CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

D. BOURN
J. PENON

Catégorification de structures définies par monade cartésienne

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 46, n° 1 (2005), p. 2-52
<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_2005__46_1_2_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES *Volume XLVI-1 (2005)*

CATEGORIFICATION DE STRUCTURES DEFINIES PAR MONADE CARTESIENNE

par D. BOURN et J. PENON

Résumé

We give here a construction of the categorification of structures defined by cartesian monads. On the contrary to the usual ways, we focus on the iteration process from level n to level n+1. Our starting point is a pair of a functor $U : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ and a cartesian monad (M, η, μ) on $\mathbb{E}$ satisfying some conditions. From that point, we construct a new pair of a functor $U_1 : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}$ and a cartesian monad (M_1, η_1, μ_1) on $\mathbb{E}_1$ which satisfy the same conditions. This new pair is defined as the *categorification* of the initial pair. Starting from $\mathbb{E} = Ens$, $\mathbb{B} = \mathbb{1}$ and (M, η, μ) the identity monad, the n-th step of this iteration process gives rise to the category of weak n-categories. The limit $\mathbb{E}_\infty$ of this iteration admits a comparison functor towards the category of weak ∞-categories in the sense of Leinster.

Introduction

Le point de départ de ce travail est double. Plus précisément, il est à la confluence des conceptions de ses deux auteurs. Essayons de les résumer brièvement.
Pour le premier, contrairement à la plupart des tentatives pour aborder la définition des n-catégories non strictes, il est trop radical de le faire d'emblée en dimension infinie, mais il est bien préférable au contraire de procéder par récurrence et d'insister sur le passage de la dimension n à la dimension n+1, sur le modèle, par exemple, de ce qui est fait pour les n-groupoïdes stricts, voir [4] et aussi [5].
Pour le second auteur, la préoccupation principale ne porte pas sur les ∞-catégories non strictes pour lesquelles il a déjà proposé une définition (avec la notion de prolixes, voir [13]), mais sur une extension de la méthode "d'affaiblissement structural" à d'autres structures algébriques que les ∞-catégories, suivant ainsi des suggestions déjà formulées par Batanin [3]. Par ailleurs, il lui semble aussi plus naturel de procéder par sauts élémentaires, c'est-à-dire en s'élevant d'une seule dimension pour éffectuer cet affaiblissement.
Dans cet article est réalisée la synthèse de ces deux points de vue à travers la notion

de catégorification.
Ce terme de "catégorification" a été en fait introduit par Crane dans [8] et [9], puis systématisé par Baez et Dolan dans [1]. Il désigne le principe général de passage d'une structure à une autre de telle sorte que les axiomes équationnels de la première (qui sont des identités formelles entre les termes de cette structure) soient remplacés par des données (en l'occurrence des isomorphismes entre ces mêmes termes). De nouveaux axiomes, dits de cohérence, doivent alors lier ces nouvelles données. Les deux exemples génériques sont celui de la catégorification des monoïdes qui produit les catégories monoïdales, et celui de la catégorification des catégories qui produit les bicatégories.
Le premier problème posé par notre notion de catégorification a été de choisir la façon de définir les structures algébriques. L'exemple incontournable des nombreuses définitions des ∞-catégories non-strictes nous a convaincus qu'il fallait raisonner en termes de monade. Monades sur les ensembles pour les structures classiques, monades sur les graphes pour les structures de type catégorique (sur cette question voir [7]), et enfin monades sur les ensembles globulaires (ou encore n-graphes selon notre terminologie) en dimensions supérieures. Plus précisément la donnée appropriée, dite : donnée de base, s'avère être la donnée de deux catégories et d'un foncteur $U : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ et d'une monade (M, η, μ) sur $\mathbb{E}$.

La technique de catégorification, quant à elle, s'inspire de la présentation des bicatégories selon Batanin dans le préambule de [2]. Il utilise, pour ce faire, le langage des opérades non-symétriques. Ce sont elles qui vont nous permettre d'exprimer l'affaiblissement recherché (dans son exemple, il affaiblit la notion de 2-catégorie qui est déjà elle-même une sorte de catégorification stricte de celle de catégorie). Le cas strict est caractérisé, parmi les cas non-stricts, par l'utilisation de l'opérade finale. Mais Batanin constate ensuite que la technique des opérades est insuffisante pour décrire les tricatégories et qu'il faut l'adapter au problème des dimensions supérieures. Ce qui l'amène à la notion plus générale de n-opérade dont les opérades classiques deviennent un cas particulier de dimension 1.

Pour notre projet, l'outil des n-opérades s'est révélé bien trop spécifique aux n-catégories pour pouvoir servir dans la catégorification de structure quelconque. Un outil plus approprié s'imposait, que Batanin suggère d'ailleurs un peu lui-même dans [3] où il compare les prolixes à ses propres ∞-catégories non-strictes. Il nous apparût alors clairement que le nouveau type d'opérade que nous recherchions existait déjà, depuis longtemps, sous le nom de $\mathbb{T}$-catégorie, selon la définition de A.Burroni [6]. Cet outil, élémentairement lié aux monades, va nous permettre de généraliser la construction des bicatégories selon Batanin, et de mettre définitivement au point notre processus de catégorification.

Il faut ensuite collecter l'ensemble des propriétés de la donnée de base qui permettent d'une part d'effectuer les constructions nécéssaires à la catégorification et d'autre part, en vue de l'itération, de les retrouver à la fin de ces constructions. Toute cette partie du travail est rassemblée au chapitre 1 et la liste complète des axiomes y est établie. La question de la catégorification étant règlée, il faut aborder ensuite celle de l'itération.

On montre d'abord, que dans le cas de la catégorification stricte (=utilisation de l'opérade finale), on retombe bien, en partant des ensembles, sur les n-catégories strictes au sens usuel. On montre ensuite qu'entre les deux processus de catégorification, le non-strict et le strict, il existe un morphisme cartésien de monades qui s'avère être contractile au sens de Leinster (voir [12]). Cette propriété se conserve après itération et permet en passant à la limite de faire apparaître en dimension infinie un morphisme de comparaison entre la monade de Leinster [12] sur les ensemble globulaires (ou ∞-graphes) et notre monade itérée (notée $\mathbb{M}_{(\infty)}$). Nos ∞-catégories non-strictes (en tant qu'algèbres sur la monade $\mathbb{M}_{(\infty)}$) sont donc aussi des ∞-catégories non-strictes au sens de Leinster. Toutes ces questions sont traitées au chapitre 2.

Dans la longue liste des définitions existantes, notre présentation des ∞-catégories non-strictes se situe donc, on le constate, parmi les définitions dites "explicites" comme celles données par Batanin, par Leinster ou déjà par Penon. Ce qui fait d'abord son intérêt vient de la simplicité de la construction de la monade $\mathbb{M}_{(\infty)}$, toute entière contenue dans celle, en une étape, de notre catégorification. On évite ainsi tout recours aux computades, ou à leurs équivalents, dont la manipulation est extrêmement difficile. Une de ses limites, en revanche, est qu'elle se cantonne, pour l'instant, aux seules théories definissables par des monades cartésiennes.

Table des matières

1 Catégorification

1.1 Procédure générale

• On va, dès à présent, donner la procédure générale de catégorification d'une structure définie par une monade cartésienne. Elle se fait en plusieurs étapes en s'appuyant sur une série de théorèmes qui seront démontrés dans les paragraphes suivants afin de ne pas alourdir et surtout d'allonger l'exposition de cette procédure.

1.1.1 Les données de départ

• Le but étant de catégorifier des structures, nous allons nous donner au départ une structure à transformer. Cette structure est présentée par une monade (cartésienne) sur une catégorie. En fait l'itération de la procédure de catégorification montre que la seule donnée d'une catégorie pour supporter la monade ne suffit pas (voir l'introduction). De façon plus précise on se donne :

1. Deux catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{E}$ et un foncteur $U : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$
2. Une monade $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{E}$

Cette liste de données (encore appelée "données de base") vérifie certaines conditions (appelées "conditions d'itération").

- Pour la catégorie $\mathbb{E}$, la liste des conditions qu'elle doit remplir sera donnée au paragraphe 1.5.3 (disons brièvement que $\mathbb{E}$ doit posséder des limites à gauche et à droite, globales ou partielles, qui commutent avec U et entre elles).
- Pour la monade $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$, ces conditions sont :
- $\mathbb{M}$ est cartésienne, c'est-à-dire que l'endofoncteur M commute aux produits fibrés et les transformations naturelles η et μ sont cartésiennes (c'est-à-dire, qu'en tant que foncteur $\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^2$, elles envoient une flèche sur un carré cartésien).
- M commute aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite (où $\overrightarrow{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble ordonné des entiers naturels, considéré comme catégorie).
- M commute aux flèches U-verticales (c'est-à-dire les flèches $x : X \to Y$ de $\mathbb{E}$ pour lesquelles $U(x) = Id_{UX}$)

Une donnée de base $(\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}, \mathbb{M})$ vérifiant ces conditions est appelée *une structure itérative*.

Exemples :

1. Dans le cas des structures ensemblistes (comme par exemple la structure de monoïde ou de magma ...) $\mathbb{E} = \mathbb{E}$ns, $\mathbb{B} = \mathbb{1}$ (la catégorie finale) et la monade $\mathbb{M}$ est la monade "monoïde libre", "magma libre" ...
2. Pour la structures de catégorie, on considère : $\mathbb{E} = \mathbb{G}$r (catégorie des graphes), $\mathbb{B} = \mathbb{E}$ns, $U : G \mapsto G_0$ (où G_0 est l'ensemble des objets ou des sommets de G) et $\mathbb{M} = \mathbb{C}h$ (la monade "des chemins" c'est-à-dire la monade "catégorie libre sur un graphe")

• A partir d'une structure itérative $(\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}, \mathbb{M})$ on construit une nouvelle structure itérative $(\mathbb{E}_1 \xrightarrow{U_1} \mathbb{B}_1, \mathbb{M}_{(1)})$ qui va être la catégorification de $(\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}, \mathbb{M})$ (l'index de la notation $\mathbb{M}_{(1)}$ est là pour souligner la distinction avec la monade $\mathbb{M}_1$ sur

$\mathbb{E}_1$ de catégorification stricte introduite au paragraphe 2.1.1).
En fait $\mathbb{B}_1 = \mathbb{E}$ et $\mathbb{E}_1$ est la catégorie U-Gr($\mathbb{E}$) des U-graphes dans $\mathbb{E}$ où un U-graphe dans $\mathbb{E}$ est un graphe interne à $\mathbb{E}$: $G_1 \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} G_0$ où les morphismes domaine et codomaine ∂_0 et ∂_1, sont U-verticaux (les morphismes de U-graphes sont ceux des graphes internes). Le foncteur $U_1 : \mathbb{E}_1 = \text{U-Gr}(\mathbb{E}) \to \mathbb{B}_1 = \mathbb{E}$ est le foncteur d'oubli $G \longmapsto G_0$.
Nous allons maintenant construire la monade de catégorification $\mathbb{M}_{(1)}$ sur U-Gr($\mathbb{E}$) par étapes successives.

1.1.2 Construction de la monade $\mathbb{M}_{(1)}$

1ère étape (destructuration réglée)

On considère l'U-opérade libre Ω_0 sur $\mathbb{M}$, engendrée par la collection pointée :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "\eta_1"] \arrow[dr, "\eta_1"'] & & M(1) \arrow[dl, "\mathrm{Id}"] \\ & M(1) & \end{tikzcd}$$

où une collection est une flèche $C \to M(1)$ et une U-opérade est une opérade au sens de A.Burroni (voir [6])) dont la collection sous-jacente est une U-collection, c'est-à-dire une collection $C \xrightarrow{\pi} M(1)$ où la flèche π est U-verticale (pour plus de détails voir le paragraphe1.2 où l'on donne des conditions générales pour qu'une telle U-opérade existe).
Exemple : Dans le cas où $\mathbb{E} = \mathbb{E}\mathrm{ns}$, $\mathbb{B} = \mathbb{1}$, $\mathbb{M} = \mathbb{M}o$ (la monade "monoïde libre") l'ensemble Ω_0 sous-jacent à l'opérade Ω_0 est l'ensemble des termes d'un langage $\mathcal{T}$ne possédant qu'une seule variable libre x et un ensemble dénombrable de lois $\{\bigstar_n ; n \in \mathbb{N} - \{1\}\}$ où, pour chaque n la loi $\bigstar_n$ est n-aire. Ces différentes lois n'étant pas reliées entre elles par des axiomes (dans ce cas, c'est la structure de monoïde qui a été destructurée).

2ème étape (restructuration cohésive)

Ici vont apparaître les cohérences de relâchement.
• Partant de la U-collection $\Omega_0 \xrightarrow{\pi_0} M(1)$ sous-jacente à l'U-opérade libre Ω_0 précédente, on considère la relation d'équivalence nucléaire de la flèche π_0, obtenue grâce au produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\partial_0"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \Omega_0 \arrow[d, "\pi_0"] \\
\Omega_0 \arrow[r, "\pi_0"] & M(1)
\end{tikzcd}$$

Elle détermine en fait une U-catégorie Ω (grâce aux conditions d'itération on peut en effet considérer un produit fibré qui rendra les flèches ∂_0 et ∂_1 U-verticales voir le 1.3.2.)

• Or, sur U-cat($\mathbb{E}$) existe une monade cartésienne notée $\overline{\mathbb{M}} = (\overline{M}, \overline{\eta}, \overline{\mu})$ qui prolonge la monade cartésienne $\mathbb{M}$ (ceci est possible puisque M commute aux produits fibrés et aux flèches U-verticales). La U-catégorie Ω produit en fait une opérade $\Cap$ sur $\overline{\mathbb{M}}$ (voir encore le 1.5.1).

• Enfin l'opérade $\Cap$ sur $\overline{\mathbb{M}}$, comme toute opérade, sur une monade cartésienne (voir le 1.2.2), engendre une nouvelle monade cartésienne $\overline{\Cap}$ sur U-Cat($\mathbb{E}$) et un morphisme cartésien $\overline{\pi} : \overline{\Cap} \rightarrow \overline{\mathbb{M}}$

Exemple : En reprenant l'exemple de la 1ère étape, la catégorie Ω, qui a pour objets les termes de langages $\mathcal{T}$, a pour flèches les couples (t, t') de termes de $\mathcal{T}$ ayant même nombre d'occurrences en x (*i.e.* $\pi_0(\mathrm{t}) = \pi_0(\mathrm{t'})$). On a par exemple les flèches suivantes :

$$\begin{tikzcd}
& \bigstar_3(x,x,x) \arrow[dl, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\
x\bigstar_2(x\bigstar_2 x) \arrow[ur, shift left] \arrow[rr, shift left] & & (x\bigstar_2 x)\bigstar_2 x \arrow[ul, shift left] \arrow[ll, shift left]
\end{tikzcd}$$

La monade $\overline{\Cap}$ correspondante est, sur $\mathbb{C}$at, équivalente à la monade "catégorie monoïdale libre sur une catégorie".

3ème étape (finalisation)

Les conditions d'itération permettent au foncteur d'oubli U-Cat($\mathbb{E}$) $\rightarrow$ U-Gr($\mathbb{E}$)

d'admettre un adjoint à gauche (voir le 1.3) c'est pourquoi, par composition, le foncteur d'oubli composé suivant :

$$\text{U-Cat}(\mathbb{E})^{\overline{\Omega}} \to \text{U-Cat}(\mathbb{E}) \to \text{U-Gr}(\mathbb{E})$$

admet lui-même un adjoint à gauche. Il produit ainsi, sur U-Gr($\mathbb{E}$), une monade. C'est la monade $\mathbb{M}_{(1)}$ cherchée. On montre de plus que la donnée de base ($\mathbb{E}_1 \xrightarrow{U_1} \mathbb{B}_1, \mathbb{M}_{(1)}$) vérifie les conditions d'itération et donc qu'elle est à nouveau une structure itérative (voir 1.4 et 1.5)

Exemple : Toujours dans le même exemple que pour les deux premières étapes, on obtient une monade équivalente à la monade "catégorie monoïdale libre sur un graphe".

1.2 U-opérade libre

• Dans la première étape de la procédure générale, on construit l'U-opérade libre sur une collection pointée. Il nous faut maintenant préciser de quelles opérades il s'agit et établir sous quelles conditions générales une telle U-opérade libre existe. Cela nous conduit à la mise au point de *théorèmes d'existence de monoïdes libres* dans certaines catégories monoïdales. Aussi avons nous réservé ce paragraphe aux catégories monoïdales.

1.2.1 La catégorie monoïdale $\mathbb{V}/M$

• Les catégories $\mathbb{V}/M$ vont nous permettre au paragraphe suivant, de définir les opérades sur une monade donnée.
• Donnons nous une catégorie monoïdale $\mathbb{V}$ munie d'un monoïde M. La catégorie $\mathbb{V}/M$ est alors munie d'une structure monoïdale canonique.
Pour $(X, X \xrightarrow{x} M)$, $(Y, Y \xrightarrow{y} M) \in |\mathbb{V}/M|$, le produit tensoriel est :
$(X,x) \otimes (Y,y) = (X \otimes Y, z)$ où $z : X \otimes Y \to M$ est la flèche composée suivante :

$$X \otimes Y \xrightarrow{x \otimes y} M \otimes M \xrightarrow{k} M$$

k désignant la multiplication du monoïde M. L'objet unité de $\mathbb{V}/M$ est $(I, I \xrightarrow{e} M)$ où e est l'unité du monoïde.
• Les foncteurs suivants sont des morphismes stricts de catégories monoïdales.
- Le foncteur $\mathbb{V}/M \to \mathbb{V}$, $(X,x) \mapsto X$.
- Le foncteur $\mathbb{V}/M \to \mathbb{V}/N$ de composition, pour chaque morphisme de monoïde $M \to N$.

• Les monoïdes de $\mathbb{V}/M$ s'identifient à des morphismes de monoïdes de but M dans $\mathbb{V}$. De façon précise, on a un isomorphisme canonique :

$$Mon(\mathbb{V}/M) \simeq Mon(\mathbb{V})/M$$

• On a le cas particulier important suivant : dans toute catégorie monoïdale $\mathbb{V}$ l'objet unité I a canoniquement une structure de monoïde dans $\mathbb{V}$ comme dans $\mathbb{V}^{op}$. Aussi la catégorie $(\mathbb{V}^{op}/I)^{op}$ = I/$\mathbb{V}$ a une structure canonique de catégorie monoïdale. Notons la Pt($\mathbb{V}$) (ses objets sont baptisés des "points" de $\mathbb{V}$). On a : $Mon(Pt\mathbb{V}) \simeq Mon\mathbb{V}$, car un monoïde de $\mathbb{V}$ est aussi trivialement un monoïde de $Pt\mathbb{V}$. Cet isomorphisme fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mon}(\mathrm{Pt}\mathbb{V}) \arrow[rr, dash, "\sim"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathrm{Mon}(\mathbb{V}) \arrow[dl, "V"] \\
& \mathrm{Pt}\mathbb{V} &
\end{tikzcd}$$

où V : (M,e,k) $\mapsto$ (M,e) et où plus généralement U : Mon$\mathbb{V}$ $\rightarrow$ $\mathbb{V}$ est le foncteur d'oubli (M,e,k) $\mapsto$ M.

• Enfin signalons que si $\mathbb{V}$ a des $\mathbb{I}$-limites à droite, $\mathbb{V}/M$ en a aussi et que les morphismes stricts $\mathbb{V}/M \rightarrow \mathbb{V}$ et $\mathbb{V}/M \rightarrow \mathbb{V}/N$ signalés plus haut, commutent avec elles. De plus lorsque, pour tout X $\in |\mathbb{V}|$ le foncteur (-)$\otimes$X (resp. X$\otimes$(-)) commute avec les $\mathbb{I}$-limites à droite dans $\mathbb{V}$, il en va de même dans la catégorie monoïdale $\mathbb{V}/M$.

