DIAGRAMMES

J. PENON

Théories de catégories

Diagrammes, tome 2 (1979), exp. nº 4, p. P1-P54
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1979__2__A4_0>

Diagrammes, vol.2, 1979.

THEORIES DE CATEGORIES.

par

J.PENON

Introduction.

* Toutes les théories (au sens de la théorie des modèles) définies et étudiées jusqu'à ce jour sont des théories "d'ensembles", à l'exception des travaux du groupe de recherche "logique et catégories" à Marseille-Luminy. Nous voulons dire par là qu'un groupe, un anneau ou un espace vectoriel, par exemple, sont avant tout des ensembles. Tout cela n'est d'ailleurs pas très étonnant, vu que la "théorie des ensembles" a pour but d'être un support à la totalité des mathématiques. Aussi est-ce naturel de penser que, comme pour les autres théories, la théorie des catégories est, elle aussi, une théorie d'ensembles. Il est vrai qu'elle l'est devenue aujourd'hui, même si cela s'est fait pratiquement avec quelques difficultés (théories des classes ou axiomes des univers). On peut toutefois formuler deux reproches à la théorie des catégories considérée comme une théorie d'ensembles.

- Le premier est d'ordre syntaxique. Dans cette théorie, les objets et les flèches (même s'ils sont dissociés, comme on peut le faire dans les théories à plusieurs sortes) sont traités de la même façon. Aussi, par exemple, peut-on faire indifféremment des égalités entre flèches ou entre objets. Or tout "catégoricien" sait bien, pratiquement, qu'il ne se sert presque jamais de l'égalité entre objets, l'isomorphie la remplaçant partout où il n'y a pas identité.

- Le second reproche est d'ordre sémantique. Réalisons en effet, non pas dans les ensembles (qui masquent les difficultés) mais dans un topos quelconque. Quand nous voulons dire par exemple qu'une catégorie admet un objet final, deux formulations se présentent à nous:

La première consiste à ajouter au langage des catégories un nouveau symbole de constante "1" de sorte "objet" puis à ajouter aux axiomes des catégories un ou plusieurs nouveaux axiomes signifiant que 1 est objet final.

Dans la seconde formulation, on n'ajoute aucun symbole au langage, mais on signifie par l'apport de un ou plusieurs nouveaux axiomes à la théorie qu' "il existe un objet" vérifiant la bonne propriété.

Or il est regrettable de constater que ces deux formulations ne sont pas équivalentes, l'axiome (SS) (voir 8) étant nécessaire pour prouver dans le topos où l'on réalise que la seconde formulation entraîne la première. A ce niveau là, le théoricien des catégories se pose la préoccupante question de savoir si, dans la pratique mathématique, on fait ou non, plus généralement, des choix canoniques de limites (problème posé par R.Paré au colloque de New-York en 75/76).

Les deux remarques précédentes, qui sont évidemment liées, devraient nous inciter à mettre en doute l'aspect ensembliste des catégories. Signalons à ce sujet que seule la première de ces deux remarques a suffit à G.Blanc et à A.Preller pour reformuler la théorie des catégories (voir 3 et 1) en abandonnant son caractère ensembliste, leur principal guide étant la "pratique catégorique".

Notre approche est différente puisque, depuis plusieurs années, nous étions en présence de "bons modèles" de la "théorie des catégories" (comme on peut parler de la "théorie des ensembles", ce qui est une façon imagée et incorrecte de parler de la théorie des univers). Ces "bons modèles" étant à n'en pas douter les 2-catégories des fibrations sur une catégorie donnée et des champs sur un site donné (voir 6). Et c'est la présence de pseudo-produits fibrés et d'une pseudo-adjonction cartésienne et non de "vrais" produits fibrés et d'une "vraie" adjonction cartésienne qui nous a rendus à l'évidence. Que fait-on en effet dans un produit fibré de catégories si ce n'est égaliser des objets aussi bien que des flèches.

* Le but de ce présent exposé est tout d'abord de donner une définition précise et simple de ce que nous entendons par "théorie de catégories", puis, et surtout, de montrer comment on peut réaliser

non plus dans des catégories comme pour les théories d'ensembles, mais dans des 2-catégories. Ainsi les langages de catégories, en véhiculant l'intuition catégorique habituelle, vont donc trouver naturellement leur terrain d'application dans l'étude des 2-catégories. Dès lors, ce ne sera plus la peine de raisonner dans celles-ci sur de fastidieux "diagrammes dans l'espace". On peut espérer aussi que les problèmes de cohérence qu'elles engendrent presque inévitablement disparaîtront du même coup. Mais l'intérêt est encore autre puisque, grâce à ces langages, il est maintenant possible de définir dans une 2-catégorie suffisamment générale toutes les structures catégoriques habituelles, comme par exemple la structure cartésienne ou monoïdale fermée, et même la structure de topos , ce qui n'avait pu être fait jusque là.

* Avant de terminer cette introduction, nous voulons mettre en garde le lecteur contre une terminologie qui, s'étant voulu légère, peut toutefois prêter à confusion si on considère une 2-catégorie comme une catégorie enrichie particulière, car tel n'est pas notre point de vue: nous les traîtons plutôt comme des bicatégories. Aussi, par exemple, lorsque l'on voit écrit "produit" ou "produit fibré" il faut toujours penser "pseudo-produit" ou "pseudo-produit fibré".

Section 0. GENERALITES ET TERMINOLOGIE.

* Soit $\underline{\underline{K}}$ une 2-catégorie et $f:A \longrightarrow B$ une flèche de $\underline{\underline{K}}$. On dit que f est une équivalence s'il existe une flèche $g:B \longrightarrow A$ et des 2-flèches inversibles $g.f \longrightarrow Id_A$ et $f.g \longrightarrow Id_B$. Deux objets A et A' de $\underline{\underline{K}}$ sont dits équivalents s'il existe une équivalence $A \longrightarrow A'$, en notation : $A \approx A'$.

Remarque: de même que dans les catégories "tout" se fait à isomorphisme près, de même toutes les définitions et toutes les propriétés qui seront données ici seront stables par équivalences.

* $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ étant des 2-catégories, un homomorphisme $F:\underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ consiste en la donnée:

- pour tout objet X de $\underline{\underline{A}}$, d'un objet FX de $\underline{\underline{B}}$,
- pour toute flèche $x:X \longrightarrow Y$, d'une flèche $Fx:FX \longrightarrow FY$,
- pour toute 2-flèche $u:x \longrightarrow x':X \longrightarrow Y$, d'une 2-flèche $Fu:Fx \longrightarrow Fx':FX \longrightarrow FY$,
- pour tout objet X de $\underline{\underline{A}}$, d'une 2-flèche inversible $F_X:Id_{FX} \longrightarrow FId_X$
- pour tout couple de flèches composables $X \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{y} Z$, d'une 2-flèche inversible $F_{(y,x)}:Fy.Fx \longrightarrow F(y.x)$.

Toutes ces données doivent vérifier des axiomes de cohérence "naturels".

* On construit ainsi une nouvelle 2-catégorie, notée $\underline{\underline{B}}^{\underline{\underline{A}}}$, qui a:

- pour objets, les homomorphismes $\underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$,
- pour flèches $t:F \longrightarrow G$, les données: 1) pour tout objet X de $\underline{\underline{A}}$, d'une flèche $tX:FX \longrightarrow GX$, 2) pour toute flèche $x:X \longrightarrow Y$, d'une 2-flèche inversible $tx:Gx.tX \longrightarrow tY.Fx$, ces données vérifiant avec celles de F et G des axiomes de cohérence.
- pour 2-flèches $u:t \longrightarrow t':F \longrightarrow G$, les données: pour tout objet X de $\underline{\underline{A}}$, d'une 2-flèche $uX:tX \longrightarrow tX'$ vérifiant avec les données de t et t' un axiome de cohérence.

* $\underline{\underline{C}}$ étant une 2-catégorie, on notera $\underline{\underline{C}}^{op}$ la 2-catégorie obtenue en changeant le sens de ses flèches, et non de ses 2-flèches.

* $\underline{\underline{C}}$ étant une 2-catégorie avec Hom petits, notons $\hat{\underline{\underline{C}}} = Cat^{\underline{\underline{C}}^{op}}$

On construit un homomorphisme (strict) $(-):\underline{\underline{C}} \longrightarrow \hat{\underline{\underline{C}}}$ en posant pour chaque objet S de $\underline{\underline{C}}$, $(S)(-) = \underline{\underline{C}}(-,S)$.

<u>Lemme de Yonéda</u>: pour tout objet F de $\hat{\underline{\underline{C}}}$, le foncteur canonique y: $\hat{\underline{\underline{C}}}((S),F) \longrightarrow FS$ défini sur les objets par $y(t) = tS(Id_S)$ est une équivalence. L'équivalence "inverse" $z:FS \longrightarrow \hat{\underline{\underline{C}}}((S),F)$ étant définie par $z(a)S'(k) = Fk(a)$ où $a \in |FS|$ et $k:S' \longrightarrow S$ est une flèche de $\underline{\underline{C}}$.

Un homomorphisme $F:\underline{\underline{C}}^{op} \longrightarrow Cat$ est dit <u>représentable</u> s'il existe un objet S de $\underline{\underline{C}}$ tel que $F \approx (S)$. Une <u>représentation</u> de F est alors un couple (S,s), où $S \in |\underline{\underline{C}}|$ et $s \in FS$, tel que, pour tout objet S', le foncteur canonique $\underline{\underline{C}}(S',S) \longrightarrow FS'$ soit une équivalence. Ce foncteur n'est autre que le foncteur $z(s)S'$. (S,s) et (S',s') étant deux représentations d'un même homomorphisme $F \in |\hat{\underline{\underline{C}}}|$, il existe une équivalence $k:S' \longrightarrow S$ telle que $Fk(s) \simeq s'$.

* $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ étant des 2-catégories, on dit qu'un homomorphisme $F:\underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ <u>admet un adjoint à droite</u> si pour tout objet B de $\underline{\underline{B}}$ l'homomorphisme $\underline{\underline{B}}(F(-),B):\underline{\underline{A}}^{op} \longrightarrow Cat$ est représentable. On construit alors (en utilisant l'axiome du choix) un homomorphisme $G:\underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{A}}$ et une flèche $\varepsilon:F.G \longrightarrow Id_{\underline{\underline{B}}}$ tels que pour tout objet B de $\underline{\underline{B}}$, $(GB, \varepsilon B)$ soit une représentation de $\underline{\underline{B}}(F(-),B)$. Si $G':\underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{A}}$ est un autre homomorphisme et $\varepsilon':F.G' \longrightarrow Id_{\underline{\underline{B}}}$ une autre flèche vérifiant les mêmes conditions, il existe alors une équivalence $k:G' \longrightarrow G$ dans $\underline{\underline{A}}^{\underline{\underline{B}}}$ telle que $\varepsilon.Fk \simeq \varepsilon'$. De ce fait on dit que G est <u>"l'"adjoint à droite</u> de F.

$\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ étant des 2-catégories et $F:\underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$, $G:\underline{\underline{B}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ des homomorphismes, F et G admettant des adjoints à droite, alors il en est de même de l'homomorphisme composé $G.F:\underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$, et si F',G' et (G.F)' sont les adjoints à droite respectifs de F,G et G.F, on a l'équivalence $(G.F)' \approx F'.G'$

<u>Section 1</u>. <u>LIMITES DANS UNE 2-CATEGORIE</u>.

Dans tout ce qui suit, par souci de simplification terminologique, nous appellerons simplement <u>graphe</u> un type de diagramme.

<u>Définitions</u>.

1°) Un <u>bigraphe</u> $\underline{\underline{D}}$ est la donnée:

- d'un graphe $D = (a_o, a_1 : D_1 \longrightarrow D_o)$,
- d'un ensemble D_2 et de deux applications $d_o, d_1 : D_2 \longrightarrow L(D)_1$ où $L(D)$ désigne la catégorie libre associée au graphe D. En outre, l'application $(a_o, a_1) : L(D)_1 \longrightarrow D_o x D_o$ doit coégaliser d_o et d_1.

Les éléments de D_o, D_1, D_2 s'appellent respectivement les objets,les flèches, les 2-flèches du bigraphe $\underline{\underline{D}}$.

2°) Un <u>bidiagramme</u> $F:\underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$ où $\underline{\underline{D}}$ est un bigraphe et $\underline{\underline{K}}$ une 2-catégorie est la donnée:
- d'un diagramme $(F_o, F_1) : D \longrightarrow \underline{\underline{K}}$,
- d'une application $F_2 : D_2 \longrightarrow 2\text{-}Fl(\underline{\underline{K}})$ qui associe à toute 2-flèche u de $\underline{\underline{D}}$ une 2-flèche F_2u de $\underline{\underline{K}}$, conformément au schéma suivant:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X_1 \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[dr, "x_n"] & \\
X \arrow[ur, "x_1"] \arrow[dr, "y_1"'] & & \Downarrow u & & Y \\
 & Y_1 \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & Y_{m-1} \arrow[ur, "y_m"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F_oX_1 \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & F_oX_{n-1} \arrow[dr, "F_1x_n"] & \\
F_oX \arrow[ur, "F_1x_1"] \arrow[dr, "F_1y_1"'] & & \Downarrow F_2u & & F_oY \\
 & F_oY_1 \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & F_oY_{m-1} \arrow[ur, "F_1y_m"'] &
\end{tikzcd}$$

Dans la suite, on supprimera les indices o,1,2 au-dessous de F.

3°) Une flèche $t:F \longrightarrow G$ entre bidiagrammes $\underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$ est la donnée:
- pour tout objet X de $\underline{\underline{D}}$, d'une flèche $tX:FX \longrightarrow GX$,
- pour toute flèche $x:X \longrightarrow Y$ de $\underline{\underline{D}}$, d'une 2-flèche inversible $tx: tY.Fx \longrightarrow Gx.tX$. Ces données sont astreintes à la condition suivante:
- pour toute 2-flèche u comme ci-dessus, dans $\underline{\underline{D}}$, le diagramme suivant commute dans $\underline{\underline{K}}(X,Y)$, les flèches ayant une signification évidente:

$$\begin{tikzcd}
tY.Fx_n\cdots\cdots Fx_1 \arrow[r] \arrow[d] & tY.Fy_m\cdots\cdots Fy_1 \arrow[d] \\
Gx_n.tX_{n-1}\cdots\cdots Fx_1 \arrow[d] & Gy_m.tY_{m-1}\cdots\cdots Fy_1 \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
Gx_n\cdots\cdots Gx_1.tX \arrow[r] & Gy_m\cdots\cdots Gy_1.tX
\end{tikzcd}$$

4°) Une 2-flèche $u : t \longrightarrow t' : F \longrightarrow G$ entre bidiagrammes $\underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$ est la donnée:
- pour tout objet X de $\underline{\underline{D}}$, d'une 2-flèche $uX : tX \longrightarrow t'X : FX \longrightarrow GX$,

cette donnée étant astreinte à la condition suivante:

- pour toute flèche $x:X \longrightarrow Y$ de $\underline{\underline{D}}$, le diagramme suivant commute:

$$
\begin{tikzcd}
tY.Fx \arrow[r, "tx", "\sim"'] \arrow[d, "uY.Fx"'] & Gx.tX \arrow[d, "Gx.\,uX"] \\
t'Y.Fx \arrow[r, "t'x", "\sim"'] & Gx.t'X
\end{tikzcd}
$$

On construit ainsi une nouvelle 2-catégorie, notée $\underline{\underline{K}}^{\underline{\underline{D}}}$, qui a pour objets les bidiagrammes $\underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$.

Définitions (essentiellement dues à Street, voir 12).

1°) $\underline{\underline{D}}$ étant un bigraphe, un *bidiagramme indexé* $(f,F):\underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$ est la donnée de deux bidiagrammes $f:\underline{\underline{D}} \longrightarrow Cat$ et $F:\underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$. On dit alors qu'il est *fini* si $\underline{\underline{D}}$ est fini (i.e. D_0, D_1, D_2 sont finis) et si, pour tout objet X de $\underline{\underline{D}}$, fX est de présentation finie.

2°) On dit qu'un bidiagramme indexé $(f,F):\underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$ *admet une limite projective* si l'homomorphisme composé suivant est représentable:

$$\underline{\underline{K}}^{op} \xrightarrow[(-)]{} Cat^{\underline{\underline{K}}} \xrightarrow[Cat^F]{} Cat^{\underline{\underline{D}}} \xrightarrow[Hom(f,-)]{} Cat$$

"La" *limite projective* de (f,F) est alors une représentation (L,l) de cet homomorphisme. En notation: $L = \varprojlim(f,F)$ et $l:L \longrightarrow (f,F)$.

En d'autres termes, la limite projective de (f,F) est un couple (L,l) formé d'un objet L de $\underline{\underline{K}}$ et d'une flèche $l: f \longrightarrow \underline{\underline{K}}(L,F(-))$ entre bidiagrammes $\underline{\underline{D}} \longrightarrow Cat$, telle que, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur $\underline{\underline{K}}(S,L) \longrightarrow Hom(f,\underline{\underline{K}}(S,F(-)))$ soit une équivalence. Il résulte alors de la définition même et de la section 0 que deux limites projectives d'un même bidiagramme indexé sont équivalentes.

Proposition 1. Dans Cat tout bidiagramme indexé petit admet une limite projective.

* Donnons maintenant quelques cas particuliers importants de limites projectives de bidiagrammes (indexés).

1°) *Limite projective de bidiagramme* (non indexé).

Soit $F:\underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$ un bidiagramme. Alors la donnée d'un objet L de $\underline{\underline{K}}$ et d'une flèche $L_c \longrightarrow F$ entre bidiagrammes (où L_c désigne le bidiagramme constant sur L) est appelée la *limite projective* de F si, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(S,L) \longrightarrow Hom(S_C,F)$ est une équivalence. Ce type de limites admet lui-même plusieurs cas particuliers que l'on peut formuler de la façon suivante:

a) *Objet final*. Un objet F de $\underline{\underline{K}}$ est dit *final* si, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$ le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(S,F) \longrightarrow 1$ est une équivalence. En notation: $F = 1$.

b) *Produit cartésien*. Soit A et B deux objets de $\underline{\underline{K}}$. On dit qu' un span $A \longleftarrow P \longrightarrow B$ est le *produit cartésien* de A par B si, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(S,P) \longrightarrow \underline{\underline{K}}(S,A) \times \underline{\underline{K}}(S,B)$ est une équivalence. En notation: $P = A \times B$.

c) *Produit fibré*. Soit $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ un span de $\underline{\underline{K}}$. Pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, notons $(A \times_C B)S$ la catégorie qui a pour objets les triplets (a,b,s), où $a:S \longrightarrow A$ et $b:S \longrightarrow B$ sont des flèches et $s:f.a \longrightarrow g.b$ une 2-flèche inversible, et qui a pour flèches $(u,v):(a,b,s) \longrightarrow (a',b',s')$ les couples de 2-flèches $u:a \longrightarrow a'$ et $v:b \longrightarrow b'$ faisant commuter dans $\underline{\underline{K}}(S,C)$ le carré de côtés $f.u$, $g.v$, s, s'.

