, donc $\overline{T(x)}: (C,\mu(C)) \longrightarrow (C',\mu(C'))$ est un homomorphisme,

on en déduit que:

$- \overline{M}(C,(C',\lambda')(x) = \varepsilon_C'((C',\lambda'),x) = \overline{\lambda'.Tx} = \overline{\lambda'}.\overline{Tx}$,

$- \overline{M}(U(C,\lambda),(C',\lambda'))(Id_C).U'(x) = \overline{M}(C,(C',\lambda'))(Id_C).U'(x) =$

$= \varepsilon_C'((C',\lambda'),Id_C).U'(x) = \overline{\lambda'.T(Id_C)}.U'(x) = \overline{\lambda'}.U'(x) =$

$= \overline{\lambda'}.\overline{\mu(C').T(\varepsilon(C').x)} = \overline{\lambda'}.\overline{Tx}$,

et, par conséquent, (QA 8) est vérifiée.

Enfin, pour tout homomorphisme $\overline{x}: (C,\lambda) \longrightarrow (C',\lambda')$, on a:

$- U(\overline{x}) = x$,

$- \overline{E}(U(C,\lambda),(C',\lambda'))(\overline{x}.\overline{M}(U(C,\lambda),(C,\lambda))(Id_C)) =$

$= \overline{E}(C,(C',\lambda'))(\overline{x}.\overline{M}(C,(C,\lambda))(Id_C)) = U(\overline{x}.\overline{M}(C,(C,\lambda))(Id_C)).\varepsilon(C) =$

$= U(\overline{x}).U(\overline{M}(C,(C,\lambda))(Id_C)).\varepsilon(C) = U(\overline{x}).Id_C = U(\overline{x}) = x$,

et, donc, (QA 9) est vérifiée.

Au total, (SAG 2) est vérifiée.

On conclut facilement. //

3. Sesqui-monadicité.

Prouvons que:

Proposition 9. Si $\mathcal{U}$ est un univers, si $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont deux di-catégories localement $\mathcal{U}$-petites, si $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un di-foncteur, si $F': \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ est un semi-foncteur gauche et homogène, si (F',E,M,F) est une sesqui-adjonction gauche, si $\underline{T} = (F.F', \epsilon, \mu)$ est la sesqui-monade qui lui est associée (comme dans la proposition 7) et si $(U',\overline{E},\overline{M},U: \mathrm{SAlg}(\underline{T}) \longrightarrow \underline{\underline{C}})$ est la sesqui-adjonction gauche associée (comme dans la proposition 8) à cette sesqui-monade, alors il existe un unique di-foncteur, dit de comparaison, $V : \underline{\underline{B}} \longrightarrow \mathrm{SAlg}(\underline{T})$ tel que $U.V = F$ et $V.F' = U'$.

Preuve. Notons $(C,F'C,e_C,e'_C)_{C\in \mathrm{Ob}\,\underline{\underline{C}}}$ la famille de F-semi-projecteurs associée (comme dans la proposition 3) à la semi-adjonction gauche (F',E,M,F). Notons, également, $(B,FB,m_B,m'_B)_{B\in \mathrm{Ob}\,\underline{\underline{B}}}$ la famille de F'-quasi-co-projecteurs associée (comme dans la proposition 4) à la quasi-adjonction droite (F',E,M,F) .

Pour tout objet B de $\underline{\underline{B}}$, en appliquant (QA 8), nous avons:

$$- m_B.F'Fm_B = M(FB,B)(Id_{FB}).F'(Fm_B) = M(TFB,B)(Fm_B) =$$
$$= e'_{TFB}(B,Fm_B) ,$$

et, puisque F est un di-foncteur et en appliquant (QA 5) et (QA 10), nous avons aussi:

$$- F(m_B.m_{F'FB}).e_{TFB} = F(m_B).F(m_{F'FB}).e_{TFB} =$$
$$= F(m_B).E(TFB,F'FB)(M(TFB,F'FB)(Id_{TFB})) = F(m_B).Id_{TFB} = F(m_B) .$$

Il en résulte que $m_B.F'Fm_B \geq m_B.m_{F'FB}$, ou encore que $Fm_B.TFm_B \geq Fm_B.Fm_{F'FB}$.
Par conséquent:

- $V(B) = (FB,Fm_B)$ est une $\underline{T}$-sesqui-algèbre.

Pour toute flèche $b: B \longrightarrow B'$ de $\underline{\underline{B}}$, nous avons, de même:

- $m_{B'}.F'Fb = e'_{FB}(B',Fb)$,
- $F(b.m_B).e_{FB} = Fb.(Fm_B.e_{FB}) = Fb$.

Il en résulte que $m_{B'}.F'Fb \geq b.m_B$, ou encore que l'on a $F(m_{B'}).T(Fb) \geq Fb.F(m_B)$.

Par conséquent:

- $V(b) = \overline{F(b)} : (FB,Fm_B) \longrightarrow (FB',Fm_{B'})$ est un homomorphisme.

Clairement, on définit ainsi un di-foncteur $V: \underline{\underline{B}} \longrightarrow SAlg(\underline{T})$.
Pour tout objet B de $\underline{\underline{B}}$, on a:

- $UV(B) = U(FB,Fm_B) = FB$.

Pour toute flèche $b: B \longrightarrow B'$ de $\underline{\underline{B}}$, on a:

- $UV(b) = U(\overline{F(b)}) = F(b)$.

Par conséquent $U.V = F$.
De même, pour tout objet C de $\underline{\underline{C}}$, on a:

- $VF'(C) = (FF'C,Fm_{F'C}) = (TC,\mu(C)) = U'(C)$.

Pour toute flèche $c: C \longrightarrow C'$ de $\underline{\underline{C}}$, on a:

- $VF'(c) = \overline{FF'c} = \overline{Tc} = U'(c)$.

Par conséquent $V.F' = U$. //

Si $\mathcal{U}$ est un univers, si $F: \underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ est un di-foncteur entre deux di-catégories localement $\mathcal{U}$-petites, nous dirons que F est <u>sesqui-monadique</u> (resp. e-<u>sesqui-monadique</u>) si, et seulement si:

(SMO 1) F admet une sesqui-adjonction gauche (F',E,M,F) ,

(SMO 2) si $\underline{T} = (F.F', \varepsilon, \mu)$ est la sesqui-monade associée à (F',E,M,F), le di-foncteur de comparaison $V: \underline{\underline{B}} \longrightarrow SAlg(\underline{T})$ est un (di-)isomorphisme (resp. une di-équivalence).

o 0 o

BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE.

(A.O.F.S.) F. E. J. Linton, An Outline of Functorial Semantic, Lecture Notes in Math. 80, Springer, 1969 (voir aussi l'introduction générale à ce volume).

(C.M.C.E.) C. Lair, Catégories Modelables et Catégories Esquissables, Diagrammes 6, Paris, 1981.

(C.M.C.F) R. Guitart et C. Lair, Calcul Syntaxique des Modèles et Calcul des Formules Internes, Diagrammes 4, Paris, 1980.

(L.C.R.F.) R. Guitart et C. Lair, Limites et Co-limites pour Représenter les Formules, Diagrammes 7, Paris, 1982.

(M.A.M.C.) Y. Diers, Multimonads and Multimonadic Categories, Journ. of Pure and Appl. Alg. 17, 1980.

(P.C.M.F.) W. Tholen, Pro-categories and Multiadjoint Functors, Seminar Berichte aus dem Fachbereich Math. und Info., Hagen, 1982.

(T.H.E.N.) A. Bastiani, Théorie des Ensembles, C. D. U. , Paris, 1970.