1.2.2 Les opérades de Burroni

• Soit maintenant $\mathbb{E}$ une catégorie à limites à gauche finies. Notons Enc($\mathbb{E}$) la catégorie qui a pour objets les endofoncteurs de $\mathbb{E}$ commutant aux produits fibrés et pour flèches les transformations naturelles cartésiennes entre ces foncteurs. En fait, c'est une sous-catégorie monoïdale de la catégorie monoïdale stricte End($\mathbb{E}$) des endofoncteurs de $\mathbb{E}$. Les monoïdes de Enc($\mathbb{E}$) sont les monades cartésiennes de $\mathbb{E}$. Pour n'importe quel M $\in$ |Enc($\mathbb{E}$)|, le foncteur canonique d'évaluation en 1 suivant :

$$Enc(\mathbb{E})/M \rightarrow \mathbb{E}/M(1)$$

est en fait une équivalence de catégorie (son pseudo-inverse se construit par changement de base le long des flèches M ! : MX $\rightarrow$ M1). Lorsque M est l'endofoncteur d'une monade cartésienne $\mathbb{M}$ = (M,η,μ) la structure monoïdale canonique sur Enc($\mathbb{E}$)/M (voir le paragraphe précédent) se transporte à$\mathbb{E}/M(1)$. On note

Coll($\mathbb{E}$,$\mathbb{M}$) la catégorie monoïdale obtenue par l'équivalence précédente (ses objets sont les collections sur $\mathbb{M}$). Explicitement le produit tensoriel des collections (X,x) et (Y,y) est : (X,x) $\otimes$ (Y,y) = (Z,z) où Z est donné par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & MY \arrow[d, "M!"] \\ X \arrow[r, "x"] & M1 \end{tikzcd}$$

et où z : Z $\to$ $M1$ est la flèche composée suivante :

$$Z \overset{p_1}{\to} MY \overset{My}{\to} M^2 1 \overset{\mu_1}{\to} M1$$

L'objet unité de Coll($\mathbb{E}$, $\mathbb{M}$) est I = $(1, \eta_1)$.
On appelle opérade sur $\mathbb{M}$ un monoïde dans Coll($\mathbb{E}$,$\mathbb{M}$) et un morphisme d'opérade (sur $\mathbb{M}$) un morphisme de monoïde dans Coll($\mathbb{E}$,$\mathbb{M}$). Notons Op($\mathbb{E}$,$\mathbb{M}$) la catégorie des opérades sur $\mathbb{M}$. On a bien évidemment l'équivalence de catégories :

$$Op(\mathbb{E}, \mathbb{M}) \cong Moc(\mathbb{E})/\mathbb{M}$$

Où Moc($\mathbb{E}$) = Mon(Enc($\mathbb{E}$)). C'est la catégorie ayant pour objets les monades cartésiennes et pour flèches les morphismes de monades qui sont des transformations naturelles cartésiennes (résulte du paragraphe précédent).

Remarque

A. Burroni dans son article [6] n'emploie pas le terme "opérade". Etant donnée une monade $\mathbb{T}$, une opérade sur $\mathbb{T}$ selon notre définition coïncide avec ce qui, dans sa terminologie, est une $\mathbb{T}$-catégorie dont l'objet des objets est 1, voir aussi [10].

Exemple générique.

On suppose $\mathbb{E}$ localement cartésiennes fermées (*i.e.* pour tout objet X de $\mathbb{E}$, la catégorie $\mathbb{E}/X$ est cartésienne fermée)(Les topos sont des exemples de catégories localement cartésiennes fermées). A chaque objet X de $\mathbb{E}$ on associe l'opérade E(X) dont la collection sous-jacente est donnée par l'exponentielle suivante dans $\mathbb{E}/M(1)$:

$$(X \times M(1) \overset{p_{M(1)}}{\to} M(1))^{(MX \overset{M!}{\to} M(1))}$$

Dans le cas où $\mathbb{E}$ = $\mathbb{E}$ns et $\mathbb{M}$ = $\mathbb{M}o$, on a E(X) = $(E(X)_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $E(X)_n$ = $\mathbb{E}$ns(X^n,X). Lorsque Ω est une opérade sur $\mathbb{M}$, on a une bijection canonique entre les morphismes d'opérades $\Omega \to$ E(X) et les structures d'algèbre sur X pour la monade associée à Ω (voir [10])

1.2.3 Monoïdes gradués

• Les deux exemples de monoïdes libres donnés dans ce paragraphe (aux propositions 1.2 et 1.3) se présentent sous la forme de monoïdes gradués, il est donc préférable de commencer par leur description.

• $\mathbb{V}$ étant une catégorie monoïdale, un monoïde gradué dans $\mathbb{V}$ est la donnée $\mathfrak{X}$:

1. d'une suite d'objets $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{V}$
2. d'une suite de flèches $(X_n \xrightarrow{\iota_n} X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{V}$
3. d'une suite double de flèches $(X_n \otimes X_m \xrightarrow{k_{n,m}} X_{n+m})_{n,m}$
   vérifiant les conditions suivantes :
   (a) $X_0 = \mathrm{I}$
   (b) $k_{n,0} = (u_d)_{X_n} : X_n \otimes I \xrightarrow{\sim} X_n$, $k_{0,n} = (u_g)_{X_n} : I \otimes X_n \xrightarrow{\sim} X_n$ (ce sont les morphismes de cohérence "unité à droite" et "unité à gauche" de la catégorie monoïdale)
   (c) pour tout n,m,p $\in \mathbb{N}$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(X_n \otimes X_m)\otimes X_p \arrow[rr, "\mathrm{ass}", "\sim"'] \arrow[d, "k_{n,m}\otimes \mathrm{Id}"] & & X_n \otimes (X_m \otimes X_p) \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes k_{m,p}"] \\
X_{n+m} \otimes X_p \arrow[dr, "k_{n+m,p}"'] & & X_n \otimes X_{m+p} \arrow[dl, "k_{n,m+p}"] \\
& X_{n+m+p} &
\end{tikzcd}$$

   (d) pour tout n $\leqslant$ n', m $\leqslant$ m' le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
X_n \otimes X_m \arrow[r, "\iota_{n',n} \otimes \iota_{m',m}"] \arrow[d, "k_{n,m}"] & X_{n'} \otimes X_{m'} \arrow[d, "k_{n',m'}"] \\
X_{n+m} \arrow[r, "\iota_{n'+m',n+m}"] & X_{n'+m'}
\end{tikzcd}$$

(où $\iota_{n,m} : X_m \to X_n$ est défini pour m $\leqslant$ n par récurrence sur n en posant :
$\iota_{m,m} = Id_{X_m}$ et $\iota_{n+1,m} = (X_m \xrightarrow{\iota_{n,m}} X_n \xrightarrow{\iota_n} X_{n+1})$

Exemple : Tout monoïde $\mathbb{M}$ = (M,e,k) engendre un monoïde gradué, en posant : X_0 = I, ι_0 = e, et $\forall n > 0$ X_n = M, $\iota_n = Id_M$, $k_{0,n} = (u_g)_M, k_{n,0} = (u_d)_M$ et pour $n, m > 0$ $k_{n,m} = k$.
Notons U($\mathbb{M}$) ce monoïde gradué engendré par $\mathbb{M}$.
• $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}$' étant deux monoïdes gradués, un morphisme f : $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$' est une suite de flèches $(f_n : X_n \to X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $f_0 = Id_I$
2. Pour tout n $\in \mathbb{N}$ on la commutation suivante :

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\iota_n"] & X'_n \arrow[d, "\iota'_n"] \\ X_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] & X'_{n+1} \end{tikzcd}$$

3. Pour tout n,m $\in \mathbb{N}$, on a la commutation suivante :

$$\begin{tikzcd} X_n \otimes X_m \arrow[r, "f_n \otimes f_m"] \arrow[d, "k_{n,m}"] & X'_n \otimes X'_m \arrow[d, "k'_{n,m}"] \\ X_{n+m} \arrow[r, "f_{n+m}"] & X'_{n+m} \end{tikzcd}$$

• Les monoïdes gradués et leurs morphismes forment une catégorie notée Mog($\mathbb{V}$) et l'application $\mathbb{M} \mapsto U(\mathbb{M})$ se prolonge en un foncteur U : $Mon(\mathbb{V}) \to Mog(\mathbb{V})$

Proposition 1.1 *Lorsque* $\mathbb{V}$ *a des* $\overrightarrow{\mathbb{N}}$*-limites à droite et que pour tout* $X \in |\mathbb{V}|$ *les foncteurs (-)⊗X et X⊗(-) commutent avec ces* $\overrightarrow{\mathbb{N}}$*-limites alors, le foncteur d'oubli* $U : Mon(\mathbb{V}) \to Mog(\mathbb{V})$ *admet un adjoint à gauche (noté L)*

Preuve : En fait L($\mathfrak{X}$) = $\varinjlim_n X_n$ (Notons $l_n : X_n \to L(\mathfrak{X})$ les flèches du cône limite). Alors L($\mathfrak{X}$) est un monoïde où e = l_0 et où la multiplication est donnée par la flèche composée :

$$L(\mathfrak{X}) \otimes L(\mathfrak{X}) = (\varinjlim_n X_n) \otimes (\varinjlim_n X_n) \simeq \varinjlim_{n,m}(X_n \otimes X_m) \xrightarrow{\varinjlim_{n,m} k_{n,m}} \varinjlim_{n,m} X_{n+m} \simeq L(\mathfrak{X})$$

La flèche universelle $\mathfrak{X} \to UL(\mathfrak{X})$ est donnée pour n>0 par les l_n.

1.2.4 Monoïde libre et opérade libre

- Les deux propositions suivantes vont nous donner essentiellement

1. l'existence de la U-catégorie libre sur un U-graphe (au paragraphe 1.3)
2. l'U-opérade libre sur une collection pointée

Proposition 1.2 *Soit* $\mathbb{V}$ *une catégorie monoïdale telle que :*

1. *Elle a des* $\overrightarrow{\mathbb{N}}$*-limites à droite et pour tout* $X \in |\mathbb{V}|$, *(-)⊗X et X⊗(-) commute avec ces* $\overrightarrow{\mathbb{N}}$*-limites.*
2. *Elle a des sommes (de deux objets) et pour tout* $X \in |\mathbb{V}|$, *(-)⊗X commute avec ces sommes.*

Alors le foncteur d'oubli $U : Mon(\mathbb{V}) \to \mathbb{V}$ *admet un adjoint à gauche.*

Preuve : Soit $X \in |\mathbb{V}|$. Avant de construire Mo(X) (qui sera le monoïde libre sur X) on construit un monoïde gradué $\mathfrak{X}$ par récurrence de la façon suivante : X_0 = I et $X_{n+1} = X \otimes X_n + I$, $\iota_0 = \sigma_1 : I \to X \otimes I + I$ est la co-projection canonique et $\iota_{n+1} = (X_{n+1} = X \otimes X_n + I \xrightarrow{Id\otimes\iota_n + Id} X \otimes X_{n+1} + I)$, $k_{0,m} = u_g : X_0 \otimes X_m \xrightarrow{\sim} X_m$ et $k_{n+1,m}$: $X_{n+1} \otimes X_m \to X_{n+1+m}$ est la flèche composée suivante

$$\begin{array}{l} X_{n+1} \otimes X_m = (X \otimes X_n + I) \otimes X_m \overset{dist}{\simeq} (X \otimes X_n) \otimes X_m + I \otimes X_m \overset{ass+u_g^{-1}}{\simeq} \\ X \otimes (X_n \otimes X_m) + X_m \xrightarrow{Id\otimes k_{n,m}+Id} X \otimes X_{n+m} + X_m \xrightarrow{)\sigma_2,\iota_{n+m+1,m}(} X_{n+m+1} \end{array}$$

où dist est la flèche de distributivité canonique due aux hypothèses et où $\sigma_2 : X \otimes X_{n+m} \to X_{n+m+1}$ est la co-projection canonique et où on note :
)x,y(: X + Y → Z la flèche universelle provenant de deux flèches arbitraires $X \xrightarrow{x} Z$ et $Y \xrightarrow{y} Z$.
Il nous reste àmontrer que le monoïde Mo(X) = L($\mathfrak{X}$) vérifie la propriété universelle désirée. Pour cela notons η_X : X → Mo(X) la flèche composée :

$$X \underset{U_d}{\xrightarrow{\sim}} X \otimes I \underset{\sigma_1}{\to} (X \otimes I + I) = X_1 \underset{l_1}{\to} Mo(X)$$

où les flèches $l_n : X_n \to$ Mo(X) sont les flèches du cône limite. Montrons que η_X est universelle. Soit N un autre monoïde et x : X $\to$ N une flèche quelconque. Alors (X,X $\xrightarrow{x} N) \in |\mathbb{V}/N|$ où $\mathbb{V}/N$ est une catégorie monoïdale vérifiant les conditions de l'hypothèse (voir le 1.2.1). On peut donc considérer le monoïde Mo(X,x) dans $\mathbb{V}/N$. Comme le foncteur S : $\mathbb{V}/N \to \mathbb{V}$, (X,x) $\mapsto$ X commute strictement avec $\otimes$, I , $\overset{Lim}{\longrightarrow}_n$ et $+$, on a les commutations S(Mo(X,x)) = MoS(X,x) = MoX et $S\eta_{(X,x)} = \eta_X$. On en déduit que Mo(X,x) correspond à un morphisme de monoïde Mo(X) $\xrightarrow{h_x}$ N (voir toujours le 1.2.1) et que $h_x.\eta_X = x$. L'unicité de h_x résulte de l'identité : Mo(X, η_X) = (MoX,Id), dans $\mathbb{V}/MoX$ (Pour cela on montre par récurrence que $(X, \eta_X)_n = (X_n, l_n)$). En effet si h : MoX $\to$ N est un morphisme de monoïde, on a les identités suivantes :

$$(MoX, h) = \textstyle\sum_h(MoX, Id) = \sum_h(Mo(X, \eta_X))$$

$$= Mo\textstyle\sum_h(X, \eta_X) = Mo(X, x) = (MoX, h_x)$$

où $\sum_h : \mathbb{V}/MoX \to \mathbb{V}/N$ est le foncteur de composition par h (il commute aussi strictement avec $\otimes$, I, $\overset{Lim}{\longrightarrow}_n$ et $+$).

• La proposition qui suit est aussi un théorème d'existence de monoïde libre, mais cette fois dans un cadre diffèrent. Comme nous l'avons déjà dit, elle permettra la construction de l'U-opérade libre sur une collection pointée.

• Plaçons nous dans le contexte général suivant :
On se donne une catégorie monoïdale $\mathbb{V}$ et une sous-catégorie pleine $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$. Elles ont en plus les propriétés suivantes :

1. pour $\mathbb{V}$
   (a) Elle a des $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite et, pour chaque objet X de $\mathbb{V}$, les endofoncteurs X$\otimes(-)$ et $(-)\otimes$X commutent aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite.
   (b) Elle a des co-égalisateurs et, pour chaque objet X de $\mathbb{V}$, l'endofoncteur $(-)\otimes$X commute aux co-égalisateurs.
   (c) I, l'objet unité de $\mathbb{V}$, est un objet initial.
2. Pour $\mathbb{W}$
   (a) L'inclusion $\mathbb{W} \hookrightarrow \mathbb{V}$ admet un adjoint à gauche $\overline{(-)}$ (on note W : Id $\to \overline{(-)}$ l'unité de cette adjonction).

(b) Pour chaque objet X de $\mathbb{V}$, l'endofoncteur $(-)\otimes X$ commute aux flèches $\mathbb{W}$-denses (celles qui sont envoyées sur des isomorphismes par le foncteur $\overline{(-)}$).

(c) L'inclusion $\mathbb{W} \hookrightarrow \mathbb{V}$ commute avec les $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite

- On note $\mathbb{W}$-Mon($\mathbb{V}$) la sous-catégorie pleine de $Mon(\mathbb{V})$ ayant pour objets les monoïdes (M,e,k) où M $\in |\mathbb{W}|$.

Proposition 1.3 *Sous les hypothèses précédentes le foncteur d'oubli :*

$$U : \mathbb{W}\text{-}Mon(\mathbb{V}) \to \mathbb{V}$$

admet un adjoint à gauche.

Preuve : Soit X un objet de $\mathbb{V}$. Comme dans la proposition précédente, on commence par construire un monoïde gradué noté $\mathfrak{X}$. Pour cela on construit par récurrence la suite des quadruplets :
(X_n, Q_n, q_n, j_n) où $X_n, Q_n \in |\mathbb{V}|$, $q_n : X \otimes X_n \to Q_n$, $j_n : X_n \to Q_n$ en posant :
$X_0 = $ I, $Q_0 = $ X, $q_0 = u_d : X \otimes I \overset{\rightarrow}{\sim} X, j_0 = \mathfrak{i} : I \to X = Q_0$ et àl'ordre n+1 :
$X_{n+1} = \overline{Q_n}$ et q_{n+1} et Q_{n+1} sont donnés par le co-égalisateur :

$$X \otimes X_n \underset{y_n^0}{\overset{y_n^1}{\rightrightarrows}} X \otimes X_{n+1} \overset{q_{n+1}}{\twoheadrightarrow} Q_{n+1}$$

ou y_n^0 et y_n^1 sont les flèches composées suivantes (où $W_n = W_{Q_n}$) :

$$y_n^0 = (X \otimes X_n \xrightarrow{Id\otimes j_n} X \otimes Q_n \xrightarrow{Id\otimes W_n} X \otimes X_{n+1})$$
$$y_n^1 = (X \otimes X_n \xrightarrow{q_n} Q_n \xrightarrow{W_n} X_{n+1} \overset{u_g^{-1}}{\underset{\sim}{\rightarrow}} I \otimes X_{n+1} \xrightarrow{\mathfrak{i}\otimes Id} X \otimes X_{n+1})$$

$j_{n+1} : X_{n+1} \to Q_{n+1}$ est la flèche composée suivante :

$$X_{n+1} \overset{u_g^{-1}}{\underset{\sim}{\rightarrow}} I \otimes X_{n+1} \xrightarrow{\mathfrak{i}\otimes Id} X \otimes X_{n+1} \xrightarrow{q_{n+1}} Q_{n+1}$$

Pour achever la construction du monoïde gradué $\mathfrak{X}$ il reste a construire les flèches : $\iota_n : X_n \to X_{n+1}$ et $k_{n,m} : X_n \otimes X_m \to X_{n+m}$.
ι_n est simplement le composé $X_n \xrightarrow{j_n} Q_n \xrightarrow{W_n} \overline{Q_n} = X_{n+1}$.
Quant à$k_{n,m}$, on la construit simultanément par récurrence avec une autre flèche $k'_{n,m} : Q_n \otimes X_m \to Q_{n+m}$ de telle sorte qu'elles vérifient les identités ou les commutations suivantes, pour $n, m \in \mathbb{N}$:

1. $k_{0,m} = u_g$
2.