On appelle alors *produit fibré* de $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ la donnée d'un objet P de $\underline{\underline{K}}$ et d'un objet de $(A \times_C B)P$ tel que, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(S,P) \longrightarrow (A \times B)S$ soit une équivalence. En notation: $P = A \times_C B$.

d) *Inverseur*. Soit $t:f \longrightarrow g:A \longrightarrow B$ une 2-flèche de $\underline{\underline{K}}$. Pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, notons $Inv(t)S$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\underline{K}}(S,A)$ qui a pour objets les flèches $a:S \longrightarrow A$ telles que $t.a:f.a \longrightarrow g.a$ soit inversible. On appelle alors *inverseur* de t la donnée d'un objet I de $\underline{\underline{K}}$ et d'un objet de $Inv(t)I$ tel que, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(S,I) \longrightarrow Inv(t)S$ soit une équivalence. En notation: $I = Inv(t)$.

2°) *Cotenseur*.

Soit A un objet de $\underline{\underline{K}}$ et $\underline{C}$ une catégorie. Alors la donnée d'un objet K de $\underline{\underline{K}}$ et d'un foncteur $\underline{C} \longrightarrow \underline{\underline{K}}(K,A)$ est appelée *cotenseur de A par* $\underline{C}$ si, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur $\underline{\underline{K}}(S,K) \longrightarrow Cat(\underline{C},\underline{\underline{K}}(S,A))$ est une équivalence. En notation: $K = A^{\underline{C}}$.

Signalons le cas particulier de cotenseur (du à J.Gray,voir 7): soit A un objet de $\underline{\underline{K}}$; alors la donnée d'un objet K de $\underline{\underline{K}}$ et d'une

2-flèche $d_0 \longrightarrow d_1 : K \longrightarrow A$ est appelée <u>suspension</u> de A si, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(S,K) \longrightarrow \underline{\underline{K}}(S,A)^{\underline{2}}$ est une équivalence. En notation: $K = A^{\underline{2}}$.

3°) <u>Produit comma</u>.

Soit $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ un span de $\underline{\underline{K}}$. Pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, notons $(A/_{C}B)S$ la catégorie qui a pour objets les triplets (a,b,s), où $a:S \longrightarrow A$ et $b:S \longrightarrow B$ sont des flèches de $\underline{\underline{K}}$ et $s:f.a \longrightarrow g.b$ est une 2-flèche, et qui a pour flèches $(u,v):(a,b,s) \longrightarrow (a',b',s')$ les couples de 2-flèches $u:a \longrightarrow a'$ et $v:b \longrightarrow b'$ tels que le carré de côtés f.u, g.v, s, s' commute dans $\underline{\underline{K}}(S,C)$.

On appelle alors <u>produit comma</u> de $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ la donnée d'un objet P de $\underline{\underline{K}}$ et d'un objet de $(A/_{C}B)P$ tel que, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$ le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(S,P) \longrightarrow (A/_{C}B)S$ soit une équivalence. En notation: $P = A/_{C}B$.

4°) <u>Egalisateur</u> (de deux flèches).

Soit un couple $u,v:f \longrightarrow g: A \longrightarrow B$ de 2-flèches parallèles. Pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, notons Egal(u,v)S la sous-catégorie pleine de $\underline{\underline{K}}(S,A)$ qui a pour objets les flèches $a:S \longrightarrow A$ telles que $u.a = v.a$. On appelle alors <u>égalisateur du couple</u> (u,v) la donnée d'un objet E de $\underline{\underline{K}}$ et d'un objet de Egal(u,v)E tel que , pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(S,E) \longrightarrow$ Egal(u,v)S soit une équivalence. En notation: E = Egal(u,v) .

Signalons pour finir qu'il y a encore de nombreux cas particuliers de cette notion de limites (comme l'objet des algèbres et l'objet de Kleisli associés à une monade dans $\underline{\underline{K}}$, ou encore plus généralement les lax-limites - voir Gray en 7 et Bourn en 4).

* Etudions maintenant quelques propositions d'un caractère général sur les limites projectives de bidiagrammes indexés.

<u>Définition</u>. Un homomorphisme $h:\underline{\underline{K}} \longrightarrow \underline{\underline{L}}$ entre 2-catégories <u>préserve</u> la limite projective du bidiagramme indexé $(f,F):\underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$ si pour l'une quelconque de ses limites projectives (L,l), le couple (hL,h(l)) est une limite projective de (f , hF), où h(l) est la flèche composée de l et de la flèche canonique déduite de h.

Proposition 2. Soit $h:\underline{\underline{K}} \longrightarrow \underline{\underline{L}}$ un homomorphisme entre 2-catégories, admettant un adjoint à gauche, alors il préserve la limite projective de tout bidiagramme indexé (on dit simplement, dans ce cas, qu'il préserve les limites projectives).

Proposition 3. Soit $(f,F):\underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}^{\underline{\underline{C}}}$ un bidiagramme indexé. Si pour tout objet S de $\underline{\underline{C}}$ le bidiagramme indexé $(f, V_S F):\underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$ admet une limite projective dans $\underline{\underline{K}}$, alors le bidiagramme indexé (f,F) admet une limite projective dans $\underline{\underline{K}}^{\underline{\underline{C}}}$ (où V_S désigne l'homomorphisme d'évaluation en S).

? Pour chaque objet S de $\underline{\underline{C}}$, choisissons une limite projective du bidiagramme indexé $(f, V_S F)$, soit $1S:LS \longrightarrow (f, V_S F)$.

Soit $k:S \longrightarrow S'$ une flèche de $\underline{\underline{C}}$. L'existence de l'homomorphisme composé de $1S$ (vu comme morphisme de f dans $\underline{\underline{K}}(LS,-)V_S F$) avec $\underline{\underline{K}}(LS,-)V_k F$ entraîne l'existence d'une flèche $Lk:LS \longrightarrow LS'$ et d'une 2-flèche inversible $1k:\underline{\underline{K}}(Lk,-)V_{S'}F.1S' \longrightarrow \underline{\underline{K}}(LS,-)V_k F.1S$.

Soit $t:k \longrightarrow k':S \longrightarrow S'$ une 2-flèche de $\underline{\underline{C}}$. Comme le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(LS,LS') \longrightarrow \mathrm{Hom}(f, \underline{\underline{K}}(LS,-)V_{S'}F)$ est pleinement fidèle il existe une unique 2-flèche $Lt:Lk \longrightarrow Lk'$ telle que le carré de côtés $K(Lt,-)V_{S'}F.1S'$, $K(LS,-)V_t F.1S$, $1k$, $1k'$ commute dans la catégorie voulue. On construit de cette façon un homomorphisme $L:\underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$ ainsi qu'une flèche $1:f \longrightarrow \underline{\underline{K}}^{\underline{\underline{C}}}(L,-)F$ entre bidiagrammes par la relation suivante:

$$(LS \xrightarrow{1X(e)S} FX(S)) = (LS \xrightarrow{1S(X)(e)} V_S F(X)) ,$$

où X est un objet de $\underline{\underline{D}}$, S un objet de $\underline{\underline{C}}$ et e un objet de $f\,X$.
On vérifie alors que $1:L \longrightarrow (f,F)$ est bien une limite projective de (f,F) !

Proposition 4. $\underline{\underline{K}}$ étant une 2-catégorie avec hom petits, tout bidiagramme indexé petit admet une limite projective dans $\hat{\underline{\underline{K}}}$. De plus , l'homomorphisme $(\hat{-}):\underline{\underline{K}} \longrightarrow \hat{\underline{\underline{K}}}$ préserve toutes les limites projectives.

Section 2. 2-CATEGORIE FINIMENT COMPLETE.

Soit $\underline{\underline{K}}$ une 2-catégorie.

Proposition 1. Les deux systèmes d'axiomes suivant sont équivalents:

(i) 1) *$\underline{\underline{K}}$ possède un objet final.*

2) *Tout span de $\underline{\underline{K}}$ admet un produit fibré.*

3) *Tout objet de $\underline{\underline{K}}$ admet une suspension.*

(ii) 1) *$\underline{\underline{K}}$ possède un objet final.*

2) *Tout span de $\underline{\underline{K}}$ admet un produit comma.*

3) *Toute 2-flèche de $\underline{\underline{K}}$ admet un inverseur.*

? (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $A \longrightarrow S \longleftarrow B$ un span de $\underline{\underline{K}}$; on vérifie facilement que $A \times_S B$ est équivalent à $\mathrm{Inv}(u)$ où u est la 2-flèche naturelle (entre $A/_S B$ et S) associée au span donné. De même, A étant un objet de $\underline{\underline{K}}$, on voit immédiatement que $A^{\underline{2}}$ est équivalent à $A/_A A$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $A \longrightarrow S \longleftarrow B$ un span de $\underline{\underline{K}}$. En considérant successivement les trois produits fibrés suivant:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A \times_S S^{\underline{2}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Rightarrow}"] & & S^{\underline{2}} \arrow[dl, "\mathrm{dom.}"] \\
 & S &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & S^{\underline{2}} \times_S B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
S^{\underline{2}} \arrow[dr, "\mathrm{cod.}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Rightarrow}"] & & B \arrow[dl] \\
 & S &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A \times_S S^{\underline{2}} \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Rightarrow}"] & & S^{\underline{2}} \times_S B \arrow[dl] \\
 & S^{\underline{2}} &
\end{tikzcd}
$$

on vérifie que P est équivalent à $A/_S B$.

Soit maintenant $u: f \longrightarrow g: A \longrightarrow B$ une 2-flèche de $\underline{\underline{K}}$. Considérons le produit fibré I des deux flèches $h_u: A \longrightarrow B^{\underline{2}}$ et $i_B: B \longrightarrow B^{\underline{2}}$, où h_u et i_B désignent respectivement (à un iso. près) les flèches correspondant aux 2-flèches u et $\mathrm{Id}_B \longrightarrow \mathrm{Id}_B$ par les équivalences $\underline{\underline{K}}(A,B^{\underline{2}}) \xrightarrow{\simeq} \underline{\underline{K}}(A,B)^{\underline{2}}$ et $\underline{\underline{K}}(B,B^{\underline{2}}) \xrightarrow{\simeq} \underline{\underline{K}}(B,B)^{\underline{2}}$. On vérifie alors que I (muni de sa projection vers A) est équivalent à $\mathrm{Inv}(u)$!

Définition. 1) Une 2-catégorie qui vérifie l'un des deux systèmes d'axiomes (i) ou (ii) de la proposition précédente est appelée *finiment complète*.

2) Un homomorphisme $h: \underline{\underline{K}} \longrightarrow \underline{\underline{L}}$ entre 2-catégories finiment complètes est dit *exact à gauche* s'il préserve l'objet final,

les produits fibrés et les suspensions, ou bien (ce qui est équivalent) s'il préserve l'objet final, les produits commas et les inverseurs.

<u>Exemples</u>. <u>2-Catégories</u> <u>finiment</u> <u>complètes</u>.

1) Cat (cf. Section 1, proposition 1)

2) $\hat{\underline{\underline{C}}} = \mathrm{Cat}^{\underline{\underline{C}}^{op}}$ (cf. propositions 1 et 4 de la Section 1)

3) Fib($\underline{C}$) = 2-catégorie des catégories fibrées (non nécessairement scindées) sur une catégorie $\underline{C}$ (c'est un cas particulier du précédent)

4) FLP($\underline{C}$) = sous-2-catégorie pleine de Fib($\underline{C}$) formée des catégories fibrées localement petites sur $\underline{C}$ (encore appelées catégories localement internes dans $\underline{C}$; voir 1,9 et 10), où $\underline{C}$ est finiment complète.

Rappelons qu'une catégorie fibrée A est localement petite si, pour tout objet S de $\underline{C}$ et pour toute paire d'objets a et a' de AS le préfaisceau sur $\underline{C}/S$: $A_S(a,a'): k \longmapsto AS'(Ak(a),Ak(a'))$, où $k: S' \longrightarrow S$, est représentable (ne pas confondre avec l'ensemble AS(a,a') qui est le "hom externe).

? - L'objet final de Fib($\underline{C}$) est évidemment localement petit.

- Soient $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ un span dans FLP($\underline{C}$), $P = A/_{C}B$ dans Fib($\underline{C}$) et $p = (a, fS(a) \longrightarrow gS(b), b)$, $p' = (a', fS(a') \longrightarrow gS(b'), b')$ deux objets de PS (avec S objet de $\underline{C}$). Comme dans $\widehat{\underline{C}/S}$ on a:

$$P_S(p,p') \simeq A_S(a,a') \times_{C_S(fS(a),gS(b'))} B_S(b,b')$$, et que $A_S(a,a')$, $B_S(b,b')$,

et $C_S(fS(a),gS(b'))$ sont représentables, il en va de même de $P_S(p,p')$, puisque $\underline{C}$ est finiment complète.

- Soient $u:f \longrightarrow g:A \longrightarrow B$ une 2-flèche dans FLP($\underline{C}$) et a,a' deux objets de Inv(u)S (avec S objet de $\underline{C}$). Comme $\mathrm{Inv}(u)_S(a,a')$ est équivalent à $A_S(a,a')$ et que $A_S(a,a')$ est représentable, il en va de même de $\mathrm{Inv}(u)_S(a,a')$!

5) Champ($\underline{C}$,J) = sous-2-catégorie pleine de Fib($\underline{C}$) formée des champs sur le site ($\underline{C}$,J) (voir 6).

? Soit S un objet de $\underline{C}$ et R un crible sur S; alors:

- 1 étant l'objet final de Fib($\underline{C}$), il est clair que le foncteur canonique $\mathrm{Hom}((S),1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,1)$ est une équivalence.

- $A \longrightarrow C \longleftarrow B$ étant un span de Champ($\underline{C}$,J), comme les foncteurs

canoniques suivant sont des équivalences:
$\mathrm{Hom}((S),A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,A)$, $\mathrm{Hom}((S),B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,B)$ et $\mathrm{Hom}((S),C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,C)$ et que $\mathrm{Hom}((S),A/_{C}B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,A/_{C}B)$ est équivalent à $\mathrm{Hom}((S),A) \,/_{\mathrm{Hom}((S),C)}\, \mathrm{Hom}((S),B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,A) \,/_{\mathrm{Hom}(R,C)}\, \mathrm{Hom}(R,B)$, on en déduit que le premier terme de cette équivalence est une équivalence.

- $u:f \longrightarrow g:A \longrightarrow B$ étant une 2-flèche de $\mathrm{Champ}(\underline{C},J)$, comme les foncteurs $\mathrm{Hom}((S),A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,A)$ et $\mathrm{Hom}((S),B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,B)$ sont des équivalences, et que $\mathrm{Hom}((S),\mathrm{Inv}(u)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,\mathrm{Inv}(u))$ est équivalent à $\mathrm{Inv}(\mathrm{Hom}((S),u)) \longrightarrow \mathrm{Inv}(\mathrm{Hom}(R,u))$, on en déduit que le premier terme de cette équivalence est une équivalence!

6) $\mathrm{Cat}(\underline{C})$ = 2-catégorie des catégories internes dans $\underline{C}$, où $\underline{C}$ est une catégorie finiment complète (la preuve que $\mathrm{Cat}(\underline{C})$ est finiment complète est maintenant bien connue).

7) $\mathrm{Top}_{\underline{E}}$ = 2-catégorie des $\underline{E}$-topos bornés (voir définition et preuve dans le livre de Johnstone, en 8).

<u>Un exemple d'homomorphisme exact à gauche</u>.

C'est l'homomorphisme dit "champ associé": $\mathrm{Fib}(\underline{C}) \longrightarrow \mathrm{Champ}(\underline{C},J)$, qui est adjoint à gauche de l'inclusion. Pour vérifier cette propriété du "champ associé", montrons le lemme suivant:

<u>Lemme</u>. <u>La sous-2-catégorie pleine de $\mathrm{Fib}(\underline{C})^{\underline{2}}$ formée des flèches bicouvrantes est stable pour la structure finiment complète</u>.

? Pour l'<u>objet final</u> c'est évident. Montrons qu'elle est stable par <u>produits commas</u>. Soient les bidiagrammes suivant dans $\mathrm{Fib}(\underline{C})$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \arrow[dl, phantom, "\nearrow"] \\ C \arrow[r, "u"'] & C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "n"] \arrow[d, "g"'] & B' \arrow[d, "g'"] \arrow[dl, phantom, "\nearrow"] \\ C \arrow[r, "u"'] & C' \end{tikzcd}$$

où u,m et n sont bicouvrantes et vérifions qu'il en va de même de la flèche canonique $k : A/_{C}B \longrightarrow A'/_{C'}B'$.

- Notons $P = A/_{C}B$ et $P' = A'/_{C'}B'$. Soient S un objet de $\underline{C}$ et $p_o = (a_o, fS(a_o) \longrightarrow gS(b_o), b_o)$, $p_1 = (a_1, fS(a_1) \longrightarrow gS(b_1), b_1)$ deux objets de PS. Comme les carrés suivant sont des produits fibrés dans $\widehat{\underline{C}/S}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & P_S(p_o,p_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A_S(a_o,a_1) \arrow[dr] & & B_S(b_o,b_1) \arrow[dl] \\ & C_S(fS(a_o),gS(b_1)) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=tiny] & P'_S(kS(p_o),kS(p_1)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A'_S(mS(a_o),mS(a_1)) \arrow[dr] & & B'_S(nS(b_o),nS(b_1)) \arrow[dl] \\ & C'_S(uS.fS(a_o),uS.gS(b_1)) & \end{tikzcd}$$

et que les flèches naturelles joignant les trois sommets inférieurs du carré de gauche à leurs homologues du carré de droite sont bicouvrantes dans $\widehat{\underline{C}/S}$, on en déduit que la flèche joignant $P_S(p_o,p_1)$ à $P'_S(kS(p_o),kS(p_1))$ est bicouvrante à son tour.

- Soit S un objet de $\underline{C}$ et $p' = (a'_o, f'S(a'_o) \longrightarrow g'S(b'_o), b'_o)$ un objet de P'S. Il reste à montrer que le crible $R_{p'}$ sur S est couvrant, où pour tout objet S' de $\underline{C}$, $R_{p'}(S')$ est l'ensemble des flèches $x:S' \longrightarrow S$ pour lesquelles il existe un objet p de PS' tel que $kS'(p) \simeq P'x(p')$. Soit $R_{a'_o}$ le crible sur S où, pour tout objet S' de $\underline{C}$, $R_{a'_o}(S')$ est l'ensemble des $x:S' \longrightarrow S$ pour lesquelles il existe un objet a_o de AS' tel que $mS'(a_o) \simeq A'x(a'_o)$. On construit de même $R_{b'_o}$. On montre alors que la flèche d'inclusion $R_{p'} \hookrightarrow R_{a'_o} \cap R_{b'_o}$ est couvrante. Mais comme les cribles $R_{a'_o}$ et $R_{b'_o}$ sur S sont couvrants (m et n étant bicouvrants), il en résulte que le crible $R_{p'} \hookrightarrow (S)$ est couvrant.

