DIAGRAMMES

C. LAIR

Condition syntaxique de triplabilité d'un foncteur algébrique esquissé

Diagrammes, tome 1 (1979), exp. nº 2, p. CL1-CL16

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1979__1__A2_0>

Diagrammes, Vol. 1 , 1979.

CONDITION SYNTAXIQUE DE TRIPLABILITE D'UN FONCTEUR ALGEBRIQUE ESQUISSE

C. Lair.

1. Introduction.

Lawvere a introduit la notion de doctrine (voir (O.S.E.D.)): il s'agit, en définissant les catégories munies d'un genre de structure équationnelle supplémentaire, de les utiliser pour décrire et étudier des espèces de structures algébriques. Par ce procédé, on souhaite pouvoir utiliser (dans un cas qui concerne donc Cat) des méthodes de traduction syntaxe-sémantique analogues à celles utilisées (dans le cas relatif à Ens) lorsqu'on décrit certains types de structures algébriques au moyen de théories (comme en (S.P.A.T.)).
Dans cette optique, Lawvere établit que la catégorie des catégories petites munies d'un choix associatif de produits finis est doctrinale, i.e. est la catégorie des algèbres d'un triple sur Cat. De même, Kock a prouvé (voir (L.M.I.C.)) que la catégorie des catégories petites munies, par exemple, d'un choix associatif de certaines limites inductives est aussi doctrinale sur Cat. Mais, si l' on peut décrire des catégories de structures algébriques au moyen de catégories munies d'un choix de certaines limites, il est rare que ce choix soit associatif ou que, si par hasard il l'est, cette propriété soit explicitement utilisée. C'est pourquoi il nous a semblé judicieux de compléter les résultats précédents en démontrant le:

Théorème. *Le foncteur d'oubli* $\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ *est triplable à l'isomorphisme près* (ou encore: *la catégorie* $\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}}$ *des petites catégories munies d'un choix*, *non nécessairement associatif*, *de limites projectives indexées par la petite catégorie* $\underline{X}$ *est doctrinale*).

Plus généralement, on peut remplacer $\underline{X}$ par un ensemble $\mathcal{X}$ de petites catégories. De même, obtient-on un résultat analogue pour la catégorie $\mathrm{Cat}\text{-}\mathcal{X}\text{-}\mathcal{Y}\text{-}\underleftrightarrow{\mathrm{lim}}$ des petites catégories munies d'un choix de petites limites projectives (précisées par $\mathcal{X}$) *et* d'un choix de petites limites inductives (précisées par $\mathcal{Y}$). Ainsi peut-on replacer les descriptions des structures au moyen d'objets de $\mathrm{Cat}\text{-}\mathcal{X}\text{-}\mathcal{Y}\text{-}\underleftrightarrow{\mathrm{lim}}$ ou de $\mathrm{Cat}\text{-}\mathcal{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}}$ (par ordre de généralité croissante et par exemple: théories de Lawvere, types de Bénabou, catégories marquées de Chevalley ou descriptions à la Gabriel-Ulmer, types d'Ehresmann, multi-théories de Diers, types mixtes d'Ehresmann) dans le contexte des doctrines de Lawvere, ce qui semblait être un de ses buts initiaux.

Admettant connu le fait que le foncteur d'oubli canonique $\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ possède un adjoint, l'idée première pour démontrer le théorème précédent consistait à appliquer le critère de triplabilité de Beck. Ceci se révèle pratiquement impossible.

Une deuxième idée consiste à l'utiliser indirectement en procédant comme suit:

- on sait que Cat est la catégorie des *modèles* (i.e. des foncteurs continus à valeurs dans Ens) d'une catégorie $\underline{C}$ munie de limites projectives,
- il s'agit, alors, de construire une catégorie $\underline{C}'$ munie de limites projectives et contenant $\underline{C}$ dont la catégorie des modèles soit $\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}}$,
- l'injection canonique $\underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ induisant le foncteur d'oubli $\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}} \longrightarrow \mathrm{Cat}$, on peut espérer, dans ces conditions, qu'elle soit telle qu'une application point par point du critère de Beck soit possible dans ces catégories de

faisceaux.
En réalité, on s'aperçoit très rapidement qu'il n'est guère possible de décrire explicitement $\underline{C}'$ de telle sorte que les propriétés de $\underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ soient effectivement calculables (affirmons, sans en donner la preuve ici, que ceci reviendrait à connaître déjà la triplabilité que l'on cherche à prouver - voir par exemple (F.O.S.A.) ou (L.P.L.G.)). Par contre, il est possible de décrire explicitement un système de générateurs $\underline{S}_{\mathrm{Cat}}$ (appelé *esquisse des catégories*) de $\underline{C}$ et un système de générateurs $\underline{S}'_{\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}}}$ (appelé *esquisse des catégories munies d'un choix de limites projectives indexées par* $\underline{X}$) de $\underline{C}'$ et contenant $\underline{S}_{\mathrm{Cat}}$, de sorte qu'il devient très facile de prouver que l'injection canonique $\underline{S}_{\mathrm{Cat}} \longrightarrow \underline{S}'_{\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}}}$ permet une application point par point du critère de Beck.