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes X_n) \otimes X_m \arrow[r, "\sim", "\mathrm{ass}"'] \arrow[d, "q_n \otimes Id"] & X \otimes (X_n \otimes X_m) \arrow[r, "Id \otimes k_{n,m}"] & X \otimes X_{n+m} \arrow[d, "q_{n+m}"] \\
Q_n \otimes X_m \arrow[rr, "k'_{n,m}"] & & Q_{n+m}
\end{tikzcd}$$

3.

$$\begin{tikzcd}
X_n \otimes X_m \arrow[r, "k_{n,m}"] \arrow[d, "\iota_n \otimes Id"] & X_{n+m} \arrow[d, "\iota_{n+m}"] \\
X_{n+1} \otimes X_m \arrow[r, "k_{n+1,m}"] & X_{n+m+1}
\end{tikzcd}$$

4.

$$\begin{tikzcd}
Q_n \otimes X_m \arrow[r, "k'_{n,m}"] \arrow[d, "W_n \otimes Id"] & Q_{n+m} \arrow[d, "W_{n+m}"] \\
X_{n+1} \otimes X_m \arrow[r, "k_{n+1,m}"] & X_{n+m+1}
\end{tikzcd}$$

Après la construction du monoïde gradué $\mathfrak{X}$, on pose MoX = L($\mathfrak{X}$). La fin de la preuve se fait alors sur le modèle de la proposition précédente.

Proposition 1.4 (Corollaire) *Étant donné :*

– *une catégorie monoïdale* $\mathbf{V}$ *vérifiant les hypothèses (1a) et (1b) de la proposition précédente (la propriété (c) n'est pas supposée ici) et,*

– *une sous-catégorie pleine* $\mathbb{W}$ *de* $\mathbb{V}$ *vérifiant les propriétés (2a), (2b) et (2c), Alors le foncteur d'oubli* $V : \mathbb{W}\text{-}Mon(\mathbb{V}) \to \mathbb{P}t\ \mathbb{V}$, $(M,e,k) \mapsto (M,e)$, *admet un adjoint à gauche.*

Preuve : Moyennant le 1.2.1, il suffit de vérifier que le couple ($\mathrm{Pt}\mathbb{V}$, $\mathbb{W}'$) vérifie les hypothèses de la proposition 1.3 (ou $\mathbb{W}'$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pt}\mathbb{V}$ ayant pour objets les couples $(X, I \xrightarrow{p} X)$ où $X \in |\mathbb{W}|$).

Proposition 1.5 *[Sous-corollaire] Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{B}$ *des catégories,* $U : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ *un foncteur et* $\mathbb{M}$ *une monade sur* $\mathbb{E}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1. *Pour la catégorie* $\mathbb{E}$ *:*
   (a) *elle a des limites à gauche finies,*
   (b) *elle a des co-égalisateurs stables par changement de bases,*
   (c) *elle a des* $\overrightarrow{\mathbb{N}}$*-limites à droite stables par changement de base*
2. *pour le foncteur* U *:*
   (a) *c'est une co-fibration qui vérifie en plus les deux propriétés suivantes :*
      i. *Si* g *et* $g.f$ *sont co-cartésiens* f *l'est aussi*
      ii. *Les morphismes co-cartésiens sont stables par changement de base.*
   (b) *il commute aux* $\overrightarrow{\mathbb{N}}$*-limites à droite,*
3. *Pour la monade* $\mathbb{M}$ *:*
   (a) *elle est cartésienne*
   (b) *son endofoncteur commute aux* $\overrightarrow{\mathbb{N}}$*-limites à droite.*

Alors le foncteur d'oubli $U\text{-}Op(\mathbb{E},\mathbb{M}) \to Colp(\mathbb{E},\mathbb{M})$ *admet un adjoint à gauche (où* $Colp(\mathbb{E},\mathbb{M}) = PtColl(\mathbb{E},\mathbb{M})$ *et* $U\text{-}Op(\mathbb{E},\mathbb{M})$ *est la sous-catégorie pleine de* $Op(\mathbb{E},\mathbb{M})$ *qui a pour objets les U-opérades sur* $\mathbb{M}$*).*

Preuve : On applique le corollaire précédent à $\mathbb{V} = \mathrm{Coll}(\mathbb{E},\mathbb{M})$ et $\mathbb{W} = \mathrm{U\text{-}Coll}(\mathbb{E},\mathbb{M})$ (c'est la sous-catégorie pleine de $\mathbb{V}$ ayant pour objets les U-collections). Dans ce cas

$$\mathbb{W}\text{-Mon}(\mathbb{V}) = \text{U-Op}(\mathbb{E},\mathbb{M})$$

• Restons sous la conclusion de la proposition précédente, mais dans le cas particulier où $\mathbb{B} = \mathbb{1}$. On suppose, en outre, que $\mathbb{E}$ est localement cartésienne fermée. A toute collection pointée $\mathbb{C}$ comme ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\eta_1"'] & & C \arrow[dl, "\pi"] \\
& M1 &
\end{tikzcd}
$$

c'est-à-dire à tout objet de PtColl($\mathbb{E}$, $\mathbb{M}$) correspond un objet de Pt(Enc($\mathbb{E}$)/$\mathbb{M}$) noté :

$$
\begin{tikzcd}
Id_{\mathbb{E}} \arrow[rr, "\tilde{p}"] \arrow[dr, "\eta"'] & & \tilde{C} \arrow[dl, "\tilde{\pi}"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

alors pour chaque X $\in$ $|\mathbb{E}|$, il y une bijection canonique entre les rétractions de $\tilde{p}_X : X \to \tilde{C}\ (X)$ et les structures d'algèbre sur X pour la monade $\tilde{\Omega}_0(\mathbb{C})$ induite par l'opérade libre $\Omega_0(\mathbb{C})$ engendrée par la collection pointée $\mathbb{C}$ (on utilise la correspondance entre les structures d'algèbre sur X pour $\tilde{\Omega}_0(\mathbb{C})$ et les morphismes d'opérade $\Omega_0(\mathbb{C}) \to E(X)$).

Exemple : Plaçons nous dans $\mathbb{E} = \mathbb{G}r$, $\mathbb{M} = \mathbb{C}h$. Dans ce cas 1 et Ch(1) peuvent être représentés par :

$$1_0 = \{0\}, 1_1 = \{1\}, \mathrm{Ch}(1)_0 = \{0\}, \mathrm{Ch}(1)_1 = \mathbb{N}$$

Donnons nous maintenant la collection pointée $\mathbb{C} = (C, \pi, p)$ où : $C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{e, i, k\}$, $p_0 = Id_0 = \pi_0$, $p_1(1) = i$ et π_1 envoie respectivement e, i, k sur $0, 1, 2$. Alors les structures d'algèbre sur un graphe G pour la monade $\tilde{\Omega}_0(\mathbb{C})$ correspondent bijectivement avec les structures de 1-magma sur G, c'est-à-dire les couples (j,k) où j : $G_0 \to G_1$ et k : $G_1 \times_{G_0} G_1 \to G_1$ sont tels que :

$$\partial_0.j = \partial_1.j = Id_{G_0}$$
$$\text{et}$$
$$\partial_0(k(x,y)) = \partial_0(y), \partial_1(k(x,y)) = \partial_1(x)$$

pour tout $(x,y) \in G_1 \times_{G_0} G_1$.

Remarque : ce résultat a été signalé par M.Batanin dans [3] sans toutefois être étayé par une démonstration.

1.3 U-catégorie libre sur un U-graphe

• Normalement la proposition 1.2 du chapitre précédent ajouté au caractère fibrant du foncteur d'oubli U-Cat($\mathbb{E}$) $\to$ U-Gr($\mathbb{E}$) suffit à montrer que ce foncteur admet un adjoint à gauche. Cependant nous voulons plus. Il nous faut en effet montrer que la monade "U-catégorie libre sur un U-graphe" est cartésienne. Mais alors les outils utilisés jusque là ne suffisent plus. C'est pourquoi nous allons nous placer dans un contexte nouveau un peu plus général. Le problème de la cartésianité de la monade précédente sera abordé au paragraphe suivant.

1.3.1 Les catégories surmonoïdales au dessus d'une catégorie donnée

• Soit $\mathbb{B}$ une catégorie. Appelons catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{B}$ la donnée d'un objet monoïdal dans la 2-catégorie $\mathbb{C}$at/$\mathbb{B}$ c'est-à-dire la donnée (principale) :

– d'une catégorie $\mathbb{E}$ et d'un foncteur U : $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$

– d'un foncteur I : $\mathbb{B} \to \mathbb{E}$, section de U (*i.e.* U.I = $Id_{\mathbb{B}}$)

– d'un troisième foncteur $\bigstar : \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ au-dessus de $\mathbb{B}$

puis de la donnée (auxiliaire) de transformations naturelles inversibles au-dessus de $\mathbb{B}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E} \arrow[dr, "\bigstar"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow u_g"] & \\
\mathbb{E} \arrow[ur, "{(\mathrm{I.U}, \mathrm{Id})}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}"'] & {} & \mathbb{E}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E} \arrow[dr, "\bigstar"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow u_d"] & \\
\mathbb{E} \arrow[ur, "{(\mathrm{Id}, \mathrm{I.U})}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}"'] & {} & \mathbb{E}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E} \arrow[dl, "\bigstar \times_{\mathbb{B}} Id"'] \arrow[dr, "Id \times_{\mathbb{B}} \bigstar"] & \\
\mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E} \arrow[dr, "\bigstar"'] \arrow[rr, phantom, "\xRightarrow{\text{ass}}"] & & \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E} \arrow[dl, "\bigstar"] \\
 & \mathbb{E} &
\end{tikzcd}
$$

Ces données satisfaisant les "mêmes" conditions de cohérence que les catégories monoïdales.

<u>Exemple</u> : - La catégorie $\mathbb{G}$r des graphes avec son foncteur d'oubli $\mathbb{G}\mathrm{r} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$, $G \mapsto G_0$ a une structure canonique de catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{E}$ns où "l'unité" est I : $\mathbb{E}\mathrm{ns} \to \mathbb{G}\mathrm{r}$ avec $\mathrm{I(E)} = (\mathrm{E} \underset{Id}{\overset{Id}{\rightrightarrows}} \mathrm{E})$ et "le produit tensoriel" $\bigstar$: $\mathbb{G}r \times_{\mathbb{E}ns} \mathbb{G}\mathrm{r} \to \mathbb{G}\mathrm{r}$ est la composition des spans :

$$\begin{tikzcd}
& & (G'\bigstar G)_1 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\vee"] & & \\
& G'_1 \arrow[dl, "\partial'_1"'] \arrow[dr, "\partial'_0"] & {} & G_1 \arrow[dl, "\partial_1"'] \arrow[dr, "\partial_0"] & \\
G'_0 & & G'_0 = G_0 & & G_0
\end{tikzcd}$$

- Nous verrons plus loin une généralisation de cet exemple (voir 1.3.3).

• $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}$' étant deux catégories surmonoïdales au-dessus de $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}$', un morphisme strict $\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est la donnée d'un couple de foncteurs ($\mathbb{E} \xrightarrow{F} \mathbb{E}'$, $\mathbb{B} \xrightarrow{G} \mathbb{B}'$) tel que : $U'.F = G.U$, $F.I = I'.G$, $F.\bigstar = \bigstar'.F\times_G F$, $F.u_g = u_g'.F$, $F.ass = ass'.(F\times_G F\times_G F)$

• Remarquons que si $\mathbb{E}$ est une catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{B}$ alors, pour tout $B \in |\mathbb{B}|$ la fibre au-dessus de B , $\mathbb{E}_B$, a canoniquement une structure de catégorie monoïdale.

- Si $\mathbb{E}$ est une catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{B}$ et $\mathbb{I}$ est une catégorie alors $\mathbb{E}^{\mathbf{I}}$ est une catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{B}^{\mathbf{I}}$.

• a) Un <u>surmonoïde</u> de $\mathbb{E}$ est la donnée d'un objet M de $\mathbb{E}$ et de deux flèches e : $\mathrm{IU(M)} \to \mathrm{M}$ et k : $\mathrm{M}\bigstar\mathrm{M} \to \mathrm{M}$ tels que (M,e,k) soit un monoïde dans la fibre $\mathbb{E}_{UM}$.

b) $\mathbb{M}$ = (M,e,k) et $\mathbb{M}$' = (M',e',k') étant deux surmonoïdes un <u>morphisme</u> $\mathbb{M} \to \mathbb{M}$ ' est la donnée d'une flèche h : $\mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ telle que les deux carrés suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} IU(M) \arrow[r, "IU(h)"] \arrow[d, "e"] & IU(M') \arrow[d, "e'"] \\ M \arrow[r, "h"] & M' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\bigstar M \arrow[r, "h\bigstar h"] \arrow[d, "k"] & M'\bigstar M' \arrow[d, "k'"] \\ M \arrow[r, "h"] & M' \end{tikzcd}$$

Les surmonoïdes de $\mathbb{E}$ et leurs morphismes forment une catégorie notée SMon($\mathbb{E}$).

Exemple : Les surmonoïdes de la catégorie surmonoïdale $\mathbb{G}$r au-dessus de $\mathbb{E}$ns sont les catégories et les morphismes entre surmonoïdes sont les foncteurs.
• Comme pour les catégories monoïdales si $\mathbb{E}$ est une catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{B}$ et si M est un surmonoïde de $\mathbb{E}$ alors $\mathbb{E}/M$ a canoniquement une structure de catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{B}/UM$, et on a un isomorphisme canonique. :

$$\mathrm{SMon}(\mathbb{E}/M) \simeq \mathrm{SMon}(\mathbb{E})/M$$

Les autres propriétés de $\mathbb{V}/M$ montrées au paragraphe précédent se généralisent ici de façon évidente.

Proposition 1.6 *Le foncteur d'oubli U : SMon($\mathbb{E}$) $\rightarrow$ $\mathbb{E}$ crée dans SMon($\mathbb{E}$) les co-égalisateurs de paires parallèles qui sont dans $\mathbb{E}$ des co-égalisateurs scindés.*

(Se montre sans difficulté)

• Un surmonoïde gradué de $\mathbb{E}$ est par définition un monoïde gradué (voir le 1.2.3) dans une fibre de $\mathbb{E}$. $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ étant deux surmonoïdes gradués dans $\mathbb{E}$, un morphisme f : $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ est la donnée d'une suite de flèches ($f_n : X_n \rightarrow X_n'$) vérifiant les conditions (2) et (3) d'un morphisme de monoïde gradué ainsi que (1') $f_0 = IU(f_0)$. On note SMog($\mathbb{E}$) la catégorie des surmonoïdes gradués dans $\mathbb{E}$ et U : SMon($\mathbb{E}$) $\rightarrow$ SMog($\mathbb{E}$) le foncteur d'oubli évident.

• Pour montrer que U admet un adjoint à gauche et même pour l'existence d'un surmonoïde libre nous avons besoin de limites dans les catégories surmonoïdales au-dessus d'une catégorie donnée. C'est pourquoi nous allons traiter plus généralement des limites dans les catégories au-dessus d'une catégorie donnée.

1.3.2 Limites dans les catégories au-dessus d'une catégorie donnée

• $\mathbb{B}$ étant une catégorie fixée, $\mathbb{C}$at/$\mathbb{B}$ est une 2-catégorie, et donc une catégorie enrichie sur $\mathbb{C}$at. Cette catégorie enrichie est à cotenseurs. Plus précisément, étant données une catégorie $\mathbb{E}$ au-dessus de $\mathbb{B}$ et une catégorie $\mathbb{C}$, le cotenseur de $\mathbb{E}$ par $\mathbb{C}$, noté $\mathbb{E}^{(\mathbb{C})}$, est la sous-catégorie au-dessus de $\mathbb{B}$ de $\mathbb{E}^{\mathbb{C}} \times \mathbb{B}$, ayant pour objets les couples (F,B) tels que le composé $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}$ soit le foncteur constant sur B, et pour flèches les couples (t,b) : (F,B) $\rightarrow$ (F',B')) où U.t : U.F $\rightarrow$ U.F' soit la transformation naturelle constante sur b. La catégorie $\mathbb{E}^{(\mathbb{C})}$ au-dessus de $\mathbb{B}$ vérifie la propriété universelle suivante :

$$(\mathbb{C}at/\mathbb{B})(\mathbb{E}', \mathbb{E}^{(\mathbb{C})}) \simeq (\mathbb{C}at/\mathbb{B})(\mathbb{E}', \mathbb{E})^{\mathbb{C}}$$

• On dit qu'une catégorie $\mathbb{E}$ au-dessus de $\mathbb{B}$ a des ($\mathbb{C}$)-limites à gauche (resp ($\mathbb{C}$)-limites à droite) si le foncteur "diagonal" $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^{(\mathbb{C})}$ au-dessus de $\mathbb{B}$, a un adjoint à droite (resp à gauche) dans $\mathbb{C}$at/$\mathbb{B}$.
- Si $\mathbb{E}$ a des ($\mathbb{C}$)-limites à gauche (resp à droite) ses fibres $\mathbb{E}_B$ ont des $\mathbb{C}$-limites à gauche (resp à droite), pour tout B $\in |\mathbb{B}|$
- Lorsque $\mathbb{C}$ est connexe et non-vide alors $\mathbb{E}$ a des ($\mathbb{C}$)-limites à gauche (resp à droite) ssi pour tout B $\in |\mathbb{B}|$:

1. $\mathbb{E}_B$ a des $\mathbb{C}$-limites à gauche (resp à droite)
2. Le foncteur d'inclusion $\mathbb{E}_B \hookrightarrow \mathbb{E}$ commute avec ces limites.

- Si I est un ensemble non-vide, $\mathbb{E}$ a des (I)-produits (resp des (I)-sommes) ssi pour tout B $\in |\mathbb{B}|$ et toute famille d'objets $(X_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{E}_B$, il existe un objet P (resp S) et une famille $(\pi_i : \mathrm{P} \rightarrow X_i)_{i \in I}$ (resp $(\sigma_i : X_i \rightarrow S)_{i \in I}$) de flèches dans $\mathbb{E}_B$ telle que, pour tout objet X de $\mathbb{E}$ et toute famille de flèches $(x_i : \mathrm{X} \rightarrow X_i)_{i \in I}$ (resp $(x_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$) dans $\mathbb{E}$ telle que $Ux_i = Ux_j$ pour tout i,j $\in$ I, alors il existe une unique flèche $x : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{P}$ (resp $x : \mathrm{S} \rightarrow \mathrm{X}$) dans $\mathbb{E}$ telle que $\forall i \in I, \pi_i.x = x_i$ (resp $x.\sigma_i = x_i$).
- $\mathbb{E}$ a au-dessus de $\mathbb{B}$ un objet final (resp initial) ssi pour tout B $\in |\mathbb{B}|$, $\mathbb{E}_B$ a un objet 1_B (resp 0_B) tel que : pour tout X $\in |\mathbb{E}|$ et toute flèche b : UX $\rightarrow$ B (resp b : B $\rightarrow$ UX) dans $\mathbb{B}$, il existe une unique flèche $x : \mathrm{X} \rightarrow 1_B$ (resp $x : 0_B \rightarrow \mathrm{X}$) dans $\mathbb{E}$ telle que U(x) = b.

• $\mathbb{I}$ étant une catégorie quelconque, on suppose que :
– $\mathbb{E}$, en tant que catégorie, est à $\mathbb{I}$-limites à droite (resp à gauche)
– U : $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ commute aux $\mathbb{I}$-limites à droite (resp à gauche).

Alors on a les deux résultats suivants :

1. Si $\mathbb{I}$ est connexe et non-vide et U remonte les isomorphismes (*i.e.* pour tout X $\in |\mathbb{E}|$ et tout isomorphisme b : UX $\rightarrow$ B', il existe un isomorphisme x : X

$\to$ X' tel que Ux = b), on montre que $\mathbb{E}$, en tant que catégorie au-dessus de $\mathbb{B}$, est à ($\mathbb{I}$)-limites à droite (resp à gauche).

2. Si $\mathbb{I}$, cette fois, est quelconque mais U est cofibrant (resp fibrant) alors on obtient la même conclusion, c'est-à-dire que $\mathbb{E}$, en tant que catégorie au-dessus de $\mathbb{B}$, est à ($\mathbb{I}$)-limites à droite (resp à gauche).