Montrons enfin qu'elle est stable par <u>inverseurs</u>. Soit le bidiagramme suivant dans Fib($\underline{C}$) :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, bend right=50, "f"'] \arrow[d, bend left=50, "g"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{u}"] & A' \arrow[d, bend right=50, "f'"'] \arrow[d, bend left=50, "g'"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{u'}"] \\ B \arrow[r, "n"'] & B' \end{tikzcd}$$

où $(f'.m \xrightarrow{u'.m} g'.m) \simeq (n.f \xrightarrow{n.u} n.g)$ et où m et n sont bicouvrantes, et vérifions que la flèche canonique $Inv(u) \longrightarrow Inv(u')$ est bicouvrante. Posons $I = Inv(u)$ et $I' = Inv(u')$.

- Comme pour tout objet S de $\underline{C}$ et tout couple (a,a') d'objets de IS, on a l'isomorphisme:

$$(I_S(a_o,a_1) \longrightarrow I'_S(mS(a_o),mS(a_1))) \simeq (A_S(a_o,a_1) \longrightarrow A'_S(mS(a_o),mS(a_1)))$$

il est clair que la flèche ci-dessus à gauche est bicouvrante.

- Soit S un objet de $\underline{C}$ et a' un objet de I'S. Nous allons montrer que le crible $R_{a'}$ sur S est couvrant, où, pour tout objet S' de $\underline{C}$, $R_{a'}(S')$ est l'ensemble des flèches $x:S' \longrightarrow S$ pour lesquelles il existe un objet a de IS' tel que $mS'(a) \simeq A'x(a')$. Comme $m:A \longrightarrow A'$ est bicouvrant, le crible $C_{a'}$ sur S est couvrant, où, pour tout objet S' de $\underline{C}$, $C_{a'}(S')$ est l'ensemble des flèches $x:S' \longrightarrow S$ pour lesquelles il existe un objet a de AS' tel que $mS'(a) \simeq A'x(a')$. On montre alors que l'inclusion $R_{a'} \hookrightarrow C_{a'}$ est couvrante, car n est bicouvrant, ce qui achève de prouver que le crible $R_{a'}$ est couvrant.

L'exactitude à gauche de l'homomorphisme "champ associé" résulte aussitôt du lemme précédent, sachant que dans Champ($\underline{C}$,J) les limites projectives finies se calculent comme dans Fib($\underline{C}$) (voir l'exemple 5) du § précédent) et que, si A est un objet de Fib($\underline{C}$), B un objet de Champ($\underline{C}$,J) et $f:A \longrightarrow B$ une flèche bicouvrante, alors (B,f) est le champ associé à A (voir 6,chap.II,§2,Th.d'existence 2.1.3)!

Revenons maintenant à l'étude générale des catégories finiment complètes.

Proposition 2. Une 2-catégorie $\underline{\underline{K}}$ est finiment complète si et seulement si tout bidiagramme indexé fini admet une limite projective.

Un homomorphisme entre 2-catégories finiment complètes est exact si et seulement si il préserve la limite de tout bidiagramme indexé fini.

?? Pour celà, démontrons tout d'abord les quelques lemmes suivant, dans lesquels $\underline{\underline{K}}$ est une 2-catégorie finiment complète.

Lemme 1. $\underline{\underline{K}}$ est à produits finis.

Lemme 2. Soit $D = (s,b:D_0 \longrightarrow D_1)$ un graphe fini et A un objet de $\underline{\underline{K}}$. Alors, il existe un objet A^D dans $\underline{\underline{K}}$ et un diagramme $d:D \longrightarrow \underline{\underline{K}}(A^D,A)$ tel que, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$ le foncteur canonique de $\underline{\underline{K}}(S,A^D)$ vers $\underline{\underline{K}}(S,A)^D$ soit une équivalence.

? On vérifie que l'objet A^D est donné par le produit fibré dans $\underline{\underline{K}}$ des deux flèches suivantes: $(\mathrm{dom}^{D_1},\mathrm{cod}^{D_1}):(A^{\underline{2}})^{D_1} \longrightarrow A^{D_1}\times A^{D_1}$ et $(A^s,A^b):A^{D_0} \longrightarrow A^{D_1}\times A^{D_1}$!

Lemme 3. Dans $\underline{\underline{K}}$, toute paire de 2-flèches parallèles admet un égalisateur.

? Soit $u,v:f \longrightarrow g:A \longrightarrow B$ une telle paire. Notons P le graphe "paire de flèches parallèles" type. On a donc canoniquement un diagramme $P \longrightarrow \underline{\underline{K}}(A,B)$ et ainsi une flèche $A \longrightarrow B^P$ (d'après le lemme précédent). De même, la 2-flèche canonique $\mathrm{dom} \longrightarrow \mathrm{cod}:B^{\underline{2}} \longrightarrow B$ répétée deux fois détermine un diagramme $P \longrightarrow \underline{\underline{K}}(B^{\underline{2}},B)$ et ainsi une flèche $B^{\underline{2}} \longrightarrow B^P$. On trouve alors que l'objet $\mathrm{Egal}(u,v)$ est obtenu par le produit fibré des flèches $A \longrightarrow B^P$ et $B^{\underline{2}} \longrightarrow B^P$ en cause!

Lemme 4. Soit $f,g:A \longrightarrow B$ une paire de flèches parallèles dans $\underline{\underline{K}}$. Alors il existe un objet I de $\underline{\underline{K}}$, une flèche $i:I \longrightarrow A$ et une 2-flèche inversible $f.i \xrightarrow{\sim} g.i$ vérifiant la propriété universelle évidente (la flèche $I \longrightarrow A$ est appelée l'isomorphiseur de (f,g)).

? On vérifie que l'objet I est obtenu par le produit fibré des deux flèches suivantes: $A \xrightarrow{(f,g)} B\mathrm{x}B$ et $B \xrightarrow{\mathrm{diag}} B\mathrm{x}B$!

Lemme 5. Scit A un objet de $\underline{\underline{K}}$ et $(B_i \xrightarrow{f_i} A)_{i\in I}$ une famille de flèches de but A telle que f_i soit une équivalence sauf pour un nombre fini d'indices. Alors il existe un objet B de $\underline{\underline{K}}$, une flèche $f:B \longrightarrow A$, une famille de flèches $(B \xrightarrow{b_i} B_i)_{i\in I}$ de source B et une famille d'isomorphismes $(f_i.b_i \xrightarrow{\sim} f)_{i\in I}$ de but f vérifiant la propriété universelle évidente (B est dit produit fibré de la famille $(B_i \longrightarrow A)_{i\in I}$).

? Soit J l'ensemble (fini) des indices i de I pour lesquels f_i n'est pas une équivalence. L'objet B est alors l'isomorphiseur de la paire de flèches parallèles f,g définies par:

$$f :\Big(\big(\mathop{\mathrm{X}}_{i\in J} B_i\big)\mathrm{x}A \xrightarrow{\mathrm{proj}} B_i \xrightarrow{f_i} A\Big)_{i\in J} \text{ et } g :\Big(\big(\mathop{\mathrm{X}}_{i\in J} B_i\big)\mathrm{x}A \xrightarrow{\mathrm{proj}} A\Big)_{i\in J}!$$

Lemme 6. Soit $\underline{C}$ une catégorie de présentation finie, et A un objet de $\underline{\underline{K}}$. Alors le cotenseur $A^{\underline{C}}$ de A par $\underline{C}$ existe dans $\underline{\underline{K}}$.

? On sait que $\underline{C}$ est alors une catégorie libre associée à un graphe fini D muni d'un ensemble fini d'équations dans D. Notons $d:D \longrightarrow \underline{\underline{K}}(A^D,A)$ le diagramme universel et soit e l'équation générale suivante:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_1 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & Y \\ & Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & Y_{m-1} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On peut considérer les deux composés suivants dans $\underline{\underline{K}}(A^D,A)$:

$f_e = (dX \to dX_1 \to \dots \to dX_{n-1} \to dY)$,

$g_e = (dX \to dY_1 \to \dots \to dY_{m-1} \to dY)$,

et prendre leur égalisateur $I_e = \mathrm{Egal}(f_e, g_e)$ (d'après le lemme 3). L'objet $A^{\underline{C}}$ est alors le produit fibré de la famille des $I_e \to A^D$, où e parcourt l'ensemble des équations voulu (cf. lemme 5) !

Lemme 7. Considérons dans $\underline{\underline{K}}$ la donnée de:

- trois objets A, B et C,
- une paire de flèches parallèles $f,g : A \to B$,
- deux familles $(u_i)_{i=1,2,..,p}$ et $(v_j)_{j=1,2,..,q}$ $: B \to C$,
- deux 2-flèches $u_1.g \to v_1.g$ et $u_p.f \to v_q.f$,
- deux familles de 2-flèches: $u_{i+1}.g \to u_i.f$, $i = 1,2,..,p-1$, et $v_{j+1}.g \to v_j.f$, $j = 1,2,..,q-1$.

Alors il existe une flèche $d : T \to A$ et une 2-flèche inversible $f.d \xrightarrow{\sim} g.d$ rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} u_p.f.d & \to & u_p.g.d & \to & u_{p-1}.f.d & \to & \dots & \to & u_2.g.d & \to & u_1.f.d & \to & u_1.g.d \\ \downarrow & & & & & & & & & & & & \downarrow \\ v_q.f.d & \to & v_q.g.d & \to & v_{q-1}.f.d & \to & \dots & \to & v_2.g.d & \to & v_1.f.d & \to & v_1.g.d \end{array}$$

qui est solution d'un problème universel évident.

? Il suffit tout d'abord de prendre l'isomorphiseur $(I \xrightarrow{n} A, f.n \xrightarrow{\sim} g.n)$ de la paire (f,g), puis l'égalisateur $T \to I$ de la paire (t,t') de 2-flèches parallèles, où

$$t = (u_p.f.n \to v_q.f.n \to v_q.g.n \to \dots \to v_2.g.n \to v_1.f.n \to v_1.g.n)$$

$$t' = (u_p.f.n \to u_p.g.n \to u_{p-1}.f.n \to . \to u_1.f.n \to u_1.g.n \to v_1.g.n) !$$

Preuve de la proposition 2.

Soit $(f,F) : \underline{\underline{D}} \to \underline{\underline{K}}$ un bidiagramme indexé fini; p et q étant des entiers, notons $D_2(p,q)$ l'ensemble des 2-flèches $d : c \to c'$ où c et c' sont des chemins de longueurs respectives p et q. Comme D_o, D_1 et $D_2(p,q)$ sont finis et que pour tout objet X de $\underline{\underline{D}}$, fX est de présentation finie, on peut considérer :

1) les objets $A,B,C(p,q)$ ainsi définis: A est le produit indexé par D_o des FX^{fX} ; B est le produit indexé par D_1 des FY^{fX}, $(X \longrightarrow Y \in D_1)$; $C(p,q)$ est le produit indexé par $D_2(p,q)$ des FY^{fX}, $(c \longrightarrow c':X \longrightarrow Y \in D_2)$.

2) la paire de flèches $g,h : A \longrightarrow B$, définie par:

$$g = (A \xrightarrow[\mathrm{proj}_Y]{} FY^{fY} \xrightarrow[FY^{fx}]{} FY^{fX})_{x:X \longrightarrow Y \in D_1}$$

$$h = (A \xrightarrow[\mathrm{proj}_X]{} FX^{fX} \xrightarrow[Fx^{fX}]{} FY^{fX})_{x:X \longrightarrow Y \in D_1}$$

3) les deux familles de flèches $(u_i)_{i = 1,2,..,p}$ et $(v_j)_{j = 1,2,..,q}$ définies par:

$$u_i = (FY^{fx_1}. \;...\; .FY^{fx_{i-1}}.Fx_p^{fX_{i-1}}. \;...\; .Fx_{i+1}^{fX_{i-1}}.\mathrm{proj}_{x_i})_s$$

où $s:x_p.x_{p-1}...x_1 \longrightarrow y_q.y_{q-1}...y_1$ parcourt l'ensemble $D_2(p,q)$, et où $x_i:X_{i-1} \longrightarrow X_i$, $y_j:Y_{j-1} \longrightarrow Y_j$ et $X = X_o = Y_o$, $X_p = Y_q = Y$. Définition analogue des v_j.

4) Pour chaque i de 1 à $p-1$, l'unique 2-flèche (inversible) de $u_{i+1}.h$ vers $u_i.g$ telle que le diagramme suivant commute, pour tout $s \in D_2(p,q)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{proj}_s.u_{i+1}.h \arrow[r, "\sim"] \arrow[ddd] & FY^{fx_1}..FY^{fx_i}.Fx_p^{fX_i}..Fx_{i+2}^{fX_i}.\mathrm{proj}_{x_{i+1}}.h \arrow[d, "\wr"] \\
 & FY^{fx_1}..FY^{fx_i}.Fx_p^{fX_i}..Fx_{i+2}^{fX_i}.Fx_{i+1}^{fX_i}.\mathrm{proj}_{X_i} \arrow[d, "\wr"] \\
 & FY^{fx_1}..FY^{fx_{i-1}}.Fx_p^{fX_{i-1}}..Fx_{i+1}^{fX_{i-1}}.FX_i^{fx_i}.\mathrm{proj}_{X_i} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{proj}_s.u_i.g \arrow[r, "\sim"] & FY^{fx_1}..FY^{fx_{i-1}}.Fx_p^{fX_{i-1}}..Fx_{i+1}^{fX_{i-1}}.\mathrm{proj}_{x_i}.g
\end{tikzcd}$$

On trouverait de même, pour chaque j de 1 à $q-1$, une 2-flèche inversible de $v_{j+1}.h$ vers $v_j.g$.

5) L'unique 2-flèche $u_1.h \longrightarrow v_1.h$ telle que le diagramme suivant commute pour tout $s \in D_2(p,q)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{proj}_s.u_1.h \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & Fx_p^{fX}...Fx_1^{fX}.\mathrm{proj}_X \arrow[r, "\sim"] & (Fx_p...Fx_1)^{fX}.\mathrm{proj}_X \arrow[d] \\
\mathrm{proj}_s.v_1.h \arrow[r, "\sim"] & Fy_q^{fX}...Fy_1^{fX}.\mathrm{proj}_X \arrow[r, "\sim"] & (Fy_q...Fy_1)^{fX}.\mathrm{proj}_X
\end{tikzcd}$$.

On trouverait de même une 2-flèche $u_p.g \longrightarrow v_q.g$.

Par suite, il nous suffit d'utiliser le lemme 7 pour trouver la donnée d'une flèche $d:T_{(p,q)} \longrightarrow A$ et d'une 2-flèche inversible $g.d \xrightarrow{\sim} h.d$ qui rende le "bon diagramme" commutatif et qui soit universelle.

Enfin, considérons l'objet L obtenu par produit fibré de la famille $(T_{(p,q)} \longrightarrow A)_{(p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ (il existe bien car si p et q sont grands, alors $D_2(p,q) = \emptyset$ et donc $C(p,q) \simeq 1$ et $T_{(p,q)} \longrightarrow A$ est une équivalence).

On construit aussi:

- pour chaque objet X de $\underline{\underline{D}}$ un foncteur $lX:fX \longrightarrow \underline{\underline{K}}(L,FX)$, en composant les foncteurs $fX \longrightarrow \underline{\underline{K}}(FX^{fX},FX) \longrightarrow \underline{\underline{K}}(L,FX)$, où la flèche de droite est le foncteur "composition à gauche par $L \longrightarrow A \xrightarrow[proj_X]{} FX^{fX}$ "

- pour chaque flèche $x:X \longrightarrow Y$ dans $\underline{\underline{D}}$, une 2-flèche inversible lx: $lY.fx \longrightarrow \underline{\underline{K}}(L,Fx).lX$. Cela provient du fait que pour chaque objet a de fX , le carré suivant commute à un isomorphisme près:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "proj_X"'] & L \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dd, phantom, "\simeq"] & A \arrow[d, "proj_Y"] \\
FX^{fX} \arrow[d, "{d(X,X)(a)}"'] & & FY^{fY} \arrow[d, "{d(Y,Y)fx(a)}"] \\
FX \arrow[rr, "Fx"] & & FY
\end{tikzcd}$$

où $d(X,Y):fX \longrightarrow \underline{\underline{K}}(FY^{fX},FY)$ est le foncteur canonique. On vérifie qu'on a bien défini ainsi une flèche $l:f \longrightarrow \underline{\underline{K}}(L,F(-))$ et qu'elle est universelle.

Section 3. 2-CATEGORIE PREDICATIVE.

Soit $\underline{\underline{K}}$ une 2-catégorie et A un objet de $\underline{\underline{K}}$. Notons $\underline{\underline{K}}/A$ la 2-catégorie qui a:

- pour objets, les couples (M,m) où M est un objet de $\underline{\underline{K}}$ et $m:M \longrightarrow A$ est une flèche de $\underline{\underline{K}}$,
- pour flèches $(M,m) \longrightarrow (N,n)$ les couples (f,i) où $f:M \longrightarrow N$ est une flèche de $\underline{\underline{K}}$ et $i:n.f \xrightarrow{\sim} m$ est une 2-flèche inversible,

- pour 2-flèches $(f,i) \longrightarrow (f',i')$ les 2-flèche. $t:f \longrightarrow f'$ telles que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} n.f \arrow[rr, "n.t"] \arrow[dr, "i"'] & & n.f' \arrow[dl, "i'"] \\ & m & \end{tikzcd}$$

Si $f:A \longrightarrow B$ est une flèche de $\underline{\underline{K}}$, nous notons $\Sigma_f: \underline{\underline{K}}/A \longrightarrow \underline{\underline{K}}/B$ l'homomorphisme de composition par f. On a alors la proposition:

Proposition 1. Si $\underline{\underline{K}}$ est finiment complète, alors:
- *Pour tout objet A de $\underline{\underline{K}}$, $\underline{\underline{K}}/A$ est finiment complète,*
- *Pour toute flèche $f:A \longrightarrow B$, l'homomorphisme $\Sigma_f:\underline{\underline{K}}/A \longrightarrow \underline{\underline{K}}/B$ admet un adjoint à droite $f^*: \underline{\underline{K}}/B \longrightarrow \underline{\underline{K}}/A$.*

Définitions. On dit qu'une flèche $A \longrightarrow B$ de $\underline{\underline{K}}$ est *pleinement fidèle* (resp. *fidèle*) si, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$ le foncteur $\underline{\underline{K}}(S,A) \longrightarrow \underline{\underline{K}}(S,B)$ est pleinement fidèle (resp. fidèle).