Cette méthode de démonstration une fois élaborée, on constate qu'on peut la reproduire dans un cadre plus général. Etant donné un *morphisme d'esquisses* $V: \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$, nous fournissons au §3 une condition suffisante syntaxique (i.e. portant sur V) pour que le foncteur $\mathrm{Alg}(\underline{S}') \longrightarrow \mathrm{Alg}(\underline{S})$ qu'il induit entre les catégories de modèles (ou *algèbres*) de $\underline{S}$ et $\underline{S}'$ soit triplable à l'équivalence près. Puis, au §4, nous donnons une condition syntaxique pour qu'il soit triplable à l'isomorphisme près.
Les §§3 et 4 sont donc les deux premières étapes (générales) de la démonstration du théorème précédent. Nous l'achevons au §5 en construisant explicitement $\underline{S}_{\mathrm{Cat}}$ et $\underline{S}'_{\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}}}$. Il suffit, alors, de constater que la condition syntaxique du §4 est vérifiée.
Cette démarche nécessitant quelques précisions concernant la théorie des esquisses (i.e. des systèmes d'axiomes pour les structures algébriques) nous les avons regroupées au §2.

En fin de compte, le théorème énoncé n'est donc qu'un exemple d'application des conditions générales que nous éta-

blissons aux §§3 et 4. En fait, elles permettent plus, à savoir:
- de caractériser toutes les catégories doctrinales sur Cat, à l'isomorphisme ou à l'équivalence près: ce sont celles de la forme $\mathrm{Alg}(\underline{S}')$, où $\underline{S}_{\mathrm{Cat}} \longrightarrow \underline{S}'$ est un morphisme basique strict ou basique (aux sens des §§3 et 4),
- plus généralement, de caractériser toutes les catégories isomorphes ou équivalentes à une catégorie d'algèbres d'un triple sur une catégories de la forme $\mathrm{Alg}(\underline{S})$: ce sont celles de la forme $\mathrm{Alg}(\underline{S}')$, où $\underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$ est basique strict ou basique.

Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre de ces deux dernières affirmations, jugeant que le seul exemple de $\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}}$ choisi ici est suffisamment générique.

2. Eléments de théorie des esquisses.

Un <u>graphe multiplicatif</u> est un graphe dans lequel seulement certains couples de flêches consécutives ont un composé défini (mais, parmi ceux-ci figurent tout les couples triviaux et qui ont un composé évident). Ainsi, on peut regarder un graphe multiplicatif comme un système de générateurs (les flêches) et de relations (les composés) pour une catégorie. Par exemple, l'image d'une catégorie par un foncteur est un graphe multiplicatif (et non une catégorie en général). Bien entendu, une catégorie est un graphe multiplicatif particulier. Par analogie avec le cas des catégories, on définit facilement la notion de foncteurs entre graphes multiplicatifs.

Si $\underline{X}$ est une catégorie, on note $\underline{X}^\wedge$ la catégorie obtenue en lui adjoignant un objet initial 0 (que l'on suppose donc distinct de tout objet X de $\underline{X}$). Si $\underline{S}$ est un graphe multiplicatif, un foncteur $N: \underline{X}^\wedge \longrightarrow \underline{S}$ s'appelle un <u>cône projectif dans $\underline{S}$ de base $\underline{X}$</u> $\hookrightarrow \underline{X}^\wedge \xrightarrow[N]{} \underline{S}$ et de <u>sommet</u> $N(0)$. On dit aussi que $\underline{X}$ en est la <u>catégorie d'indices</u>.

On appelle <u>esquisse</u> tout graphe multiplicatif dans lequel on a distingué des cônes projectifs. Lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion quant aux cônes projectifs distingués, une esquisse de graphe multiplicatif sous-jacent $\underline{S}$ sera notée $/\underline{S}/$. Intuitivement, une esquisse est une représentation d'un système d'axiomes pour un type donné de structures algébriques.

Si $\underline{H}$ est une catégorie et $\mathcal{X}$ est une famille de catégories, on dit que l'on munit $\underline{H}$ d'un <u>choix partiel de $\mathcal{X}$-limites projectives</u> si, et seulement si, pour tout $\underline{X}$ appartenant à $\mathcal{X}$ et tout $M: \underline{X} \longrightarrow \underline{H}$ possédant une limite projective, on choisit une et une seule de ses limites projectives. Si de plus, pour tout $\underline{X}$ appartenant à $\mathcal{X}$, tout $M: \underline{X} \longrightarrow \underline{H}$ possède une limite projective, on dira simplement que $\underline{H}$ est munie d'un <u>choix</u> (total) <u>de</u> $\mathcal{X}$ -<u>limites projectives</u>.
A un choix partiel ou non de $\mathcal{X}$ -limites projectives sur $\underline{H}$ est évidemment associée une esquisse particulière où les cônes projectifs distingués sont ceux définissant une limite projective choisie. Le plus souvent, on n'aura pas à expliciter $\mathcal{X}$ (qui le sera par le contexte), on notera donc cette esquisse associée $//\underline{H}//$.