• Si $\mathbb{E}$ est à ($\mathbb{I}$)-limites à droite (resp à gauche), alors pour toute catégorie $\mathbb{C}$, la catégorie $\mathbb{E}^{\mathbb{C}}$, au-dessus de $\mathbb{B}^{\mathbb{C}}$, est aussi à ($\mathbb{I}$)-limites à droite (resp à gauche) et pour tout C $\in$ $|\mathbb{C}|$, les foncteurs évaluation $\mathbb{E}^{\mathbb{C}} \overset{ev_C}{\to} \mathbb{E}$ commutent avec ces ($\mathbb{I}$)-limites.

- De même si $\mathbb{E}$ est à ($\mathbb{I}$)-limites à droite alors pour tout objet S de $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}/S$, au-dessus de $\mathbb{B}/US$, est aussi à ($\mathbb{I}$)-limites et les foncteurs $\mathbb{E}/S \to \mathbb{E}$, (X,$x$) $\mapsto$ X (au-dessus de $\mathbb{B}/US \to \mathbb{B}$) ainsi que, pour toute flèche f : S $\to$ S', les foncteurs $\sum_f : \mathbb{E}/S \to \mathbb{E}/S'$, (X,$x$) $\mapsto$ (X,f.x) (au-dessus de $\mathbb{B}/US \to \mathbb{B}/US'$) commutent avec ces ($\mathbb{I}$)-limites.

- Lorsque en plus $\mathbb{E}$ est supposée être surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{B}$, alors si $\mathbb{E}$ est à ($\mathbb{I}$)-limites à droite et si pour tout $X \in |\mathbb{E}|$, (-)★X : $\mathbb{E}_{UX} \to \mathbb{E}_{UX}$ (resp X ★ (-)) commute aux $\mathbb{I}$-limites à droite, la catégorie surmonoïdale $\mathbb{E}/M$, au-dessus de $\mathbb{B}/UM$, a la même propriété (lorsque M est un surmonoïde de $\mathbb{E}$)

1.3.3 Le surmonoïde libre

• Soit $\mathbb{E}$ une catégorie surmonoïdale au-dessus d'une catégorie donnée $\mathbb{B}$.

Proposition 1.7 *Lorsque $\mathbb{E}$ a des $(\overrightarrow{\mathbb{N}})$-limites à droite et que, pour tout $X \in |\mathbb{E}|$ les foncteurs (-)★X et X★(-) : $\mathbb{E}_{UX} \to \mathbb{E}_{UX}$ commutent avec ces $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites, alors le foncteur d'oubli U : SMon($\mathbb{E}$) $\to$ SMog($\mathbb{E}$) admet un adjoint à gauche (encore noté L).*

(La preuve de ce résultat est calquée sur celle de la proposition 1.1, où l'on remarque que la limite à droite définissant L($\mathfrak{X}$) est connexe).

• Une catégorie surmonoïdale $\mathbb{E}$ au-dessus de $\mathbb{B}$ est dite numérale, si elle vérifie les conditions suivantes :

1. Elle a des $(\overrightarrow{\mathbb{N}})$-limites à droite, et des ($\{0, 1\}$)-sommes.
2. Pour tout X $\in$ $|\mathbb{E}|$, les foncteurs (-)★X et X★(-) : $\mathbb{E}_{UX} \to \mathbb{E}_{UX}$ commutent aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite et (-)★X commute, en plus, aux $\{0, 1\}$-sommes.

• Supposons $\mathbb{E}$ numérale, alors :

– Pour toute catégorie $\mathbb{C}$, la catégorie surmonoïdale $\mathbb{E}^{\mathbb{C}}$, au-dessus de $\mathbb{B}^{\mathbb{C}}$, est elle-même numérale et les foncteurs d'évaluation $ev_c : \mathbb{E}^{\mathbb{C}} \to \mathbb{E}$ commutent avec cette structure, pour tout $C \in |\mathbb{E}|$.
– De même pour tout surmonoïde M de $\mathbb{E}$, la catégorie surmonoïdale $\mathbb{E}/M$, au-dessus de $\mathbb{B}/UM$, est encore numérale et les foncteurs s : $\mathbb{E}/M \to \mathbb{E}$ et $\sum_h : \mathbb{E}/M \to \mathbb{E}/N$ commutent avec cette structure, pour tout morphisme de surmonoïde h : M $\to$ N.

Proposition 1.8 *Si $\mathbb{E}$ est numérale le foncteur d'oubli (au-dessus de $\mathbb{B}$) SMon($\mathbb{E}$) $\to$ $\mathbb{E}$ admet un adjoint à gauche (dans $\mathbb{C}at/\mathbb{B}$). Il est même monadique.*

Preuve : La construction de cet adjoint sur les objets résulte de la proposition 1.2, puisque les fibres de $\mathbb{E}$ vérifient les hypothèses de cette proposition. Le reste de la preuve se fait ensuite de façon analogique.

Dans la suite on notera $\mathbb{S}$m la monade sur $\mathbb{E}$ induite par le foncteur monadique SMon($\mathbb{E}$) $\to$ $\mathbb{E}$.

• Nous somme maintenant en mesure d'obtenir l'existence de l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli U-Cat($\mathbb{E}$) $\to$ U-Gr($\mathbb{E}$) nécessaire à la troisième étape de la procédure générale.

- Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{B}$ des catégories et U : $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$ un foncteur. Si $\mathbb{E}$ (en tant que catégorie au-dessus de $\mathbb{B}$) est à produit fibrés, U-Gr($\mathbb{E}$) est une catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{E}$.

Proposition 1.9 *Si $\mathbb{E}$, en tant que catégorie au-dessus de $\mathbb{B}$, a les propriétés suivantes :*

1. *Elle a des produits fibrés*
2. *Elle a des ($\{0, 1\}$)-sommes et des ($\overrightarrow{\mathbb{N}}$)-limites à droite,*
3. *Pour tout $B \in |\mathbb{B}|$ les $\{0, 1\}$-sommes et les $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite sont stables par changement de base dans la fibre $\mathbb{E}_B$,*

Alors le foncteur d'oubli U-Cat($\mathbb{E}$) $\to$ U-Gr($\mathbb{E}$) admet un adjoint à gauche, au-dessus de $\mathbb{E}$, et ce foncteur est monadique.

Preuve : Il suffit de vérifier que U-Gr($\mathbb{E}$) au-dessus de $\mathbb{E}$ est numérale.

• Dans la suite, on notera $\mathbb{C}$h la monade induite sur U-Gr($\mathbb{E}$) par le foncteur monadique U-Cat($\mathbb{E}$) $\to$ U-Gr($\mathbb{E}$). Remarquons que son endofoncteur $\mathbb{C}$h commute aux flèches U_1-verticales.

1.4 Cartésianité des monades de la construction

• La monade $\mathbb{M}_{(1)}$ produite à la fin de la dernière étape de la catégorification doit satisfaire les conditions d'itération et en particulier elle doit être cartésienne. Or cette monade provient d'un composé de deux adjonctions aussi est-ce naturel de la voir comme le composé de deux monades sur U-Gr($\mathbb{E}$) via une loi distributive entre celles-ci. La cartésianité de $\mathbb{M}_{(1)}$ résultera de celles de ces deux monades et de la cartésianité de la loi distributive. La première des deux monades est $\mathbb{C}$h. Il nous faudra donc montrer sa cartésianité (voir le 1.4.1). La seconde provient d'une opérade ; sa cartésianité est donc automatique. Quand à la loi distributive, nous devons déjà la construire - on le fera en deux temps - puis on montrera sa cartésianité (voir 1.4.2 et 1.4.3)

1.4.1 Cartésianité de la monade $\mathbb{C}$h

• On va d'abord étudier la cartésianité de $\mathbb{S}$m. $\mathbb{B}$ étant une catégorie donnée, considérons une catégorie surmonoïdale numérale $\mathbb{E}$ au-dessus de $\mathbb{B}$. De plus, considérons une classe C de flèches de $\mathbb{E}$ (elle est sensée représenter la classe des carrés cartésiens dans $\mathbb{E}^2$). C doit satisfaire les conditions suivantes :

1. Les isomorphismes de $\mathbb{E}$ sont dans C.
2. C est stable par composition.
3. Si f.g $\in C$ et f $\in C$ alors g $\in C$.
4. Si f,g $\in C$ et Uf = Ug alors f+g $\in C$ et f★g $\in C$.
5. Si X,Y $\in |\mathbb{E}|$ et UX = UY, alors les co-projections σ_1 : X→X+Y et σ_2 : Y→X+Y sont dans C.
6. Pour tout X $\in |\mathbb{E}|$, $)Id_X, Id_X(\in C$..
7. Pour tout (F,B), (F',B') $\in \mathbb{E}^{(\vec{\mathbb{N}})}$ et (t,b) : (F,B) → (F',B'), si pour tout n $\in \mathbb{N}$, $t_n \in C$ alors $\varinjlim$(t,b) : $\varinjlim$(F,B) → $\varinjlim$(F',B') $\in C$.
8. si x : X → Y $\in C$ alors IU(x) : IU(X) → IU(Y) $\in C$.

On montre alors sans difficulté la proposition suivante, en reprenant la construction du surmonoïde libre.

Proposition 1.10 *Sous ces hypothèses la monade* $\mathbb{S}m = (Sm, \eta, \mu)$ *a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout X $\in |\mathbb{E}|$, la flèche unité du surmonoïde e : IU(X) → Sm(X) et la multiplication k : Sm(X)★Sm(X) → Sm(X) sont dans C,*

2. *Pour tout* $X \in |\mathbb{E}|$, η_X, $\mu_X \in C$,
3. *Pour tout* $x : X \to Y \in C$ *alors* $Sm(x) : Sm(X) \to Sm(Y) \in C$

- Sous les mêmes hypothèses, on a le résultat suivant qui au 1.4.2 va nous permettre de montrer la cartésianité de la loi distributive entre $\tilde{\mathbb{M}}$ et $\mathbb{C}$h

Proposition 1.11 *Soit* N *un surmonoïde de* $\mathbb{E}$ *tel que son unité et sa multiplication soit dans* C *et soit* $X \in |\mathbb{E}|$ *et* $x : X \to N$ *une flèche de* C*, alors la flèche universelle* $Sm(X) \to N$ *déduite de* x*, est elle-même dans* C.

- de la proposition 1.10, on déduit le corollaire suivant :

Proposition 1.12 *Soit* $\mathbb{E}$*, une catégorie surmonoïdale numérale au-dessus de* $\mathbb{B}$*, vérifiant en plus les propriétés suivantes :*

1. $\mathbb{E}$*, en tant que catégorie, a des produits fibrés préservés par* U*,*
2. *les foncteurs* $+$ *et* $\bigstar : \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *commutent au produit fibrés ainsi que les foncteurs* $\mathbb{E}^{(\vec{\mathbb{N}})} \overset{\lim}{\rightrightarrows} \mathbb{E}$ *et* $I : \mathbb{B} \to \mathbb{E}$*,*
3. *Pour toutes les flèches* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *de* $\mathbb{E}$ *telles que* $Uf = Ug$*, alors les carrés suivants sont des produits fibrés :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "f"] & X+Y \arrow[d, "f+g"] \\ X' \arrow[r, "\sigma'_1"] & X'+Y' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d, "g"] & X+Y \arrow[d, "f+g"] \\ Y' \arrow[r, "\sigma'_2"] & X'+Y' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X+X \arrow[r, ")Id,Id("] \arrow[d, "f+f"] & X \arrow[d, "f"] \\ X'+X' \arrow[r, ")Id,Id("] & X' \end{tikzcd}$$

4. *U remonte les isomorphismes (voir la définition de ce terme au 1.3.2)*

Alors la monade **Sm** *sur* $\mathbb{E}$ *est cartésienne.*

<u>**Preuve**</u> : La classe des carrés cartésiens dans $\mathbb{E}^2$, considérée comme catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{B}^2$ (elle est encore numérale) satisfait les conditions de la proposition 1.10.
Le sous-corollaire suivant peut finalement s'appliquer directement à notre construction.

Proposition 1.13 *Soit* $\mathbb{E}$ *une catégorie au-dessus de* $\mathbb{B}$ *vérifiant les propriétés (2) et (3) de la proposition 1.9 et les propriétés (1), (3) et (4) de la proposition 1.12 précédente ainsi que la propriété suivante :*

$+ : \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *et* $\underrightarrow{\lim} : \mathbb{E}^{(\vec{\mathbb{N}})} \to \mathbb{E}$ *commutent aux produits fibrés, alors la monade* $\mathbb{C}h$ *sur* $U\text{-}Gr(\mathbb{E})$ *est cartésienne.*

Preuve : Il faut vérifier que la catégorie surmonoïdale U-Gr($\mathbb{E}$) au-dessus de $\mathbb{E}$, qui est numérale par la proposition 1.9, vérifie les hypothèses de la proposition 1.12.

1.4.2 Loi distributive cartésienne

• Nous avons dit que la loi distributive permettant la construction de la monade $\mathbb{M}_{(1)}$ se construisait en deux temps. Le premier temps de cette construction est abordé dans ce sous-paragraphe. On y obtient en effet une première loi distributive entre la monade $\tilde{\mathbb{M}}$ (prolongement à U-Gr($\mathbb{E}$) de la monade $\mathbb{M}$) et la monade $\mathbb{C}h$. Comme au chapitre 1.3, il est plus commode de faire cette construction dans le contexte des catégories surmonoïdales.
• Mais avant cela, précisons l'intérêt des lois distributives cartésiennes.

Proposition 1.14 *Soient* $\mathbb{M}$ *et* $\mathbb{M}'$ *deux monades cartésiennes sur une catégorie* $\mathbb{E}$ *à produits fibrés et* $\delta : \mathbb{M} \dashrightarrow \mathbb{M}'$ *une loi distributive cartésienne (i.e. la transformation naturelle* $\delta : M'.M \to M.M'$ *est cartésienne) alors le foncteur composé :*

$$(\mathbb{E}^{\mathbb{M}'})^{\overline{\mathbb{M}}} \overset{oubli}{\longrightarrow} \mathbb{E}^{\mathbb{M}'} \overset{oubli}{\longrightarrow} \mathbb{E}$$

qui est monadique, induit sur $\mathbb{E}$ *une monade cartésienne (où* $\overline{\mathbb{M}}$ *est la monade cartésienne sur* $\mathbb{E}^{\mathbb{M}'}$ *induite par* $\mathbb{M}$ *et la loi distributive).*

• Plaçons nous dans le cadre suivant : soient $\mathbb{B}$ une catégorie munie d'une monade $\underline{\mathbb{M}} = (\underline{M}, \underline{\eta}, \underline{\mu})$ et $\mathbb{E}$ une catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{B}$ où $\mathbb{E}$, en tant que catégorie, est elle-aussi munie d'une monade $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ (En fait ici $\mathbb{B}$ est sensée représenter la catégorie $\mathbb{E}$ de la donnée de base et $\mathbb{E}$ représente la catégorie surmonoïdale U-Gr($\mathbb{E}$) au-dessus de $\mathbb{E}$). Ces données satisfont déjà les identités suivantes :
$U.M = \underline{M}.U$, $U.\eta = \underline{\eta}.U$, $U.\mu = \underline{\mu}.U$, $M.I = I.\underline{M}$, $I.\eta = \underline{\eta}.I$, $I.\underline{\mu} = \mu.I$.
On se donne en plus un isomorphisme $\gamma : M.\bigstar \overset{\sim}{\to} \bigstar.(M \times_{\underline{M}} M)$, au-dessus de $\mathbb{B}$, qui rend commutatif les diagrammes ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
M(IUX \bigstar X) \arrow[r, "\gamma_{IUX,X}"] \arrow[ddr, "Mu_g"'] & MIUX \bigstar MX \arrow[d, equal] \\
& IUMX \bigstar MX \arrow[d, "u_g"] \\
& MX
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M(X \bigstar IUX) \arrow[r, "\gamma_{X,IUX}"] \arrow[ddr, "Mu_d"'] & MX \bigstar MIUX \arrow[d, equal] \\
& MX \bigstar IUMX \arrow[d, "u_d"] \\
& MX
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M((X\bigstar Y)\bigstar Z) \arrow[r, "M(ass)"] \arrow[d, "\gamma_{X\bigstar Y,Z}"] & M(X\bigstar (Y\bigstar Z)) \arrow[d, "\gamma_{X,Y\bigstar Z}"] \\
M(X\bigstar Y)\bigstar MZ \arrow[d, "\gamma_{X,Y}\bigstar Id"] & MX\bigstar M(Y\bigstar Z) \arrow[d, "Id\bigstar \gamma_{Y,Z}"] \\
(MX\bigstar MY)\bigstar MZ \arrow[r, "ass"] & MX\bigstar (MY\bigstar MZ)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X\bigstar Y \arrow[r, "\eta_{X\bigstar Y}"] \arrow[dr, "\eta_X\bigstar \eta_Y"] & M(X\bigstar Y) \arrow[d, "\gamma_{X,Y}"] \\
& MX\bigstar MY
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M^2(X\bigstar Y) \arrow[r, "\mu_{X\bigstar Y}"] \arrow[d, "M\gamma_{X,Y}"] & M(X\bigstar Y) \arrow[dd, "\gamma_{X,Y}"] \\
M(MX\bigstar MY) \arrow[d, "\gamma_{MX,MY}"] & \\
M^2X\bigstar M^2Y \arrow[r, "\mu_X\bigstar \mu_Y"] & MX\bigstar MY
\end{tikzcd}$$

Dans ce cadre on voit qu'on peut étendre la monade $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{E}$ en une monade $\widehat{\mathbb{M}} = (\widehat{M}, \widehat{\eta}, \widehat{\mu})$ sur SMon($\mathbb{E}$). $\widehat{\mathbb{M}}$ est défini sur un surmonoïde (C,e,k) par $\widehat{M}$(C,e,k) = (MC, Me, $\widehat{k}$) où $\widehat{k} = \mathrm{Mk}.\gamma_{C,C}^{-1}$

Lorsque, de plus, $\mathbb{E}$ au-dessus de $\mathbb{B}$ est numérale nous avons vu au 1.3 que le foncteur d'oubli SMon($\mathbb{E}$) $\longrightarrow$ $\mathbb{E}$ admet un adjoint à gauche qui induit une monade

Sm sur $\mathbb{E}$. On construit alors une loi distributive $\delta : \mathbb{M} - - \rightarrow \mathbf{S}m$ de la façon suivante (où pour différencier Sm de $\mathbb{M}$ on a noté $\mathbf{Sm} = (\mathrm{Sm}, \lambda, \epsilon)$). Si $X \in |\mathbb{E}|$, δ_X : SmMX $\rightarrow$ MSmX est l'unique morphisme de surmonoïde tel que $\delta_X.\lambda_{MX} = M\lambda_X$.

• Maintenant on se donne en plus une classe C de flèches de $\mathbb{E}$ comme au 1.4.1 vérifiant aussi les deux nouveaux axiomes suivants :

1. si $f : X \rightarrow Y \in C$ alors $Mf : MX \rightarrow MY \in C$.
2. pour tout $X \in |\mathbb{E}|, \eta_X, \mu_X \in C$

Alors on vérifie que pour tout $X \in |\mathbb{E}|$, $\delta_X \in C$ (on applique la proposition 1.11).

De là on en déduit la proposition suivante :

Proposition 1.15 *Si, en plus du cadre général de ce sous-paragraphe,*

1. $\mathbb{E}$ *vérifie les hypothèses de la proposition 1.12*
2. $\mathbb{M}$ *est cartésienne sur* $\mathbb{E}$

alors la loi distributive δ est cartésienne.

