R. GUITART
C. LAIR

Existence de diagrammes localement libres II

Diagrammes, tome 7 (1982), exp. nº 6, p. RG1-RG4
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1982__7__A6_0>

Diagrammes, Vol. 7 , 1982.

EXISTENCE DE DIAGRAMMES LOCALEMENT LIBRES II

R. Guitart et C. Lair

1. Hypothèses et notations.

Dans toute la suite, nous supposons que:

- $\underline{H}$ est une catégorie localement petite possédant les petites limites inductives,
- $\mathcal{A} = (f^A = (f^A_I : V^A \longrightarrow C^A_I)_{I \in \underline{I}_A})_{A \in \underline{A}}$ est une petite famille de cônes projectifs petits et discrets,
- α est un ordinal limite,
- pour tout $A \in \underline{A}$, le foncteur $\mathrm{Hom}(V^A,-)$ commute aux limites inductives indexées par α .

On dit, alors, qu'un objet H de $\underline{H}$ <u>valide</u> $\mathcal{A}$ si, et seulement si, pour tout $A \in \underline{A}$, le morphisme

$$]f^A_I[_{I \in \underline{I}_A} : \coprod_{I \in \underline{I}_A} \mathrm{Hom}(C^A_I,H) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V^A,H)$$

est un épimorphisme.

On désigne alors par $\mathrm{Val}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{H}$ dont les objets sont ceux qui valident $\mathcal{A}$.

2. Constructions.

Si H est un objet de $\underline{H}$, posons:

$$\underline{A}(H) = \{A \in \underline{A} \ / \ \mathrm{Hom}(V^A,H) \neq \emptyset \} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(H) = \prod_{A \in \underline{A}(H)} \underline{I}_A^{\ \mathrm{Hom}(V^A,H)} .$$

Si $c \in \mathcal{A}(H)$, notons aussi:

$$[H]_c = \varinjlim_{A \in \underline{A}(H) \text{ et } x \in \mathrm{Hom}(V^A,H)} \left(H \xleftarrow{\ x\ } V^A \xrightarrow{\ f^A_{c^A(x)}\ } C^A_{c^A(x)} \right).$$

On définit par récurrence les diagrammes $Force_\beta(H)$ et $V_\alpha(H)$ comme suit:

- $E_0(H) = Force_0(H) = \{H\}$,
- si $\beta < \alpha$, $E_{\beta+1} = \{ [G]_c \;/\; G \in E_\beta(H) \text{ et } c \in \mathcal{A}(G) \}$,
- si $\beta < \alpha$, $Force_{\beta+1}(H)$ est réunion de $Force_\beta(H)$ et de

$$\{ G \longrightarrow [G]_c \;/\; G \in E_\beta(H) \}$$

et

$$\{ G' \longrightarrow G \longrightarrow [G]_c \;/\; G \in E_\beta(H) \text{ et } G' \in \bigcup_{\beta' < \beta} E_{\beta'}(H) \} ,$$

- si $\lambda \leq \alpha$ est ordinal limite, $\widetilde{Force}_\lambda(H) = \bigcup_{\beta < \lambda} Force_\beta(H)$,
- si $\lambda \leq \alpha$ est ordinal limite,

$$E_\lambda(H) = \{ \varinjlim K \;/\; K : \lambda \longrightarrow \widetilde{Force}_\lambda(H) \text{ foncteur tel que } K(\beta) \in E_\beta(H) \text{ pour tout } \beta < \lambda \} ,$$

- si $\lambda \leq \alpha$ est ordinal limite, $Force_\lambda(H)$ est réunion de $\widetilde{Force}_\lambda(H)$ et de

$$\{ K(\beta) \longrightarrow \varinjlim K \;/\; \beta < \lambda \text{ et } K : \lambda \longrightarrow \widetilde{Force}_\lambda(H) \text{ foncteur tel que } K(\beta) \in E_\beta(H) \text{ pour tout } \beta < \lambda \} ,$$

- objets de $V_\alpha(H) = E_\alpha(H) \cup \Big(\bigcup_{G_1, G_2 \in E_\alpha(H)} E_\alpha(\varinjlim(G_1 \longleftarrow H \longrightarrow G_2)) \Big)$,
- flèches de $V_\alpha(H)$ est l'ensemble

$$\{ G \longrightarrow G' \;/\; G \in E_\alpha(H),\ G_2 \in E_\alpha(H),\ G' \in E_\alpha(\varinjlim(G \longleftarrow H \longrightarrow G_2)) \} .$$

3. Existence de diagrammes localement libres.

Avec les hypothèses, notations et constructions de 1. et 2. , on vérifie facilement que:

- le diagramme $D_\alpha(H) : V_\alpha(H) \hookrightarrow Val(\mathcal{A})$ est un petit diagramme localement libre sur H dans $Val(\mathcal{A})$, c'est-à-dire que, naturellement en tout objet K de $Val(\mathcal{A})$, on a:

$$Hom(H,K) \simeq \varinjlim Hom(D_\alpha(H)(-),K) .$$

4. Remarques.

La notion de petit diagramme localement libre est introduite en (2) et (3) auxquels on pourra se reporter pour trouver des exemples ainsi que deux démonstrations différentes d'un même théorème d'existence de diagrammes petits localement libres, dans le cas particulier où les f_I^A du §1 sont des épis. On notera cependant que le processus de la démonstration générale présentée ici est déjà contenu dans ces démonstrations particulières (dans tous les cas il s'agit d'un processus de forçage utilisant des choix de décompositions).
La notion de validation utilisée ici est très exactement celle de (1). Nous avons établi en (2) les liens qu'elle entretient avec des conditions de continuité et co-continuité.
Grâce au théorème 2.1. p. 26 de (2), le théorème ci-dessus s'applique à la situation envisagée dans le théorème 1 p. 5 de (3) et le généralise puisque l'hypothèse que les projections sont des épis n'est pas nécessaire. Par suite, dans le théorème 2 p. 9 de (3) (voir aussi le théorème 4.1. p. 53 de (2)) l'hypothèse que les cônes inductifs sont à co-projections des monomorphismes distingués peut être supprimée. Il en résulte que les diagrammes localement libres petits existent toujours pour les structures esquissées par des esquisses projectives et inductives petites.
Ce dernier résultat, qui est de toute façon celui que l'on avait en vue, au moins du point de vue de la pratique, est établi d'une manière toute différente (globale) en (5). Il s'applique notamment, par exemple d'après (4), aux modèles de théories du premier ordre classique.

5. Bibliographie.

(1) H. Andréka et I. Németi, Formulas and Ultraproducts in Categories, Beit. zur Alg. und Geom. 8 (1979), 133-151.

(2) R. Guitart et C. Lair, Calcul Syntaxique des Modèles et Calcul des Formules Internes, Diagrammes 4 (Paris 1980), 1-106.

(3) R. Guitart et C. Lair, Existence de Diagrammes Localement Libres, Diagrammes 6 (Paris 1981), GL 1 - GL 13.

(4) R. Guitart et C. Lair, Limites et Co-limites pour Représenter les Formules, Diagrammes 7 (Paris 1982), GL 1 - GL 24.

(5) C. Lair, Catégories Modélables et Catégories Esquissables, Diagrammes 6 (Paris 1981), L 1 - L 20.