CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

P. AKUESON

Géométrie de l'espace tangent sur l'hyperboloïde quantique

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 42, nº 1 (2001), p. 2-50

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_2001__42_1_2_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET
GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Volume XLII-1 (2001)

GEOMETRIE DE L'ESPACE TANGENT SUR L'HYPERBOLOIDE QUANTIQUE

by P. AKUESON

Abstract

We introduce the tangent space on a quantum hyperboloid. We define an action of this tangent space on the corresponding "quantum function space" $\mathcal{A}$, what converts the elements of the tangent space into "braided vector fields". The tangent space is shown to be a projective $\mathcal{A}$-module and we define a quantum (pseudo)metric and a quantum connection (partially defined) on it.

1 introduction

Il est bien connu depuis les années 60 que toutes les constructions principales de la géométrie classique se généralisent dans le cadre de la superthéorie. Dans les années 80, plusieurs notions et constructions de la géométrie classique et de la superthéorie s'étendent au cas de la géométrie tressée ("braided geometry"). En particulier il existe une généralisation naturelle de la notion d'algèbre commutative (ou super-commutative) liée aux opérateurs de tresses involutifs (appelés aussi symétries). En effet soit A une algèbre associative de produit noté $\circ$ et munie d'un opérateur de tresse[1] S involutif (i.e. $S^2 = id$)

$$S : A^{\otimes 2} \to A^{\otimes 2},$$

A est appelée une *algèbre S-commutative* si :

[1]Nous appelons opérateur de tresse (ou un tressage) une solution de l'équation de Yang-Baxter quantique (EYBQ) :

$$S^{12} S^{23} S^{12} = S^{23} S^{12} S^{23}$$

où $S^{12} = S \otimes id$, $S^{23} = id \otimes S$.

1. $\circ = \circ S$,

2. $S \circ^{12} = \circ^{23} S^{12} S^{23}$.

Dans ce cas, certains aspects du calcul différentiel tressé ont été développés dans [GRR]. Plus particulièrement la notion de champ de vecteurs se généralise (dans l'esprit de la superthéorie) de la façon suivante : une application linéaire $X : A \to A$ est appelée un *champ de vecteurs tressés* si elle vérifie la S-analogue de la règle de Leibniz

$$X(f \circ g) = X(f) \circ g + \circ ev^{23} S^{12} (X \otimes f \otimes g) \tag{1}$$

où ev est l'application d'évaluation $X \otimes f \to X(f)$. Nous supposons ici que S peut être étendu à un tressage (noté encore S) "transposant" les fonctions et les opérateurs et qu'en outre l'application d'évaluation commute avec S dans le sens suivant

$$e v^{23} S^{12} S^{23} (X \otimes f \otimes g) = S e v^{12} (X \otimes f \otimes g)$$

(il en est de même en remplaçant la fonction g par un opérateur Y).

Ainsi, lorsque A est une algèbre S-commutative, les champs de vecteurs sur une telle algèbre peuvent être définis par la S-analogue de la règle de Leibniz (1).

Si l'algèbre A est plutôt munie d'une application de tresse non involutive (c'est juste le cas de l'algèbre que nous considérons ici) il n'existe aucune définition générale de l'analogue tressée d'une algèbre commutative. (Comme le montre plusieurs exemples y compris celui de l'hyperboloïde quantique, l'application naïve des relations de la S-commutativité (çi-dessus) n'est plus raisonnable). Autrement dit, il n'est pas évident de dire ce qu'est une algèbre S-commutative ni de décrire (dans l'esprit de la superthéorie) les éléments de la géométrie tressée. Par exemple la S-analogue de la règle de Leibniz définie par la relation (1) n'est plus valable et donc, il n'est pas trivial de décrire l'espace tangent d'une variété quantique. (Soulignons que pour les variétés quantiques liées aux applications de tresses involutives, l'espace tangent peut être décrit en termes de champs de vecteurs tressés.)

Le but de cet article est de définir l'espace tangent sur l'hyperboloïde quantique, d'étudier ses propriétés et d'introduire les analogues tressés de certaines structures classiques (métrique, connexion). Soulignons que nous traitons (dans l'esprit de [S1]) l'espace tangent comme un module projectif de rang fini sur l'algèbre des "fonctions polynômes sur l'hyperboloïde quantique". Rappelons que dans [S1], Serre a établit une correspondance biunivoque entre les fibrés vectoriels et les modules projectifs de rang fini sur l'anneau des coordonnées.(Une analogue de cette correspondance pour les variétés lisses compactes a été établie par R.G.Swan.)

L'hyperboloïde quantique (ou tressé) est le plus simple exemple d'*orbite quantique.* Par orbite quantique, nous entendons les algèbres qui vérifient les propriétés suivantes :

1. elles sont $U_q(\mathbf{g})$-covariantes (i.e. leur produit $\circ$ est $U_q(\mathbf{g})$-covariant

$$X \circ (a \otimes b) = \circ \Delta X (a \otimes b), \qquad \forall\, X \in U_q(\mathbf{g}) \tag{2}$$

où a et b sont des éléments de l'algèbre considérée),

2. elles représentent une déformation plate [2] de leurs analogues classiques : i.e. des orbites habituelles dans $\mathbf{g}^*$ (plus précisément, les algèbres de fonctions sur de telles orbites),

3. elles sont en un certain sens commutatives.

La dernière propriété est la plus difficile à traiter, car les orbites quantiques font partie d'une famille d'algèbres $U_q(\mathbf{g})$-covariantes et ce n'est pas toujours facile de distinguer dans cette famille une algèbre "commutative" au sens tressé (voir [DGK] où ce problème est discuté). Pour expliquer le problème décrivons d'abord les objets infinitésimaux sur de telles algèbres.

Soit $\mathcal{M}$ une variété lisse (en particulier une orbite dans $\mathbf{g}^*$) et

$$\rho : \mathbf{g} \to \mathrm{Vect}\,(\mathcal{M})$$

[2]Rappelons que l'algèbre $\mathcal{A}_\hbar$ (où $\hbar$ est un paramètre formel) est une déformation plate de l'algèbre $\mathcal{A}_0$, si on a

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_\hbar / \hbar \mathcal{A}_\hbar$$

et $\mathcal{A}_0 \otimes \mathbf{K}[[\hbar]]$ est isomorphe à $\mathcal{A}_\hbar$ comme des $\mathbf{K}[[\hbar]]$-modules (ici le produit tensoriel est complété en topologie $\hbar$-adique).

la représentation de $\mathbf{g}$ sur l'espace des champs de vecteurs sur $\mathcal{M}$. Associons à la R-matrice

$$R = \sum_{\alpha \in \Delta^+} X_\alpha \wedge X_{-\alpha} \quad \in \wedge^2(\mathbf{g})$$

où $\{H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha}\}$ est une base de Cartan-Weyl en normalisation de Chevalley de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ et Δ^+ désigne son système de racines positives (en supposant une décomposition triangulaire fixée de $\mathbf{g}$), le crochet de R-matrice

$$\{f, g\}_R = \mu < \rho^{\otimes 2}(R), df \otimes dg >, \quad f, g \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$$

où μ est le produit dans $\mathrm{Fun}(\mathcal{M})$.