Proposition 1.16 *Soient* $\mathbb{E}$ *une catégorie au-dessus de* $\mathbb{B}$ *vérifiant les hypothèses de la proposition 1.13 et* $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ *une monade cartésienne sur la catégorie* $\mathbb{E}$ *commutant avec les flèches U-verticales, alors il existe une loi distributive cartésienne* $\delta : \tilde{\mathbb{M}} - - \rightarrow \mathbb{C}h$ *où* $\tilde{\mathbb{M}} = (\tilde{M}, \tilde{\eta}, \tilde{\mu})$ *est la monade cartésienne sur U-Gr(*$\mathbb{E}$*) définie par :*

$$\tilde{M}\,(G_1 \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} G_0) = (MG_1 \underset{M\partial_1}{\overset{M\partial_0}{\rightrightarrows}} MG_0), \tilde{\eta}_G = (\eta_{G_0}, \eta_{G_1}), \tilde{\mu}_G = (\mu_{G_0}, \mu_{G_1}),.$$

<u>**Preuve**</u> : Il suffit de vérifier que la catégorie U-Gr($\mathbb{E}$) au-dessus de $\mathbb{E}$ et les monades $\mathbb{M}$ et $\tilde{\mathbb{M}}$ satisfont les axiomes du cadre qu'on s'est imposé dans ce sous-paragraphe.

1.4.3 Transport d'une loi distributive cartésienne par une opérade

• Pourtant la loi distributive δ de la proposition 1.16 n'est pas celle qui produit la monade $\mathbb{M}_{(1)}$ (En fait elle produit une monade de catégorification stricte sur U-Gr($\mathbb{E}$)- voir le paragraphe 2.1). Il nous faut maintenant tenir compte de l'opérade Ω sur $\overline{\mathbb{M}}$ dans U-Cat($\mathbb{E}$). Nous allons donc nous intéresser au transport d'une loi distributive cartésienne par une opérade, et vérifier que ce transport conserve sa cartésianité.

- Plaçons nous dans le cadre suivant :
  - Soient $\mathbb{E}$ une catégorie à limites à gauche finies, $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$ deux monades cartésiennes sur $\mathbb{E}$ et $\delta : \mathbb{M} \dashrightarrow \mathbb{N}$ une loi distributive cartésienne. Notons $\overline{\mathbb{M}}$ la monade induite par $\mathbb{M}$ et δ sur $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ (Rappelons que l'endofoncteur $\overline{M}$ de $\overline{\mathbb{M}}$ est défini sur les objets par $\overline{M}(X,a) = (MX,\overline{a})$ où $\overline{a} = (NMX \xrightarrow{\delta_X} MNX \xrightarrow{Ma} MX)$).

  - On considére en plus une opérade Ω sur $\overline{\mathbb{M}}$

Dans ce nouveau cadre on voit que le foncteur d'oubli canonique $\mathbb{E}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{E}$ induit un morphisme strict de catégorie monoïdale $\mathrm{Coll}(\mathbb{E}^{\mathbb{N}}, \overline{\mathbb{M}}) \to \mathrm{Coll}(\mathbb{E}, \mathbb{M})$, il commute donc avec les monoïdes de ces catégories monoïdales c'est-à-dire les opérades. Notons $\underline{\Omega}$ l'opérade (sur $\mathbb{M}$) image de Ω (sur $\overline{\mathbb{M}}$) par ce morphisme strict.

Cette opérade produit une monade $\tilde{\Omega}$ sur $\mathbb{E}$ et un morphisme de monade π : $\tilde{\Omega} \to \mathbb{M}$ qui est cartésien (voir le 1.2). Nous allons maintenant construire une loi distributive $\tilde{\Omega} \dashrightarrow \mathbb{N}$.
Notons $(\Omega, c) \xrightarrow{\pi} \overline{M}1$ la collection sous-jacente à l'opérade Ω. On vérifie que, pour chaque $X \in |\mathbb{E}|$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & N\Omega \arrow[r, "c"] & \Omega \arrow[dr, "\pi"] & \\
N\tilde{\Omega}X \arrow[ur, "N\tilde{\Omega}\,!"] \arrow[dr, "N\pi_X"'] & & & M1 \\
 & NMX \arrow[r, "\delta_X"] & MNX \arrow[ur, "M\,!"'] &
\end{tikzcd}$$

Il existe donc une unique flèche $\delta'_X : N\,\tilde{\Omega}\,X \to \tilde{\Omega}\,NX$ telle que : $\tilde{\Omega}\,!.\delta'_X = c.N\tilde{\Omega}\,!$ et $\pi_{NX}.\delta'_X = \delta_X.\, N\pi_X$. On vérifie que δ'_X est naturelle en X et qu'elle détermine une loi distributive $\delta' : \tilde{\Omega} \dashrightarrow \mathbb{N}$ qui est encore cartésienne. Cette loi distributive δ' est telle que, sur $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, on ait l'égalité des deux monades :

$$\tilde{\tilde{\Omega}} = \overline{\Omega}$$

Où $\overline{\Omega}$ désigne la monade engendrée par l'opérade Ω sur $\overline{\mathbb{M}}$ et $\tilde{\tilde{\Omega}}$ est la monade, sur $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, induite par la monade $\tilde{\Omega}$ (sur $\mathbb{E}$) et la loi distributive δ'. On en déduit par la proposition 1.14, que le foncteur composé :

$$(\mathbb{E}^{\mathbb{N}})^{\overline{\Omega}} \overset{oubli}{\longrightarrow} \mathbb{E}^{\mathbb{N}} \overset{oubli}{\longrightarrow} \mathbb{E}$$

est monadique et qu'il induit une monade sur $\mathbb{E}$ qui est cartésienne (c'est en fait la monade composée de $\tilde{\Omega}$ et $\mathbb{N}$ via la loi distributive δ').

• On peut appliquer cette dernière construction de la loi distributive δ' aux monades $\tilde{\mathbb{M}}$ et $\mathbb{C}h$ sur U-Gr($\mathbb{E}$) qui, par la proposition 1.16, sont liées par une loi distributive δ qui est cartésienne. En plus comme :

$$(\text{U-Gr}(\mathbb{E}))^{\mathbb{C}h} \simeq \text{U-Cat}(\mathbb{E})$$

(puisque grâce à la proposition 1.9, le foncteur d'oubli U-Cat($\mathbb{E}$) $\rightarrow$ U-Gr($\mathbb{E}$) est monadique) et que cet isomorphisme fait correspondre la monade $\approx{\mathbb{M}}$, sur la catégorie $(\text{U-Gr}(\mathbb{E}))^{\mathbb{C}h}$, à la monade $\overline{\mathbb{M}}$, sur U-Cat($\mathbb{E}$) ; on peut transporter l'opérade Ω sur $\overline{\mathbb{M}}$, produite à la deuxième étape, en une opérade encore notée Ω sur $\overset{\approx}{\mathbb{M}}$. Il en résulte donc de ce qui précède que le foncteur composé suivant :

$$((\text{U-Gr}(\mathbb{E}))^{\mathbb{C}h})^{\overline{\Omega}} \overset{oubli}{\longrightarrow} (\text{U-Gr}(\mathbb{E}))^{\mathbb{C}h} \overset{oubli}{\longrightarrow} \text{U-Gr}(\mathbb{E})$$

est monadique et que la monade qu'il induit sur U-Gr($\mathbb{E}$) est cartésienne. Comme on a aussi l'isomorphisme :

$$((\text{U-Gr}(\mathbb{E}))^{\mathbb{C}h})^{\overline{\Omega}} \simeq (\text{U-Cat}(\mathbb{E}))^{\overline{\Omega}}$$

au-dessus de U-Gr($\mathbb{E}$), on en déduit que le foncteur d'oubli composé apparaissant à l'étape 3 :

$$\text{U-Cat}(\mathbb{E})^{\overline{\Omega}} \overset{oubli}{\longrightarrow} \text{U-Cat}(\mathbb{E}) \overset{oubli}{\longrightarrow} \text{U-Gr}(\mathbb{E})$$

est monadique et que la monade qu'il induit sur U-Gr($\mathbb{E}$) (la même monade que précédemment) est cartésienne.
- on reprendra ces derniers développements au cours du 2.2.2.

1.5 Dernières mises au point

• Il reste encore à établir différents points relatifs à notre procédure générale.

– Pour s'assurer de l'existence de l'opérade Ω sur $\overline{\mathbb{M}}$, et par voie de conséquence la monade $\mathbb{M}_{(1)}$, nous allons montrer que le foncteur $(-)_0 : U-Cat(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{E}$ est fibrant puis,
– La cartésianité de la monade $\mathbb{M}_{(1)}$ étant montrée (voir 1.4) nous vérifierons que son endofoncteur commute aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite et aux flèches verticales.

– Ces dernières justifications étant faites, nous pourrons enfin établir la liste des conditions d'itération que doit satisfaire la donnée de base et montrer qu'au final la nouvelle donnée de base ($\mathbb{E}_1 \xrightarrow{U_1} \mathbb{B}_1, \mathbb{M}_{(1)}$) satisfait encore ces mêmes conditions.

1.5.1 Le foncteur $(-)_0$ est fibrant

• Au début de la 2ème étape de la procédure générale (l'étape de "restructuration cohésive") nous avons construit une opérade sur $\overline{\mathbb{M}}$, dans U-Cat($\mathbb{E}$), à l'aide d'une opérade sur $\mathbb{M}$, dans $\mathbb{E}$. Pour justifier cette construction nous allons nous servir du fait que $(-)_0$: U-Gr($\mathbb{E}$)$\rightarrow \mathbb{E}$ est une fibration (En réalité cette condition si elle s'avère commode, est seulement suffisante)

• Le résultat général permettant aux opérades sur $\mathbb{M}$ de se transformer en opérades sur $\overline{\mathbb{M}}$ provient de la proposition suivante (ou plutôt de son corollaire) :

Proposition 1.17 *Soient* $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ *des catégories monoïdales,* $V : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ *un morphisme strict admettant (en tant que foncteur) un adjoint à droite. Alors, le foncteur qu'il induit* $Mon(\mathbb{V}) \xrightarrow{\overline{V}} Mon(\mathbb{W})$ *admet lui-même un adjoint à droite.*

Preuve : Si D est l'adjoint à droite de V, alors l'adjoint à droite $\overline{D}$ de $\overline{V}$ est défini par $\overline{D}$(M, e, k) = (DM, $\overline{e}$, $\overline{k}$) où $\overline{e}$ et $\overline{k}$ sont les uniques flèches de $\mathbb{V}$ telles que : $\epsilon_M.V\overline{e}$ = e et $\epsilon_M.V\overline{k} = k.\epsilon_M \otimes \epsilon_M$, ϵ_M : VDM $\rightarrow$ M étant la flèche universelle provenant de l'adjonction.

Proposition 1.18 (Corollaire) *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$ *des catégories à limites à gauche finies et* $U : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ *un foncteur fibrant préservant (strictement) ces limites à gauche. On se donne aussi deux monades cartésiennes* $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ *et* $\mathbb{M}' = (M', \eta', \mu')$ *sur* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$ *telles que :* $U.M' = M.U$, $U.\eta' = \eta.U$, $U.\mu' = \mu.U$. *Alors le foncteur* $Op(\mathbb{E}', \mathbb{M}') \rightarrow Op(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ *induit par le morphisme strict de catégorie monoïdale* $Coll(\mathbb{E}', \mathbb{M}') \rightarrow Coll(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ *admet un adjoint à droite.*

Preuve : Ici $\mathbb{V}$ = Coll($\mathbb{E}'$, $\mathbb{M}'$), $\mathbb{W}$ = Coll($\mathbb{E}$, $\mathbb{M}$) et V : $(C \xrightarrow{\pi} M'1) \mapsto (UC \xrightarrow{U\pi} M1)$. V admet un adjoint à droite car U est fibrant.

• Il reste maintenant à appliquer ce corollaire à la 2ème étape de la construction générale. On prend pour catégorie $\mathbb{E}'$ la catégorie U-Cat($\mathbb{E}$) et pour monade $\mathbb{M}'$, la monade $\overline{\mathbb{M}}$. Enfin le foncteur d'oubli U : $\mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ est ici le foncteur $(-)_0$: U-Cat($\mathbb{E}$)$\rightarrow \mathbb{E}$.

On voit sans difficulté que U-Cat($\mathbb{E}$) est à limites à gauche finies et que $(-)_0$ commute (strictement) aux limites à gauche finies si on suppose que :

- La catégorie $\mathbb{E}$ est à limites à gauche finies,
- le foncteur U : $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$ commute avec les limites à gauches finies,
- le foncteur U remonte les isomorphismes (voir sa définition au 1.3.2)

En effet la catégorie U-Gr($\mathbb{E}$) a clairement un objet final. Pour les produits fibrés, on commence par les construire dans Gr($\mathbb{E}$), puis on rectifie ces derniers en remontant des isomorphismes nés de la commutation de U avec les produits fibrés.

Demandons nous, enfin, sous quelles conditions le foncteur $(-)_0$ est fibrant.

Proposition 1.19 *Si $\mathbb{E}$ est une catégorie, au-dessus de $\mathbb{B}$, à limites à gauche finies et si $U : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ est fibrant alors le foncteur $(-)_0$: U-Gr($\mathbb{E}$)$\to \mathbb{E}$ est lui-même fibrant.*

__Preuve__ : Si G $\in$ |U-Gr($\mathbb{E}$)| et $f_0 : X \to G_0$ est une flèche de $\mathbb{E}$ alors montrons que f_0 se reléve en une flèche H $\to$ G dans U-Gr($\mathbb{E}$) qui est $(-)_0$-cartésienne dans les deux cas particuliers suivants :

- Lorsque f_0 est U-cartésienne : G étant dans la fibre $\mathbb{E}_{UG_0}$ le U-graphe H est l'image par $(Uf_0)^* : \mathbb{E}_{UG_0} \to \mathbb{E}_{UX}$ du U-graphe G.
- Lorsque f_0 est U-verticale : comme $\mathbb{E}_{UX}$ est à limites à gauche finies on peut poser H_0 = X, le reste de H et f : H $\to$ G étant obtenus par le produit fibré suivant dans $\mathbb{E}_{UX}$:

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "(\partial_0, \partial_1)"'] & G_1 \arrow[d, "(\partial_0, \partial_1)"] \\ H_0 \times H_0 \arrow[r, "f_0 \times f_0"] & G_0 \times G_0 \end{tikzcd}$$

- Dans le cas général f_0 s'écrivant comme le composé d'une flèche U-verticale et d'une flèche U-cartésienne il suffit de composer les deux flèches $(-)_0$-cartésiennes obtenues par les techniques précédentes.

• Ce résultat pour les U-graphes passe aux U-catégories grâce à la constatation suivante :
Si $\mathbb{E}$ est surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{B}$ et si U est fibrant alors le foncteur d'oubli composé SMon($\mathbb{E}$) $\xrightarrow{oubli} \mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}$ est lui-même fibrant et, par ailleurs, le foncteur SMon($\mathbb{E}$) $\xrightarrow{oubli} \mathbb{E}$ (au-dessus de $\mathbb{B}$) est cartésien.

On en déduit donc :

Proposition 1.20 (Corollaire) *Sous les hypothèses de la proposition 1.19, le foncteur d'oubli U-Cat($\mathbb{E}$)$\xrightarrow{(-)_0}$ $\mathbb{E}$ est fibrant*

Remarque : En résumé si $\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}$ vérifie les conditions suivantes :
– $\mathbb{E}$ (en tant que catégorie) est à limites à gauche finies,
– U commute aux limites à gauche finies,
– U est fibrant

alors la construction de la 2ème étape est possible (car $\mathbb{E}$ en tant que catégorie au-dessus de $\mathbb{B}$, est à limites à gauche finies - voir le 1.3.2). En effet, dans cette construction, le foncteur interne $\Omega \to \overline{M}(1)$ (provenant de la relation nucléaire $\Omega_1 \rightrightarrows \Omega_0$) est une flèche $(-)_0$-cartésienne. Par les propositions 1.17, 1.18 et 1.20 c'est donc la collection sous-jacente à une opérade sur $\overline{\mathbb{M}}$.

1.5.2 Commutations avec les $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite et les flèches verticales

• Commençons par la commutation de l'endofoncteur Ch avec les $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite. On s'inspire des techniques du 1.4.1 en remplaçant les carrés cartésiens par les cônes limites indexés par $\overrightarrow{\mathbb{N}}$.

Proposition 1.21 *Soit $\mathbb{E}$ une catégorie surmonoïdale numérale au-dessus de $\mathbb{B}$ et $\mathcal{N}$ une classe d'objets de $\mathbb{E}$ satisfaisant les conditions suivantes :*
– *Pour tout $X \in \mathcal{N}$, $IUX \in \mathcal{N}$,*
– *Pour tout $X, Y \in \mathcal{N}$ tels que $UX = UY$ alors, $X \bigstar Y \in \mathcal{N}$ et $X+Y \in \mathcal{N}$,*
– *Pour $(X, B) \in |\mathbb{E}^{(\overrightarrow{\mathbb{N}})}|$, si pour tout $m \in \mathbb{N}$ $X(m) \in \mathcal{N}$ alors $\varinjlim(X,B) \in \mathcal{N}$*

Alors pour tout objet $X \in \mathcal{N}$, on a $Sm(X) \in \mathcal{N}$.

Preuve : On suit la construction de Sm(X).

Proposition 1.22 (Corollaire) *Soit $\mathbb{E}$ une catégorie surmonoïdale numérale au-dessus de $\mathbb{B}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
– *U remonte les isomorphismes,*
– *La catégorie $\mathbb{E}$ a des $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite préservées par l'endofoncteur composé I.U,*
– *Le foncteur $\bigstar : \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ commute aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite,*

alors l'endofoncteur Sm commute aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite.

Preuve : Dans la catégorie surmonoïdale numérale $(\mathbb{E}^{\overrightarrow{\mathbb{N}}})^2$ au-dessus de $(\mathbb{B}^{\overrightarrow{\mathbb{N}}})^2$, on vérifie que la classe $\mathcal{N}$ des cônes limites à droite indexés par $\overrightarrow{\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses de la proposition précédente.

Proposition 1.23 (Sous-corollaire) *Soit $\mathbb{E}$ une catégorie au-dessus de $\mathbb{B}$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. *U remonte les isomorphismes,*
2. *$\mathbb{E}$, au-dessus de $\mathbb{B}$, a des produits fibrés et des $(\{0,\ 1\})$-sommes,*
3. *la catégorie $\mathbb{E}$ a des $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite,*
4. *les foncteurs $U : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ et $\wedge : \mathbb{E}^{(\mathbb{V})} \rightarrow \mathbb{E}$ commutent aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite (où $\mathbb{V}$ est la catégorie suivante :*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl] \\ & \bullet & \end{tikzcd}$$

   et $\wedge$ est le foncteur "produit fibré" adjoint à droite de la diagonale $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^{(\mathbb{V})}$)

5. *dans toutes les fibres de $\mathbb{E}$ les $\{0,\ 1\}$-sommes et les $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite sont stables par changement de base,*

alors l'endofoncteur Ch dans U-Gr($\mathbb{E}$) commute aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite.

Preuve : On vérifie que la catégorie surmonoïdale numérale U-Gr($\mathbb{E}$) vérifie les hypothèses de la proposition 1.22 précédente.

• Montrons maintenant qu'une opérade sur une monade cartésienne d'endofoncteur commutant aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite, induit une monade du même type. Cela va résulter en fait de la constatation suivante :

– Soit $\mathbb{E}$ une catégorie à produits fibrés ayant aussi des $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite stables par changement de base. Soient M et N deux endofoncteurs de $\mathbb{E}$ et π : M $\rightarrow$ N une transformation naturelle cartésienne. Alors, si M commute aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite, il en est de même pour N.