Proposition 2.
- *Les flèches fidèles et pleinement fidèles sont stables par changement de base et par suspension.*
- *Si $\underline{\underline{K}}$ est finiment complète, une flèche $A \longrightarrow B$ est pleinement fidèle (resp. fidèle) si et seulement si la flèche canonique de $A^{\underline{2}}$ vers $A/_{B}A$ est une équivalence (resp. pleinement fidèle).*
- *Les flèches fidèles et pleinement fidèles sont préservées par tout homomorphisme exact.*
- *Les inverseurs et les égalisateurs sont des flèches pleinement fidèles.*

Exemples.
1) Dans Cat, on retrouve la terminologie habituelle.
2) Dans $\hat{\underline{\underline{C}}}$, une flèche $A \longrightarrow B$ est pleinement fidèle (resp. fidèle) si et seulement si, pour tout objet S de $\underline{\underline{C}}$, le foncteur $AS \longrightarrow BS$ est pleinement fidèle (resp. fidèle).
3) Dans Fib($\underline{C}$), il s'agit d'un cas particulier du précédent.
4) Dans Champ($\underline{C}$,J) , une flèche est pleinement fidèle ou fidèle

si et seulement si elle l'est dans Fib($\underline{C}$).
5) Dans FLP($\underline{C}$), même remarque que pour le 4).
6) Dans Cat($\underline{C}$), où $\underline{C}$ est finiment complète, une flèche $A \longrightarrow B$ est pleinement fidèle (resp. fidèle) si la flèche canonique $A_1 \longrightarrow P$ est un isomorphisme (resp. un monomorphisme) où P désigne le produit fibré suivant dans $\underline{C}$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & A_o \times A_o \arrow[d] \\ B_1 \arrow[r] & B_o \times B_o \end{tikzcd}$$

Supposons maintenant que $\underline{\underline{K}}$ soit finiment complète et soit A un objet de $\underline{\underline{K}}$. Notons $PF(\underline{\underline{K}})_A$ la sous-2-catégorie pleine de $\underline{\underline{K}}/A$ qui a pour objets les objets (M,m) de $\underline{\underline{K}}/A$ pour lesquels $m:M \longrightarrow A$ est pleinement fidèle. Remarquons alors que si (M,m) et (N,n) sont deux objets quelconques de $PF(\underline{\underline{K}})_A$, deux flèches parallèles $(M,m) \longrightarrow (N,n)$ sont toujours 2-isomorphes et ce 2-isomorphisme est unique. Par suite, il est naturel de considérer la relation de préordre suivante sur les objets de $PF(\underline{\underline{K}})_A$: $(M,m) \leqslant (N,n)$ si et seulement si il existe une flèche $(M,m) \longrightarrow (N,n)$. Il nous reste alors à quotienter par la relation d'équivalence associée pour obtenir un ensemble ordonné que l'on notera simplement P(A). On vérifie que deux objets (M,m) et (N,n) de $PF(\underline{\underline{K}})_A$ appartiennent à une même classe d'équivalence si et seulement si ils sont équivalents dans $\underline{\underline{K}}/A$.

Soit maintenant $f:A \longrightarrow B$ une flèche de $\underline{\underline{K}}$. Alors, l'homomorphisme $f^*: \underline{\underline{K}}/B \longrightarrow \underline{\underline{K}}/A$ préservant les flèches pleinement fidèles (d'après la proposition 2) il définit une application ordonnée $f^{-1}: P(B) \rightarrow P(A)$.
On remarque que:
- Pour tout objet A de $\underline{\underline{K}}$, l'ensemble ordonné P(A) vérifie les deux propriétés suivantes: P(A) a un plus grand élément appelé "vrai_A" , tout couple d'éléments M et N de P(A) admet une borne inférieure notée $M \cap N$.
- Pour toute flèche $f:A \longrightarrow B$, l'application $f^{-1}:P(B) \longrightarrow P(A)$ préserve les bornes inférieures et le plus grand élément.
- Si $f,g:A \longrightarrow B$ est un couple de flèches parallèles, alors l'équi-

valence $f \simeq g$ entraîne l'égalité $f^{-1} = g^{-1}$.
- Si $f:A \longrightarrow B$ et $g: B \longrightarrow C$ sont des flèches de $\underline{\underline{K}}$, alors on a l'égalité $(g.f)^{-1} = f^{-1}.g^{-1}$.

<u>Définition</u>. On dit qu'une 2-catégorie finiment complète $\underline{\underline{K}}$ est <u>prédicative</u> si elle vérifie les propriétés suivantes:

(U) Pour tout objet A de $\underline{\underline{K}}$, l'ensemble ordonné P(A) admet un plus petit élément appelé "faux_A" , et pour tout couple d'éléments M et N , une borne supérieure notée $M \cup N$.

($\exists$) Pour toute flèche $f:A \longrightarrow B$, le foncteur $f^{-1}:P(B) \longrightarrow P(A)$ admet un adjoint à gauche $\exists_f:P(A) \longrightarrow P(B)$ qui vérifie la condition suivante (dite de Chevalley-Beck):
pour tout produit fibré comme ci-dessous à gauche, le carré ci-dessous à droite commute:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "a"'] & B' \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P(A) \arrow[r, "\exists_f"] \arrow[d, "a^{-1}"'] & P(B) \arrow[d, "b^{-1}"] \\ P(A') \arrow[r, "\exists_{f'}"'] & P(B') \end{tikzcd}$$

($\forall$) Pour toute flèche $f:A \longrightarrow B$, le foncteur $f^{-1}:P(B) \longrightarrow P(A)$ admet un adjoint à droite $\forall_f:P(A) \longrightarrow P(B)$.

<u>Exemples</u>.

1) Cat : A étant une catégorie, appelons <u>plongement</u> (vers A) une sous-catégorie pleine B de A qui est stable pour les inversibles (i.e. si b est un objet de B et si $b' \xrightarrow{\sim} b$ est inversible, alors b' est encore objet de B). Notons alors $\underline{P}(A)$ l'ensemble ordonné de tous les plongements vers A. Il est clair que tout foncteur $f: A \longrightarrow B$ définit une application croissante $f^{-1}:\underline{P}(B) \longrightarrow \underline{P}(A)$. Si nous comparons avec la théorie générale, on s'aperçoit (en utilisant l'axiome du choix) que l'application croissante canonique $\underline{P}(A) \longrightarrow P(A)$ est un isomorphisme et de plus, toute flèche $f:A \longrightarrow B$ de Cat est telle que le carré suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} \underline{P}(A) & \xleftarrow{f^{-1}} & \underline{P}(B) \\ {\scriptstyle cano.}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle cano.} \\ P(A) & \xleftarrow[f^{-1}]{} & P(B) \end{array}$$

Nous pouvons maintenant vérifier notre assertion en utilisant $\underline{P}(-)$ au lieu de $P(-)$. Les axiomes (U) et ($\exists$) se vérifient immédiatement. Quant à ($\forall$), soit $f:A \longrightarrow B$ un foncteur et M un élément de $\underline{P}(A)$; alors $\forall_f(M)$ est le plongement vers B qui a pour objets les objets b de B tels que pour tout objet a de A, si $fa \xrightarrow{\sim} b$, alors a est dans **M**.

2) $\hat{\underline{\underline{C}}} = \mathrm{Cat}^{\underline{\underline{C}}^{op}}$. Soit A un objet de $\hat{\underline{\underline{C}}}$ et appelons encore <u>plongement</u> (vers A) la donnée B, pour chaque objet S de $\underline{\underline{C}}$, d'un plongement $BS \longrightarrow AS$. Cette donnée doit vérifier la condition suivante: pour toute flèche $k:S' \longrightarrow S$ de $\underline{\underline{C}}$ et tout objet a de AS, si a est objet de BS, alors Ak(a) est objet de BS'. Notons alors $\underline{P}(A)$ l'ensemble ordorné des plongements vers A. Il est clair que toute flèche $f:A \longrightarrow B$ de $\hat{\underline{\underline{C}}}$ définit une application croissante $f^{-1}:\underline{P}(B) \longrightarrow \underline{P}(A)$. Comparons maintenant à nouveau avec la théorie générale. On s'aperçoit que l'application croissante canonique $\underline{P}(A) \longrightarrow P(A)$ est, comme dans le cas précédent, un isomorphisme et que pour toute flèche $A \longrightarrow B$ dans $\hat{\underline{\underline{C}}}$, le "bon carré" commute.

Vérifions maintenant que $\hat{\underline{\underline{C}}}$ est bien prédicative. Comme précédemment, la vérification de (U) et de ($\exists$) se fait sans difficulté. Pour l'axiome ($\forall$), soit $f:A \longrightarrow B$ une flèche de $\hat{\underline{\underline{C}}}$ et M un élément de $\underline{P}(A)$. Alors, pour tout objet S de $\underline{\underline{C}}$, $\forall_f(M)S$ est le plongement vers BS qui a pour objets les objets b de BS tels que, pour toute flèche $k:S' \longrightarrow S$ dans $\underline{\underline{C}}$ et tout objet a de AS', si fS'(a) est isomorphe à Bk(b), alors a est dans MS'.

3) Fib($\underline{C}$), qui est un cas particulier du précédent.

4) FLP($\underline{C}$). Remarquons que si $f:A \longrightarrow B$ est une flèche pleinement fidèle de Fib($\underline{C}$) et si B est localement petite, alors il en va de même de A. Par suite, FLP($\underline{C}$) va vérifier les trois axiomes des catégories prédicatives.

5) Champ($\underline{C}$,J). Si A est un champ, notons P'(A) le sous-ensemble

ordonné de $P(A)$ formé des classes d'équivalence $\widetilde{(M,m)}$ où M est un champ. Comme l'inclusion de $\mathrm{Champ}(\underline{C},J)$ dans $\mathrm{Fib}(\underline{C})$ admet un adjoint à gauche, exact à gauche (voir section 2, exemples), l'inclusion de $P'(A)$ dans $P(A)$ admet aussi un adjoint à gauche $v:P(A) \longrightarrow P'(A)$ et, pour toute flèche $f:A \longrightarrow B$ dans $\mathrm{Champ}(\underline{C},J)$, le carré suivant commute:

$$\begin{tikzcd} P(B) \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "v"'] & P(A) \arrow[d, "v"] \\ P'(B) \arrow[r, "f^{-1}"] & P'(A) \end{tikzcd}$$

Par suite, $P'(A)$ vérifie l'axiome (U), l'adjoint à gauche de f^{-1}: $P'(B) \longrightarrow P'(A)$ est le foncteur composé: $P'(A) \hookrightarrow P(A) \xrightarrow{\exists_f} P(B) \xrightarrow{v} P'(B)$, la condition de Chevalley-Beck résultant de la commutation du carré précédent. Vérifions maintenant l'axiome $(\forall)$. Soit $f:A \longrightarrow B$ une flèche de $\mathrm{Champ}(\underline{C},J)$ et $\widetilde{(M,m)}$ un élément de $P(A)$. Notons $\widetilde{(N,n)} = \forall_f\widetilde{(M,m)}$ dans $\mathrm{Fib}(\underline{C})$ et montrons que N est un champ. Soit S un objet de $\underline{C}$ et R un crible couvrant sur S. Il faut donc montrer que le foncteur $\mathrm{Fib}(\underline{C})((S),N) \longrightarrow \mathrm{Fib}(\underline{C})(R,N)$ est une équivalence. Soit $x:R \longrightarrow N$ une flèche de $\mathrm{Fib}(\underline{C})$. Comme B est un champ, il existe $y:(S) \longrightarrow B$ tel que $n.x \xrightarrow{\sim} y.u$ (où u désigne l'inclusion de R dans (S)). Considérons maintenant le produit fibré suivant dans $\mathrm{Fib}(\underline{C})$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & (S) \arrow[d, "y"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Comme $\widetilde{(R,u)} \leqslant y^{-1}\,\forall_f\widetilde{(M,m)} = \forall_q p^{-1}\widetilde{(M,m)}$, d'après la condition de Chevalley-Beck pour le $\forall$, on en déduit que $q^{-1}\widetilde{(R,u)} \leqslant p^{-1}\widetilde{(M,m)}$. Mais comme M et A sont des champs et que $q^{-1}R \hookrightarrow P$ est couvrant, on a encore l'inégalité : $q^{-1}(\mathrm{vrai}_{(S)}) = \mathrm{vrai}_P \leqslant p^{-1}\widetilde{(M,m)}$, ce qui est équivalent à : $\mathrm{vrai}_{(S)} \leqslant \forall_q p^{-1}\widetilde{(M,m)} = y^{-1}\forall_f\widetilde{(M,m)}$. Mais ceci prouve qu'il existe une flèche $k:(S) \longrightarrow N$ telle que $n.k \xrightarrow{\sim} y$ et $k.u \xrightarrow{\sim} x$ (puisque n est pleinement fidèle). Le fait que le foncteur $\mathrm{Fib}(\underline{C})((S),N) \longrightarrow \mathrm{Fib}(\underline{C})(R,N)$ soit pleinement fidèle résulte immédiatement du fait que n l'est.

Remarque. Cat($\underline{C}$) ne semble pas vérifier l'axiome ($\forall$) même si $\underline{C}$ est un topos, l'axiome du choix paraissant indispensable. Toutefois, lorsque $\underline{C}$ est un topos, Cat($\underline{C}$) vérifie les axiomes (U) et ($\exists$). Dans ce dernier cas, il suffit seulement de supposer $\underline{C}$ finiment complète.

Revenons maintenant à l'étude générale d'une 2-catégorie prédicative $\underline{\underline{K}}$.

Proposition 3. On a les propriétés suivantes:

1) (Condition de Chavalley-Beck pour le $\forall$). Pour tout produit fibré (ci-dessous à gauche) le carré suivant (à droite) commute:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} P(A) & \xrightarrow{\forall_f} & P(B) \\ {\scriptstyle a^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b^{-1}} \\ P(A') & \xrightarrow[\forall_{f'}]{} & P(B') \end{array}$$

2) Pour tout objet A de $\underline{\underline{K}}$, P(A) est une algebre de Heyting.

3) Pour toute flèche $f:A \longrightarrow B$ de $\underline{\underline{K}}$, $f^{-1}:P(B) \longrightarrow P(A)$ préserve la structure d'algèbre de Heyting.

Définition. Soit $f:A \longrightarrow B$ une flèche de $\underline{\underline{K}}$. On dira que f est dominante si: $\exists_f(\mathrm{vrai}_A) = \mathrm{vrai}_B$.

Exemples.

1) Dans Cat, $f:A \longrightarrow B$ est dominante si et seulement si pour tout objet b de B il existe un objet a de A tel que $fa \xrightarrow{\sim} b$.

2) Dans $\hat{\underline{\underline{C}}}$, $f:A \longrightarrow B$ est dominante si et seulement si pour tout objet S de $\underline{\underline{C}}$, $fS:AS \longrightarrow BS$ est dominante dans Cat.

3) Dans Fib($\underline{C}$) et dans FLP($\underline{C}$), c'est la même caractérisation qu'en 2).

4) Dans Champ($\underline{C}$,J), une flèche $f:A \longrightarrow B$ est dominante si et seulement si, pour tout objet S de $\underline{C}$ et pour tout objet b de BS, le crible R_b sur S est couvrant, où, pour tout objet S' de $\underline{C}$, $R_b(S')$ est l'ensemble des flèches $k:S' \longrightarrow S$ pour lesquelles il existe un objet a de AS' tel que $fS'(a) \xrightarrow{\sim} Bk(b)$.

5) Dans Cat($\underline{C}$) (ce qui a un sens, puisque l'axiome ($\exists$) est vérifié),

une flèche $f:A \longrightarrow B$ est dominante si et seulement si il existe un foncteur interne $B_o \longrightarrow A$ (où B_o désigne la catégorie discrète interne associée à l'objet des objets de B) tel que son composé avec f soit, à un isomorphisme près, le foncteur canonique $B_o \longrightarrow B$ dans $Cat(\underline{C})$.

Proposition 4. Soit $d:A \longrightarrow B$ une flèche de $\underline{\underline{K}}$; alors:
- d est dominante si et seulement si pour toute flèche pleinement fidèle $p:C \longrightarrow D$, le foncteur canonique $k:\underline{\underline{K}}(B,C) \longrightarrow \underline{\underline{K}}(A,C) \times_{\underline{\underline{K}}(A,D)} \underline{\underline{K}}(B,D)$ est une équivalence.

2) Si d est dominante, alors pour toute flèche fidèle $p:C \longrightarrow D$ le foncteur k précédent est pleinement fidèle.

3) Si d est dominante, alors, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(B,S) \longrightarrow \underline{\underline{K}}(A,S)$ est fidèle et conservatif (i.e. il réfléchit les isomorphismes).

? 1) Si $C \longrightarrow D$ est pleinement fidèle, le foncteur k l'est aussi. Il reste à montrer que k est dominante. Soit $a:A \longrightarrow C$ et $b:B \longrightarrow D$ deux flèches telles que $b.d \xrightarrow{\sim} p.a$. Comme on a : $vrai_A \leqslant (b.d)^{-1}(\widetilde{C,p}) = d^{-1}.b^{-1}(\widetilde{C,p})$, on a $\exists_d(vrai_A) \leqslant b^{-1}(\widetilde{C,p})$. Mais, d étant dominante, on a aussi $vrai_B \leqslant b^{-1}(\widetilde{C,p})$; ceci signifie donc qu'il existe une flèche $f:B \longrightarrow C$ telle que $p.f \xrightarrow{\sim} b$, d'où $p.f.d \xrightarrow{\sim} b.d \xrightarrow{\sim} p.a$. Ainsi $f.d \xrightarrow{\sim} a$ puisque p est pleinement fidèle.

2) Soient $f, g : B \longrightarrow C$ des flèches et $u:p.f \longrightarrow p.g$, $v:f.d \longrightarrow g.d$ des 2-flèches telles que $p.v = u.d$. On voit qu'il existe alors deux flèches $A \longrightarrow C^{\underline{2}}$ et $B \longrightarrow C/_D C$ telles que le diagramme suivant commute à un isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & C^{\underline{2}} \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\sim"] \\
B \arrow[r] & C/_D C
\end{tikzcd}$$

Mais $p:C \longrightarrow D$ étant fidèle, la flèche $C^{\underline{2}} \longrightarrow C/_D C$ est pleinement fidèle (proposition 2). Il suffit alors d'utiliser le 1) pour montrer qu'il existe une unique 2-flèche $t:f \longrightarrow g$ telle que $t.d = v$

et $p.t = u$.

3) Soient $f,g:B \longrightarrow S$ des flèches et $t,t':f \longrightarrow g$ des 2-flèches telles que $t.d = t'.d$. Considérons l'égalisateur $e:E \longrightarrow B$ de (t,t'). Alors $d:A \longrightarrow B$ se factorise par $e:E \longrightarrow B$, et on a donc: $\exists_d(\mathrm{vrai}_A) \leqslant \widetilde{(E,e)}$. Mais d étant dominante, $\widetilde{(E,e)} = \mathrm{vrai}_B$, ce qui prouve que e est une équivalence ; par suite $t = t'$. On montre de même la deuxième partie du point 3) en utilisant les inverseurs!

Proposition 5.