Dans le cas général, ce crochet ne satisfait pas à la relation de Jacobi. Par conséquent, il n'est pas un crochet de Poisson. Mais il l'est sur certaines variétés dites de type R-matrices dans [GP]. C'est juste le cas des orbites dans $\mathbf{g}^*$ qui admettent comme déformations plates, des algèbres $U_q(\mathbf{g})$-covariantes. (Mais il existe quand même des orbites dans $\mathbf{g}^*$ qui sont des déformations plates $U_q(\mathbf{g})$-covariantes et sur lesquelles le crochet de Poisson correspondant est un peu différent de $\{\,,\}_R$, voir [DGS].) Il est facile de voir que sur de telles orbites, le crochet de Kirillov-Kostant-Souriau (KKS) noté $\{\,,\}_{KKS}$ (qui est la restriction sur $\mathbf{g}^*$ tout entier du crochet linéaire dit de Lie-Poisson) et le crochet de R-matrice sont compatibles et donc sur elles, ces deux crochets engendrent ce qu'on appelle le pinceau de Poisson. Ainsi la famille de crochets définie par

$$\{\,,\}_{a,b} = a\{\,,\}_{KKS} + b\{\,,\}_R, \tag{3}$$

est une famille de crochets de Poisson.

Si l'on peut dire qu'un crochet de Poisson définit "une direction de déformation", un pinceau de Poisson nous donne un plan de ces directions. La quantification double (i.e. simultanée) de ce pinceau de Poisson conduit aux algèbres non commutatives tressées. Ces algèbres dépendent de deux paramètres. Leur produit est toujours $U_q(\mathbf{g})$-covariant.

Dans cet article, un cas particulier de telles algèbres est étudié. Notamment celle qui découle de l'hyperboloïde plongé comme une orbite (par rapport à l'action coadjointe du groupe $SL(2)$) d'un élément semi-simple de $sl(2)^*$ (nous regardons plus précisément une famille d'orbites). Etant l'orbite d'un élément semi-simple la variété initiale est une variété algébrique affine fermée. Notons que dans ce cas particulier il n'est pas difficile de distinguer dans la famille des algèbres $U_q(sl(2))$-covariantes, une algèbre "commutative" tressée.

Soulignons que l'hyperboloïde quantique a été introduit par Podlès [P] sous le nom de la sphère quantique. En fait, la sphère quantique est l'hyperboloïde quantique munie d'une involution (nous ne regardons pas ici le problème d'une définition raisonnable d'une involution sur l'hyperboloïde quantique). Nous nous contentons de considérer simplement l'hyperboloïde quantique sans involution. Toutefois la forme compacte ou non de la variété initiale n'a aucune importance, puisque nous ne regardons que les fonctions polynômes restreintes sur cette variété. (Par un changement de variables convenable nous pouvons passer de l'algèbre des fonctions sur la sphère à celle des fonctions sur l'hyperboloïde correspondant et réciproquement.)

Certains aspects de l'algèbre provenant de la quantification du pinceau de Poisson (3) sur l'hyperboloïde ont été examinés dans [DG], [DGR], [GV]. En particulier il a été montré que cette algèbre est sans multiplicité (i.e. chaque module irréductible de dimension finie entre dans la décomposition en $U_q(sl(2))$-modules irréductibles de cette algèbre au maximum une fois).

Désignons par $\mathcal{A}^c_{\hbar,q}$ cette algèbre à deux paramètres qui est le résultat de la quantification double du pinceau de Poisson sur l'hyperboloïde plongé comme une orbite dans $sl(2)^*$. En gros, nous disons que le paramètre $\hbar$ est celui de la quantification du crochet de KKS, q celui de tressage et c numérote les orbites quantiques. Dans le cas où $\hbar = 0$, nous obtenons l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ qui est considérée comme la q-analogue de l'algèbre commutative correspondante. (Elle est parfois appelée sphère quantique standard.) C'est notre algèbre principale : "l'algèbre des fonctions polynômes restreintes sur l'hyperboloïde quantique" (où "l'anneau des coordonnées quantiques"). Ainsi dans la suite, tous les modules considérés (dans le cas quantique) seront des modules sur cette algèbre. Nous introduisons alors les notions de champs de vecteurs, d'espace tangent sur l'hyperboloïde quantique. Nous traitons cet espace tangent comme un $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module et nous l'appellons "module tangent" sur l'hyperboloïde quantique.

Commençons par le module tangent. Dans le cas classique, il est formé par des champs de vecteurs tangents à la variété sous considération (ici la sphère ou l'hyperboloïde). Quels sont les analogues quantiques de ces champs ?

Les champs de vecteurs auxquels l'on peut spontanément penser, sont les générateurs X, Y, H du groupe quantique (GQ) $U_q(sl(2))$ (voir Section 2). Mais si nous introduisons le module tangent comme toutes les combinaisons linéaires (ayant pour coefficients les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$) de ces opérateurs, nous n'obtenons pas une déformation plate du module tangent initial. En effet, notons $\mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)$ l'algèbre des fonctions polynômes restreintes sur la sphère (S^2). On peut décrire le "module tangent" sur la sphère comme toutes les combinaisons linéaires aux coefficients-fonctions de trois rotations infinitésimales

$$X = z\partial_y - y\partial_z,\ Y = x\partial_z - z\partial_x,\ Z = y\partial_x - x\partial_y. \tag{4}$$

Ces rotations correspondent aux générateurs standards x, y, z de $\mathbf{g} = so(3) = su(2)$ qui opèrent sur l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ elle-même par l'action adjointe, et leur extension sur les éléments de

$$\mathrm{Fun}\,(\mathbf{g}^*) = \mathrm{Sym}\ (\mathbf{g})$$

s'effectue par la règle de Leibniz. Il est facile de voir que sur l'algèbre $\mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)$, les opérateurs X, Y, Z satisfont à la relation

$$x\,X + y\,Y + z\,Z = 0.$$

En passant à la forme non compacte (i.e. à l'hyperboloïde H), nous avons la relation

$$xY + yX + \frac{h}{2}H\ = 0 \tag{5}$$

avec les générateurs standards x, y, h de l'algèbre $sl(2)$ et X, Y, H sont ici les rotations hyperboliques infinitésimales correspondantes. Notons Fun (H) l'algèbre des fonctions polynômes restreintes sur l'hyperboloïde. Finalement nous pouvons définir l'espace tangent sur l'hyperboloïde comme un module facteur d'un module libre A^3 de rang 3 (ici $A = \mathcal{A}^c_{0,1} = \mathrm{Fun}\,(\mathrm{H})$) de la façon suivante :

$$aX + bY + cH \quad \text{modulo} \quad f.(xY + yX + \frac{h}{2}H)$$

où a, b, c, $f \in \mathrm{Fun}\,(\mathrm{H})$. Notons $T(\mathrm{H})$ le Fun (H)-module tangent sur l'hyperboloïde. Nous avons en outre l'action

$$T(\mathrm{H}) \otimes A \to A$$

qui signifie que les éléments du A-module (disons gauche) $T(\mathrm{H})$ sont présentés comme des opérateurs sur A et on appelle le plongement

$$sl\,(2) \quad \hookrightarrow \quad T(\mathrm{H}). \tag{6}$$

une *ancre.*

Notre but est de définir le module tangent sur l'hyperboloïde quantique muni d'une *ancre quantique.*

Contrairement au cas classique, les générateurs X, Y, H du GQ $U_q(sl(2))$ ne satisfont à aucune relation du type (5) et donc la platitude de la déformation du module tangent (engendré par les opérateurs X, Y, H) n'a pas lieu.