Tout ceci va entraîner que la monade $\mathbb{M}_{(1)}$ a son endofoncteur qui commute aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite car cet endofoncteur est le composé de deux endofoncteurs commutant aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite.

• Occupons nous maintenant de la commutation avec les flèches verticales.

– Nous avons vu que $\mathbb{C}$h commute avec les flèches $(-)_0$-verticales (voir le 1.3.3).

– De façon évidente la monade $\overline{\mathbb{M}}$ sur U-Gr($\mathbb{E}$), produite par $\mathbb{M}$, commute aussi aux flèches $(-)_0$-verticales.

– Si maintenant Ω est une opérade sur $\overline{\mathbb{M}}$, l'endofoncteur de la monade cartésienne qu'il induit sur U-Gr($\mathbb{E}$)commute aussi aux flèches $(-)_0$-verticales (cela provient de la construction des produits fibrés canoniques dans U-Gr($\mathbb{E}$), ils se font composante par composante).

– Finalement par composition la monade $\mathbb{M}_{(1)}$ a son endofoncteur qui commute avec les flèches $(-)_0$-verticales.

1.5.3 Les conditions d'itération

• Il est temps maintenant de donner la liste des axiomes formant les conditions d'itération d'une donnée de base ($\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}$, $\mathbb{M}$). Pour l'obtenir nous avons collecté les différentes conditions portant sur la donnée de base pour rendre possible les différentes constructions de notre procédure générale ainsi que les conditions permettant de montrer que la monade $\mathbb{M}_{(1)}$ est du type voulu. Cette collection de conditions se condense finalement en le système d'axiomes suivant :

Pour les données autres que $\mathbb{M}$:
(F) U est une fibration,
(F') U est une co-fibration,
(F'1) Pour tout $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dans $\mathbb{E}$ si g.f et g sont U-cocartésiens alors f est U-cocartésien,
(F'2) Les morphismes U-cocartésiens de $\mathbb{E}$ sont stables par changement de base,
(LP) $\mathbb{E}$ a des limites à gauche finies,
(LI) $\mathbb{E}$ a des $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite et des co-égalisateurs,
(FLP) U commute aux limites à gauche finies,
(FLI) U commute aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite et aux co-égalisateurs,
(CE) Les co-égalisateurs sont stables par changement de base,
(CN) Les $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites commutent avec les produits fibrés,
(LIS) $\mathbb{E}$ au-dessus de $\mathbb{B}$ est à $(\{0, 1\})$-sommes,
(CSS1) $+ : \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ commute aux produits fibrés,
(CSS2) Pour toutes les flèches (f,g) de $\mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{E}$ les carrés co-projections $f \to f+g$, $g \to f+g$ et la co-diagonale $f+f \to f$ sont cartésiens.

Pour la monade $\mathbb{M}$:
(MC) Elle est cartésienne,
(MLI) Son endofoncteur M commutent aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite,
(MV) M commute aux flèches U-verticales.

• On constate que le système d'axiomes précédent est suffisant pour la construction de la monade $\mathbb{M}_{(1)}$ et pour qu'elle satisfasse (MC), (MLI) et (MV). (Il faut passer en revue les hypothèses des différents théorèmes de cet article essentiellement celles de la proposition 1.5, de la proposition 1.9, de la proposition 1.13, des propositions 1.20 et 1.23)

- Montrons enfin la stabilité de ce système d'axiomes. De façon précise.

Proposition 1.24 *Si la donnée de base* ($\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}, \mathbb{M}$) *satisfait les conditions d'itération alors* ($\mathbb{E}_1 \xrightarrow{U_1} \mathbb{B}_1, \mathbb{M}_{(1)}$) *est défini et vérifie les mêmes conditions.*

Preuve : Passons en revue les différents axiomes précédemment énoncés :
(F) Voir la proposition 1.19
(F') Si G $\in$ |U-Gr($\mathbb{E}$)| et $h_0 : G_0 \to H_0$ est une flèche de $\mathbb{E}$, on construit H $\in$ |U-Gr($\mathbb{E}$)| et h : G $\to$ H en commençant par $h_1 : G_1 \to H_1$. C'est une flèche U-cocartésienne au-dessus de $Uh_0 : UG_0 \to UH_0$. Les flèches ∂_0, $\partial_1 : H_1 \rightrightarrows H_0$ proviennent de la propriété universelle de h_1. Cette même propriété universelle montre que h : G $\to$ H est $(-)_0$-cocartésienne.
Remarquons au passage qu'une flèche h' : G' $\to$ H' de U-Gr($\mathbb{E}$) est $(-)_0$-cocartésienne ssi $h_1' : G_1' \to H_1'$ est U-cocartésienne.
(F'1) Résulte de la remarque précédente
(LP) Montré au 1.5.1
(F'2) Comme $(-)_1$: U-Gr($\mathbb{E}$)$\to$ $\mathbb{E}$ commute aux produits fibrés, on utilise encore la remarque donnée lors de (F')
(LI) On procède comme pour (LP)
(FLP) et (FLI) par construction des limites
(CE) et (CN) se vérifient composante par composante
(LIS) Soient G^0, G^1 $\in$ |U-Gr($\mathbb{E}$)| tels que $G_0^0 = G_0^1$. Alors G_1^1 et G_1^0 étant dans la même fibre on vérifie que

$$G^0 + G^1 = (G_1^1 + G_1^0 \underset{\overline{\partial_1}}{\overset{\overline{\partial_0}}{\rightrightarrows}} G_0^0) \text{ où } \overline{\partial_i} =)\partial_i^0, \partial_i^1($$

(CSS1) et (CSS2) se vérifient composante par composante
(MC) a été établi au paragraphe 1.4.3
(MLI) et (MV) ont été montrés au 1.5.2

L'exemple initial

On constate aisément que la donnée de base ($\mathbb{E}$ns $\to \mathbb{1}$, $\mathbb{I}$d) vérifie les conditions d'itération. Au paragraphe 1.1, nous avons aussi parlé de la donnée de base ($\mathbb{E}$ns $\to \mathbb{1}$, $\mathbb{M}$o), elle vérifie aussi les conditions d'itération.

• Nous pouvons donc maintenant itérer la procédure de catégorification.
Selon que cette procédure sera effectuée de façon incomplète (c'est le cas où la première étape a été éliminée) ou complète, on obtiendra les n-catégories strictes ou ce que nous définissons comme les n-catégories non-strictes.
Le chapitre 2 qui va suivre est consacré à cette question.

2 n-catégorification

2.1 n-catégorification stricte

• La catégorification stricte est la procédure obtenue en supprimant la première étape des trois étapes données au 1.1. Mais en supprimant cette première étape (dite de "destruction réglée") on supprime aussi, du même coup, la deuxième étape de "restructuration cohésive". Il reste alors seulement la troisième étape

On va montrer qu'en itérant n fois cette catégorification stricte à partir de l'exemple initial (voir le 1.5.3) on obtient, ce qui est légitime, la structure de n-catégorie stricte, c'est-à-dire de façon plus précise, la monade "n-catégorie stricte libre" sur la catégorie des n-graphes (ou un n-graphe est encore appelé bien souvent "n-ensemble globulaire")

2.1.1 Position du problème

• Soit une structure itérative $(\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}, \mathbb{M})$. Notons $\mathbb{E}_1 = \text{U-Gr}(\mathbb{E})$, $\mathbb{B}_1 = \mathbb{E}$, $U_1 : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{B}_1, G \mapsto G_0$ (conformément au 1.1) et $\mathbb{M}_1$ la monade sur $\mathbb{E}_1$ produite par le foncteur monadique composé suivant :

$$\text{U-Cat}(\mathbb{E})^{\overline{\mathbb{M}}} \xrightarrow{oubli} \text{U-Cat}(\mathbb{E}) \xrightarrow{oubli} \text{U-Gr}(\mathbb{E})$$

où $\overline{\mathbb{M}}$ est l'extension de la monade $\mathbb{M}$ à $\text{U-Cat}(\mathbb{E})$ (Rappelons qu'il ne faut pas confondre cette monade $\mathbb{M}_1$ avec la monade $\mathbb{M}_{(1)}$ donnée au 1.1). D'après ce qui précède, $(\mathbb{E}_1 \xrightarrow{U_1} \mathbb{B}_1, \mathbb{M}_1)$ vérifie les conditions d'itération. Cette nouvelle structure itérative sera notée $K_{st}(\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}, \mathbb{M})$. C'est ce que nous appellerons la catégorification stricte de $(\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}, \mathbb{M})$. On peut itérer K_{st}. Notons K_{st}^n le nième itéré de K_{st} et

$$(\mathbb{E}_n \xrightarrow{U_n} \mathbb{B}_n, \mathbb{M}_n) = K_{st}^n(\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}, \mathbb{M})$$

On voit déjà que $\mathbb{B}_n = \mathbb{E}_{n-1}$ si n $\geqslant$ 1. Nous allons montrer que, si ($\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}$, $\mathbb{M}$) = ($\mathbb{E}$ns $\rightarrow \mathbb{1}$, $\mathbb{I}$d) (qui est l'exemple initial) alors : $\mathbb{E}_n \simeq$ n-$\mathbb{G}$r (catégorie des n-graphes) et $\mathbb{E}_n^{\mathbf{M}_n} \simeq$ n-$\mathbb{C}$at (catégorie des n-catégories strictes). De façon précise, on va construire par récurrence deux isomorphismes γ_n : $\mathbb{E}_n \overset{\rightarrow}{\sim}$ n-$\mathbb{G}$r et k_n : $\mathbb{E}_n^{\mathbf{M}_n} \overset{\rightarrow}{\sim}$ n-$\mathbb{C}$at rendant commutatif, pour n $\geqslant$ 1, les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E}_n \arrow[r, "\gamma_n"] \arrow[d, "U_n"'] \arrow[dr, phantom, "(C_n)"] & \text{n-}\mathbb{G}\text{r} \arrow[d, "U_n"] \\ \mathbb{E}_{n-1} \arrow[r, "\gamma_{n-1}"] & \text{(n-1)-}\mathbb{G}\text{r} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{E}_n^{\mathbf{M}_n} \arrow[r, "k_n"] \arrow[d, "\tilde{U}_n"'] \arrow[dr, phantom, "(C'_n)"] & \text{n-}\mathbb{C}\text{at} \arrow[d, "U_n"] \\ \mathbb{E}_{n-1}^{\mathbf{M}_{n-1}} \arrow[r, "k_{n-1}"] & \text{(n-1)-}\mathbb{C}\text{at} \end{tikzcd}$$

où les foncteurs U_n : n-$\mathbb{G}$r $\rightarrow$ (n-1)-$\mathbb{G}$r et U_n : n-$\mathbb{C}$at $\rightarrow$ (n-1)-$\mathbb{C}$at sont les foncteurs d'oubli de troncature pour n $\geqslant$ 1, et où on a $\tilde{U}_n$(X,a) = (U_nX, U_na) ($\tilde{U}_n$ est bien défini, car, si on note $M_n = (M_n, \eta_n, \mu_n)$, on a les commutations $U_nM_n = M_{n-1}U_n$, $U_n\eta_n = \eta_{n-1}U_n$, $U_n\mu_n = \mu_{n-1}U_n$).

2.1.2 Construction de γ_n et k_n

• A l'ordre n = 0, $\mathbb{E}_0$ = $\mathbb{E}$ns = 0-$\mathbb{G}$r = 0-$\mathbb{C}$at et $\mathbb{M}_0$ = $\mathbb{I}$d. On peut donc prendre γ_0 = Id et k_0 = $\mathbb{E}\text{ns}^{\mathbf{I}d} \rightarrow \mathbb{E}$ns l'isomorphisme canonique.
A l'ordre n =1, $\mathbb{E}_1$ = U_0-Gr($\mathbb{E}$ns) = 1 - $\mathbb{G}$r, M_1 = $\mathbb{C}$h (car U_0-Cat($\mathbb{E}$ns) = $\mathbb{C}$at et $\overline{\mathbb{M}_0}$ = $\mathbb{I}$d). Alors γ_1 = Id et $k_1 = c^{-1}$ où c : $\mathbb{C}$at $\rightarrow \mathbb{G}r^{\mathbb{C}h}$ est le foncteur de comparaison du à la monadicité du foncteur d'oubli V : $\mathbb{C}$at $\rightarrow \mathbb{G}$r. On vérifie facilement que les deux carrés (C_1) et (C'_1) commutent.

• A l'ordre n+1, construisons γ_{n+1} et k_{n+1}.
• L'isomorphisme γ_{n+1} est le composé suivant :

$$\mathbb{E}_{n+1} = U_n\text{-Gr}(\mathbb{E}\text{ns}) \overset{\overline{\gamma_n}}{\overset{\rightarrow}{\sim}} U_n\text{-Gr(n-}\mathbb{G}\text{r}) \overset{j_n}{\overset{\rightarrow}{\sim}} \text{(n+1)-}\mathbb{G}\text{r}$$

...où $\overline{\gamma_n}$ est défini sur les objets par $\overline{\gamma_n}(G_1 \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} G_0) = (\gamma_n\ G_1 \underset{\gamma_n\partial_1}{\overset{\gamma_n\partial_0}{\rightrightarrows}} \gamma_nG_0)$ après avoir remarqué, grâce à la commutation (C_n) donnée dans l'hypothèse de récurrence, que γ_n et γ_n^{-1} préservent les flèches U_n-verticales.

...j_n est donné par $j_n(\mathrm{G}) = \overline{G}$ où pour $\mathrm{G} = (G_1 \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} G_0)$ dans U_n-Gr(n - $\mathbb{G}$r), $\overline{G}$ est le (n+1)-graphe :

$$\overline{G_{n+1}} \underset{\partial_1^n}{\overset{\partial_0^n}{\rightrightarrows}} \overline{G_n} \underset{\partial_1^{n-1}}{\overset{\partial_0^{n-1}}{\rightrightarrows}} \ldots \underset{\partial_1^1}{\overset{\partial_0^1}{\rightrightarrows}} \overline{G_1} \underset{\partial_1^0}{\overset{\partial_0^0}{\rightrightarrows}} \overline{G_0}$$

$$\text{où } (\overline{G_n} \underset{\partial_1^{n-1}}{\overset{\partial_0^{n-1}}{\rightrightarrows}} \ldots \underset{\partial_1^1}{\overset{\partial_0^1}{\rightrightarrows}} \overline{G_1} \underset{\partial_1^0}{\overset{\partial_0^0}{\rightrightarrows}} \overline{G_0}) = G_0 \text{ et } (\overline{G_{n+1}} \underset{\partial_1^n}{\overset{\partial_0^n}{\rightrightarrows}} \overline{G_n}) = (G_{1n} \underset{\partial_{1n}}{\overset{\partial_{0n}}{\rightrightarrows}} G_{0n})$$

On vérifie que le carré (C_{n+1}) commute.

• L'isomorphisme k_{n+1} est le composé suivant :

$\mathbb{E}_{n+1}^{\mathbf{M}_{n+1}} = U_n\text{-Gr}(\mathbb{E}_n)^{\mathbf{M}_{n+1}} \overset{C_n^{-1}}{\rightleftarrows} U_n\text{-Cat}(\mathbb{E}_n)^{\overline{\mathbf{M}_n}} \overset{\alpha_n}{\rightleftarrows} \tilde{U}_n\text{-Cat}(\mathbb{E}_n^{\mathbf{M}_n}) \overset{\overline{k_n}}{\rightleftarrows}$
$U_n\text{-Cat(n-}\mathbb{C}\text{at)} \overset{\beta_n}{\rightleftarrows} \text{(n+1)-}\mathbb{C}\text{at}$.

...où $c_n : (U_n\text{-Cat}(\mathbb{E}_n))^{\overline{\mathbf{M}_n}} \to (U_n\text{-Gr}(\mathbb{E}_n))^{\mathbf{M}_{n+1}}$ est le foncteur de comparaison provenant de la monadicité du foncteur composé suivant :

$$U_n\text{-Cat}(\mathbb{E}_n)^{\overline{\mathbf{M}_n}} \overset{oubli}{\to} U_n\text{-Cat}(\mathbb{E}_n) \overset{oubli}{\to} U_n\text{-}\mathbb{G}\text{r}(\mathbb{E}_n)$$

(Cette monadicité a été montrée au 1.4.2)

...$\overline{k_n} : \tilde{U}_n\text{-Cat}(\mathbb{E}_n^{\mathbf{M}_n}) \to U_n\text{-Cat(n-}\mathbb{C}\text{at)}$ provient de l'isomorphisme $k_n : \mathbb{E}_n^{\mathbf{M}_n} \to$ n-$\mathbb{C}$at donné par l'hypothèse de récurrence. Il faut juste remarquer qu'il envoie une flèche de $\tilde{U}_n$-verticale sur une flèche U_n-verticale (et réciproquement pour k_n^{-1}) grâce à la commutation du carré $(C_n^{'})$.

...L'isomorphisme $\beta_n : U_n$-Cat(n-$\mathbb{C}$at) $\to$ (n+1)-$\mathbb{C}$at se construit à partir de j_n. En effet si $\mathrm{C} \in |U_n$-Cat(n-$\mathbb{C}$ at)$|$, la (n+1)-catégorie $\beta_n(\mathrm{C})$, que l'on notera $\overline{C}$ pour simplifier, a pour (n+1)-graphe sous-jacent l'image de C par le foncteur composé :

$$U_n\text{-Cat(n-}\mathbb{C}\text{at)} \to U_n\text{-Gr(n-}\mathbb{C}\text{at)} \to U_n\text{-Gr(n-}\mathbb{G}\text{r)} \overset{j_n}{\to} \text{(n+1)-}\mathbb{G}\text{r}$$

Cette structure de (n+1)-graphe se complète en une structure de (n+1)-catégorie en posant pour les identités :

$(\overline{C_i} \overset{\overline{id}_{ji}}{\to} \overline{C_j}) = (C_{0i} \overset{id_{ji}}{\to} C_{0j})$ si i<j≤n,

$(\overline{C_i} \overset{\overline{id}_{n+1,i}}{\to} \overline{C_{n+1}}) = (C_{1i} \overset{id_{n,i}}{\to} C_{1n})$ si i<n,

et $(\overline{C_n} \overset{\overline{id}_{n+1,n}}{\to} \overline{C_{n+1}}) = (C_0 \overset{id}{\to} C_1)_n$

et pour les compositions :

$(\overline{C_j} \underset{\overline{C_i}}{\times} \overline{C_j} \overset{\overline{o}_i^j}{\to} \overline{C_j}) = (C_{0j} \underset{C_{0i}}{\times} C_{0j} \overset{o_i^j}{\to} C_{0j})$ si i<j≤n

$$(\overline{C}_{n+1} \underset{\overline{C}_i}{\times} \overline{C}_{n+1} \xrightarrow{\overline{O}_i^{n+1}} \overline{C}_{n+1}) = (C_{1n} \underset{C_{1i}}{\times} C_{1n} \xrightarrow{O_i^n} C_{1n}) \text{ si } i<n$$

$$(\overline{C}_{n+1} \underset{\overline{C}_n}{\times} \overline{C}_{n+1} \xrightarrow{\overline{O}_n^{n+1}} \overline{C}_{n+1}) = (C_1 \underset{C_0}{\times} C_1 \xrightarrow{O} C_1)_n$$

...Enfin $\alpha_n : (U_n\text{-Cat}(\mathbb{E}_n))^{\overline{\mathbf{M}_n}} \to \tilde{U}_n\text{-Cat}(\mathbb{E}_n^{\mathbf{M}_n})$ provient de deux isomorphismes généraux.