Si $/\underline{S}/$ et $/\underline{S}'/$ sont deux esquisses, on dit que $/V/: /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ est une <u>réalisation</u> (ou un morphisme) si, et seulement si:

- $V: \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$ est un foncteur,
- V commute aux cônes projectifs distingués.

En particulier, on appelle $/\underline{S}/$-<u>algèbre stricte</u> (ou $/\underline{S}/$-modèle strict) <u>dans</u> $//\underline{H}//$ toute réalisation $/\underline{S}/ \longrightarrow //\underline{H}//$.
On note alors $//\underline{H}//^{/\underline{S}/}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{H}$ dont les objets sont ces réalisations et on dit que toute catégorie qui lui est isomorphe est <u>algébrique stricte au-dessus de</u> $//\underline{H}//$. Ainsi, les catégories usuelles de structures algébriques sont-elles des catégories algébriques strictes (en ce sens) au-dessus de $//\mathrm{Ens}//$.

Si $/\underline{S}/$ est une esquisse et $\underline{H}$ est une catégorie, on appelle (par extension) <u>réalisation</u> ou encore $/\underline{S}/$-<u>algèbre</u> (non stricte) ou encore $/\underline{S}/$-modèle (non strict) dans $\underline{H}$ tout

$F: /\underline{S}/ \longrightarrow \underline{H}$ tel que:

- $F: \underline{S} \longrightarrow \underline{H}$ est un foncteur,
- F transforme les cônes distingués en des limites projectives (non nécessairement distinguées ou choisies par avance).

On note alors $\underline{H}^{/\underline{S}/}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{H}^{\underline{S}}$ dont les objets sont ces réalisations et on dit que toute catégorie qui lui est équivalente est <u>algébrique</u> (non strictement) <u>au-dessus de</u> $\underline{H}$. Les catégories usuelles de structures algébriques ne sont qu'équivalentes à des catégories de cette forme, elles sont donc algébriques (en ce dernier sens) au-dessus de Ens. D'ailleurs, en général, il n'est pas vrai que des catégories de la forme $//\underline{H}//^{/\underline{S}/}$ et $\underline{H}^{/\underline{S}/}$ soient automatiquement équivalentes. Lorsque c'est le cas, nous dirons que $/\underline{S}/$ est <u>régulière</u> au-dessus de $//\underline{H}//$ (dans la pratique, les esquisses des structures algébriques usuelles sont régulières au-dessus de $//$Ens$//$).

Si $/V/: /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ est une réalisation et $\underline{H}$ est une catégorie, on dispose d'un foncteur $\underline{H}^{/V/}: \underline{H}^{/\underline{S}'/} \longrightarrow \underline{H}^{/\underline{S}/}$ (resp. $//\underline{H}//^{/\underline{S}'/} \longrightarrow //\underline{H}//^{/\underline{S}/}$) . On dit alors qu'il est <u>algébrique</u> (resp. <u>algébrique strict</u>) <u>au-dessus de</u> $\underline{H}$ (resp. <u>au-dessus de</u> $//\underline{H}//$) et qu'il est <u>esquissé par</u> $/V/$.

Dans la suite, nous nous attachons à prouver sous quelles conditions un foncteur algébrique vérifie le critère de triplabilité à l'équivalence près de Beck et sous quelles conditions un foncteur algébrique strict vérifie le critère de triplabilité à isomorphisme près de Beck. Dans ces deux cas, nous supposons l'existence d'un adjoint à gauche. Rappelons, à titre d'information, des conditions suffisantes assurant une telle existence:

<u>Lemme</u>. <u>Pour qu'un foncteur algébrique</u> $\underline{H}^{/V/}$ <u>possède un adjoint à gauche, il suffit que toutes les conditions suivantes soient vérifiées:</u>

- $\underline{S}$ et $\underline{S}'$ <u>sont des graphes multiplicatifs petits</u>,
- <u>les catégories d'indices des cônes distingués de</u> $/\underline{S}/$ <u>et</u> $/\underline{S}'/$ <u>sont petites</u>,
- <u>les cônes distingués de</u> $/\underline{S}/$ <u>et</u> $/\underline{S}'/$ <u>appartiennent à un ensemble</u>,
- $\underline{H}$ <u>est à petites limites projectives et inductives et les limites inductives</u> L-<u>filtrantes</u> (<u>où</u> L <u>est un ordinal régulier déterminé par les catégories d'indices des cônes distingués</u>) <u>commutent avec les limites projectives</u>.