Nous suggérons d'autres candidats pour le rôle des q-analogues des opérateurs X, Y, $H\,(\in U(sl(2)))$, de sorte qu'ils satisfassent à la q-analogue de la relation (5). Donc l'analogue quantique du module tangent peut être introduit de façon analogue au cas classique. La construction se fait en deux étapes :

- Primo, nous définissons l'analogue tressé du crochet de Lie de $sl(2)$ (il a été introduit pour la première fois dans [DG] et généralisé après dans [LS]). Cela nous permet d'introduire l'ad-action de l'algèbre "*$sl(2)$ tressée*" sur elle-même. Il est facile de vérifier que les opérateurs correspondants aux générateurs de l'algèbre $sl(2)$ tressée, satisfont à une relation qui est la q-analogue de la relation (5). Cela incite alors à définir l'analogue quantique du module tangent comme un module quotient d'un module libre en utilisant cette relation.

• Secundo, si nous voulons avoir une action de ce module sur l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$, nous devons étendre l'action des opérateurs adjoints qui est bien définie pour le moment sur les éléments de degré un de l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ à toute fonction polynômes de degré supérieur à un, sur l'hyperboloïde quantique.

Malheureusement pour le cas que nous traitons, il n'existe aucune forme tressée de la règle de Leibniz. Nous présentons une autre méthode pour étendre l'action des opérateurs adjoints provenant de l'ad-action de l'algèbre $sl(2)$ tressée, sur toute l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ de sorte que la q-analogue de la relation (5) soit toujours satisfaite.

En fait notre construction nous amène à deux modules tangents : celui traité comme un $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module gauche noté $T(\mathrm{H}_q)_l$ et celui traité comme un $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module droit noté $T(\mathrm{H}_q)_r$. Le problème est de les identifier, c'est-à-dire construire un isomorphisme (dans la catégorie considérée[3]) entre ces deux modules. Notons qu'une telle identification est une étape indispensable pour définir par exemple une (pseudo)métrique tressée sur l'hyperboloïde quantique. Le problème est que notre méthode pour introduire une telle métrique consiste à définir d'abord un "couplage" $<,>$ sur $T(\mathrm{H}_q)_l \otimes_{\mathbf{K}} T(\mathrm{H}_q)_r$

$$<,>: T(\mathrm{H}_q)_l \otimes_{\mathbf{K}} T(\mathrm{H}_q)_r \to \mathcal{A}^c_{0,q}.$$

(Ici, $T(\mathrm{H}_q)_l$ est un $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module gauche et $T(\mathrm{H}_q)_r$ un $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module droit.)

Le passage à une (pseudo)métrique sur

$$T(\mathrm{H}_q)_r \otimes_{\mathbf{K}} T(\mathrm{H}_q)_r \to \mathcal{A}^c_{0,q} \qquad \text{ou} \qquad T(\mathrm{H}_q)_l \otimes_{\mathbf{K}} T(\mathrm{H}_q)_l \to \mathcal{A}^c_{0,q}$$

ne peut être effectué qu'après l'identification des modules $T(\mathrm{H}_q)_l$ et $T(\mathrm{H}_q)_r$:

$$T(\mathrm{H}_q)_l \approx T(\mathrm{H}_q)_r.$$

Soulignons que sans une telle identification, il n'est pas évident de sortir le facteur f dans le terme

$$<X, fY> \quad X, Y \in T(\mathrm{H}_q)_l, \ f \in \mathcal{A}^c_{0,q}.$$

[3]Par définition, un morphisme dans cette catégorie est introduit comme une application qui commute à l'action de $U_q(sl(2))$.

Plus précisément sans cette identification on ne peut pas définir le produit tensoriel $T(\mathrm{H}_q)_\epsilon \otimes_{\mathcal{A}^c_{0,q}} T(\mathrm{H}_q)_\epsilon$ où $\epsilon = l, r$.

Nous construisons également une connexion (partiellement définie, i.e. sur un sous espace de $T(\mathrm{H}_q)_\epsilon \otimes T(\mathrm{H}_q)_\epsilon$) tressée. Le problème dans ce cas est que, pour étendre cette connexion sur $T(\mathrm{H}_q)_\epsilon \otimes T(\mathrm{H}_q)_\epsilon$, il faut pouvoir étendre le crochet de Lie tressé sur cet espace. Malheureusement nous ne savons pas prolonger (par les méthodes existantes) sur $T(\mathrm{H}_q)_\epsilon \otimes T(\mathrm{H}_q)_\epsilon$ le crochet de Lie tressé initialement défini sur $sl(2)$.

Précison que les critères de raison d'être pour les objets et les opérateurs que nous introduisons sont de deux sortes : la platitude de la déformation et la $U_q(sl(2))$-covariance.

Le contenu de cet article est le suivant. Dans la Section 2, nous présentons notre algèbre principale : celle des fonctions sur l'hyperboloïde quantique. Nous rappelons dans la Section 3, l'algèbre enveloppante tressée de $sl(2)$. Dans la Section 4, nous définissons les *champs de vecteurs tressés* et l'espace tangent (considéré comme un $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module) sur l'hyperboloïde quantique muni d'une ancre quantique. Dans la Section 5 nous montrons que ce $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module tangent est projectif. Dans la Section 6 nous définissons et construisons une (pseudo)[4]métrique et une connexion (partiellement définie) tressées sur l'hyperboloïde quantique. Dans la dernière Section, nous proposons une façon canonique pour identifier les modules tangents gauche et droit sur l'hyperboloïde quantique.

Dans toute la suite, le corps de base $\mathbf{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et le paramètre q ($\in \mathbf{K}$) est générique.

Remerciemments : D. Gurevich m'a soumis ce problème et m'a constamment guidé dans sa résolution et dans sa rédaction. Je l'en remercie.

[4]Pseudo signifie que son analogue classique n'est pas définie positive.

2 Hyperboloïde quantique

Rappelons d'abord la présentation de l'hyperboloïde classique.

Soient :
$sl(2)$ l'algèbre de Lie du groupe de Lie $SL(2)$,
$[\,,\,]$ le crochet de Lie sur $sl(2)$,
$sl(2)^*$ l'espace (vectoriel) dual de $sl(2)$ et
(X, Y, H) la base de Cartan-Weyl de $sl(2)$.

La représentation “adjointe gauche” (Ad) de $SL(2)$:

$$Ad_g X = g X g^{-1}, \quad g \in SL(2),\ X \in sl(2)$$

fait de $sl(2)$ un $SL(2)$-module gauche. (Notons que Ad désigne souvent la représentation adjointe droite. Mais nous préférons réaliser $sl(2)$ comme un $SL(2)$-module gauche.)