- $A \longrightarrow B$ étant une flèche de $\underline{\underline{K}}$, si elle est dominante et pleinement fidèle, c'est une équivalence.
- Soit $f:A \longrightarrow B$, $g:B \longrightarrow C$ et $h:A \longrightarrow C$ trois flèches, telles que $h \xrightarrow{\sim} g.f$, alors on a les propriétés suivantes:

  si f et g sont dominantes, h l'est aussi,

  si h est dominante, alors f l'est aussi,

  si g est pleinement fidèle et $\widetilde{(B,g)} = \exists_h(\mathrm{vrai}_A)$, f est dominante.
- Toute flèche $A \longrightarrow B$ se décompose de façon unique (à une équivalence près) de la manière suivante: $A \longrightarrow I \longrightarrow B$, où $A \longrightarrow I$ est dominante et $I \longrightarrow B$ est pleinement fidèle.
- Les flèches dominantes sont stables par changement de base.

Section 4. LANGAGE DE CATEGORIES.

Définition. Un langage de catégories L est (simplement) un bigraphe (voir définition dans la section 1).

Les éléments de L_0, L_1 et L_2 sont respectivement appelés des 0-symboles, 1-symboles et 2-symboles.

Posons $\mathrm{Var}_0(L) = L_0 \times \mathbb{N}$ et désignons par "sorte": $\mathrm{Var}_0(L) \longrightarrow L_0$ la projection canonique. Les éléments de $\mathrm{Var}_0(L)$ sont appelés des 0-variables et, X étant une 0-variable, on écrira indifféremment "X est de sorte A" ou "A = sorte(X)" .

Nous allons maintenant construire par induction un ensemble $Ter_0(L)$ appelé ensemble des <u>0-termes</u> , et une application "sorte": $Ter_0(L) \longrightarrow L_0$; en voici les règles:

1) Toute 0-variable de sorte A est un 0-terme de sorte A.
2) Si T est un 0-terme de sorte A, et si $f:A \longrightarrow B$ est un 1-symbole, alors $f[T]$ est un 0-terme de sorte B.

Posons maintenant : $Var_1(L) = (Ter_0(L) \underset{L_0}{\times} Ter_0(L)) \times \mathbb{N}$. L'application canonique $Var_1(L) \longrightarrow L_0$ est encore appelée "sorte" et les deux applications canoniques $Var_1(L) \longrightarrow Ter_0(L)$ sont notées "dom" et "cod" (domaine et codomaine). Ainsi se trouve construit un graphe. Les flèches de ce graphe (i.e. les éléments de $Var_1(L)$) sont appelés des 1-variables. Aussi, x étant une 1-variable, on notera alors : $x:T \longrightarrow T'$ au lieu de $T = dom(x)$ et $T' = cod(x)$ (comme on le fait pour n'importe quel graphe !). Il est clair qu'une 1-variable $x:T \longrightarrow T'$ a même sorte que les 0-termes T et T'.

Construisons maintenant par induction:

- Un nouvel ensemble $Ter_1(L)$ appelé ensemble des <u>1-termes</u>.
- Deux applications "dom" et "cod" : $Ter_1(L) \longrightarrow Ter_0(L)$
- Une application "sorte" : $Ter_1(L) \longrightarrow L_0$.

En voici les règles:

1) Toute 1-variable $x:T \longrightarrow T'$ de sorte A est un 1-terme de sorte A. Si T est un 0-terme, $Id_T:T \longrightarrow T$ est un 1-terme de même sorte.
2) Si $t:T \longrightarrow T'$ et $t':T' \longrightarrow T''$ sont des 1-termes de sorte A , alors $[t'].[t]:T \longrightarrow T''$ est un 1-terme de sorte A.
3) Si $t:T \longrightarrow T'$ est un 1-terme de sorte A et si $f:A \longrightarrow B$ est un 1-symbole, alors $f[t] : f[T] \longrightarrow f[T']$ est un 1-terme de sorte B.
4) Si T est un 0-terme de sorte A, et si $u:f_p\ldots f_1 \longrightarrow g_q\ldots g_1:A \longrightarrow B$ est un 2-symbole, alors $u[T]:T_1 \longrightarrow T_2$ est un 1-terme de sorte B, où on a posé :

$$T_1 = f_p[\ldots[f_2[f_1[T]]]\ldots] \quad \text{et} \quad T_2 = g_q[\ldots[g_2[g_1[T]]]\ldots]$$

On vient de construire ainsi un graphe noté Ter(L).

Avant de parler des formules, définissons par induction une application $Var_0: Ter_0(L) \longrightarrow P(Var_0(L))$:

1) Si X est une 0-variable de sorte A, alors $Var_o(X) = \{X\}$.
2) Si T est un 0-terme de sorte A et si $f:A \longrightarrow B$ est un 1-symbole alors $Var_o(f[T]) = Var_o(T)$.
Remarquons alors que si T est un 0-terme , $Var_o(T)$ a un et un seul élément. Aussi il est possible de construire deux applications canoniques $dom, cod : Var_1(L) \longrightarrow Var_o(L)$ en posant, pour une 1-variable $x:T \longrightarrow T'$ quelconque de L :

$dom(x) = X$ si et seulement si X est élément de $Var_o(T)$,

$cod(x) = X'$ si et seulement si X' est élément de $Var_o(T')$.

Ici encore, on vient de construire un nouveau graphe noté Var(L). Construisons aussi (par induction) une nouvelle application Var de l'ensemble des 1-termes dans l'ensemble des sous-graphes de Var(L) (on conviendra d'appeler un tel sous-graphe "<u>graphe de variables</u>"):
1) Si $x:T \longrightarrow T'$ est une 1-variable, alors $Var(x)_1 = \{x\}$ et $Var(x)_o$ est la réunion de $Var_o(T)$ et de $Var_o(T')$.
2) Si T est un 0-terme, $Var(Id_T)_1 = \emptyset$ et $Var(Id_T)_o = Var_o(T)$.
3) Si $t:T \longrightarrow T'$ et $t':T' \longrightarrow T''$ sont des 1-termes de même sorte, alors $Var([t'].[t])_i$ est la réunion de $Var(t')_i$ et de $Var(t)_i$, $i = 0,1$
4) Si $t:T \longrightarrow T'$ est un 1-terme de sorte A et si $f:A \longrightarrow B$ est un 1-symbole, alors $Var(f[t])_i = Var(t)_i$, $i = 0,1$.
5) Si T est un 0-terme de sorte A et $u:f_p\ldots f_1 \longrightarrow g_q\ldots g_1 : A \longrightarrow B$ un 2-symbole, alors $Var(u[T])_1 = \emptyset$ et $Var(u[T])_o = Var_o(T)$.

<u>Parenthèse</u>. D étant un graphe , un objet X de D est dit <u>isolé</u> s'il n'appartient ni à $dom(D_1)$ ni à $cod(D_1)$.

Nous sommes maintenant en mesure de construire, par induction:
- l'ensemble Form(L) des <u>formules</u> du langage L ,
- l'application Varl (variable libre) de l'ensemble Form(L) dans l'ensemble des graphes de variables. En voici les règles:
1) Vrai et Faux sont des formules et $Varl(Vrai) = Varl(Faux) = \emptyset$.
2) Si $t_1:T \longrightarrow T'$ et $t_2:T \longrightarrow T'$ sont des 1-termes (nécessairement de même sorte) alors $t_1 \doteq t_2$ est une formule et

$$Varl(t_1 \doteq t_2)_i = Varl(t_1)_i \cup Varl(t_2)_i \quad , \text{ où } i = 0,1.$$

3) Si F et F' sont des formules, alors $[F] \wedge [F']$, $[F] \vee [F']$

et $[F] \Longrightarrow [F']$ sont des formules et leurs grphes de variables libres "s'ajoutent" .

4) Si F est une formule et X une 0-variable de sorte A appartenant à $\mathrm{Varl}(F)_0$ et isolée dans Varl(F) , alors $\exists_A X[F]$ et $\forall_A X[F]$ sont des formules et leurs graphes de variables libres sont les mêmes: pour les flèches, c'est toujours $\mathrm{Varl}(F)_1$; pour les objets, c'est $\mathrm{Varl}(F)_0 - \{X\}$ (en quantifiant sur une 0-variable libre d'une formule, on obtient une nouvelle formule où la 0-variable en question n'est plus libre!)

5) Si F est une formule et si $x:T \to T'$ est une 1-variable libre dans F, alors $\exists x:T \to T'[F]$ et $\forall x:T \to T'[F]$ sont des formules ayant même graphe des variables libres : pour objets, c'est toujours $\mathrm{Varl}(F)_0$; pour flèches, c'est $\mathrm{Varl}(F)_1 - \{x\}$ (en quantifiant sur une 1-variable libre d'une formule, on obtient une nouvelle formule où la 1-variable en question n'est plus libre!)

Soit V un graphe de variables. Par souci de simplification , nous dirons que :

- un 0-terme T est à variables dans V si $\mathrm{Var}_0(T)$ est contenu dans V_0
- un 1-terme t est à variables dans V si Var(t) est un sous-graphe de V
- une formule F est à variables libres dans V si Varl(F) est un sous-graphe de V .

On appelle <u>séquent</u> et on écrit $\mathcal{A} \vdash_{V} \mathcal{B}$ un triplet$(V, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ où V est un graphe de variables et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des ensembles finis (ils peuvent être vides) de formules de L à variables libres dans V.

Enfin appelons une <u>théorie de catégories</u> la donnée:

- d'un langage de catégories L,
- d'un ensemble de séquents de L .

Section 5. SEMANTIQUE "STATIQUE".

Parenthèse. Si D est un graphe, nous notons $D^{\S}$ le graphe "subdivisions" associé . Rappelons que $D^{\S}_0$ est la réunion disjointe de D_0 et de D_1 , et que chaque flèche $x:X \longrightarrow Y$ de D donne naissance à deux flèche de $D^{\S}$: $x \longrightarrow X$ et $x \longrightarrow Y$.

Soit L un langage de catégories et soit $\underline{\underline{K}}$ une 2-catégorie prédicative. Une réalisation R de L dans $\underline{\underline{K}}$, notée $R:L \longrightarrow \underline{\underline{K}}$, est un bidiagramme (voir la définition en section 1) de L dans $\underline{\underline{K}}$ (si $A \in L_0$, $f \in L_1$ et $u \in L_2$, on notera $\underline{A} = R(A)$, $\underline{f} = R(f)$ et $\underline{u} = R(u)$).

Soit V un graphe fini de variables (de L). Considérons le (bi)-diagramme $\hat{V}:V^{\S} \longrightarrow \underline{\underline{K}}$ défini
1) sur les objets par : $\hat{V}(X) = \underline{A}$ si X est une 0-variable de sorte A, et $\hat{V}(x) = \underline{A} \underset{\underline{B}}{/} \underline{A}'$ si $x:T \longrightarrow T'$ est une 1-variable de sorte B et si A et A' sont respectivement les sortes des 0-variables de T et de T'.
2) sur les flèches par : $\hat{V}(x,0) = \hat{V}(x) \xrightarrow{\text{cano}} \hat{V}(X)$ et $\hat{V}(x,1) = \hat{V}(x) \xrightarrow{\text{cano}} \hat{V}(X')$, où X et X' sont respectivement les 0-variables figurant dans le domaine et le codomaine de x.

Posons alors $\underline{V} = \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\, \hat{V}$.

Nous allons maintenant construire par induction, pour les 0-termes, les 1-termes et les formules, leur interprétation par rapport à V pour la réalisation R, à condition qu'ils soient à variables (ou à variables libres pour les formules) dans V.

1°) Pour les 0-termes. L'interprétation d'un 0-terme T par rapport à V est une flèche de $\underline{\underline{K}}$, soit $\mathrm{Int}(T,V):\underline{V} \longrightarrow \underline{A}$, où A = sorte(T). Les règles de construction sont:

- si X est une 0-variable de sorte A , figurant dans V,alors $\mathrm{Int}(X,V):\underline{V} \longrightarrow \underline{A}$ est simplement la projection de $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\, \hat{V}$ vers $\hat{V}(X)$.
- si T est un 0-terme de sorte A à variables dans V et si $f:A \longrightarrow B$ est un 1-symbole, alors $\mathrm{Int}(f[T],V)$ est la flèche composée de $\mathrm{Int}(T,V):\underline{V} \longrightarrow \underline{A}$ et de $\underline{f}:\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$.

<u>Remarque</u>. Si W est un sous-graphe de V, pour tout 0-terme T de sorte A, le triangle suivant commute à un isomorphisme près:

$$\begin{tikzcd} \underline{V} \arrow[rr, "\text{cano}"] \arrow[dr, "\mathrm{Int}(T,V)"'] & \simeq & \underline{W} \arrow[dl, "\mathrm{Int}(T,W)"] \\ & \underline{A} & \end{tikzcd}$$

2°) <u>Pour les 1-termes</u>. L'interprétation d'un 1-terme $t:T \longrightarrow T'$ par rapport à V est une 2-flèche de $\underline{\underline{K}}$, soit $\mathrm{Int}(t,V):\mathrm{Int}(T,V) \longrightarrow \mathrm{Int}(T',V)$: $\underline{V} \longrightarrow \underline{A}$, où A = sorte(t). Les règles de construction sont:

- si $x:T \longrightarrow T'$ est une 1-variable de sorte A, figurant dans V, $\mathrm{Int}(x,V):\mathrm{Int}(T,V) \longrightarrow \mathrm{Int}(T',V):\underline{V} \longrightarrow \underline{A}$ est la 2-flèche composée:

$$\begin{tikzcd} & & \hat{V}(X) \arrow[d, "\text{cano}"'] \arrow[dr] & \\ \underline{V} \arrow[r] \arrow[urrr, bend left, "\mathrm{Int}(T,V)"] \arrow[drrr, bend right, "\mathrm{Int}(T',V)"'] & \hat{V}(x) \arrow[ur] \arrow[dr] & \hat{V}(X') \arrow[r] & \underline{A} \end{tikzcd}$$

où X et X' sont objets respectifs de Var(T) et Var(T').

- si T est un 0-terme de sorte A à variables dans V, alors $\mathrm{Int}(\mathrm{Id}_T,V)$ est simplement $\mathrm{Id}_{\mathrm{Int}(T,V)}:\mathrm{Int}(T,V) \longrightarrow \mathrm{Int}(T,V)$.

- si $t:T \longrightarrow T'$ et $t':T' \longrightarrow T''$ sont deux 1-termes de sorte A à variables dans V, alors $\mathrm{Int}([t'].[t],V)$ est le composé de $\mathrm{Int}(t,V):\mathrm{Int}(T,V) \longrightarrow \mathrm{Int}(T',V)$ et de $\mathrm{Int}(t',V):\mathrm{Int}(T',V) \longrightarrow \mathrm{Int}(T'',V)$

- si $t:T \longrightarrow T'$ est un 1-terme de sorte A à variables dans V, et si $f:A \longrightarrow B$ est un 1-symbole, alors $\mathrm{Int}(f[t],V)$ est le composé:

$$\underline{f}.\mathrm{Int}(t,V):\underline{f}.\mathrm{Int}(T,V) \longrightarrow \underline{f}.\mathrm{Int}(T',V).$$

- Si T est un 0-terme de sorte A à variables dans V et si $u:f_p\ldots f_1 \longrightarrow g_q\ldots g_1:A \longrightarrow B$ est un 2-symbole, alors $\mathrm{Int}(u[T],V)$ est le composé: $\underline{u}.\mathrm{Int}(T,V):\underline{f}_p\ldots\underline{f}_1.\mathrm{Int}(T,V) \longrightarrow \underline{g}_q\ldots\underline{g}_1.\mathrm{Int}(T,V)$.

<u>Remarque</u>. Si W est un sous-graphe de V et si $k:\underline{V} \longrightarrow \underline{W}$ est la flèche canonique, alors le carré suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Int}(T,W).k \arrow[r, "\mathrm{Int}(t,W).k"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Int}(T',W).k \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Int}(T,V) \arrow[r, "\mathrm{Int}(t,V)"] & \mathrm{Int}(T',V) \end{tikzcd}$$

3°) <u>Pour</u> <u>les</u> <u>formules</u>. L'interprétation d'une formule F par rapport à V est un élément Int(F,V) de $P(\underline{V})$. Les règles de construction sont:

- $\mathrm{Int}(\mathrm{vrai},V) = \mathrm{vrai}_{\underline{V}}$ et $\mathrm{Int}(\mathrm{faux},V) = \mathrm{faux}_{\underline{V}}$.

- Si $t_1 : T \longrightarrow T'$ et $t_2 : T \longrightarrow T'$ sont deux $\underline{1}$-termes de sorte A à variables dans V, alors $\mathrm{Int}(t_1 \doteq t_2 \;,\; V) = \widetilde{(I,u)}$ où $u : I \longrightarrow \underline{V}$ est l'égalisateur de la paire de 2-flèches:

$$\mathrm{Int}(t_1,V) \;,\; \mathrm{Int}(t_2,V) \;:\; \mathrm{Int}(T,V) \longrightarrow \mathrm{Int}(T',V) \;.$$

- Si F et F' sont des formules à variables libres dans V, on a:

$$\mathrm{Int}(\ulcorner F \urcorner \wedge \ulcorner F' \urcorner \;,\; V) = \mathrm{Int}(F,V) \cap \mathrm{Int}(F',V)$$
$$\mathrm{Int}(\ulcorner F \urcorner \vee \ulcorner F' \urcorner \;,\; V) = \mathrm{Int}(F,V) \cup \mathrm{Int}(F',V)$$
$$\mathrm{Int}(\ulcorner F \urcorner \Longrightarrow \ulcorner F' \urcorner, V) = \mathrm{Int}(F,V) \Longrightarrow \mathrm{Int}(F',V)$$

- Si $\exists_A X \ulcorner F \urcorner$ et $\forall_A X \ulcorner F \urcorner$ sont des formules à variables libres dans V et si X est une 0-variable ne figurant pas dans V, alors:

$$\mathrm{Int}(\exists_A X \ulcorner F \urcorner, V) = \exists_p(\mathrm{Int}(F,V_X)) \text{ et } \mathrm{Int}(\forall_A X \ulcorner F \urcorner, V) = \forall_p(\mathrm{Int}(F,V_X))$$

où V_X est le graphe de variables obtenu à partir de V en y ajoutant simplement l'objet X, et où $p : \underline{V}_X \longrightarrow \underline{V}$ est la projection canonique.

- Si $\exists x : T \longrightarrow T' \ulcorner F \urcorner$ et $\forall x : T \longrightarrow T' \ulcorner F \urcorner$ sont des formules à variables libres dans V et si x est une 1-variable ne figurant pas dans V, alors:

$$\mathrm{Int}(\exists x : T \longrightarrow T' \ulcorner F \urcorner, V) = \exists_p(\mathrm{Int}(F,V_x))$$
$$\mathrm{Int}(\forall x : T \longrightarrow T' \ulcorner F \urcorner, V) = \forall_p(\mathrm{Int}(F,V_x))$$

où V_x est le graphe de variables obtenu à partir de V en y ajoutant simplement la flèche x, et $p : \underline{V}_x \longrightarrow \underline{V}$ est la projection canonique.