<u>Pour qu'un foncteur algébrique strict</u> $//\underline{H}//^{/V/}$ <u>possède un adjoint à gauche il suffit que</u>, <u>de plus</u>, <u>la condition suivante soit vérifiée</u>:

- $/\underline{S}'/$ <u>est régulière au-dessus de</u> $//\underline{H}//$.

(Dans la suite, on pourra par exemple supposer que ces conditions sont réunies, mais nous n'en faisons nullement usage. Mieux: il se peut que les foncteurs algébriques considérés possèdent des adjoints à gauche sans pour autant que ces conditions soient remplies. En tout cas, on vérifiera que ces conditions sont valides dans le cas particulier du §5.)

On pourra se reporter à (C.O.S.S.), (E.T.S.A.) et (E.G.C.E.) pour toute précision supplémentaire concernant la théorie des esquisses.

3. <u>Condition syntaxique de triplabilité à l'équivalence près d'un foncteur algébrique</u>.

Nous abordons, ici, la première étape de la démonstration du théorème de l'Introduction: établir une condition suffisante syntaxique (i.e. portant sur la réalisation $/V/$) pour que le foncteur algébrique $\underline{H}^{/V/}$ vérifie le critère de triplabilité, à l'équivalence près, de Beck.

Nous supposons donc que $\underline{H}$ est une catégorie possédant les conoyaux des paires contractiles.

Nous disons qu'une réalisation $/V/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ est <u>basique</u> si, et seulement si:

(i). tout cône distingué de $/\underline{S}'/$ a sa base qui factorise par V ,

(ii). tout objet de $\underline{S}'$ qui n'appartient pas à $V(\underline{S})$ est sommet d'au-moins un cône distingué de $/\underline{S}'/$.

Ceci posé, nous avons:

<u>Proposition</u> 1. <u>Si la réalisation</u> $/V/$ <u>est basique</u>, <u>le foncteur algébrique</u> $\underline{H}^{/V/}$ <u>reflète et préserve les conoyaux des paires</u> $\underline{H}^{/V/}$<u>-contractiles</u>.

<u>Preuve</u>. Il est trivial de constater que les conoyaux de paires contractiles, puisqu'ils sont absolus, se calculent point par point dans $\underline{H}^{/\underline{S}/}$. Alors, les conditions (i) et (ii) assurent que les conoyaux des paires $\underline{H}^{/V/}$-contractiles se calculent aussi point par point dans la catégorie $\underline{H}^{/\underline{S}'/}$. La proposition 1 s'en déduit facilement. ::

Il résulte immédiatement du critère de triplabilité, à l'équivalence près, de Beck ((VTT) dans (C.F.W.M.)) et de la proposition 1 le:

<u>Corollaire</u> 1. <u>Un foncteur algébrique</u> (au-dessus de $\underline{H}$) <u>possédant un adjoint à gauche et esquissé par une réalisation basique est triplable à l'équivalence près</u>.

4. <u>Condition syntaxique de triplabilité à l'isomorphisme près d'un foncteur algébrique strict</u>.

Il s'agit, dans ce paragraphe, d'aborder la deuxième étape de la démonstration du théorème de l'Introduction: établir une condition suffisante syntaxique (i.e. portant sur la réalisation $/V/$) pour que le foncteur algébrique strict $//\underline{H}//^{/V/}$ vérifie le critère de triplabilité, à isomorphisme près, de Beck.

Nous supposons encore que $\underline{H}$ est une catégorie possédant les conoyaux des paires contractiles. De plus, nous désignons par $//\underline{H}//$ l'esquisse associée à un choix partiel donné de limites projectives dans $\underline{H}$.

Nous dirons qu'une réalisation basique $/V/: /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ est <u>stricte</u> si, et seulement si:

(iii). V est un foncteur injectif sur les objets,

(iv). deux cônes distingués distincts de $/\underline{S}'/$ ont des sommets distincts,

(v). tout cône distingué de $/\underline{S}'/$, de sommet appartenant à $V(\underline{S})$, factorise au travers de V et d'un cône distingué de $/\underline{S}/$.

Dans ces conditions, nous avons:

<u>Proposition</u> 2. <u>Si la réalisation</u> $/V/$ <u>est basique stricte, le foncteur algébrique strict</u> $//\underline{H}//^{/V/}$ <u>crée les conoyaux des paires</u> $//\underline{H}//^{/V/}$<u>-contractiles</u>.