...Pour le premier isomorphisme, plaçons nous dans le contexte du 1.4.2. On montre que $\mathbb{E}^{\mathbf{M}}$ a canoniquement une structure de catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{B}^{\underline{\mathbf{M}}}$ et que l'on a l'isomorphisme canonique :

$$\mathrm{SMon}(\mathbb{E})^{\hat{\mathbf{M}}} \simeq \mathrm{SMon}(\mathbb{E}^{\mathbf{M}})$$

Sur les objets il est donné par ((C, e, k),a) $\mapsto$ ((C, a), e, k).

...Le deuxième isomorphisme est l'isomorphisme de catégorie surmonoïdale au-dessus de $\mathbb{E}^{\mathbf{M}}$ suivant : U-Gr$(\mathbb{E})^{\tilde{\mathbf{M}}} \xrightarrow{\sim} \tilde{U}\text{-Gr}(\mathbb{E}^{\mathbf{M}})$.

Il est donné sur les objets par : (G, a) $\mapsto$ $((G_1, a_1) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} (G_0, a_0))$

Ce deuxième isomorphisme produit le nouvel isomorphisme :

$$\mathrm{SMon}((\text{U-Gr}\mathbb{E})^{\tilde{\mathbf{M}}}) \overset{\rightarrow}{\sim} \mathrm{SMon}(\tilde{U}\text{-Gr}(\mathbb{E}^{\mathbf{M}}))$$

α_n est alors le composé suivant :

$U_n\text{-Cat}(\mathbb{E}_n)^{\overline{\mathbf{M}_n}} = \mathrm{SMon}(\mathbb{E}_{n+1})^{\hat{\tilde{\mathbf{M}}}_n} \overset{\rightarrow}{\sim} \mathrm{SMon}(\mathbb{E}_{n+1}^{\tilde{\mathbf{M}}_n}) \overset{\rightarrow}{\sim} \mathrm{SMon}(\tilde{U}_n\text{-Gr}(\mathbb{E}_n^{\mathbf{M}_n})) = \tilde{U}_n\text{-Cat}(\mathbb{E}_n^{\mathbf{M}_n})$

où, bien sur, $\mathbb{E}_{n+1} = U_n\text{-Gr}(\mathbb{E}_n)$

...On vérifie que le carré (C'_{n+1}) commute bien.

• On montre enfin par récurrence que le diagramme suivant liant k_n et γ_n, commute pour tout n $\in \mathbb{N}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}_n^{\mathbf{M}_n} \arrow[r, "k_n"] \arrow[d, "\text{oubli}"'] & n\text{-}\mathbb{C}\text{at} \arrow[d, "\text{oubli}"] \\
\mathbb{E}_n \arrow[r, "\gamma_n"] & n\text{-}\mathbb{G}\text{r}
\end{tikzcd}$$

2.2 n-catégorification non-stricte

• On a déjà annoncé plusieurs fois que, par itération de la procédure générale de catégorification, on obtenait ce que nous appelons la structure de *n-catégorie non-stricte*. C'est ce que nous allons préciser ici. Pour cela nous commencerons par construire un morphisme de comparaison entre la monade itérée $\mathbb{M}_{(n)}$ (donnée par le cas non-strict) et la monade itérée $\mathbb{M}_n$ (donnée par le cas strict) sur la catégorie $\mathbb{E}_n$ ($\simeq$ n-$\mathbb{G}$r), puis nous étudierons les propriétés de ce morphisme.

2.2.1 Le morphisme de comparaison

• ($\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}$, $\mathbb{M}$) étant une structure itérative (voir sa définition au paragraphe 1.1.1). Notons :

$$K(\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}, \mathbb{M}) = (\mathbb{E}_1 \xrightarrow{U_1} \mathbb{B}_1, \mathbb{M}_{(1)})$$

où $\mathbb{E}_1 \xrightarrow{U_1} \mathbb{B}_1$ et $\mathbb{M}_{(1)}$ ont été construits au 1.1. Nous avons vu au 1.5 que la donnée K($\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}$, $\mathbb{M}$) est à nouveau une structure itérative. On désigne par K^n le n-ième itéré de K (où K^0 = Id et $K^1 = K$). On va maintenant s'intéresser à l'itéré ($\mathbb{E}_n \xrightarrow{U_n} \mathbb{B}_n$, $\mathbb{M}_{(n)}$) = K^n($\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}$, $\mathbb{M}$) lorsque ($\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}$, $\mathbb{M}$) = ($\mathbb{E}ns \xrightarrow{!} \mathbb{1}$, $\mathbb{I}d$) (C'est l'exemple initial - voir le 1.5.3)

Notre but maintenant est de construire sur $\mathbb{E}_n$ (qui, nous l'avons vu au paragraphe précédent, est $\simeq$ n-$\mathbb{G}$r) un morphisme de monade $\pi_n : \mathbb{M}_{(n)} \to \mathbb{M}_n$, appelé morphisme de comparaison.

Pour ce faire nous allons utiliser une paire de constructions, adjointes l'une de l'autre, issue de la théorie générale des catégories. Ouvrons donc une parenthèse pour préciser ce dont nous voulons parler.

a) Soit $\mathbb{B}$ une catégorie générale. Notons $\mathbb{A}d_{\mathbb{B}}$ la catégorie qui a :
- pour objets, les adjonctions $\mathcal{A} = ((\eta, \epsilon), G \dashv D : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B})$
- pour flèches $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ les foncteurs $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "D"'] & & \mathbb{A}' \arrow[dl, "D'"] \\ & \mathbb{B} & \end{tikzcd}$$

Notons aussi $\mathbb{M}on_{\mathbb{B}}$ la catégorie Mon(End($\mathbb{B}$)), c'est-à-dire celle qui a :

- pour objets, les monades $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ sur $\mathbb{B}$,
- pour flèches $\mathbb{M} \to \mathbb{M}'$ les morphismes de monades, c'est-à-dire les transformations naturelles t : M $\to$ M' qui font commuter les deux diagrammes suivants dans End($\mathbb{B}$) = $\mathbb{B}^{\mathbb{B}}$:

$$\begin{tikzcd} & Id_{\mathbb{B}} \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta'"] & \\ M \arrow[rr, "t"] & & M' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M^2 \arrow[r, "t^2"] \arrow[d, "\mu"'] & M'^2 \arrow[d, "\mu'"] \\ M \arrow[r, "t"] & M' \end{tikzcd}$$

Il y a un foncteur d'oubli $\mathbb{U} : \mathbb{A}d_{\mathbb{B}}^{op} \to \mathbb{M}on_{\mathbb{B}}$ qui est défini,

- sur les objets par $\mathbb{U}$(D, G, η, ϵ) = (DG, η, DϵG)
- sur les flèches F : (D, G, η, ϵ) $\to$ (D', G', η', ϵ') dans $\mathbb{A}d_{\mathbb{B}}$ par $\mathbb{U}$(F) = D't

où $t_B = (G'(B) \xrightarrow{G'(\eta_B)} G'DG(B) \xrightarrow{\epsilon'_{FG(B)}} FG(B))$

Proposition 2.1 *Le foncteur* $\mathbb{U} : \mathbb{A}d_{\mathbb{B}}^{op} \to \mathbb{M}on_{\mathbb{B}}$ *admet un adjoint à gauche.*

<u>Preuve</u> : cet adjoint à gauche $\mathbb{A} : \mathbb{M}on_{\mathbb{B}} \to \mathbb{A}d_{\mathbb{B}}^{op}$ est donné,

- sur les objets par $\mathbb{A}(\mathbb{M}) = ((\eta, \epsilon) : L \dashv U : \mathbb{B}^{\mathbb{M}} \to \mathbb{B})$ où U(B, b) = B, L(B) = (M(B), μ_B), $\epsilon_{(B,b)}$ = b
- sur les flèches t : $\mathbb{M} \to \mathbb{M}'$, par $\mathbb{A}(t) = F^{\circ} : \mathbb{A}(\mathbb{M}) \to \mathbb{A}(\mathbb{M}')$ où F : $\mathbb{B}^{\mathbb{M}'} \to \mathbb{B}^{M}$ est défini par F(B, b') = (B, b'.t_B) (la notation F° signifie que F est lu dans l'autre sens, dans la catégorie duale $\mathbb{A}d_{\mathbb{B}}^{op}$)

L'unité de cette adjonction est $\overline{\eta} = Id_{\mathbb{M}on_{\mathbb{B}}}$ (le foncteur $\mathbb{A}$ est donc une section de $\mathbb{U}$) et la co-unité $\overline{\epsilon} : \mathbb{A}.\mathbb{U} \to Id_{\mathbb{A}d_{\mathbb{B}}^{op}}$ est donnée sur $\mathcal{A} = ((\eta, \epsilon), G \dashv D : \mathbb{A} \rightleftarrows \mathbb{B})$ par $\overline{\epsilon}_{\mathcal{A}} = c^{\circ} : \mathbb{A}\mathbb{U}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ où c : $\mathbb{A} \to \mathbb{B}^{\mathbb{M}}$ est le foncteur de comparaison produit par $\mathcal{A}$ (précisément c(A) = (D(A),Dϵ_A)).

b) Revenons à la construction du morphisme $\pi_n : \mathbb{M}_{(n)} \to \mathbb{M}_n$ sur $\mathbb{E}_n$. On le fait par récurrence. Tout d'abord $\pi_0 = \mathrm{Id}$ et, π_n étant donné, on construit π_{n+1} à l'aide de π_n. On commence déjà, sur $\mathbb{C}_n = \mathbb{U}_n\text{-Cat}(\mathbb{E}_n)$, par prolonger π_n de façon évidente en $\overline{\pi_n} : \overline{\mathbb{M}_{(n)}} \to \overline{\mathbb{M}_n}$. D'un autre côté, par la procédure générale, la monade $\mathbb{M}_{(n)}$ sur $\mathbb{E}_n$ produit une opérade libre sur $\mathbb{M}_{(n)}$ qui donne à la deuxième étape une monade (notons la Ω_n) sur $\mathbb{C}_n$ et un morphisme noté $p_n : \Omega_n \to \overline{\mathbb{M}_{(n)}}$. En composant avec $\overline{\pi_n}$ on obtient un nouveau morphisme de monade $q_n : \Omega_n \to \overline{\mathbb{M}_n}$ sur $\mathbb{C}_n$. Ce morphisme est dans $\mathrm{Mon}_{\mathbb{C}_n}$ et donc grâce au a) on peut considérer son image par le foncteur composé suivant :

$$\mathrm{Mon}_{\mathbb{C}_n} \xrightarrow{\mathbb{A}} \mathrm{Ad}^{op}_{\mathbb{C}_n} \xrightarrow{\mathbb{V}} \mathrm{Ad}^{op}_{\mathbb{E}_{n+1}} \xrightarrow{\mathbb{U}} \mathrm{Mon}_{\mathbb{E}_{n+1}}$$

où le foncteur $\mathbb{V}$ du milieu est la composition par l'adjonction $\mathrm{c} \dashv \mathrm{v} : \mathbb{C}_n \rightleftarrows \mathbb{E}_{n+1}$. Cette image est le morphisme π_{n+1} cherché. On a en effet $\mathbb{UVA}(\Omega_n) = \mathbb{M}_{(n+1)}$ et $\mathbb{UVA}(\overline{\mathbb{M}_n}) = \mathbb{M}_{n+1}$.

2.2.2 Cartésianité du morphisme de comparaison

• Pour démontrer la cartésianité des morphismes $\pi_n : \mathbb{M}_{(n)} \to \mathbb{M}_n$ la technique précédente ne suffit pas. On va devoir passer par les lois distributives introduites au 1.4. Comme d'habitude on commence par se placer dans un cadre un peu plus général.

a) Donnons nous pour l'instant : Une catégorie $\mathbb{E}$, une monade $\mathbb{N} = (\mathrm{N}, \alpha, \beta)$ sur cette catégorie et en plus deux autres monades $\mathbb{M} = (\mathrm{M}, \eta, \mu)$ et $\mathbb{M}' = (\mathrm{M}', \eta', \mu')$ liées à $\mathbb{N}$ par des lois distributives $\delta : \mathbb{M} \dashrightarrow \mathbb{N}$ et $\delta' : \mathbb{M}' \dashrightarrow \mathbb{N}$. Appelons morphisme de loi distributive $\delta \to \delta'$ au-dessus de $\mathbb{N}$ la donnée d'un morphisme de monade $\pi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}'$ qui doit, en plus, satisfaire la commutation suivante pour chaque objet X de $\mathbb{E}$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{NM(X)} \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d, "\mathrm{N}\pi_X"'] & \mathrm{MN(X)} \arrow[d, "\pi_{N(X)}"] \\
\mathrm{NM'(X)} \arrow[r, "\delta'_X"] & \mathrm{M'N(X)}
\end{tikzcd}$$

Un tel morphisme $\pi : \delta \to \delta'$ étant donné, on construit un morphisme $\overline{\pi} : \overline{\mathbb{M}} \to \overline{\mathbb{M}}'$ sur $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ où $\overline{\mathbb{M}}$ (resp. $\overline{\mathbb{M}'}$) est la monade sur $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ induite par $\delta : \mathbb{M} \dashrightarrow \mathbb{N}$ (resp $\delta' : \mathbb{M}' \dashrightarrow \mathbb{N}$). En fait, pour (X,a) $\in |\mathbb{E}^{\mathbb{N}}|$, on pose simplement :

$$\overline{\pi}_{(X,a)} = \pi_X : \overline{M}(X,a) \to \overline{M}'(X,a)$$

On construit ainsi un foncteur $\mathbb{B} : LD_{\mathbb{N}} \to Mon_{\mathbb{E}^{\mathbb{N}}}$ où $LD_{\mathbb{N}}$ désigne la catégorie des lois distributives au-dessus de $\mathbb{N}$. Le foncteur $\mathbb{C}$ composé suivant :

$$LD_{\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{B}} Mon_{\mathbb{E}^{\mathbb{N}}} \xrightarrow{\mathbb{A}} Ad^{op}_{\mathbb{E}^{\mathbb{N}}} \xrightarrow{\mathbb{V}} Ad^{op}_{\mathbb{E}} \xrightarrow{\mathbb{U}} Mon_{\mathbb{E}}$$

où $\mathbb{V}$ est la composition par l'adjonction $L \dashv U : \mathbb{E}^{\mathbb{N}} \rightleftarrows \mathbb{E}$, envoie une loi distributive $\delta : \mathbb{M} \dashrightarrow \mathbb{N}$ sur la monade composée de $\mathbb{M}$ par $\mathbb{N}$ via la loi δ, c'est-à-dire que $\mathbb{C}(\delta) = \widehat{\mathbb{M}} = (\widehat{M},\widehat{\eta},\widehat{\mu})$ où $\widehat{M}(X) = MN(X)$, $\widehat{\eta}_X = \eta_{NX}.\alpha_X$, $\widehat{\mu}_X = \mu_{NX}.M^2\beta_X.M\delta_{NX}$. Pour une flèche $\pi : \delta \to \delta'$ de $LD_{\mathbb{E}}$, on a $\mathbb{C}(\pi) = \widehat{\pi}$ où $\widehat{\pi}_X = \pi_{NX} : MNX \to M'NX$.

- Lorsque $\mathbb{E}$ est à produits fibrés, que $\mathbb{N}$, $\mathbb{M}$ et $\mathbb{M}'$ sont cartésiennes ainsi que δ, δ' et π (en tant que transformations naturelles) on voit immédiatement que $\widehat{\mathbb{M}}$ et $\widehat{\mathbb{M}'}$ sont elles-mêmes cartésiennes (ce qu'on a déjà vu au 1.4.2) ainsi que $\widehat{\pi} : \widehat{\mathbb{M}} \to \widehat{\mathbb{M}}'$.
- La notion de morphisme entre les lois distributives permet de préciser un peu le 1.4.3. La loi distributive $\widetilde{\Omega} \dashrightarrow \mathbb{N}$ construite dans ce sous-paragraphe à l'aide de $\delta : \mathbb{M} \dashrightarrow \mathbb{N}$ est en fait l'unique loi distributive $\delta' : \widetilde{\Omega} \dashrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\pi : \delta' \to \delta$ soit un morphisme de loi distributive et tel que la monade sur $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ induite par $\delta' : \widetilde{\Omega} \dashrightarrow \mathbb{N}$ soit $\overline{\Omega}$

b) Revenons à notre construction. Montrons, par récurrence sur n, que la transformation naturelle $\pi_n : M_{(n)} \to M_n$ est cartésienne (rappelons que l'on sait déjà que $\mathbb{M}_{(n)}$ et $\mathbb{M}_n$ sont des monades cartésiennes). Comme $\pi_0 = Id$, la propriété est vraie à l'origine. Supposons donc π_n cartésienne et montrons que π_{n+1} l'est encore. On constate déjà que les deux morphismes de monades $\overline{\pi}_n : \overline{M}_{(n)} \to \overline{M}_n$ et $p_n : \Omega_n \to \overline{\mathbb{M}}_{(n)}$ sont eux aussi cartésiens sur $\mathbb{C}_n = U_n$-Cat$(\mathbb{E}_n)$ (pour le premier cela résulte de l'hypothèse de récurrence et pour le second, du fait que ce morphisme provient d'une opérade sur $\overline{\mathbb{M}}_{(n)}$). Mais on sait que $\mathbb{C}_n \simeq \mathbb{E}^{\mathbb{C}h}_{n+1}$ (par le 2.1). Notons c_n cet isomorphisme. On constate que le foncteur c_n commute avec $\overline{M}_n$, $\overline{M}_{(n)}$ et $\overline{\pi}_n$ dans le sens où, comme nous venons de le voir au (a), dans la catégorie $\mathbb{E}^{\mathbb{C}h}_{n+1}$, la notation $\overline{\pi_n}$ signifie que ce morphisme de monade provient d'un morphisme de loi distributive au niveau de $\mathbb{E}_{n+1}$. D'un autre coté, si on note $p'_n : \Omega'_n \to \overline{\mathbb{M}}_{(n)}$ l'image de p_n par c_n, on constate que p'_n provient aussi d'un morphisme de loi distributive (grâce au 1.4.3 et à (a)). Les deux morphismes de lois distributives signalés ici sont cartésiens ainsi que leur composé. Il suffit alors d'appliquer les résultats de la partie (a) de ce sous-paragraphe pour conclure que π_{n+1} est cartésien (après avoir remarqué que le morphisme composé $q_n : \Omega_n \to \overline{\mathbb{M}}_{(n)}$ sur $\mathbb{C}_n$ et le morphisme suivant sur $\mathbb{E}_{n+1}^{\mathbb{C}h}$

$$\Omega'_n \xrightarrow{p'_n} \overline{\mathbb{M}}_{(n)} \xrightarrow{\overline{\pi}_n} \overline{\mathbb{M}}_n$$

produisent le même morphisme de monade π_{n+1} en appliquant à chacun d'eux la procédure donnée au 2.2.1).

2.2.3 Contractilité du morphisme de comparaison

Soit G un n-graphe, et a,b $\in G_k$; alors on note par le symbole a//b le fait que $\partial_0(a) = \partial_0(b)$ et $\partial_1(a) = \partial_1(b)$.

• Soit f : G $\to$ H un morphisme dans n-$\mathbb{G}$r. On dit qu'il est contractile si :

1. Pour tout $0 \leqslant k < n$, tout a,b $\in G_k$ tels que a//b, et tout h $\in H_{k+1}$ vérifiant $\partial_0 h = f_k a$ et $\partial_1 h = f_k b$, il existe g $\in G_{k+1}$ tel que $f_{k+1} g = h$, $\partial_0 g = a$ et $\partial_1 g = b$.
2. Pour tout a,b $\in G_n$ tels que a//b et $f_n a = f_n b$ alors a = b.

On remarque tout d'abord que les morphismes contractiles sont stables par composition et par changement de base dans n-$\mathbb{G}$r.