Par la représentation coadjointe associée et notée Ad^*, l'espace $sl(2)^*$ est un $SL(2)$-module droit.

Soit ω l'élément de $sl(2)^*$ défini par :

$$\omega(H) = a,\ \omega(X) = \omega(Y) = 0,\ a \in \mathbf{K},\ a \neq 0.$$

Désignons par $\mathcal{O}_\omega$ l'orbite de l'élément ω par la représentation coadjointe Ad^* :

$$\mathcal{O}_\omega = \{ Ad_g{}^*(\omega) \ / \ g \in SL(2) \}.$$

Le stabilisateur de l'élément ω est juste le sous-groupe de Cartan $\mathbf{H}$ de $SL(2)$. Par conséquent comme un espace homogène :

$$\mathcal{O}_\omega = SL(2)/\mathbf{H}.$$

Présentons maintenant l'orbite $\mathcal{O}_\omega$ comme une variété algébrique affine.

Considérons $\mathrm{Fun}\,(\mathrm{sl}(2)^*)$, l'algèbre des fonctions polynômes sur l'espace $sl(2)^*$. Soit $\mathrm{Sym}\,(\mathrm{sl}(2))$ l'algèbre symétrique de l'espace $sl(2)$. On a alors de manière naturelle :

$$\mathrm{Fun}\,(\mathrm{sl}(2)^*) = \mathrm{Sym}\,(\mathrm{sl}(2)).$$

Soit $U(sl(2))$ l'algèbre enveloppante de $sl(2)$. Elle est une algèbre filtrée. Soit $\mathrm{Gr}\,U(sl(2))$ l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée

$U(sl(2))$. On a : $\mathrm{Gr}\, U(sl(2)) \cong \mathrm{Sym}\ (\mathrm{sl}(2))$ par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW).

Soit C l'élément de Casimir de $U(sl(2))$

$$\mathrm{C} = XY + YX + \frac{H^2}{2} ,$$

C, est un générateur du centre de l'algèbre $U(sl(2))$. Associons à chaque élément Z de $U(sl(2))$ son image (notée z) dans $\mathrm{Gr}\, U(sl(2))$ ($\approx$ Sym (sl(2))). Alors par cette correspondance, l'image (que nous notons encore C) de l'élément de Casimir dans Sym (sl(2)) est

$$\mathrm{C} = 2\,xy + \frac{h^2}{2}.$$

Il est bien connu que toute orbite de la représentation coadjointe Ad^* est contenue dans la variété algébrique affine définie par :

$$\mathrm{C} = 2\,xy + \frac{h^2}{2} = c \text{ où } c \text{ est une constante dans } \mathbf{K}.$$

En particulier si $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ et $c \neq 0$, l'orbite $\mathcal{O}_\omega$ coïncide avec l'hyperboloïde (classique) H d'équation

$$2xy + \frac{h^2}{2} = c = \mathrm{C}(\omega) = \frac{a^2}{2}. \tag{7}$$

Si $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, l'hyperboloïde contient parfois une orbite, parfois deux.

Pour $c = 0$, (7) définit le cône qui est composé de deux orbites $\{0\}$ et tout le reste si $\mathbf{K} = \mathbb{C}$; et de trois orbites si $\mathbf{K} = \mathbb{R}$. Fixons $c \neq 0$ et considérons Fun (H), l'algèbre des fonctions polynômes sur l'hyperboloïde H. Par définition Fun (H) est la restriction des fonctions polynômes de Fun (sl(2)*) sur H i.e.

$$\mathrm{Fun}\,(\mathrm{H}) = \mathrm{Fun}\,(\mathrm{sl}(2)^*)/\{\mathrm{C} - \mathrm{c}\}, \tag{8}$$

où $\{\mathrm{C} - c\}$ désigne l'idéal bilatère engendré par l'élément $\mathrm{C} - c$.

Il est en outre facile de voir que la multiplication dans l'algèbre Fun (H) est covariante par l'action de $U(sl(2))$.

Par analogie avec le cas classique précédemment décrit, nous présentons l'analogue quantique noté H_q de l'hyperboloïde classique H, sous forme de son algèbre des "fonctions quantiques". La multiplication dans cette algèbre doit être en outre $U_q(sl(2))$-covariante. Pour ce faire, nous donnons dans la suite un analogue "tressé" de l'élément de Casimir C qui participera à nos constructions.

Soit $U_q(sl(2))$ le GQ associé au groupe $SL(2)$. Le groupe $U_q(sl(2))$ est une algèbre de Hopf. Dans le modèle de Drinfel'd-Jimbo, elle est engendrée par les éléments X, Y, H satisfaisant aux relations de commutation (pour $q \neq 0$, $q^2 \neq 1$) :

$$[H,X] = 2X, \quad [H,Y] = -2Y, \quad [X,Y] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}. \tag{9}$$

On peut choisir le coproduit (Δ) défini par exemple par :

$$\Delta(X) = X\otimes 1 + q^{-H}\otimes X, \ \ \Delta(Y) = 1\otimes Y + Y\otimes q^H, \ \ \Delta(H) = H\otimes 1 + 1\otimes H. \tag{10}$$

Alors l'antipode γ est donnée par :

$$\gamma(X) = -q^H X, \ \gamma(H) = -H, \ \gamma(Y) = -Yq^{-H}. \tag{11}$$

(Pour $q = 1$, les relations (9) et (10) correspondent à celles de l'algèbre de Hopf $U(sl(2))$).

Désignons par $U_q(sl(2))-Mod$ la catégorie des $U_q(sl(2))$-modules de dimension finie qui sont analogues quantiques (c'est-à-dire des déformations) de $U(sl(2))$-modules irréductibles de dimension finie. Tout objet de $U_q(sl(2))-Mod$ est appelé q-analogue (ou analogue tressé) de l'objet classique correspondant.

Le centre de l'algèbre $U_q(sl(2))$ est engendré (voir [M]) par l'opérateur de *Casimir quantique*

$$\mathrm{C}_q = (\frac{q^{\frac{H+1}{2}} - q^{-\frac{H+1}{2}}}{q - q^{-1}})^2 + YX. \tag{12}$$

(On peut remarquer que pour $q = 1$ on a $\mathrm{C}_1 = \frac{\mathrm{C}}{2} + \frac{id}{4} \neq \mathrm{C}$.)

Donnons à présent un autre analogue de l'élément de Casimir C qui nous servira dans la suite. Pour cela, considérons une seconde copie de l'espace $sl(2)$ que nous notons V pour la différencier de l'espace initiale $sl(2)$ et désignons par (u, v, w) une base de l'espace V :

$$\mathsf{V} = Span\,(u, v, w), \text{ notons } \quad sl(2) := (\mathsf{V}, [\,,\,]).$$

Munissons V de l'action de $U_q(sl(2))$ qui coïncide pour $q = 1$ avec celle de la représentation adjointe (ad) de $sl(2)$. Elle est notée . et définie par :

$$\begin{array}{rcl} X.u &=& 0, \;\; X.v = -(q+q^{-1})u, \;\; X.w = v, \\ Y.u &=& -v, \;\; Y.v = (q+q^{-1})w, \;\; Y.w = 0, \\ H.u &=& 2u, \;\; H.v = 0, \;\; H.w = -2w. \end{array}$$

(Pour $q = 1$, on vérifie qu'on a bien l'"ad-action gauche" de $sl(2)$.)