<u>Preuve</u>. Soit $f',g': /F'/ \longrightarrow /G'/$ une paire $//\underline{H}//^{/V/}$-contractile. Notons $f,g: /F/ \longrightarrow /G/$ la paire, contractile, image par $//\underline{H}//^{/V/}$ et supposons que $k: /G/ \longrightarrow /G_o/$ en est un conoyau dans $//\underline{H}//^{/\underline{S}/}$. Evidemment, puisqu'il est absolu, il est calculé point par point. Comme $/V/$ est basique, on en déduit qu'il existe un conoyau $k': G' \longrightarrow G'_o$ de (f',g'), également calculé point par point dans $\underline{H}^{/\underline{S}'/}$ et tel que $k'.V = k$. Les conditions (iii), (iv) et (v) assurent alors qu'il existe une unique réalisation $/G''_o/: /\underline{S}'/ \longrightarrow //\underline{H}//$ et une unique équivalence naturelle $g'_o: G'_o \longrightarrow G''_o$ tels que:

- $G''_o.V = G_o = G'_o.V$,
- $g'_o(VS) = Id_{G_oS}$, pour tout objet S de $\underline{S}$.

La proposition 2 s'en déduit facilement. ::

Il résulte immédiatement du critère de triplabilité, à isomorphisme près, de Beck ((PTT) dans (C.F.W.M.)) et de la proposition 2 le:

<u>Corollaire</u> 2. <u>Un foncteur algébrique strict</u> (au-dessus de $//\underline{H}//$)

possédant un adjoint à gauche et esquissé par une réalisation basique stricte est triplable à isomorphisme près.

5. Application à la catégorie des catégories petites munies de choix de limites.

Pour démontrer la théorème de l'Introduction, il ne reste plus qu'à construire une esquisse des catégories munies d'un choix (total) de limites projectives indexées par la petite catégorie $\underline{X}$, puis à constater qu'elle possède une sous-esquisse décrivant les catégories et qu'enfin la réalisation injection canonique ainsi obtenue est basique et stricte (et vérifie les conditions du lemme du §2).

Supposons donc que $\underline{X}$ est une catégorie (d'indices) fixée et petite. Nous désignons par:

- $\underline{X}^{\wedge}$ la catégorie obtenue en adjoignant à $\underline{X}$ un objet (initial) 0 et, pour tout objet X de $\underline{X}$, une flêche $0 \longrightarrow X$, (alors, pour toute flêche $x: X \longrightarrow X'$ de $\underline{X}$ on a:

$$+ \ (X' \xleftarrow[x]{} X).(X \longleftarrow 0) = (X' \longleftarrow 0) \quad),$$

- $\underline{X}^{\wedge\wedge}$ la catégorie obtenue en adjoignant à $\underline{X}$ une flêche $0' \longrightarrow 0$ et, pour tout objet X de $\underline{X}$, deux flêches $0' \longrightarrow X$ et $0 \longrightarrow X$,
(alors, pour tout objet X de $\underline{X}$, on a:

$$+ \ (X \longleftarrow 0).(0 \longleftarrow 0') = (X \longleftarrow 0'),$$

et, pour toute flêche $x : X \longrightarrow X'$ de $\underline{X}$, on a:

$$+ \ (X' \xleftarrow[x]{} X).(X \longleftarrow 0) = (X' \longleftarrow 0),$$

$$+ \ (X' \xleftarrow[x]{} X).(X \longleftarrow 0') = (X' \longleftarrow 0') \quad),$$

- $\underline{X}'$ la catégorie obtenue en adjoignant à $\underline{X}$ deux flêches $a,b: 0'' \longrightarrow 0'$ et, pour tout objet X de $\underline{X}$, deux flêches $0'' \longrightarrow X$ et $0' \longrightarrow X$,
(alors, pour toute flêche $x: X \longrightarrow X'$ dans $\underline{X}$, on a:

$$+ \ (X' \xleftarrow[x]{} X).(X \longleftarrow 0') = (X' \longleftarrow 0'),$$

$$+ \ (X' \xleftarrow[x]{} X).(X \longleftarrow 0'') = (X' \longleftarrow 0''),$$

et, pour tout objet X de $\underline{X}$, on a:

$$+ (X \xleftarrow{\quad} 0').(0' \xleftarrow[a]{\quad} 0'') = (X \xleftarrow{\quad} 0''),$$
$$+ (X \xleftarrow{\quad} 0').(0' \xleftarrow[b]{\quad} 0'') = (X \xleftarrow{\quad} 0'')),$$

- $\underline{X}^{\wedge\prime}$ la catégorie obtenue en adjoignant à $\underline{X}$ quatre flêches $a,b: 0'' \longrightarrow 0'$, $0' \longrightarrow 0$, $0'' \longrightarrow 0$ et, pour tout objet X de $\underline{X}$, trois flêches $0'' \longrightarrow X$, $0' \longrightarrow X$ et $0 \longrightarrow X$,