<u>Remarque</u>. Si W est un sous-graphe de V et si $p : \underline{V} \longrightarrow \underline{W}$ est la flèche canonique qui s'en déduit, alors pour toute formule F à variables libres dans V, on a:

$$p^{-1}(\mathrm{Int}(F,W)) = \mathrm{Int}(F,V) \;.$$

Enfin,

1) un séquent $\mathcal{A} \underset{V}{\longmapsto} \mathcal{B}$ est appelé <u>valide</u> pour la réalisation R si l'inégalité suivante est satisfaite dans $P(\underline{V})$:

$$\bigcap_{F \in \mathcal{A}} \mathrm{Int}(F,V) \leqslant \bigcup_{G \in \mathcal{B}} \mathrm{Int}(G,V)$$

2) Une réalisation R est appelée <u>modèle</u> de la théorie de catégories $\mathcal{T}$ si tous les séquents de $\mathcal{T}$ sont valides pour la réalisation R.

Section 6. SEMANTIQUE "DYNAMIQUE".

Soient $\underline{\underline{K}}$ une 2-catégorie prédicative, L un langage de catégories et $R:L \longrightarrow \underline{\underline{K}}$ une réalisation.

- Etant donnés une 0-variable X de sorte A, un objet S de $\underline{\underline{K}}$, et une flèche $a:S \longrightarrow \underline{A}$ de $\underline{\underline{K}}$, nous allons construire, par induction, pour chaque 0-terme T de sorte B où la variable X figure, une flèche notée $T(a):S \longrightarrow \underline{B}$:

1) si T est la variable X, alors $X(a) = a$,

2) si T est un 0-terme de sorte B et $f:B \longrightarrow C$ un 1-symbole alors $f[T](a)$ est la flèche composée de $T(a):S \longrightarrow \underline{B}$ et de $\underline{f}:\underline{B} \longrightarrow \underline{C}$.

On construit de même pour chaque 2-flèche $u:a \longrightarrow a':S \longrightarrow \underline{A}$ une 2-flèche $T(u):T(a) \longrightarrow T(a')$.

- Soit maintenant V un graphe fini de variables et S un objet de $\underline{\underline{K}}$. Appelons <u>distribution</u> <u>de</u> <u>valeurs</u> $d:S \longrightarrow V$ la donnée :

1) pour chaque 0-variable X de V de sorte A d'une flèche $dX:S \longrightarrow \underline{A}$

2) pour chaque 1-variable $x:T \longrightarrow T'$ d'une 2-flèche $dx:T(dX) \longrightarrow T'(dX')$, où X et X' sont respectivement les 0-variables figurant dans T et T'.

- Pour chaque objet S de $\underline{\underline{K}}$, soit $\tilde{V}(S)$ la catégorie qui a pour objets les distributions de valeurs $d:S \longrightarrow V$ et pour flèches $r:d \longrightarrow d'$ la donnée, pour chaque 0-variable X de V d'une 2-flèche $rX:dX \longrightarrow d'X:S \longrightarrow \underline{A}$ telle que pour chaque 1-variable $x:T \longrightarrow T'$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
T(dX) \arrow[r] \arrow[d] & T'(dX') \arrow[d] \\
T(d'X) \arrow[r] & T'(d'X')
\end{tikzcd}$$

On définit ainsi un homomorphisme $\tilde{V}:\underline{\underline{K}}^{op} \longrightarrow \mathrm{Cat}$. Il sera commode de noter d.k au lieu de $\tilde{V}(k)(d)$.

Si W est un sous-graphe de V , il définit une flèche naturelle $k:\tilde{V} \longrightarrow \tilde{W}$ dans $\hat{\underline{\underline{K}}}$. On notera alors, pour une distribution de valeurs quelconque $d:S \longrightarrow V$: $\quad d/W = kS(d)$.

<u>Proposition 1</u>. <u>Pour tout graphe fini de variables</u> V, <u>l'homomorphisme</u> $\tilde{V}$ <u>est représentable et a</u> $\underline{V}$ <u>pour représentation</u>.

? Soit $d^*:\underline{V} \longrightarrow V$ la distribution de valeurs définie sur une 0-variable X de sorte A par $d^*X = \mathrm{Int}(X,V):\underline{V} \longrightarrow \underline{A}$ (on vérifie facilement par induction que si T est un 0-terme de sorte B où la variable X figure, alors $T(d^*X) = \mathrm{Int}(T,V):\underline{V} \longrightarrow \underline{B}$). Si $x:T \longrightarrow T'$ est une 1-variable de sorte A, posons $d^*x = \mathrm{Int}(x,V):T(d^*X) \longrightarrow T(d^*X')$ où X et X' sont les 0-variables figurant respectivement dans T et T'. On vérifie que pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(S,\underline{V}) \longrightarrow \tilde{V}(S)$ construit à l'aide de d^* est une équivalence !

- Soit V un graphe fini de variables.

1°) Si T est un 0-terme de sorte A à variables dans V et si $d:S \longrightarrow V$ est une distribution de valeurs , on pose $T(d) = T(dX):S \longrightarrow \underline{A}$, où $X \in \mathrm{Var}_0(T)$.

2°) Si $t:T \longrightarrow T'$ est un 1-terme de sorte A à variables dans V et si $d:S \longrightarrow V$ est une distribution de valeurs, on va construire par induction une 2-flèche $t(d):T(d) \longrightarrow T'(d):S \longrightarrow \underline{A}$.

Si $x:T \longrightarrow T'$ est une 1-variable de sorte A figurant dans V, alors : $x(d) = dx:T(d) \longrightarrow T'(d)$.

Si T est un 0-terme de sorte A à variables dans V, alors, $\mathrm{Id}_T(d) = \mathrm{Id}_{T(d)}:T(d) \longrightarrow T(d)$.

Si $t:T \longrightarrow T'$ et $t':T' \longrightarrow T''$ sont deux 1-termes de sorte A à variables dans V, alors $[t'].[t](d)$ est le composé $t'(d).t(d)$: $T(d) \longrightarrow T''(d)$.

Si $t:T \longrightarrow T'$ est un 1-terme de sorte A à variables dans V, et si $f:A \longrightarrow B$ est un 1-symbole, alors $f[t](d) = \underline{f}.t(d):f[T](d) \longrightarrow f[T'](d)$.

Si T est un 0-terme de sorte A et si $u:f_p\ldots f_1 \longrightarrow g_q\ldots g_1$: $A \longrightarrow B$ est un 2-symbole, alors $u[T](d) = \underline{u}.T(d):T_1(d) \longrightarrow T_2(d)$, où $u[T]:T_1 \longrightarrow T_2$.

3°) Si F est une formule à variables dans V et si $d:S \longrightarrow V$ est une distribution de valeurs, nous allons donner une signification à l' écriture $d \models_V F$, et ce par induction.

- $d \models_V$ vrai signifie $vrai_S = vrai_S$ et $d \models_V$ faux que $vrai_S = faux_S$.

- Si $t_1:T \longrightarrow T'$ et $t_2:T \longrightarrow T'$ sont des 1-termes à variables dans V, alors $d \models_V (t_1 \doteq t_2)$ signifie qu'on a l'égalité des flèches $t_1(d):T(d) \longrightarrow T'(d)$ et $t_2(d):T(d) \longrightarrow T'(d)$.

- Si F et F' sont des formules à variables libres dans V, alors $d \models_V [F] \wedge [F']$ signifie qu'on a à la fois $d \models_V F$ et $d \models_V F'$

$d \models_V [F] \vee [F']$ signifie qu'il existe deux objets S_1 et S_2 et deux flèches pleinement fidèles $u_1:S_1 \longrightarrow S$ et $u_2:S_2 \longrightarrow S$ dans $\underline{\underline{K}}$ tels que $\widetilde{(S_1,u_1)} \uplus \widetilde{(S_2,u_2)} = vrai_S$ ainsi que $d.u_1 \models_V F$ et $d.u_2 \models_V F$

$d \models_V [F] \Longrightarrow [F']$ signifie que pour toute flèche $k:S' \longrightarrow S$, si on a $d.k \models_V F$, alors on a aussi $d.k \models_V F'$.

- Si $\exists_A X[F]$ et $\forall_A X[F]$ sont des formules à variables libres dans V et si X est une 0-variable ne figurant pas dans V, alors $d \models_V \exists_A X[F]$ signifie qu'il existe une flèche dominante $p:S' \longrightarrow S$ et une distribution de valeurs $d':S' \longrightarrow V_X$ telle que $d'/V \xrightarrow{\sim} d.p$ et $d' \models_{V_X} F$,

$d \models_V \forall_A X[F]$ signifie que pour toute flèche $k:S' \longrightarrow S$ et toute distribution de valeurs $d':S' \longrightarrow V_X$ telle que $d'/V \xrightarrow{\sim} d.k$, alors on a $d' \models_{V_X} F$.

- Si $\exists x:T \longrightarrow T'[F]$ et $\forall x:T \longrightarrow T'[F]$ sont des formules à variables libres dans V et si x est une 1-variable ne figurant pas dans V, alors $d \models_V \exists x:T — T'[F]$ signifie qu'il existe une flèche dominante $p:S' \longrightarrow S$ et une distribution de valeurs $d':S' \longrightarrow V_x$ telle que $d'/V \xrightarrow{\sim} d.p$ et $d' \models_{V_x} F$,

$d \models_V \forall x:T \longrightarrow T'/F/$ signifie que pour toute flèche $k:S' \longrightarrow S$ et toute distribution de valeurs $d':S' \longrightarrow V_x$ telle que $d'/V \xrightarrow{\sim} d.k$, alors on a $d' \models_{V_x} F$.

- V étant un graphe fini de variables et F une formule à variables libres dans V, soit $\{F,V\}:\underline{\underline{K}}^{op} \longrightarrow Cat$ l'homomorphisme où pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, $\{F,V\}(S)$ est la sous-catégorie pleine de $\tilde{V}(S)$ ayant pour objets les distributions de valeurs $d:S \longrightarrow V$ telles que $d \models_V F$.

<u>Proposition 2</u>. <u>Pour toute formule F du langage L l'homomorphisme $\{F,V\}$ est représentable et a pour représentation</u> $Int(F,V)$.

? Si T est un 0-terme de sorte B à variables dans V, il existe une flèche canonique $\tilde{T}:\tilde{V} \longrightarrow (\underline{B})$ dans $\hat{\underline{\underline{K}}}$ définie par:

$\tilde{T}S(d) = T(d)$ où S est objet de $\underline{\underline{K}}$ et d objet de $\tilde{V}(S)$.

De même, si $t:T \longrightarrow T'$ est un 1-terme à variables dans V, il existe une 2-flèche canonique $\tilde{t}:\tilde{T} \longrightarrow \tilde{T}'$ dans $\hat{\underline{\underline{K}}}$ définie par:

$\tilde{t}S(d) = t(d)$ où S est objet de $\underline{\underline{K}}$ et d objet de $\tilde{V}(S)$.

Remarquons aussi que pour toute formule F, $\{F,V\}(S)$ est stable pour les inversibles dans $\tilde{V}(S)$.

Montrons maintenant la proposition par induction.

L'homomorphisme $(-):\underline{\underline{K}} \longrightarrow \hat{\underline{\underline{K}}}$ étant exact à gauche et préservant les implications et les $\forall$ on vérifie facilement que $\{F,V\}$ a pour représentation $Int(F,V)$ pour les formules de la forme vrai, $t_1 \doteq t_2$, $/F_1/ \wedge /F_2/$, $/F_1/ \Rightarrow /F_2/$, $\forall_A X/G/$ et $\forall x:X \longrightarrow X'/G/$, où F_1 , F_2 et G vérifient l'hypothèse d'induction. Il reste à étudier quatre types de formules. Pour celà, soient S un objet de $\underline{\underline{K}}$ et $d:S \longrightarrow V$ une distribution de valeurs dont "la" flèche de $\underline{\underline{K}}$ (à iso près) sera notée $d°:S \longrightarrow \underline{V}$.(cf. proposition 1)

Il reste donc à montrer, dans ces quatre cas là, que si F est une formule, $d \models_V F$ si et seulement si d^o se factorise par $\mathrm{Int}(F,V)$.

1°) <u>Pour</u> $F = \text{faux}$, c'est immédiat car le faux est stable par changement de base.

2°) <u>Pour</u> $F = [F_1] \vee [F_2]$. Supposons tout d'abord que d^o se factorise par $\mathrm{Int}(F\ ,V)$, et notons $\widetilde{(S_i,u_i)} = (d^o)^{-1}(\mathrm{Int}(F_i,V))$, pour $i = 1$ ou 2. Comme $\mathrm{Int}(F_1,V) \cup \mathrm{Int}(F_2,V) = \mathrm{Int}(F,V)$, et que d^o se factorise par $\mathrm{Int}(F,V)$, on en déduit que $\widetilde{(S_1,u_1)} \cup \widetilde{(S_2,u_2)} = \mathrm{vrai}_S$ et que $d^o.u_i$ se factorise par $\mathrm{Int}(F_i,V)$, pour $i = 1$ ou 2. Mais d'après l'hypothèse d'induction, cela signifie que $d.u_i \models_V F_i$.

La réciproque se vérifie facilement en remarquant que les unions sont stables par changement de base.

3°) <u>Pour</u> $F = \exists_A X[G]$. Supposons que d^o de factorise par $\mathrm{Int}(F,V)$ (on notera encore $d^o : S \longrightarrow \mathrm{Int}(F,V)$ cette factorisation) et considérons le produit fibré suivant:

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{\quad p \quad} & S \\ {\scriptstyle d'^o}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d^o} \\ \mathrm{Int}(G,V_X) & \xrightarrow[\text{cano.}]{} & \mathrm{Int}(\exists_A X[G],V) \end{array}$$

Comme la flèche canonique $\mathrm{Int}(G,V_X) \longrightarrow \mathrm{Int}(\exists_A X[G],V)$ est dominante, il en est de même de $p:S' \longrightarrow S$. Ainsi il existe bien une distribution de valeurs $d':S \longrightarrow V_X$ telle que $d' \models_{V_X} G$ et $d'/V \xrightarrow{\sim} d.p$

Réciproquement, si $d \models_V \exists_A X[G]$, alors il existe une flèche dominante $p:S' \longrightarrow S$ et une distribution de valeurs $d':S' \longrightarrow V_X$ telle que $d'/V \xrightarrow{\sim} d.p$ et $d' \models_{V_X} G$. Mais ceci signifie encore que le carré suivant de gauche est commutatif à un isomorphisme près :

$$\begin{array}{ccc} S' & \longrightarrow & S \\ {\scriptstyle d'^o}\downarrow & & \\ \mathrm{Int}(G,V_X) & & \downarrow{\scriptstyle d^o} \\ \downarrow & & \\ \underline{V}_X & \longrightarrow & \underline{V} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} S' & \longrightarrow & S \\ {\scriptstyle d'^o}\downarrow & & \\ \mathrm{Int}(G,V_X) & & \downarrow{\scriptstyle d^o} \\ \downarrow & & \\ \mathrm{Int}(F,V) & \longrightarrow & \underline{V} \end{array}$$

Le diagramme précédent de droite commute donc à un isomomorphisme près. Ainsi la flèche $p:S' \longrightarrow S$ étant dominante et $Int(F,V) \longrightarrow \underline{V}$ étant pleinement fidèle, on en déduit que la flèche $d^o:S \longrightarrow \underline{V}$ se factorise bien par $Int(F,V)$.

4°) Pour $F = \exists x:T \longrightarrow T'[G]$. La preuve est identique à la précédente !

<u>Proposition 3. Un séquent</u> $\mathcal{A} \vdash_V \mathcal{B}$ <u>de</u> L <u>est valide pour la réalisation</u> R <u>si et seulement si pour tout objet</u> S <u>de</u> $\underline{\underline{K}}$ <u>et toute distribution de valeurs</u> $d:S \longrightarrow V$ <u>le fait d'avoir</u> $d \models_V \bigwedge_{F\in\mathcal{A}} F$ <u>entraîne aussi</u> $d \models_V \bigvee_{G\in\mathcal{B}} G$.

? On peut déjà se ramener au séquent du type $F \vdash_V G$ où F et G sont des formules à variables libres dans V. Dire que $F \vdash_V G$ est valide signifie que $Int(F,V) \leqslant Int(G,V)$, ou encore que $\{F,V\} \subseteq \{G,V\}$,d'après la proposition précédente, ce qui n'est autre que l'énoncé de cette proposition exprimé en d'autres termes !

<u>Section 7.</u> <u>LANGAGE INTERNE D'UNE 2-CATEGORIE PREDICATIVE.</u>

- $\underline{\underline{K}}$ étant une 2-catégorie prédicative, soit K le langage de catégories dont le bigraphe correspondant est celui associé à $\underline{\underline{K}}$. On dit que K est le <u>langage interne de</u> $\underline{\underline{K}}$. Il y a donc canoniquement une réalisation $K \longrightarrow \underline{\underline{K}}$. Aussi lorsque nous aurons un séquent $\mathcal{A} \vdash_V \mathcal{B}$ nous dirons simplement qu'il est valide pour signifier qu'il est"valide pour la réalisation canonique".

- Soit maintenant $t:T \longrightarrow T'$ un 1-terme de K de sorte A. Il sera commode de noter dans la suite "t inversible" la formule:

$$\exists x:T' \longrightarrow T\ [t.x \doteq Id_{T'} \wedge x.t \doteq Id_T] \ ,$$

où $x:T' \longrightarrow T$ est une 1-variable de sorte A ne figurant pas dans celles de t. On a volontairement omis des crochets dans cette formule, pour en simplifier la compréhension. T et T' étant des 0-termes de sorte A, on notera aussi "$T \overset{\sim}{—} T'$" la formule suivante:

$$\exists\, y:T \longrightarrow T'[\text{"y inversible"}] \quad .$$

Proposition 1. Soit V un graphe fini de variables et $t:T \longrightarrow T'$ *un 1-terme de K de sorte A à variables dans V. Alors:*

1) *si* $d:S \longrightarrow V$ *est une distribution de valeurs, on a:*
$d \underset{V}{\models}$ "t inversible" *si et seulement si* $t(d):T(d) \longrightarrow T'(d)$ *est inversible.*

2) $\mathrm{Int}(\text{"t inversible"},V) = \widetilde{(I,i)}$ *où* $i:I \longrightarrow V$ *est l'inverseur de* $\mathrm{Int}(t,V):\mathrm{Int}(T,V) \longrightarrow \mathrm{Int}(T',V):\underline{V} \longrightarrow A$.