La structure de coalgèbre de $U_q(sl(2))$ permet d'étendre cette action sur $\mathsf{V}^{\otimes 2}$. Par le théorème de Clebsch-Gordan quantique (voir [K]), $\mathsf{V}^{\otimes 2}$ se décompose en trois $U_q(sl(2))$-modules irréductibles de dimension finie V_0^q, V_1^q, V_2^q respectivement de spins $0, 1, 2$. Fixons respectivement dans les espaces V, V_0^q, V_1^q, V_2^q leurs éléments de plus haut poids, notés :

$$x_0, \quad \mathcal{C}_q, \quad x_1, \quad x_2$$

où $\mathcal{C}_q = (q^3+q)uw + vv + (q+q^{-1})wu$.

La compatibilité de la $U_q(sl(2))$-action sur l'espace $\mathsf{V}^{\otimes 2} \oplus \mathsf{V} \oplus \mathbf{K}$ impose les relations

$$\mathcal{C}_q = c, \quad x_1 = \hbar x_0 \tag{13}$$

où c et $\hbar$ sont des constantes dans $\mathbf{K}$. $\mathcal{C}_q$ est appelé *Casimir tressé.* Il n'est pas à confondre avec le Casimir quantique C_q (défini par (12)) qui appartient à l'algèbre $U_q(sl(2))$.

Faisons remarquer que pour $q = 1$, $\mathcal{C}_1 = 4uw + v^2 = 2\mathrm{C}$. $\mathcal{C}_q$ (plus précisément $\frac{\mathcal{C}_q}{2}$) est la q-analogue de C, dont nous nous servons dans toute la suite pour nos constructions.

En opérant avec l'opérateur $Y \in U_q(sl(2))$ sur la deuxième équation de (13), on en déduit en plus deux autres équations. (Voir appendice **A** pour leurs formes explicites). En posant :

$$x_0 = u, \quad x_1 = q^2uv - vu, \quad x_2 = uu$$

on en déduit l'expression des deux autres éléments de base de V_1^q en opérant avec $Y(\in U_q(sl(2)))$ sur l'élément x_1.

Définition 2.1 *L'algèbre $\mathcal{A}_{\hbar,q}^c$ est le quotient de l'algèbre tensorielle libre $T(\mathsf{V})$ par l'idéal bilatère $I_\hbar$ engendré par les éléments :*

$$q^2uv - vu + 2u\hbar,\ \ (q^3+q)(uw-wu) + (1-q^2)vv - 2v\hbar,$$
$$-q^2vw + wv - 2w\hbar,\ \ C_q - c.$$

Pour $\hbar = 0$ et $c \neq 0$, l'algèbre $\mathcal{A}_{0,q}^c$ est celle des fonctions sur l'hyperboloïde quantique (qui est aussi notée H_q).

Remarque 2.1 Dans cette définition $\hbar$ et q sont des constantes fixées. Nous pouvons les considérer comme des paramètres. Il suffit pour cela de remplacer dans la définition précédente $T(\mathsf{V})$ par $T(\mathsf{V}) \otimes \mathbf{K}[[\hbar,\ q,\ q^{-1}]]$. Le paramètre orbital c est une constante.

Bien que l'hyperboloïde classique soit une variété non compacte, en un certain sens, l'hyperboloïde quantique est plutôt un analogue tressé de la sphère. Ceci vient du fait que nous ne considérons que les fonctions polynomiales sur l'objet classique et leurs analogues tressés. En outre, toutes les représentations que nous considérons sont de dimension finie.

Proposition 2.1 *$\mathcal{A}_{\hbar,q}^c$ est une algèbre associative $U_q(sl(2))$-covariante.*

Preuve : C'est par construction de l'algèbre $\mathcal{A}_{\hbar,q}^c$.

- $\mathcal{A}_{0,1}^c$ (pour $c \neq 0$) est l'algèbre des fonctions polynômes sur $sl(2)$ restreintes à la variété algébrique affine définie par : $4uw + v^2 = c$, c'est l'algèbre des fonctions sur l'hyperboloïde (classique) qui est commutative.
- L'algèbre $\mathcal{A}_{\hbar,1}^c$ (pour $c \neq 0$) est l'analogue non commutative de l'algèbre $\mathcal{A}_{0,1}^c$, mais elle est toujours $sl(2)$-invariante.

Remarque 2.2 L'algèbre $\mathcal{A}_{\hbar,1}^c$ est une déformation plate de l'algèbre $\mathcal{A}_{0,1}^c$. Cela découle du théorème de PBW. Ainsi pour $c \neq 0$, comme dans la décomposition en $sl(2)$-modules irréductibles de dimension finie (V_k de spin $k \in \mathbf{N}$) de l'algèbre $\mathcal{A}_{0,1}^c$, toute composante apparaît sans multiplicité, il en est de même pour les algèbres $\mathcal{A}^c_{\hbar,1}$ et $\mathcal{A}^c_{\hbar,q}$ $(q \neq 1)$ (voir [GV],[A]).

• Le cas $c = 0$ correspond au cône (dit "quantique" si $q \neq 1$).

• $\mathcal{A}^c_{\hbar,q}$ est une famille (dépendante de $\hbar$) d'algèbres $U_q(sl(2))$-covariantes. La sphère quantique de Podlès [P] est en effet une autre présentation de telles algèbres, et munies d'une involution. Nous n'avons pas besoin dans la suite d'une quelconque involution sur l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$.

• Dans la famille $\mathcal{A}^c_{\hbar,q}$, nous traitons l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ comme la q-analogue de l'algèbre commutative $\mathcal{A}^c_{0,1}$.

3 $sl(2)$ tressé

3.1 Crochet de Lie tressé de $sl(2)$

Le crochet de Lie $[,]$ sur $sl(2)$:

$$[,] : \mathsf{V}^{\otimes 2} \to \mathsf{V},$$

- est une application $\mathbf{K}$-linéaire,
- et $sl(2)$-invariante.

Nous allons définir de façon analogue le crochet de Lie tressé (noté $[,]_q$) sur $sl(2)$.

Nous introduisons les q-analogues notées $I^q_\pm$ des sous-espaces symétriques et antisymétriques de l'espace $sl(2)^{\otimes 2}$ de façon similaire au cas classique en posant :

$$I^q_+ = \mathsf{V}^q_0 \oplus \mathsf{V}^q_2 \quad \text{et} \quad I^q_- = \mathsf{V}^q_1.$$

(Notons que les algèbres correspondantes $T(\mathsf{V})/\{I^q_\pm\}$ sont des déformations plates de leurs analogues classiques. En outre comme l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ est une algèbre quotient de l'algèbre "q-symétrique" $T(\mathsf{V})/\{I^q_-\}$, $\mathcal{A}^c_{0,q}$ est également une algèbre q-symétrique.)