• Par extension, on dit qu'un morphisme f : G $\to$ H dans U_n-Gr(n-$\mathbb{G}$r) (resp $\mathbb{E}_n$) est contractile si son image par j_n : U_n-Gr(n-$\mathbb{G}$r) $\to$ (n+1)-$\mathbb{G}$r (resp $\gamma_n : \mathbb{E}_n \to$ n-$\mathbb{G}$r) est contractile dans (n+1)-$\mathbb{G}$r (resp. n-$\mathbb{G}$r).

On montre que :

- f : G $\to$ H étant un morphisme U_n-vertical épimorphe dans n-$\mathbb{G}$r (où pour n>0 , U_n : n-$\mathbb{G}$r $\to$ (n-1)-$\mathbb{G}$r est le foncteur d'oubli canonique et pour n=0 on a $U_0 = ! : \mathbb{E}ns \to \mathbb{1}$) le morphisme f' : R $\to$ H' est contractile dans la catégorie U_n-Gr(n-$\mathbb{G}$r) où H' = (H $\overset{Id}{\underset{Id}{\rightrightarrows}}$ H) et R = ($R^1 \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} R^0$), avec R^0 = G et R^1 = G $\times_H$ G, les flèches ∂_0 et ∂_1 étant les projections canoniques. On a aussi noté $f' = (f'^0, f'^1)$ avec $f'^0 = f$ et $f'^1 = f.\partial_1 = f.\partial_0$
- $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$ étant deux monades cartésiennes sur n-$\mathbb{G}$r et $\pi : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ un morphisme cartésien entre ces monades, si π est contractile (*i.e.* pour tout G $\in$ |n-$\mathbb{G}$r|, π_G est contractile) alors $\tilde{\pi} : \tilde{\mathbb{M}} \to \tilde{\mathbb{N}}$ l'est encore dans U_n-Gr(n-$\mathbb{G}$r)
- De ces deux résultats, on en déduit, par récurrence, que $\pi_n : \mathbb{M}_{(n)} \to \mathbb{M}_n$ est contractile. En effet, c'est évidemment le cas pour n = 0 et si c'est vrai à l'ordre n, comme $\tilde{\pi}_n : \tilde{\mathbb{M}}_{(n)} \to \tilde{\mathbb{M}}_n$ et $p_n : \Omega_n \to \tilde{\mathbb{M}}_{(n)}$ sont contractiles sur $\mathbb{E}_{n+1}$ (en notant encore Ω_n la monade sur $\mathbb{E}_{n+1}$ "sous-jacente" à son

homographe sur $\mathbb{C}_n$ - le fait que p_n soit contractile provient de ce que $(p_{n\mathbb{1}})_0$: $\Omega_n(\mathbb{1})_0 \to M(\mathbb{1})$ étant une rétraction, c'est une flèche épimorphe) ainsi que leur composé $q_n = \tilde{\pi}_n.p_n$ On en déduit que $\pi_{n+1} : \mathbb{M}_{(n+1)} \to \mathbb{M}_{n+1}$ est lui-même contractile (car $\pi_{n+1} = q_n\mathrm{Ch}$).

2.3 ∞-catégorification

• On fait un "passage à la limite" de $\mathbb{M}_n$ et $\mathbb{M}_{(n)}$ pour obtenir deux monades (cartésiennes) $\mathbb{M}_\infty$ et $\mathbb{M}_{(\infty)}$ sur ∞-$\mathbb{G}$r. On construit alors un morphisme (cartésien) de comparaison $\pi_\infty : \mathbb{M}_{(\infty)} \to \mathbb{M}_\infty$. Vu les résultats des paragraphes précédents, on définit $\mathbb{M}_\infty$ comme la monade *"∞-catégorie stricte libre sur un ∞-graphe"*. On va construire ensuite, au-dessus de $\mathbb{M}_\infty$, un morphisme entre la monade de Leinster et notre monade $\mathbb{M}_{(\infty)}$. Les algèbres sur $\mathbb{M}_{(\infty)}$ "sont" donc a fortiori des algèbres sur $\mathbb{L}$, c'est-à-dire des ∞-catégories non-strictes (ou faibles) au sens de Leinster

2.3.1 Les U-∞-graphes

• Soit U : $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$ un foncteur (*i.e.* $\mathbb{E}$ une catégorie sur $\mathbb{B}$). Appelons U-∞-graphe (de $\mathbb{E}$) la donnée G = $((G_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\partial_{0k}, \partial_{1k})_{k\in\mathbb{N}})$ où $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'objets de $\mathbb{E}$ et, pour chaque k $\in \mathbb{N}$, ∂_{0k} et ∂_{1k} sont des morphismes $G_{k+1} \to G_k$ qui sont U-verticaux et qui vérifient la condition suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall i \in \{0,1\}\ \partial_{ik}\partial_{0k+1} = \partial_{ik}\partial_{1k+1}$$

Un morphisme d'U-∞-graphe G $\to$ G' est la donnée d'une famille de flèches de $\mathbb{E}$ $(f_k : G_k \to G'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall i \in \{0,1\}\ \partial'_{ik}f_{k+1} = f_k\partial_{ik}$$

Notons U-∞-Gr($\mathbb{E}$) la catégorie des U-∞-graphes de $\mathbb{E}$.
Lorsque $\mathbb{E}$ = $\mathbb{E}$ns et U = ! : $\mathbb{E}$ns $\to \mathbb{1}$, on note simplement ∞-$\mathbb{G}$r cette catégorie (ses objets sont les ∞-graphes, également appelés ensembles globulaires dans la littérature).

Proposition 2.2 *On a un isomorphisme :*

$$U_n\text{-}\infty\text{-}Gr(n\text{-}\mathbb{G}r) \simeq \infty\text{-}\mathbb{G}r$$

<u>Preuve</u> : On construit l'isomorphisme canonique g_n comme suit : étant donné G $\in$ $|U_n$-∞-Gr(n-$\mathbb{G}$r)$|$, on écrit G = $((G_k)_k, (\partial_{0k}, \partial_{1k})_k)$ où $G_k = ((G_k^j)_{j\leqslant n}, (\partial_k^{0j}, \partial_k^{1j})_{j<n})$ et $\partial_{ik} = (\partial_{ik}^j)_{j\leqslant n} : G_{k+1} \to G_k$. On définit alors : g_n(G) = $\overline{G}$ où $\overline{G} = (\overline{G}_k, (\overline{\partial_{0k}}, \overline{\partial_{1k}})_k)$

en posant :
pour $k \leqslant$ n-1, $\overline{G_k} = G_0^k$ et $\overline{\partial_{ik}} = \partial_0^{ik}$,
pour $k \geqslant n$, $\overline{G_k} = G_{k-n}^n$ et $\overline{\partial_{ik}} = \partial_{i(k-n)}^n$.
On a, de même, dans le cas général, un morphisme canonique $\alpha : U_1$-∞-Gr($\mathbb{E}_1$) $\simeq$ U-∞-Gr($\mathbb{E}$) où $\mathbb{E}_1$ = U-Gr($\mathbb{E}$)
Lorsque $\mathbb{E}$ = $\mathbb{E}$ns et U = ! : $\mathbb{E}$ns $\rightarrow \mathbb{1}$ on a vu (au paragraphe 2.1) que $\mathbb{E}_n \simeq$ n-$\mathbb{G}$r.
On en déduit donc un nouvel isomorphisme canonique :

$$\theta_n : U_n\text{-}\infty\text{-Gr}(\mathbb{E}_n) \overset{\rightarrow}{\sim} \infty\text{-}\mathbb{G}\text{r}$$

On a alors la commutation des diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
U_{n+1}\text{-}\infty\text{-Gr}(\mathbb{E}_{n+1}) \arrow[rr, "\alpha", "\sim"'] \arrow[dr, "\wr", "\theta_{n+1}"'] & & U_n\text{-}\infty\text{-Gr}(\mathbb{E}_n) \arrow[dl, "\theta_n", "\wr"'] \\
& \infty\text{-}\mathbb{G}\text{r} &
\end{tikzcd}$$

• Si maintenant $\mathbb{M}$ est une monade sur $\mathbb{E}$ dont l'endofoncteur M commute aux flèches U-verticales, alors on prolonge cette monade à U-∞-Gr($\mathbb{E}$). Cette nouvelle monade est notée $\check{\mathbb{M}}$ (clairement $(\check{\mathbb{M}}G)_k = M(G_k)$, $(\check{\eta}_G)_k = \eta_{(G_k)}$, $(\check{\mu}_G)_k = \mu_{(G_k)}$). Lorsque $\mathbb{M}$ est cartésienne ou lorsque M commute aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite, il en va de même pour $\check{\mathbb{M}}$.
Lorsqu'on part d'une structure itérative ($\mathbb{E} \xrightarrow{U} \mathbb{B}$, $\mathbb{M}$) on sait qu'on construit une monade $\mathbb{M}_1$ sur $\mathbb{E}_1$ (voir le paragraphe 2.1) qui devient $\check{\mathbb{M}}_1$ sur U_1-∞-Gr($\mathbb{E}_1$). On construit alors un morphisme de monade u : $\alpha^{-1}\check{\mathbb{M}} \rightarrow \check{\mathbb{M}}_1$ sur U_1-∞-Gr($\mathbb{E}_1$) (où $\alpha^{-1}\check{\mathbb{M}}$ désigne l'image par l'isomorphisme α^{-1} de la monade $\check{\mathbb{M}}$ sur U_1-∞-Gr($\mathbb{E}_1$)). Il est défini sur G $\in |U_1$-∞-Gr($\mathbb{E}_1$)$|$ par : $(u_G)_j = \tilde{M}\lambda_{(G_j)}$ (où (Ch, λ, ϵ) désigne la monade des chemins sur $\mathbb{E}_1$ comme dans 1.3.3)

2.3.2 La monade $\mathbb{M}_\infty$

En partant de la structure itérative ($\mathbb{E}$ns $\rightarrow \mathbb{1}, \mathbb{I}$d) (l'exemple initial), on obtient sur chaque catégorie U_n-∞-Gr($\mathbb{E}_n$) des morphismes de monades

$$u_n : \alpha^{-1}\check{\mathbb{M}}_n \rightarrow \check{\mathbb{M}}_{n+1}$$

que l'on peut transporter par θ_{n+1} sur ∞-$\mathbb{G}$r. On obtient ainsi une suite de morphismes :

$$\theta_0\check{\mathbb{M}}_0 \overset{\theta_1 u_0}{\to} \theta_1\check{\mathbb{M}}_1 \overset{\theta_2 u_1}{\to} \theta_2\check{\mathbb{M}}_2 \to \ldots \to \theta_n\check{\mathbb{M}}_n \overset{\theta_{n+1}u_n}{\to} \theta_{n+1}\check{\mathbb{M}}_{n+1} \to \ldots$$

La limite inductive de cette suite donne une monade, notée $\mathbb{M}_\infty$, sur ∞-$\mathbb{G}$r. Cette monade est cartésienne et son endofoncteur commute aux $\overrightarrow{\mathbb{N}}$-limites à droite.

Proposition 2.3 *On a un isomorphisme* $(\infty\text{-}\mathbb{G}r)^{\mathbb{M}_\infty} \simeq \infty\text{-}\mathbb{C}at$ *(où ∞-$\mathbb{C}at$ désigne la catégorie des ∞-catégories strictes).*

Preuve

- On remarque déjà que pour G $\in |\infty\text{-}\mathbb{G}r|$ on a, pour tout n $\in \mathbb{N}$: $tr_n\check{M}_nG = M_ntr_nG$, $tr_n\check{\eta}_{nG} = \eta_{ntr_nG}$, $tr_n\check{\mu}_{nG} = \mu_{ntr_nG}$, où $\mathbb{M}_n$ désigne aussi bien la monade sur $\mathbb{E}_n$ que son image par $\gamma_n : \mathbb{E}_n \to$ n-$\mathbb{G}$r, sur n-$\mathbb{G}$r, et où tr_n : ∞-$\mathbb{G}$r $\to$ n-$\mathbb{G}$r est le foncteur troncature défini par $tr_n((G_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\partial_{0k}, \partial_{1k})_{k\in\mathbb{N}}) = ((G_k)_{k\leqslant n}, (\partial_{0k}, \partial_{1k})_{k<n})$.
- D'un autre coté, si on note $l_n : \check{\mathbb{M}}_n \to \mathbb{M}_\infty$ les morphismes de monades provenant du cône limite, on constate que, pour G $\in |\infty\text{-}\mathbb{G}r|$ et $k \leqslant n$, $(l_{nG})_k : (\check{M}_nG)_k \to (M_\infty G)_k$ est bijectif et $(l_{n+1G})_k = (l_{nG})_k$
- Ainsi lorsque (G, a) $\in |(\infty\text{-}\mathbb{G}r)^{\mathbb{M}_\infty}|$ on vérifie que : (tr_nG, a^n) $\in |(\text{n-}\mathbb{G}r)^{\mathbb{M}_n}|$, où a^n est la flèche composée suivante dans n-$\mathbb{G}$r :

$$M_ntr_nG = tr_n\check{M}_nG \overset{tr_nl_{nG}}{\to} tr_nM_\infty G \overset{tr_na}{\to} tr_nG$$

Alors par les isomorphismes $(\text{n-}\mathbb{G}r)^{\mathbb{M}_n} \xrightarrow{\sim}$ n-$\mathbb{C}$at on obtient une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de n-catégories où $U_{n+1}(C_{n+1}) = C_n$, pour tout n. On construit ainsi une ∞-catégorie. On vérifie alors que la correspondance $(\infty\text{-}\mathbb{G}r)^{\mathbb{M}_\infty} \to \infty$-$\mathbb{C}$at, ainsi définie sur les objets, est fonctorielle et définit un isomorphisme.

2.3.3 La monade $\mathbb{M}_{(\infty)}$

• La méthode de construction de la monade $\mathbb{M}_\infty$ ne peut s'appliquer pour la construction de $\mathbb{M}_{(\infty)}$, nous la construirons donc terme à terme.

Avant de construire $\mathbb{M}_{(\infty)}$, on remarque que :
pour G $\in |(\text{n+1})\text{-}\mathbb{G}r|$ on a les identités suivantes :

$$U_nU_{n+1}M_{(n+1)}G = U_nM_{(n)}U_{n+1}G,$$
$$U_nU_{n+1}\eta_{(n+1)G} = U_n\eta_{(n)G}$$
$$U_nU_{n+1}\mu_{(n+1)G} = U_n\mu_{(n)U_{n+1}G}$$

où $\mathbb{M}_{(n)}$ désigne aussi bien la monade sur $\mathbb{E}_n$ que son image sur n-$\mathbb{G}$r (cela provient du fait que, d'une façon générale, à la deuxième étape de la construction de la monade $\mathbb{M}_{(1)}$ l'opérade Ω_0 est en fait une U-opérade).
Les identités précédentes nous conduisent à poser, pour G $\in |\infty\text{-}\mathbb{G}r|$ et k $\in \mathbb{N}$:

$$(M_{(\infty)}G)_k = (M_{(k+1)}tr_{k+1}G)_k \text{ et } \partial_{ik}^{(\infty)} = \partial_{ik}^{(k+1)}$$

où $\partial_{ik}^{(n)} : (M_{(n)}G)_{k+1} \to (M_{(n)}G)_k$ pour n $\in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ désigne les applications source et but de $M_{(n)}G$

Grâce aux identités ci-dessus on montre que $M_{(\infty)}$ est l'endofoncteur d'une monade $\mathbb{M}_{(\infty)}$ sur ∞-$\mathbb{G}$r (où $(\eta_{(\infty)G})_k = (\eta_{(k+1)tr_{k+1}G})_k$ et $(\mu_{(\infty)G})_k = (\mu_{(k+1)tr_{k+1}G})_k)$.

Remarque : Inversement, on aurait pu, par cette méthode construire la monade $\mathbb{M}_\infty$. Mais c'est la méthode "globale" de construction que nous avons retenue.

• On construit ensuite un morphisme de monade $\pi_\infty : \mathbb{M}_{(\infty)} \to \mathbb{M}_\infty$ Il est défini sur un objet G $\in |\infty$-$\mathbb{G}$r$|$ par :

$$(\pi_{\infty G})_k = ((M_{(\infty)}G)_k = (M_{(k+1)}tr_{k+1}G)_k \xrightarrow{(\pi_{k+1 tr_{k+1}G})_k} (M_{k+1}tr_{k+1}G)_k$$
$$= (\check{M}_{k+1}G)_k \xrightarrow{(l_{k+1}G)_k} (M_\infty G)_k)$$

La vérification que π_∞ est bien un morphisme de monade résulte des identités suivantes : $U_n U_{n+1}\pi_{n+1G} = U_n \pi_{nU_{n+1}G}$, pour tout n $\in \mathbb{N}$ et tout G $\in |$(n+1)-$\mathbb{G}$r$|$.

Le morphisme π_∞ est cartésien, et pour tout G $\in |\infty - \mathbb{G}r|$ on constate que $\pi_{\infty G}$: $M_{(\infty)}G \to M_\infty G$ est une flèche contractile (ce qui signifie, dans le cas infini, qu'elle vérifie seulement la première des deux conditions données au 2.2.3).

- Le morphisme cartésien $\pi_\infty : M_{(\infty)} \to M_\infty$ peut aussi être vu comme une opérade sur $\mathbb{M}_\infty$. Grâce à l'axiome du choix on peut la munir d'une contraction (voir [12]). Il existe donc un morphisme de monade $\mathbb{L} \to \mathbb{M}_{(\infty)}$ au-dessus de $\mathbb{M}_\infty$ (qui commute aux contractions et qui est même unique pour cette propriété), où $\mathbb{L}$ désigne la monade de Leinster (voir [12]). Les algèbres sur $\mathbb{M}_{(\infty)}$ "sont" donc a fortiori des algèbres sur $\mathbb{L}$, c'est-à-dire des ∞-catégories non-strictes (ou faibles) au sens de Leinster.

Références

[1] J. Baez and J. Dolan, *Categorification*, Contemp. Math. AMS, **230**, 1998, 1-36.

[2] M. A. Batanin, *Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak n-categories*, Adv Math., **136**, 1998, 39-103.

[3] M. A. Batanin, *On the Penon method of weakening of algebraic structures*, J. Pure Appl. Algebra, **172**, 2002, 1-23.

[4] D. Bourn, *The structural nature of the nerve functor for n-groupoids*, Appl. Categorical Structures, **8**, 2000, 81-113.

[5] D. Bourn, *n-groupoids from n-truncated simplicial objects as a solution to a universal problem*, J. Pure Appl. Algebra, **154**, 2000, 71-102.

[6] A. Burroni, *$\mathbb{T}$-categories*, Cahiers de Topologie et Géom. Diff., **12**, 1971, 215-321.

[7] A. Burroni, *Algebres graphiques (sur un concept de dimension dans les langages formels)*, Cahiers de Topologie et Géom. Diff., **22**, 1981, 249-265.

[8] L. Crane *Clock and category : is quantum gravity algebraic ?*, Jour. Math. Phys., **36**, 1995, 6180-6193.

[9] L. Crane and I. Frenkel, *Four dimensional topological quantum field theory, Hopf categories and the canonical bases*, Jour. Math. Phys., **35**, 1994, 5136-5154.

[10] T. Leinster, *General operads and multicategories*, e-print math CT/9810053, 1997.

[11] T. Leinster, *Structures in higher dimensional category theory*, preprint University of Cambridge, 1998, pp 80.

[12] T. Leinster, *A survey of definitions of n-categories*, e-print math CT/0107188, **1**, 2001.

[13] J. Penon, *Approche polygraphique des ∞-catégories non strictes*, Cahiers de Topologie et Géom. Diff. ctégoriques, **40**, 1999, 31-80.