? Soit F la formule suivante: $t.x \doteq Id_{T'} \wedge x.t \doteq Id_T$.
a) Montrons tout d'abord que la flèche canonique de $\hat{\underline{\underline{K}}}$ suivante :
$\{F,V_x\} \longrightarrow \{\exists\, x:T' \longrightarrow T[F],V\}$ est pleinement fidèle. Soit donc S un objet de $\underline{\underline{K}}$ et soit $d_1,d_2:S \longrightarrow V_x$ deux distributions de valeurs telles que $d_1,d_2 \underset{V_x}{\models} F$, et soit $r:d_1/V \longrightarrow d_2/V$ une flèche de $\tilde{V}(S)$. Comme $d_i \underset{V_x}{\models} F$ pour i = 1 ou 2, on a $d_i x = t(d_i)^{-1}$.
Par suite, comme le diagramme suivant de gauche commute :

$$\begin{array}{ccc} T(d_1) & \xrightarrow{\quad T(r) \quad} & T(d_2) \\ {\scriptstyle t(d_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t(d_2)} \\ T'(d_1) & \xrightarrow{\quad T'(r) \quad} & T'(d_2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T'(d_1) & \xrightarrow{\quad T'(r) \quad} & T'(d_2) \\ {\scriptstyle d_1x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_2x} \\ T(d_1) & \xrightarrow{\quad T(r) \quad} & T(d_2) \end{array}$$

il en est de même de celui de droite, ce qui prouve que r est aussi une flèche $d_1 \longrightarrow d_2$ (elle est évidemment unique).
b) Soit maintenant $d:S \longrightarrow V$ une distribution de valeurs telle que $d \underset{V}{\models} \exists x:T' \longrightarrow T[F]$. Cela signifie qu'il existe une flèche dominante $p:S' \longrightarrow S$ et une distribution de valeurs $d':S' \longrightarrow V_x$ telle que $d'/V \xrightarrow{\sim} d.p$ et $d' \underset{V_x}{\models} F$. Cela peut s'exprimer en disant que le diagramme suivant commute à un isomorphisme près dans $\hat{\underline{\underline{K}}}$:

$$\begin{array}{ccc} (S') & \xrightarrow{(d')} & \{F,V_x\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S) & \xrightarrow{(d)} & \{\exists x:T' \longrightarrow T[F],V\} \end{array}$$

Mais comme - $\{F,V_x\}$ et $\{\exists x:T' \longrightarrow T[F],V\}$ sont représentables,
- $p:S' \longrightarrow S$ est dominante,
- $\{F,V_x\} \longrightarrow \{\exists x:T' \longrightarrow T[F],V\}$ est pleinement fidèle,

il existe $(\bar{d}):(S) \longrightarrow \{F,V_x\}$ dans $\hat{\underline{\underline{K}}}$ telle que (d) soit la composée de $(\bar{d})$ et de la flèche pleinement fidèle ci-dessus (à iso près). En d'autres termes, cela signifie qu'il existe une distribution de valeurs $\bar{d}:S \longrightarrow V_x$ telle que $\bar{d} \models_{V_x} F$ et $\bar{d}/V \xrightarrow{\sim} d$, ou encore que $t(\bar{d}) = t(d):T(d) \longrightarrow T'(d)$ est inversible. La réciproque est évidente. Enfin, d'après ce qui précède, $\{$"t inversible",$V\}$ est l'inverseur de la 2-flèche $\tilde{t}:\tilde{T} \longrightarrow \tilde{T}':\tilde{V} \longrightarrow A$. Sa représentation est donc bien l'inverseur de $Int(t,V):Int(T,V) \longrightarrow Int(T',V):\underline{V} \longrightarrow A$!

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> $f:A \longrightarrow B$ <u>une flèche de</u> $\underline{\underline{K}}$ (<u>donc un 1-symbole de</u> K). <u>Alors</u>:

1°) f <u>est fidèle si et seulement si le séquent suivant est valide</u>:

$$(s_1) \qquad f[x] \doteq f[x'] \;\vdash_{V}\; x \doteq x'$$

<u>où</u> V <u>est le graphe de variables</u> (<u>de sorte</u> A) <u>suivant</u>: $X \overset{x}{\underset{x'}{\rightrightarrows}} X'$

2°) f <u>est pleinement fidèle si et seulement si les séquents suivants sont valides</u> :

$$(s_1) \qquad f[x] \doteq f[x'] \;\vdash_{V}\; x \doteq x'$$

$$(s_2) \qquad \vdash_{V'}\; \exists x:X \longrightarrow X'[f[x] \doteq y]$$

<u>où</u> V' <u>est le graphe de variables de la 1-variable</u> $y:f[X] \longrightarrow f[X']$ <u>de sorte</u> B.

3°) f <u>est dominante si et seulement si le séquent suivant est valide</u>:

$$(s_3) \qquad \vdash_{V''}\; \exists_A X["f[X] \xrightarrow{\sim} Y"]$$

<u>où</u> V" <u>est le graphe de variables réduit à la 0-variable</u> Y <u>de sorte</u> B.

4°) f <u>est une équivalence si et seulement si les séquents</u> (s_i), <u>pour</u> i = 1,2 <u>et</u> 3, <u>sont valides</u>.

? 1°) est immédiat.

2°) D'après le 1°), nous pouvons toujours supposer f fidèle. Dire que le séquent (s_2) est valide signifie que pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, toutes flèches $a,a':S \longrightarrow A$ et $b:S \longrightarrow B$ et toute 2-flèche $v:f.a \longrightarrow f.a'$, il existe une flèche $p:S' \longrightarrow S$ dominante et une 2-flèche $u:a.p \longrightarrow a'.p$ telle que $f.u = v.p$. Il suffit alors d'utiliser la proposition 4 de la section 3 pour achever la preuve.

3°) D'après la proposition précédente, le séquent (s_3) est valide si et seulement si pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$ et toute flèche $b:S \longrightarrow B$ il existe une flèche dominante $p:S' \longrightarrow S$ et une flèche $a:S' \longrightarrow A$ qui rendent le carré suivant commutatif (à iso près):

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[r, "b"] & B \end{tikzcd}$$

En particulier, si on prend S = B et b= Id_B . On applique alors la proposition 5 de la section 3 pour conclure.

4°) Résulte , toujours grâce à la même proposition, de 2°) et 3°)!

<u>Remarque</u>. Nous venons de constater la différence qu'il peut y avoir entre la sémantique traditionnelle et celle qui a été décrite ici. En effet, pour la sémantique traditionnelle, à valeurs dans un topos (par exemple), les séquents (s_i), pour i = 1,2 et 3 , de la proposition 2 ne caractérisent pas les équivalences comme c'est le cas ici, puisqu'il faut avoir recours à l'axiome du choix pour prouver cette caractérisation.

<u>Proposition 3. 1°) Soit A un objet de $\underline{\underline{K}}$; alors A est un objet final si et seulement si les séquents suivants sont valides :</u>

(fin 1) $\quad \vdash_{V} \; x \doteq x'$

(fin 2) $\quad \vdash_{V'} \; \exists x:X \longrightarrow X' [x \doteq x]$

(fin 3) $\quad \vdash_{V''} \; \exists_A X [Id_X \doteq Id_X]$

<u>où V est le graphe de deux 1-variables parallèles : $x,x':X \longrightarrow X'$, V' le graphe de deux 0-variables: X,X' et V" le graphe $\emptyset$, et où toutes les variables sont de sorte A.</u>

2°) *Soit le bidiagramme suivant dans* $\underline{\underline{K}}$:
$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ A \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, phantom, "\xrightarrow{u}"] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

alors c'est un produit comma si et seulement si les séquents suivants sont valides:

(com 1) $p[z] \doteq p[z'] \wedge q[z] \doteq q[z'] \ \vdash_{V} \ z \doteq z'$

(com 2) $g[y].u[Z] \doteq u[Z'].f[x] \ \vdash_{V'} \ \exists z:Z \longrightarrow Z'[p[z] \doteq x \wedge q[z] \doteq y]$

(com 3) $\vdash_{V''} \ \exists_P Z \ \exists x:p[Z] \longrightarrow X \ \exists y:q[Z] \longrightarrow Y \ldots$

$\ldots[\text{"x inversible"} \wedge \text{"y inversible"} \wedge g[y].u[Z] \doteq t.f[x]]$

où $V = \{z,z':Z \longrightarrow Z'\}$, $V'_o = \{Z,Z'\}$, $V''_o = \{X,Y\}$

$V'_1 = \{x:p[Z] \longrightarrow p[Z'], \ y:q[Z] \longrightarrow q[Z']\}$, $V''_1 = \{t:f[X] \longrightarrow g[Y]\}$

et où Z,Z',z,z' *sont de sorte* P, X,x *de sorte* A, Y,y *de sorte* B *et* u *de sorte* S.

3°) *Soit la 2-flèche* $n:f \longrightarrow g:B \longrightarrow C$ *et la flèche* $i:A \longrightarrow B$. *Alors, cette dernière est l'inverseur de* n *si et seulement si les séquents suivants sont valides*:

(inv 1) $\vdash_{V} \ \text{"}n[i[X]] \text{ inversible"}$

(inv 2) $i[x] \doteq i[x'] \ \vdash_{V'} \ x \doteq x'$

(inv 3) $\vdash_{V''} \ \exists x:X \longrightarrow X'[i[x] \doteq y]$

(inv 4) $\text{"}n[Y] \text{ inversible"} \ \vdash_{V'''} \ \exists_A X[\text{"}i[X] \simeq Y\text{"}]$

où $V = \{X\}$, $V' = \{x,x':X \longrightarrow X'\}$, $V''_o = \{X,X'\}$,
$V''_1 = \{y:i[X] \longrightarrow i[X']\}$ *et* $V''' = \{Y\}$, *et où* X,X' *sont de sorte* A *et* Y *est de sorte* B.

? 1°) On montre successivement, en utilisant la proposition 4 de la section 3 que si les séquents (fin 1),(fin 2) et (fin 3) sont valides, la flèche canonique $A \longrightarrow 1$ est fidèle, puis pleinement fidèle, puis dominante. La réciproque est évidente.

2°) Comme pour le 1°), on montre successivement que si les séquents (com 1),(com 2) et (com 3) sont valides, la flèche canonique : $P \longrightarrow A/_S B$ est fidèle, puis pleinement fidèle, puis dominante.

3°) On montre ici successivement que les séquents (inv 1),(inv 2), (inv 3) et (inv 4) sont valides:

- la flèche $i:A \longrightarrow B$ se factorise (à un isomorphisme près) par $\mathrm{Inv}(n) \longrightarrow B$,

- la flèche $i:A \longrightarrow B$ est fidèle,
- elle est même pleinement fidèle, par suite la flèche de factorisation $A \longrightarrow \mathrm{Inv}(n)$ est aussi pleinement fidèle,
- la flèche $A \longrightarrow \mathrm{Inv}(n)$ est dominante.

<u>Proposition 4.</u> <u>Soit $f:A \longrightarrow B$ une flèche de $\underline{\underline{K}}$. Notons respectivement F,G et H les trois formules suivantes:</u>

$$\forall_A X'' \ \forall x:X'' \longrightarrow X \ \forall x':X'' \longrightarrow X[y.f[x] \doteq y.f[x'] \Longrightarrow x \doteq x']$$

$$\exists x:X' \longrightarrow X[y.f[x] \doteq y']$$

$$\exists_A X \ \exists y:f[X] \longrightarrow Y \ \forall_A X' \ \forall y':f[X'] \longrightarrow Y[F \wedge G]$$

<u>où Y est une 0-variable de sorte B. Alors f admet un adjoint à droite dans $\underline{\underline{K}}$ si et seulement si le séquent $\vdash_{V}$ H est valide, où</u> $V = \{Y\}$.

? Notons aussi J la formule $(y.f[x] \doteq y')$ et soit W le graphe de variables défini par: $W_o = \{X,X',Y\}$, $W_1 = \{y:f[X] \longrightarrow Y, y':f[X'] \longrightarrow Y\}$. Considérons le produit fibré suivant dans $\hat{\underline{\underline{K}}}$:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, hook] \arrow[d] & \{J,W_x\} \arrow[d] \\
\{F \wedge G, W\} \arrow[r, hook] & \{G,W\}
\end{tikzcd} .$$

a) Montrons que la flèche $P \longrightarrow \{F \wedge G, W\}$ est pleinement fidèle. Soit donc - $d_o,d_1:S \longrightarrow W_x$ deux distributions de valeurs telles que $d_i \models_{W_x} J$ et $d_i/W \models_{W} F$, pour i = 0 et 1.

- $r:d_o/W \longrightarrow d_1/W$ une flèche de $\tilde{W}(S)$.

La seule chose à montrer, pour prouver que r se relève de façon unique en une flèche $d_o \longrightarrow d_1$, est que le carré suivant commute:

$$\text{(C)} \qquad \begin{tikzcd}
d_oX' \arrow[r, "rX'"] \arrow[d, "d_ox"'] & d_1X' \arrow[d, "d_1x"] \\
d_oX \arrow[r, "rX"] & d_1X
\end{tikzcd}$$

Or, on voit facilement que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & f.d_1X' \arrow[r, "f.d_1x"] & f.d_1X = f[X](d_1) \arrow[dr, "d_1y"] & \\
f.d_0X' \arrow[ur, "f.rX'"] \arrow[dr, "f.d_0x"'] & & & d_1Y \\
 & f.d_0X \arrow[r, "f.rX"] & f.d_1X = f[X](d_1) \arrow[ur, "d_1y"'] &
\end{tikzcd}$$

Il suffit alors d'utiliser le fait que $d_1/W \models_W F$ pour nous assurer de la commutation du carré (C).

b) En appliquant une nouvelle fois la proposition 4 de la section 3 on en conclut que si une distribution de valeurs $d:S \longrightarrow W$ est telle que $d \models_W F \wedge G$, alors il existe une unique 2-flèche $v:dX' \longrightarrow dX$ telle que $dy.(f.v) = dy'$.

c) Soit U la formule suivante: $\forall_A X' \; \forall y':f[X'] \longrightarrow Y[F \wedge G]$ et V' le graphe de variables défini par $V'_0 = \{X,Y\}$, $V'_1 = \{y:f[X] \longrightarrow Y\}$

Montrons que la flèche $\{U,V'\} \longrightarrow \{H,V\}$ est pleinement fidèle.

Soit donc $d_0,d_1:S \longrightarrow V'$ deux distributions de valeurs telles que $d_i \models_{V'} U$, pour $i = 0,1$ et $r:d_0/V \longrightarrow d_1/V$ une flèche de $\tilde{V}(S)$.

Comme $d_1 \models_{V'} U$ nous savons, en utilisant le b), qu'il existe alors une unique flèche $sX:d_0X \longrightarrow d_1X$ telle que $d_1y.(f.sX) = rY.d_0y$.

Donc r se prolonge de façon unique en une flèche $d_0 \longrightarrow d_1$, ce qui prouve que $\{U,V'\} \longrightarrow \{H,V\}$ est pleinement fidèle.

d) En appliquant une dernière fois la proposition 4 de la section 3 , on en conclut que pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$ et toute flèche $b:S \longrightarrow B$, il existe une flèche $a:S \longrightarrow A$ et une 2-flèche $v:f.a \longrightarrow b$ telle que pour toutes flèches $k:S' \longrightarrow S$, $a':S' \longrightarrow A$ et toute 2-flèche $v':f.a' \longrightarrow b.k$, il existe une unique 2-flèche $u:a' \longrightarrow a.k$ qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
f.a' \arrow[rr, "f.u"] \arrow[dr, "v'"'] & & f.a.k \arrow[dl, "v.k"] \\
 & b.k &
\end{tikzcd}$$

Cela signifie , en d'autres termes, que :

- pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur $\underline{\underline{K}}(S,A) \longrightarrow \underline{\underline{K}}(S,B)$ admet un adjoint à droite (appelons-le dS),

pour toute flèche $k:S' \longrightarrow S$ de $\underline{\underline{K}}$, la 2-flèche canonique:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{K}}(S,B) \arrow[r, "dS"] \arrow[d] & \underline{\underline{K}}(S,A) \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=12pt] \\
\underline{\underline{K}}(S',B) \arrow[r, "dS'"] & \underline{\underline{K}}(S',A)
\end{tikzcd}$$

est inversible. Ainsi la flèche $f:A \longrightarrow B$ admet un adjoint à droite dans $\hat{\underline{\underline{K}}}$, donc dans $\underline{\underline{K}}$. La réciproque se vérifie aisément.

Section 8. SCHEMA DE COMPREHENSION.

Soit $\underline{\underline{K}}$ une 2-catégorie prédicative et K son langage interne. Soit A un objet de $\underline{\underline{K}}$ et soient $F = (\tilde{F},u)$ et $G = (\tilde{G},v)$ deux éléments respectivement de $P(A)$ et de $P(A^{\underline{2}})$.

Si T est un 0-terme de sorte A, nous noterons F(T) la formule suivante : $\exists_F Y[\text{"}u[Y] \overset{\sim}{=} T\text{"}]$.

De même, si $t:T_0 \longrightarrow T_1$ est un 1-terme de sorte A, nous noterons G(t) la formule suivante:

$$\exists_G Y\ \exists x_0:(d_0.v)[Y] \longrightarrow T_0\ \exists x_1:(d_1.v)[Y] \longrightarrow T_1 \ldots$$
$$\ldots[\text{"}x_0 \text{ inversible"} \wedge \text{"}x_1 \text{ inversible"} \wedge x_1.(e.v)[Y] \doteq t.x_0]$$

où $e:d_0 \longrightarrow d_1:A^{\underline{2}} \longrightarrow A$ est la 2-flèche canonique, et où Y,x_0,x_1 ne figurent pas dans t .

Proposition 1. On a : 1°) $Int(F(T),V) = \underline{T}^{-1}F$ et
2°) $Int(G(t),W) = \underline{t}^{-1}G$,

où V et W sont des graphes finis de variables contenant respectivement les variables de T et de t, et où $\underline{T} = Int(T,V):\underline{V} \longrightarrow A$ et $\underline{t}:\underline{V} \longrightarrow A^{\underline{2}}$ est la flèche canonique déduite de la 2-flèche : $Int(t,W):Int(T_0,W) \longrightarrow Int(T_1,W)$.

? 1°) Soit $d:S \longrightarrow V$ une distribution de valeurs. Alors ,

$d \models_V F(T)$ si et seulement si il existe une flèche dominante $p:S' \longrightarrow S$ et une flèche $b:S \longrightarrow F$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif à un isomorphisme près:

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "b"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "u"] \\ S \arrow[r, "T(d)"] & A \end{tikzcd}$$

Mais d'après la proposition 4 de la section 3, on en déduit que $d \models_V F(T)$ si et seulement si $T(d)$ se factorise par $u:F \longrightarrow A$. Or le diagramme suivant commutant (à un isomorphisme près):

$$\begin{tikzcd} & \underline{V} \arrow[dr, "\underline{T}"] & \\ S \arrow[ur] \arrow[rr, "T(d)"'] & & A \end{tikzcd}$$

où $S \longrightarrow \underline{V}$ est la flèche canonique déduite de $d:S \longrightarrow V$ (proposition 1 de la section 6), on peut dire que $d \models_V F(T)$ si et seulement si $S \longrightarrow \underline{V}$ se factorise par $\underline{T}^{-1}F$. Ceci prouve que l'homomorphisme $\{F(T),V\}$ admet $\underline{T}^{-1}F$ pour représentation.