Notons que I^q_- est engendré par les trois tenseurs

$$q^2uv - vu, \quad (q^3 + q)(uw - wu) + (1 - q^2)vv, \quad -q^2vw + wv.$$

Définition 3.1 *Le crochet de Lie tressé de $sl(2)$, est l'opérateur*

$$[,]_q : \mathsf{V}^{\otimes 2} \to \mathsf{V} \ \textit{vérifiant}$$

1. $[,]_q I_+^q = 0$,
2. • $[,]_q (q^2uv - vu) = -\tau u$,
   • $[,]_q ((q^3+q)(uw - wu) + (1-q^2)vv) = \tau v$,
   • $[,]_q (-q^2vw + wv) = \tau w$.

   τ *est une constante non nulle.*

V *muni du crochet* $[,]_q$ *est appelé algèbre de Lie tressée et noté* $sl(2)_q$. *Plus précisément*

$$sl(2)_q := (\mathsf{V}, [,]_q).$$

De fait ce crochet de Lie tressé dépend du facteur τ. Mais nous négligeons cette dépendance en supposant que τ est fixé.

Proposition 3.1 1. $[,]_q$ *est un* $U_q(sl(2))$*-morphisme (i.e. une application* $U_q(sl(2))$*-covariante).*

2. *La table de commutation de* $[,]_q$ *est :*

$$[u,u]_q = 0, \quad [u,v]_q = -q^2Mu, \quad [u,w]_q = (q+q^{-1})^{-1}Mv,$$
$$[v,u]_q = Mu, \quad [v,v]_q = (1-q^2)Mv, \quad [v,w]_q = -q^2Mw,$$
$$[w,u]_q = -(q+q^{-1})^{-1}Mv, \quad [w,v]_q = Mw, \quad [w,w]_q = 0,$$
$$M = (1+q^4)^{-1}\tau.$$

Preuve : 1. C'est la propriété 2 de la définition 3.1
2. C'est un calcul direct.

(Si $q = 1$ et $\tau = 4$ (donc $M = 2$), nous obtenons le crochet de Lie sur $sl(2)$.)

Remarque 3.1 C'est le fait que l'espace $sl(2)$ apparaisse une seule fois dans la décomposition en $sl(2)$-modules irréductibles de $sl(2)^{\otimes 2}$ qui a permit de définir de façon unique le crochet de Lie tressé $[,]_q$. Pour les algèbres de Lie $g = sl(n)$ ($n > 2$), la multiplicité de l'espace $sl(n)$ dans $sl(n)^{\otimes 2}$ est deux : l'une appartenant à la partie symétrique de $sl(n)^{\otimes 2}$ et l'autre à sa partie antisymétrique. Il n'est donc pas évident de décrire les q-analogue des algèbres symétriques et antisymétriques de g. Cependant, il existe un sous-espace $I_-^q \subset g_q^{\otimes 2}$ où g_q est l'espace $sl(n)$ muni de la $U_q(sl(n))$-action, telle que l'algèbre quadratique $T(g_q)/\{I_-^q\}$ soit une déformation plate de l'algèbre symétrique de g (voir [D]). Une description explicite du sous-espace I_-^q peut être donnée par l'équation appelée "reflection equation"

$$SL_1SL_1 = L_1SL_1S \tag{14}$$

où S est une solution de l'équation de Yang-Baxter quantique de type Hecke (voir [G1]), $L_1 = L \otimes id$ et L est une matrice dont les coefficients matriciels sont les éléments l_i^j, $1 \leq i, j \leq n$. L'algèbre quadratique définie par l'équation (14) est habituellement appelée "reflection equation algebra" (REA). En considérant l'algèbre g_q introduite dans [LS] qui est la q-analogue de l'algèbre g, on peut décrire à partir de la REA, l'algèbre enveloppante de l'algèbre g_q qui est aussi une déformation plate à deux paramètres de l'algèbre symétrique de g. (voir [AG])

Si g est une algèbre de Lie simple différente de $sl(n)$, dans $g^{\otimes 2}$ toute composante qui apparaît est sans multiplicité. Donc on peut définir la q-analogue du crochet de Lie, en imposant qu'il soit un morphisme non trivial dans la catégorie des $U_q(g)$-modules irréductibles de dimension finie (il est donc défini de façon unique à un facteur constant près) puis, on introduit son algèbre enveloppante, son algèbre symétrique et antisymétrique comme dans le cas classique, mais dans la catégorie sous considération. (Ici le fait que $g^{\otimes 2}$ soit sans multiplicité joue le rôle principale.) Cependant, ces algèbres ne sont pas des déformations plates de leurs analogues classiques (voir [G2]).

3.2 Algèbre enveloppante tressée de $sl(2)$

• Rappelons que dans le cas classique ($q = 1$), l'algèbre enveloppante $U(sl(2))$ est définie de la façon suivante

$$\begin{aligned} U(sl(2)) &= T(sl(2))/\{AB - BA - [A, B]\} \\ &= T(sl(2))/\{Im(id - \tfrac{1}{2}[,])I_-\}, \end{aligned} \tag{15}$$

où A, B sont des éléments de $sl(2)$.
• Par analogie avec l'algèbre enveloppante de $sl(2)$, nous définissons l'algèbre enveloppante tressée de $sl(2)$ notée $U(sl(2)_q)$ comme suit :

$$U(sl(2)_q) = T(sl(2)_q)/\{Im\,(id - \kappa\,[,]_q)I_-^q\}.$$

L'idéal $\{Im\,(id - \kappa\,[,]_q)I_-^q\}$ est celui engendré par les éléments :

$$\begin{gathered} q^2uv - vu - \kappa(q^2[u,v]_q - [v,u]_q), \\ (q^3+q)(uw - wu) + (1-q^2)vv - \kappa((q^3+q)([u,w]_q - \\ -[w,u]_q)(1-q^2)[v,v]_q), \\ -q^2vw + wv - \kappa(-q^2[v,w]_q + [w,v]_q). \end{gathered} \tag{16}$$

Le choix de κ sera précisé par la suite (voir la relation (23)).

Remarque 3.2 En fait on a

$$\mathcal{A}^c_{\hbar,q} = U(sl(2)_q)/\{C_q - c\} \text{ avec } \hbar = \frac{\kappa\tau}{2}.$$

Lemme 3.1 *([DG]) Le Casimir tressé C_q est un élément centrale de l'algèbre enveloppante tressée $U(sl(2)_q)$ c'est-à-dire :*

$$X\,C_q = C_q \qquad \forall\, X \in U(sl(2)_q).$$

Rappelons que nous voulons en fait d'une part, introduire le module tangent sur l'hyperboloïde quantique et d'autre part décrire les analogues tressées de certaines notions de la géométrie différentielle classique sur ce module. Pour ce faire, dans toute la suite nous travaillons principalement avec l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ et tous les modules considérés sont des modules sur cette algèbre.

4 Espace tangent quantique

Dans cette section, nous définissons l'espace tangent (considéré comme un $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module) sur l'hyperboloïde quantique noté $T(\mathrm{H}_q)$. Puis nous construisons des champs de vecteurs tressés sur l'hyperboloïde quantique tels qu'ils nous permettent de munir $T(\mathrm{H}_q)$ d'une structure d'ancre quantique.