(alors, pour toute flêche $x: X \longrightarrow X'$ dans $\underline{X}$, on a:

$$+ (X' \xleftarrow[x]{\quad} X).(X \xleftarrow{\quad} 0) = (X' \xleftarrow{\quad} 0),$$
$$+ (X' \xleftarrow[x]{\quad} X).(X \xleftarrow{\quad} 0') = (X' \xleftarrow{\quad} 0'),$$
$$+ (X' \xleftarrow[x]{\quad} X).(X \xleftarrow{\quad} 0'') = (X' \xleftarrow{\quad} 0''),$$

et, pour tout objet X de $\underline{X}$, on a:

$$+ (X \xleftarrow{\quad} 0).(0 \xleftarrow{\quad} 0') = (X \xleftarrow{\quad} 0'),$$
$$+ (X \xleftarrow{\quad} 0').(0' \xleftarrow[a]{\quad} 0'') = (X \xleftarrow{\quad} 0''),$$
$$+ (X \xleftarrow{\quad} 0').(0' \xleftarrow[b]{\quad} 0'') = (X \xleftarrow{\quad} 0''),$$
$$+ (X \xleftarrow{\quad} 0).(0 \xleftarrow{\quad} 0'') = (X \xleftarrow{\quad} 0''),$$

enfin, on a aussi:

$$+ (0 \xleftarrow{\quad} 0').(0' \xleftarrow[a]{\quad} 0'') = (0 \xleftarrow{\quad} 0'') ,$$
$$+ (0 \xleftarrow{\quad} 0').(0' \xleftarrow[b]{\quad} 0'') = (0 \xleftarrow{\quad} 0'')).$$

Ceci posé, nous utilisons les foncteurs suivants, dont les restrictions à $\underline{X}$ sont l'identité:

- $B: \underline{X} \longrightarrow \underline{X}^{\wedge}$, injection canonique,
- $D: \underline{X}^{\wedge} \longrightarrow \underline{X}^{\wedge\wedge}$ tel que $D(0) = 0'$,
- $G: \underline{X}^{\wedge} \longrightarrow \underline{X}^{\wedge\wedge}$ injection canonique,
- $G': \underline{X}^{\wedge} \longrightarrow \underline{X}'$ tel que $G'(0) = 0'$,
- $C: \underline{X}^{\wedge\wedge} \longrightarrow \underline{X}^{\wedge\prime}$ injection canonique,
- $I: \underline{X}' \longrightarrow \underline{X}^{\wedge\prime}$ injection canonique.

Enfin, nous notons $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$ et $\underline{4}$ les catégories associées aux ordres canoniques sur 1 , 2 , 3 et 4 et:

- $P: \underline{1} \longrightarrow \underline{X}^{\wedge}$ le foncteur distinguant 0 ,
- $M: \underline{2} \longrightarrow \underline{X}^{\wedge\wedge}$ le foncteur distinguant la flêche $0' \longrightarrow 0$,
- $T: \underline{2} \longrightarrow 1$ le foncteur constant.

Ces différentes constructions élémentaires permettent de décrire judicieusement une catégorie munie d'un choix de limites projectives indexées par $\underline{X}$.

Dire que la catégorie $\underline{A}$ est munie d'un choix de limites projectives indexées par $\underline{X}$ signifie, en effet, que l'on dispose:

- d'une application "choix de limites projectives"

$$\text{choix: } \mathrm{Hom}(\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{X}^{\wedge},\underline{A})$$

telle que

+ $\mathrm{Hom}(B,\underline{A}).\mathrm{choix} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\underline{X},\underline{A})}$ (ce qui assure que la base du cône choisi est bien la base de départ),

- d'une application "factorisation des cônes projectifs au travers de la limite choisie"

$$\text{fact: } \mathrm{Hom}(\underline{X}^{\wedge},\underline{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{X}^{\wedge\wedge},\underline{A})$$

telle que

+ $\mathrm{Hom}(D,\underline{A}).\mathrm{fact} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\underline{X}^{\wedge\wedge},\underline{A})}$ (ce qui assure que l'on factorise bien le cône considéré),

+ $\mathrm{Hom}(G,\underline{A}).\mathrm{fact} = \mathrm{choix}.\mathrm{Hom}(B,\underline{A})$ (ce qui assure que l'on factorise bien au travers de la limite choisie),

+ $\mathrm{Hom}(M,\underline{A}).\mathrm{fact}.\mathrm{choix} = \mathrm{Hom}(T,\underline{A}).\mathrm{Hom}(P,\underline{A}).\mathrm{choix}$ (ce qui assure que la factorisation d'une limite choisie au travers d'elle-même est triviale),

- d'une application "assurant l'unicité de la factorisation"

$$\text{unic: } \mathrm{Hom}(\underline{X}',\underline{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{X}^{\wedge\prime},\underline{A})$$

telle que

+ $\mathrm{Hom}(I,\underline{A}).\mathrm{unic} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\underline{X}',\underline{A})}$,

+ $\mathrm{fact}.\mathrm{Hom}(G',\underline{A}) = \mathrm{Hom}(C,\underline{A}).\mathrm{unic}$,

(on vérifie facilement que ces deux dernières conditions, vues celles qui précèdent, impliquent bien l'unicité de la factorisation et donc que les "cônes choisis" sont bien des limites).