2°) La preuve est tout à fait semblable à la précédente. !

Corollaire. 1°) *Si* H *est une formule telle que* $\mathrm{VarlH} = \{X\} = V$, *alors les séquents suivants sont valides*: $H \mathrel{|}\!\!\models_V\!\!\mathrel{|} \mathrm{Int}(H,V)(X)$

2°) *Si* H' *est une formule telle que* $\mathrm{VarlH}' = \{X \xrightarrow{x} X'\} = W$, *alors les séquents suivants sont valides*: $H' \mathrel{|}\!\!\models_V\!\!\mathrel{|} \mathrm{Int}(H',W)(x)$.

Définition. Soit A un objet de $\underline{\underline{K}}$. *Une sous-catégorie formelle* (de A) dans $\underline{\underline{K}}$ est la donnée (en plus de A) des éléments C_o de $P(A)$ et C_1 de $P(A^{\underline{2}})$. De plus, les séquents suivants doivent être valides:

1) $C_1(x) \vdash_V C_o(X) \wedge C_o(X')$
2) $C_o(X) \wedge C_o(X') \wedge \text{"x inversible"} \vdash_V C_1(x)$
3) $C_1(x) \wedge C_1(x') \vdash_{V'} C_1(x'.x)$,

où $V = \{X \xrightarrow{x} X'\}$, $V' = \{X \xrightarrow{x} X' \xrightarrow{x'} X''\}$, et où toutes les variables sont de sorte A.

On construit ainsi une nouvelle 2-catégorie s-s($\underline{\underline{K}}$) qui a:

- pour objets : les sous-catégories formelles dans $\underline{\underline{K}}$,
- pour flèches : $(A,C_0,C_1) \longrightarrow (A',C_0',C_1')$ les flèches $f:A \longrightarrow A'$ qui rendent valides les séquents suivants:

1) $C_0(X) \mid\!\frac{\quad}{V}\; C_0'(f/X/)$

2) $C_1(x) \mid\!\frac{\quad}{V'}\; C_1'(f/x/)$, où $V = \{X\}$ et $V' = \{X \xrightarrow{x} X'\}$.

- pour 2-flèches $f \longrightarrow f':(A,C_0,C_1) \longrightarrow (A',C_0',C_1')$ les 2-flèches $u:f \longrightarrow f':A \longrightarrow A'$ qui rendent valide le séquent suivant, dans lequel $V = \{X\}$: $C_0(X) \mid\!\frac{\quad}{V}\; C_1'(u/X/)$.

Toutes les données précédentes sont formulées à l'aide du langage interne, donnons leur maintenant une formulation plus "catégorique".

- Un triplet (A,C_0,C_1) où A est un objet de $\underline{\underline{K}}$, C_0 un élément de $P(A)$ et C_1 un élément de $P(A^{\underline{2}})$, est une sous-catégorie formelle si et seulement si il vérifie les inégalités suivantes:

1°) $C_1 \leqslant \mathrm{dom}^{-1}C_0 \cap \mathrm{cod}^{-1}C_0$

2°) $\mathrm{dom}^{-1}C_0 \cap \mathrm{cod}^{-1}C_0 \cap \mathrm{Inv}(n) \leqslant C_1$

3°) $p_0^{-1}C_1 \cap p_1^{-1}C_1 \leqslant k^{-1}C_1$

où $n:\mathrm{dom} \longrightarrow \mathrm{cod}:A^{\underline{2}} \longrightarrow A$ est la 2-flèche canonique, et où p_0,p_1 et $k:A^{\underline{3}} \longrightarrow A^{\underline{2}}$ proviennent respectivement des flèches de $\underline{\underline{K}}(A^{\underline{3}},A)$ suivantes : $\mathrm{proj}_1 \longrightarrow \mathrm{proj}_2$, $\mathrm{proj}_2 \longrightarrow \mathrm{proj}_3$, $\mathrm{proj}_1 \longrightarrow \mathrm{proj}_3$.

- (A,C_0,C_1) et (A',C_0',C_1') étant deux sous-catégories formelles , une flèche $f:A \longrightarrow A'$ se relève dans s-s($\underline{\underline{K}}$) si et seulement si elle vérifie l'inégalité : $C_0 \leqslant f^{-1}C_0'$ et l'inégalité : $C_1 \leqslant (f^{\underline{2}})^{-1}C_1'$.

- Si $f,g:(A,C_0,C_1) \longrightarrow (A',C_0',C_1')$ sont des flèches de s-s($\underline{\underline{K}}$) , la 2-flèche $u:f \longrightarrow g:A \longrightarrow A'$ se relève dans s-s($\underline{\underline{K}}$) si elle vérifie l'inégalité suivante : $C_0 \leqslant (u^*)^{-1}C_1'$ où $u^*: A \longrightarrow A'^{\underline{2}}$ est la flèche canonique déduite de u. (La vérification de ces assertions résulte de la proposition précédente).

On vérifie que la 2-catégorie s-s($\underline{\underline{K}}$) est finiment complète. L'application : $A \longmapsto (A, \mathrm{vrai}_A, \mathrm{vrai}_{A\underline{2}})$ des objets de $\underline{\underline{K}}$ dans les objets de s-s($\underline{\underline{K}}$) se prolonge en un homomorphisme : $\underline{\underline{K}} \longrightarrow$ s-s($\underline{\underline{K}}$). On peut maintenant considérer l'axiome suivant:
Axiome (schéma de compréhension). L'homomorphisme $\underline{\underline{K}} \longrightarrow$ s-s($\underline{\underline{K}}$) admet un adjoint à droite N.

Remarque. Cet axiome, qui signifie que toute sous-catégorie formelle est "représentable", n'est qu'une nouvelle version, dans le contexte envisagé ici, de l'axiome (R2) de "réductibilité" de (5).

Proposition 2. Si $\underline{\underline{K}}$ vérifie le schéma de compréhension, alors pour toute sous-catégorie formelle (A, C_o, C_1) , la flèche canonique : $N(A, C_o, C_1) \longrightarrow A$ est un monomorphisme de $\underline{\underline{K}}$.

? Commençons par préciser le sens de "monomorphisme" ici : c'est une flèche $f: M \longrightarrow M'$ telle que, pour tout objet S de $\underline{\underline{K}}$, le foncteur canonique $\underline{\underline{K}}(S,M) \longrightarrow \underline{\underline{K}}(S,M')$ est fidèle et de plus, si a et a' sont deux objets de $\underline{\underline{K}}(S,M)$ et $i: f.a \longrightarrow f.a'$ un isomorphisme, alors il existe une flèche $v: a \longrightarrow a'$ dans $\underline{\underline{K}}(S,M)$ telle que $f.v = i$.

La démonstration consiste alors à vérifier que la flèche $\mathrm{Id}_A : (A, C_o, C_1) \longrightarrow (A, \mathrm{vrai}_A, \mathrm{vrai}_{A\underline{2}})$ est un monomorphisme dans s-s($\underline{\underline{K}}$), puis à utiliser la fini-complétude de s-s($\underline{\underline{K}}$) et l'exactitude de N !

Exemples. Les 2-catégories prédicatives suivantes vérifient le schéma de compréhension:
1°) Cat . Soit (A, C_o, C_1) un objet de s-s($\underline{\underline{K}}$). Considérons la sous-catégorie C de A qui a pour objets ceux de C_o et pour flèches celles de A qui sont dans C_1 . On vérifie facilement que C est équivalente à $N(A, C_o, C_1)$.
2°) $\hat{\underline{\underline{C}}} = \mathrm{Cat}^{\underline{\underline{C}}^{op}}$. Soit (A, C_o, C_1) un objet de s-s($\hat{\underline{\underline{C}}}$) . Pour tout objet S de $\underline{\underline{C}}$, considérons la sous-catégorie CS de AS qui a:

- pour objets, les objets a de AS tels que, pour tout objet S', toutes flèches $f,g:S' \longrightarrow S$ et toute 2-flèche $u:f \longrightarrow g$ de $\underline{\underline{C}}$, la flèche $Au(a):Af(a) \longrightarrow Ag(a)$ appartienne à C_1S ,
- pour flèches $a \longrightarrow a'$, les flèches $a \longrightarrow a'$ de AS appartenant à C_1S .

On vérifie alors que les données précédentes se prolongent de façon unique en un homomorphisme $C: \underline{\underline{C}}^{op} \longrightarrow Cat$ et que C est équivalente à $N(A,C_o,C_1)$.

3°) $Fib(\underline{C})$. C'est un cas particulier du précédent. Il faut toutefois remarquer ici que, pour chaque objet S de $\underline{C}$, l'homomorphisme d'évaluation $V_S:Fib(\underline{C}) \longrightarrow Cat$ commute avec N (ce qui n'était pas le cas dans l'exemple précédent).

4°) $Champ(\underline{C},J)$. Soit (A,C_o,C_1) une sous-catégorie formelle dans $Champ(\underline{C},J)$ et $N = N(A,C_o,C_1)$ dans $Fib(\underline{C})$. Il existe une flèche canonique $(N,vrai_N,vrai_{N2}) \longrightarrow (A,C_o,C_1)$. Si on applique l'homomorphisme (exact à gauche) "champ associé" $a:Fib(\underline{C}) \longrightarrow Champ(\underline{C},J)$ on obtient une nouvelle flèche $(aN,vrai,vrai) \longrightarrow (A,C_o,C_1)$. Le schéma de compréhension pour $Fib(\underline{C})$ nous assure alors l'existence d'une flèche $aN \longrightarrow N$. On vérifie qu'elle est "inverse" de la flèche canonique $N \longrightarrow aN$ pour le "champ associé".

Section 2. APPLICATIONS.

Soient $\underline{\underline{K}}$ une 2-catégorie prédicative, K son langage interne, et A un objet de $\underline{\underline{K}}$. On dira que A vérifie l'axiome du choix si le séquent suivant est valide :

$$\text{"x épi."} \vdash_V \exists y:Y \longrightarrow X [x.y \doteq Id_Y] \;,$$

où V est le graphe de variables (de sorte A): $\{X \xrightarrow{x} Y\}$ et où "x épi." est la formule:

$$\forall_A Z \;\; \forall z:Y \longrightarrow Z \;\; \forall z':Y \longrightarrow Z [z.x \doteq z'.x \implies z \doteq z']$$

Soit maintenant $\underline{\underline{E}}$ un topos et $\underline{\underline{K}}$ la 2-catégorie des champs sur

$\underline{E}$ pour la prétopologie dont les familles couvrantes sont simplement les épimorphismes.

Notons E la catégorie fibrée (sur $\underline{E}$) $\underline{E}^2 \xrightarrow{cod} \underline{E}$ (pour tout objet S de $\underline{E}$, ES est équivalent à $\underline{E}/S$ et pour toute flèche $k:S' \longrightarrow S$, $ES \xrightarrow{Ek} ES'$ est équivalente à $\underline{E}/S \xrightarrow{k^*} \underline{E}/S'$).

<u>Proposition 1</u>. <u>E est un objet de</u> $\underline{\underline{K}}$.

? Cela revient à montrer que, pour tout épimorphisme $f:A \longrightarrow B$ de $\underline{E}$ le foncteur canonique $\underline{E}/B \longrightarrow Des(f)$ est une équivalence,où Des(f) est la catégorie qui a :

- pour objets : les données de descentes relatives à f, c'est-à-dire les données:

d'un objet (M,m) de $\underline{E}/A$,

d'un isomorphisme $i:q_1^*(M,m) \xrightarrow{\sim} q_2^*(M,m)$ tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
p_1^*q_1^*(M,m) \arrow[r, "p^*i"] \arrow[d, "cano"', "\wr"] & p_1^*q_2^*(M,m) \arrow[d, "cano", "\wr"'] \\
p_3^*q_1^*(M,m) \arrow[d, "p_3^*i"'] & p_2^*q_1^*(M,m) \arrow[d, "p_2^*i"] \\
p_3^*q_2^*(M,m) \arrow[r, "cano", "\sim"'] & p_2^*q_2^*(M,m)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d^*q_1^*(M,m) \arrow[rr, "d^*i"] \arrow[dr, "cano"', "\wr"] & & d^*q_2^*(M,m) \arrow[dl, "cano", "\sim"'] \\
& (M,m) &
\end{tikzcd}$$

où $d:A \longrightarrow A\underset{B}{\times}A$ est la diagonale, et où q_1,q_2: $A\underset{B}{\times}A \longrightarrow A$ et p_1,p_2,p_3 : $A\underset{B}{\times}A\underset{B}{\times}A \longrightarrow A\underset{B}{\times}A$ sont les projections canoniques, caractérisées par les relations: $q_1.p_1 = q_1.p_3$, $q_2.p_2 = q_2.p_3$, $q_2.p_1 = q_1.p_2$.

- pour flèches $((M,m),i) \longrightarrow ((M',m'),i')$ les flèches de $\underline{E}/A$ $k:(M,m) \longrightarrow (M',m')$ telles que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
q_1^*(M,m) \arrow[r, "q_1^*k"] \arrow[d, "i"'] & q_1^*(M',m') \arrow[d, "i'"] \\
q_2^*(M,m) \arrow[r, "q_2^*k"'] & q_2^*(M',m')
\end{tikzcd}$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 5 de (2) !

<u>Proposition 2</u>. <u>E vérifie l'axiome du choix dans $\underline{\underline{K}}$ si et seulement si $\underline{E}$ vérifie l'axiome du choix implicite</u> (voir définition dans (8)).

? Pour cela on vérifie que:
1°) Int("x épi",V) est le plongement P sur $\underline{E}^{\underline{2}}$ dans $\underline{\underline{K}}$, où pour tout objet S de $\underline{E}$, PS est la sous-catégorie pleine de $(\underline{E}/S)^{\underline{2}}$ formée des épimorphismes (car dans $\underline{E}$ les épimorphismes sont stables par changement de base).
2°) Int($\exists$ y:Y $\longrightarrow$X[x.y $\doteq$ Id_Y],V) est le plongement Q sur $\underline{E}^{\underline{2}}$ dans $\underline{\underline{K}}$ tel que pour tout objet S de $\underline{E}$, une flèche k:(M,m) $\longrightarrow$(N,n) de $\underline{E}$/S appartient à QS si et seulement si il existe un épimorphisme p:S' $\longrightarrow$S dans $\underline{E}$ pour lequel p*k:p*(M,m) $\longrightarrow$ p*(N,n) admette une section.

Ainsi, E vérifie l'axiome du choix dans $\underline{\underline{K}}$ si et seulement si P $\leqslant$ Q, c'est-à-dire si et seulement si $\underline{E}$ vérifie l'axiome du choix implicite !

<u>Remarque</u>. Même si la proposition précédente ne nous surprend pas beaucoup, elle nous suggère une méthode qui, elle, on peut l'espérer, sera fructueuse. En effet, depuis que fut introduit la logique dans les catégories, on a pensé qu'en transcrivant des preuves de théorèmes "classiques" dans de "bonnes" catégories, on pourrait retrouver, voir même démontrer, de nouveaux théorèmes (ailleurs qu'en "théorie des catégories" bien entendu). Mais ces catégories, même si ce sont des topos, ne permettent pas, le plus souvent, une simple transcription de preuves classiques car leur logique interne est encore trop faible. Par exemple: elles sont rarement booléennes et surtout elles ne vérifient quasiment jamais l'axiome du choix. Le recours était jusqu'à présent de chercher de nouvelles preuves pour pallier à l'insuffisance de cette logique interne.

Ici, nous voyons qu'il est peut-être possible de renforcer la logique interne d'une catégorie $\underline{E}$ pour peu qu'on change la "métamathématique" dans laquelle elle se trouve. Nous voulons dire par là qu'en remplaçant Cat qui contient $\underline{E}$ par une "bonne" 2-catégorie $\underline{\underline{K}}$, qui ne contient plus nécessairement $\underline{\underline{E}}$ mais un objet E "jouant son rôle" (c'est le cas ici, puisque $\underline{\underline{K}}(1,E)$ est équivalent à $\underline{\underline{E}}$) on arrive à donner à E des propriétés que $\underline{\underline{E}}$ n'avait pas dans Cat.

Soit maintenant G un objet d'une 2-catégorie prédicative $\underline{\underline{K}}$. On dit que G est un groupe si les séquents suivants (du langage interne de $\underline{\underline{K}}$) sont valides:

$$\vdash_{V} \text{"x inversible"}$$

$$\vdash_{V'} \quad \exists x:X \longrightarrow Y(x \doteq x)$$

$$\vdash_{V''} \quad \exists_G X(Id_X \doteq Id_X)$$

où $V = \left\{X \xrightarrow{x} Y\right\}$, $V' = \left\{X,Y\right\}$, et $V'' = \emptyset$, et où toutes les variables sont de sorte G.

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> ($\underline{C}$,J) <u>un petit site</u>. <u>Un objet</u> G <u>de la 2-catégorie</u> $\underline{\underline{K}}$ = Champ($\underline{C}$,J) <u>est un groupe dans</u> $\underline{\underline{K}}$ <u>si et seulement si c'est une gerbe sur</u> ($\underline{C}$,J) (<u>voir</u> 6).

****
****
*****
*

BIBLIOGRAPHIE.

(1) J.BENABOU , Fibrations petites et localement petites, C.R.A.S. Paris, t.281 (1975) A 897-900.

(2) J.BENABOU et J.ROUBAUD , Monades et descente , C.R.A.S. Paris, t.270 (1970) A 96-98 .

(3) G.BLANC , Equivalence naturelle et formules logiques en théorie des catégories, Bull.Sc.Math.(1976)

Propriétés du premier ordre et théorie de catégories, Rapport du Colloque sur l'Algèbre des catégories (Amiens 1975), Cah. de Top. et Géom. Diff. Vol. XVI, 3 (1975).

Langages du premier ordre sur graphes et théorie sur catégorie, Cahiers Math. Montpellier,6(1975).

(4) D.BOURN , Natural anadeses and catadeses, Cah. de Top. et Géom. Diff. Vol.XIV, 4 (1973).

(5) D.BOURN et J.PENON , 2-catégories réductibles (préprint)

(6) J.GIRAUD , Cohomologie non abélienne, Die Grundlehren der Math.Wissenschaften in Einzeldarstellungen 179 (Springer Verlag, 1971).

(7) J.W.GRAY , The meeting of the Midwest Category Seminar in Zurich,August 24-30, 1970, Reports of the Midwest Category Seminar V, L.N. in Math. 195, Springer Verlag 1971.

(8) P.T.JOHNSTONE , Topos theory, London Math.Soc.Monogr. 10 Academic press, 1977 .

(9) R.PARE and D.SCHUMACHER, Abstract families and the adjoint functor theorems, L.N.661, Indexed categories...

(10) J.PENON , Catégories localement internes, C.R.A.S. Paris, t.278 (1974) A 1577-1580.

(11) A.PRELLER , Langages à graphes, Rapport du Colloque international de Logique, Clermont-Ferrand 1975.

(12) R.STREET , Limits indexed by category-valued 2-functors, J.Pure Appl. Algebra 8 (1976) 350-379 .