Pour mieux présenter le formalisme de la construction de ce module et de cette ancre dans le cas quantique, commençons par l'exemple du cas classique.

Considérons pour cela la sphère S^2 de dimension deux. Elle a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

où R est une constante strictement positive. Posons

$$\mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2) = \mathbf{K}[\mathrm{x},\, \mathrm{y},\, \mathrm{z}]/\{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 - \mathrm{R}^2\}.$$

Nous donnons ici, trois descriptions (globales) de l'espace tangent sur la sphère noté $T(S^2)$.

a) Comme un champ de vecteurs c'est : $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{S}^2)$ i.e. l'espace des champs de vecteurs sur S^2 .

b) Comme un $\mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)$-module : d'abord $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{S}^2)$ est engendré par les trois rotations infinitésimales X, Y, Z définies par (4) et qui vérifient dans l'algèbre $\mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)$ la relation

$$xX + yY + zZ = 0. \tag{17}$$

(Dans l'expression (17) x, y, z désignent en fait des opérateurs de multiplication). Donc comme un $\mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)$-module, $T(S^2)$ peut être réalisé comme le module quotient M/N où

$$M = \{aX + bY + cZ\,,\; a,\, b,\, c \in \mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)\}\,,$$

$$N = \{f(xX + yY + zZ)\,, f \in \mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)\}\,.$$

c) Comme une variété algébrique affine : elle est plongée dans l'espace de dimension 6

$$(span\,(x,\, y,\, z,\, X,\, Y,\, Z\,))^*$$

et définie par l'équation de la sphère et la relation (17).

Notons que l'espace tangent $T(S^2)$ est un cas particulier de fibré vectoriel (sur la sphère). Habituellement $T(S^2)$ est défini en termes de cartes locales. Nous n'utilisons pas cette description locale ici, car dans le cas quantique nous n'avons pas de localisation.

En passant à l'hyperboloïde H (i.e. à l'analogue non compacte de la sphère), nous avons de façon analogue trois descriptions (globales) de l'espace tangent sur l'hyperboloïde noté $T(\mathrm{H})$.

a') Comme un champ de vecteurs c'est juste Vect (H).

b') Comme un $\mathcal{A}^c_{0,1}$-module, il est réalisé comme le module quotient M/N où

$$M = \{aU + bV + cW\,,\ a,\, b,\, c \in \mathcal{A}^c_{0,1}\ \}\,,$$

$$N = \{f(2uW + vV + 2wU)\,, f \in \mathcal{A}^c_{0,1} = \mathrm{Fun}\,(\mathrm{H})\}\,.$$

Notons qu'ici U, V, W sont les rotations hyperboliques infinitésimales associées respectivement aux générateurs u, v, w de l'algèbre de Lie $sl(2)$. De même l'analogue non compacte de l'équation (17) s'écrit :

$$2u\,W + v\,V + 2w\,U = 0. \tag{18}$$

Nous pouvons mettre l'équation (18) sous la forme symbolique

$$(\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}')_0 = 0, \tag{19}$$

où V désigne (encore) l'espace vectoriel engendré par u, v, w et la marque $'$ désigne l'espace vectoriel engendré par les rotations hyperboliques infinitésimales. En outre V et V' sont des $U(sl(2))$-modules. La composante $(\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}')_i$ dénote celle de spin i dans la décomposition en $U(sl(2))$-modules irréductibles de dimension finie de $\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}'$.

Ici, nous regardons le module tangent $T(\mathrm{H})$ comme un $\mathcal{A}^c_{0,1}$-module gauche. Comme un $\mathcal{A}^c_{0,1}$-module droit il est donné par l'équation $(\mathsf{V}' \otimes \mathsf{V})_0 = 0$. Il est bien connu que ces deux $\mathcal{A}^c_{0,1}$-modules s'identifient naturellement. Nous discutons dans la section 7, du problème d'identification des modules tangents gauche et droit sur l'hyperboloïde quantique (réalisés tous deux comme des $\mathcal{A}^c_{0,q}$-modules).

c') Enfin comme une variété algébrique affine, elle est plongée dans l'espace de dimension 6

$$(span\,(u,\, v,\, w,\, U,\, V,\, W\,))^*$$

et définie par l'équation de l'hyperboloïde et la relation (18).

Laquelle des trois descriptions précédentes admet une “bonne” (i.e. plate) q-analogue ?

Il est évident que si nous voulons définir sur l'hyperboloïde quantique le $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module tangent gauche noté $T(\mathrm{H}_q)_l$ comme une déformation plate de son analogue classique, nous devons utiliser la même formule (19) mais dans la catégorie $U_q(sl(2)) - Mod$. Cela nous amène à l'équation symbolique :

$$(\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}'^q)_0 = 0. \tag{20}$$

Dans l'identité (20), V est muni de la $U_q(sl(2))$-action et V'^q est l'analogue tressé de V'.

Interessons nous d'abord à la q-analogue des descriptions a') et b').

4.1 $T(\mathrm{H}_q)$ comme $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module tressé

Soit $\mathcal{N}$ un élément de la catégorie $U_q(sl(2)) - Mod$ et qui soit en outre un $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module. Soit l'application

$$\mu : \mathcal{A}^c_{0,q} \otimes \mathcal{N} \to \mathcal{N}$$

qui désigne l'action de $\mathcal{A}^c_{0,q}$ sur $\mathcal{N}$.

Définition 4.1 *$\mathcal{N}$ est appelé un $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module tressé si μ est un morphisme dans la catégorie $U_q(sl(2)) - Mod$ i.e. :*

$$z.\, \mu\,(a \otimes n) \;=\; \mu\,(z_{(1)}.a \otimes z_{(2)}.n)$$

où $z \in U_q(sl(2))$, $\Delta(z) = z_{(1)} \otimes z_{(2)}$, $a \in \mathcal{A}^c_{0,q}$ et $n \in \mathcal{N}$.

Notons U^q, V^q, W^q les générateurs de V'^q. Le GQ $U_q(sl(2))$ agit sur ces générateurs comme il opérait sur les éléments de l'espace V i.e.

$$\begin{aligned} X.U^q &= 0, \;\; X.V^q = -(q+q^{-1})U^q, \;\; X.W^q = V^q, \\ Y.U^q &= -V^q, \;\; Y.V^q = (q+q^{-1})W^q, \;\; Y.W^q = 0, \\ H.U^q &= 2U^q, \;\; H.V^q = 0, \;\; H.W^q = -2W^q. \end{aligned}$$

Alors l'identité (20) devient en forme explicite :

$$(q^3+q)uW^q + vV^q + (q+q^{-1})wU^q = 0 \tag{21}$$

Ainsi le $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module tangent gauche $T(\mathrm{H}_q)_l$ est réalisé comme un $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module facteur du $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module

$$(\mathcal{A}^c_{0,q})^3 = M^q_l = \{aU^q + bV^q + cW^q,\ a,\, b,\, c, \in \mathcal{A}^c_{0,q}\ \}$$

par le $\mathcal{A}^c_{0,q}$ sous-module

$$N^q_l = \{f((q^3+q)uW^q + vV^q + (q+q^{-1})wU^q)\,, f\ \in\ \mathcal{A}^c_{0,q}\,\}.$$

Précisons que les $\mathcal{A}^c_{0,q}$-modules

$$M^q_l, \quad \mathrm{N}^q_l, \quad T(\mathrm{H}_q)_l = M^q_l\,/\,\mathrm{N}^q_l$$

sont des modules tressés au sens de la définition 4.1.