Pour obtenir l'esquisse désirée il suffit de rendre co-représentable ce qui, a priori, ne l'est pas. Pour ce faire, nous notons $\underline{S}$ la duale de la sous-catégorie pleine de Cat dont les objets sont les catégories $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$ et $\underline{4}$. Nous distinguons dans $\underline{S}$ les cônes projectifs duaux des cônes inductifs définissant dans Cat les sommes fibrées $\underline{3} = \underline{2} \underset{\underline{1}}{+} \underline{2}$ et $\underline{4} = \underline{3} \underset{\underline{2}}{+} \underline{3}$. On obtient ainsi l'<u>esquisse</u> (petite et régulière) $/\underline{S}/$ <u>des catégories</u> en ce sens que Cat et $//\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}/}$ sont <u>isomorphes</u>.

Notons, maintenant, $\underline{S}''$ la duale de la sous-catégorie de Cat telle que:

- elle contient $\underline{S}^{op}$,
- elle contient la sous-catégorie pleine de Cat ayant $\underline{X}$, $\underline{X}^{\wedge}$, $\underline{X}^{\wedge\wedge}$, $\underline{X}'$ et $\underline{X}^{\wedge\prime}$ pour objets,
- elle contient tout foncteur allant d'un objet quelconque de cette première sous-catégorie vers un objet quelconque de cette deuxième sous-catégorie.

Alors, $\underline{S}'$ désigne le <u>graphe multiplicatif</u> obtenu en adjoignant à $\underline{S}''$:

- les flêches "primitives"

$$\text{choix}: \underline{X} \longrightarrow \underline{X}^{\wedge},$$
$$\text{fact}: \underline{X}^{\wedge} \longrightarrow \underline{X}^{\wedge\wedge},$$
$$\text{unic}: \underline{X}' \longrightarrow \underline{X}^{\wedge\prime},$$

- les flêches "composées" G.fact = choix.B , M.fact, (M.fact).choix = (T.P).choix , fact.G' = C.unic,

et en imposant les relations:

- B.choix = $\mathrm{Id}_{\underline{X}}$, D.fact = $\mathrm{Id}_{\underline{X}^{\wedge\wedge}}$, I.unic = $\mathrm{Id}_{\underline{X}'}$.

Nous distinguons dans $\underline{S}'$, outre les cônes déjà distingués dans $/\underline{S}/$, ceux qui sont duaux des cônes inductifs présentant $\underline{X}$, $\underline{X}^{\wedge}$, $\underline{X}^{\wedge\wedge}$, $\underline{X}'$ et $\underline{X}^{\wedge\prime}$ comme des limites inductives (indexées par des catégories petites) canoniques dans Cat et de foncteurs à valeurs dans $\underline{S}^{op}$ (puisqu'elle est dense dans Cat). On obtient ainsi l'*esquisse* (petite et régulière) $/\underline{S}'/$ *des catégories munies d'un choix de limites projectives indexées par* $\underline{X}$, puisqu'il est immédiat de constater que $\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}}$ et $//\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}'/}$ sont *isomorphes*. (Remarquons qu'il aurait été *beaucoup plus difficile* d'expliciter la catégorie munie de limites projectives "engendrée" par $/\underline{S}'/$, esquissant aussi $\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}}$ et sur laquelle on puisse effectivement calculer.)

Bien évidemment, la réalisation injection canonique $/V/: /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ esquisse bien (à l'isomorphisme près) le foncteur d'oubli $\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}} \longrightarrow \mathrm{Cat}$. Comme on peut toujours supposer que les éléments de $\{\underline{X}, \underline{X}\hat{}, \underline{X}\hat{}\hat{}, \underline{X}', \underline{X}\hat{}'\}$ sont strictement différents (même s'ils peuvent être isomorphes) des éléments de $\{\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}\}$, la condition (v) du §4 est vérifiée. Plus précisément encore, la réalisation $/V/$ est manifestement basique stricte (elle a été construite pour cela, en utilisant notamment la présentation inusuelle de l'unicité de factorisation faite précédemment). Enfin, il est clair que $/V/$ vérifie les conditions d'application du lemme du §2. En conséquence, le foncteur d'oubli $\mathrm{Cat}\text{-}\underline{X}\text{-}\underleftarrow{\mathrm{lim}} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ possède un adjoint à gauche et est triplable à l'isomorphisme près. Le théorème de l'Introduction se trouve donc ainsi démontré.

Des considérations tout à fait analogues valent évidemment dans des cas plus généraux:

- on peut remplacer $\underline{X}$ par un ensemble $\mathcal{X}$ de catégories (d'indices) petites et considérer la catégories des catégories petites munies, pour tout $\underline{X}$ appartenant à $\mathcal{X}$, d'un choix de limites projectives indexées par $\underline{X}$,
- on peut supposer que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux ensembles de catégories petites et considérer la catégorie des catégories petites munies, pour tout $\underline{X}$ appartenant à $\mathcal{X}$ et tout $\underline{Y}$ appartenant à $\mathcal{Y}$, d'un choix de limites projectives indéxées par $\underline{X}$ et d'un choix de limites inductives indexées par $\underline{Y}$,

- plutôt que d'étudier des extensions de Kan à gauche (resp. à droite) particulières, i.e. le long de foncteurs $\underline{X} \longrightarrow \underline{X}^{\wedge}$ (resp. $\underline{Y} \longrightarrow ((\underline{Y}^{op})^{\wedge})^{op}$), on peut se donner un ensemble $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{L}$) de foncteurs entre catégories petites et considérer la catégories des catégories petites $\underline{A}$ munies, pour tout $\underline{X}_1 \longrightarrow \underline{X}_2$ (resp. $\underline{Y}_1 \longrightarrow \underline{Y}_2$) appartenant à $\mathcal{K}$ (resp. à $\mathcal{L}$), d'un choix d'extensions de Kan à gauche (resp. à droite) le long de $\underline{X}_1 \longrightarrow \underline{X}_2$ (resp. $\underline{Y}_1 \longrightarrow \underline{Y}_2$) pour les foncteurs $\underline{X}_1 \longrightarrow \underline{A}$ (resp. $\underline{Y}_1 \longrightarrow \underline{A}$).
Dans tous ces cas, on obtient des foncteurs d'oubli vers Cat qui possèdent des adjoints à gauche et sont triplables à l'isomorphisme près.

6. Complément.

L'exemple du §5 suggère une traduction particulière de la proposition 2 (par exemple) et de son corollaire.

Supposons que $/\underline{S}/$ est une esquisse petite, que $G \xrightarrow{\theta} G'$ est un foncteur injectif et bijectif sur les objets entre deux graphes multiplicatifs petits et que $W: G \longrightarrow //\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}/}$ soit un foncteur injectif.
Nous notons $//\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}/,W,\theta}$ la catégorie dont les objets sont les réalisations $/F/: /\underline{S}/ \longrightarrow //\mathrm{Ens}//$ (objets de $//\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}/}$) munies d'un prolongement à G' pour le foncteur

$$G \xrightarrow[W]{} //\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}/} \xrightarrow[\mathrm{Hom}(-,/F/)]{} \mathrm{Ens}$$

(les morphismes étant les morphismes de $//\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}/}$ "qui se prolongent"). On dispose alors d'un foncteur d'oubli ("des prolongements")

$$R : //\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}/,W,\theta} \longrightarrow //\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}/} .$$

Dans ces conditions, nous avons:

<u>Proposition 3. Le foncteur</u> R <u>admet un adjoint à gauche et est triplable à l'isomorphisme près</u>.

Preuve. Il suffit de constater que $//\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}/,W,\theta}$ est isomorphe à $//\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}'/}$, où $/\underline{S}'/$ est l'esquisse telle que:

- $\underline{S}'$ contient $\underline{S}$,
- $\underline{S}'$ contient G'^{op} ,
- $\underline{S}'$ contient tout morphisme de $(//\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}/})^{op}$ de source l'image par W d'un objet de G et de but l'image par le plongement de Yoneda $Y: \underline{S} \longrightarrow (//\mathrm{Ens}//^{/\underline{S}/})^{op}$ d'un objet de $\underline{S}$,
- les cônes distingués sont, outre ceux distingués dans $/\underline{S}/$, ceux qui sont duaux des cônes inductifs présentant tout objet image par W d'un objet de G comme limite inductive canonique d'un foncteur à valeurs dans $Y(\underline{S})$.

(Cette construction est évidemment analogue à celle effectuée dans le cas particulier étudié au §5

Evidemment, la réalisation injection canonique $/V/: /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ esquisse le foncteur d'oubli R et comme cette réalisation est trivialement basique stricte, la proposition est démontrée. ::

Bibliographie.

(C.O.S.S.) A. Bastiani et C. Ehresmann, Categories of sketched structures, Cahiers de Top. et Géom. Diff., vol. XIII,2 , 1972.

(C.F.W.M.) S. MacLane, Categories for the working mathematician, Grad. Texts in Maths n°5, Springer, 1971.

(E.G.C.E.) C. Lair, Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses Math. n°23, 1975.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types de structures algébriques, Bul. Instit. Polit. Iaşi, XIV, 1968.

(F.O.S.A.) C. Lair, Foncteurs d'omission de structures algébriques, Cahiers de Top. et Géom. Diff., vol. XII,2 , 1971.

(L.M.I.C.) A. Kock, Limit monads in categories, Aarhus Universitet Math., Preprint Series 1967-1968 n°6.

(L.P.L.G.) F. Ulmer, Locally presentable and locally generated categories, Lect. Notes 195, Springer, 1971.

(O.S.E.D.) F. W. Lawvere, Ordinal sums an equational doctrines, Lect. Notes 80, Springer, 1969.

(S.P.A.T.) F. W. Lawvere, Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories, Lect. Notes 61, Springer, 1968.