De façon similaire le $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module tangent droit sur l'hyperboloïde quantique noté $T(\mathrm{H}_q)_r$ est réalisé comme le module quotient M^q_r/N^q_r où

$$M^q_r = \{\overline{U}^q\, a + \overline{V}^q\, b + \overline{W}^q\, c,\ a,\, b,\, c, \in \mathcal{A}^c_{0,q}\ \},$$

$$N^q_r = \{f((q^3+q)\overline{U}^q\, w + \overline{V}^q\, v + (q+q^{-1})\overline{W}^q\, u)\,, f\ \in\ \mathcal{A}^c_{0,q}\,\},$$

où $\overline{U}^q, \overline{V}^q, \overline{W}^q$ sont les générateurs du $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module $T(\mathrm{H}_q)_r$. (L'action du groupe quantique $U_q(sl(2))$ sur ces générateurs est la même que sur V'^q.) De même les $\mathcal{A}^c_{0,q}$-modules

$$M^q_r, \quad \mathrm{N}^q_r, \quad T(\mathrm{H}_q)_r = M^q_r\,/\,\mathrm{N}^q_r$$

sont des modules tressés au sens de la définition (4.1).

Proposition 4.1 *([A]) Le $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module tangent $T(\mathrm{H}_q)$ est une déformation plate de son analogue classique.*

4.2 $T(\mathrm{H}_q)$ comme champs de vecteurs tressés

Nous considérons les générateurs u, v, w de l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ comme des opérateurs de multiplication (à gauche) dans cette même algèbre, puis nous définissons les opérateurs U^q, V^q, W^q qui sont les q-analogues des rotations hyperboliques infinitésimales U, V, W. Finalement nous obtenons la q-analogue des champs de vecteurs qui est engendré par les opérateurs U^q, V^q, W^q et les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ sont traités comme des opérateurs.

Soulignons une fois de plus que la tentation est de faire jouer aux générateurs X, Y, H du GQ $U_q(sl(2))$ le rôle de q-analogue des rotations hyperboliques infinitésimales U, V, W. Mais alors dans ce cas, on a aucune relation de la forme (20). Par conséquent ils ne peuvent être considérer comme les q-analogues des champs de vecteurs U, V, W. Il faut donc trouver un autre moyen pour réaliser les générateurs U^q, V^q, W^q de V'^q comme des opérateurs sur l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$.

Par analogie avec le cas classique, à partir du crochet de Lie tressé de $sl(2)$ précédemment défini, on peut définir U^q, V^q, W^q comme des opérateurs sur l'espace V (identifié à l'espace des fonctions linéaires sur V^*). En effet, associons au vecteur de base u de l'espace V, l'opérateur

$$\begin{array}{rcll} U^q : \mathsf{V} & \longrightarrow & \mathsf{V} & \\ z & \longmapsto & U^q z = ad^q u(z) = [u,z]_q, & U^q 1 = 0, \end{array}$$

défini sur les vecteurs de base de V. Les opérateurs V^q, W^q associés respectivement aux vecteurs de base v, w sont définis de façon analogue à l'opérateur U^q.

Imposons maintenant que les opérateurs U^q, V^q, W^q ainsi définis sur V vérifient les relations de définition de l'algèbre enveloppante tressée $U(sl(2)_q)$. C'est-à-dire que l'équation (16) soit encore satisfaite si nous remplaçons les générateurs u, v, w (de l'espace V) respectivement par leurs images par ad^q. Autrement dit, pour l'opérateur ad^q nous avons pour tout vecteur de base z de l'espace V :

$$\begin{array}{c} q^2[u,[v,z]_q]_q - [v,[u,z]_q]_q = \kappa[q^2[u,v]_q - [v,u]_q, z]_q \\ (q^3+q)([u,[w,z]_q]_q - [w,[u,z]_q]_q) + (1-q^2)[v,[v,z]_q]_q = \\ = \kappa(q^3+q)[[u,w]_q - [w,u]_q, z]_q + (1-q^2)[[v,v]_q, z]_q, \\ -q^2[v,[w,z]_q]_q + [w,[v,z]_q]_q = \kappa[-q^2[v,w]_q + [w,v]_q, z]_q. \end{array} \tag{22}$$

Les relations du (22) fixent le choix de la constante κ de (16). Par exemple en se servant de la première relation du (22), nous obtenons

$$\kappa = 1 - (q^2 + q^{-2})^{-1}. \tag{23}$$

Ainsi pour ce choix de κ fixé par l'identité (23), ad^q est une représentation de $sl(2)_q$ (sur V). Nous regardons les relations du (22) comme *l'analogue tressé de l'identité de Jacobi.*

Remarque 4.2.1 Il a été montré dans [LS] qu'il existe également un analogue tressé de l'identité de Jacobi pour les algèbres $sl(n)$, $n > 2$. Pour d'autres algèbres de Lie simples, il n'en existe (apparemment) pas.

Puisque ad^q est une représentation, les opérateurs U^q, V^q, W^q sont des opérateurs adjoints (gauches) tressés. Ils sont donc définis par la table suivante :

$$\begin{gathered} U^q u = [u,u]_q = 0, \quad U^q v = -q^2 M u, \quad U^q w = (q+q^{-1})^{-1} M v, \\ V^q u = M u, \quad V^q v = (1-q^2) M v, \quad V^q w = -q^2 M w, \\ W^q u = -(q+q^{-1})^{-1} M v, \quad W^q v = M w, \quad W^q w = 0. \end{gathered}$$

Lemme 4.1

$$(q^3+q)\, u\, W^q + v\, V^q + (q+q^{-1})\, w\, U^q \;=\; 0\,, \tag{24}$$

sur les éléments de degré un de l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$.

Preuve : Il suffit de la vérifier sur les éléments u, v, w de l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$. Ce qui est immédiat. Par exemple pour u on a :

$$\begin{gathered} (q^3+q)\, u\, W^q(u) + v\, V^q(u) + (q+q^{-1})\, w\, U^q(u) \;= \\ = M(-q^2 uv + vu) \;=\; 0 \quad \text{dans l'algèbre} \quad \mathcal{A}^c_{0,q}. \end{gathered}$$

Il reste maintenant à résoudre le problème qui consiste à étendre les opérateurs U^q, V^q, W^q (bien définis pour le moment sur l'espace V) sur tout élément de l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ de telle manière que l'équation (24) soit vérifiée sur $\mathcal{A}^c_{0,q}$ et les opérateurs ainsi prolongés satisfassent aux relations de définition de l'algèbre $U(sl(2)_q)$.

Dans le cas classique cette extension est effectuée par la règle de Leibniz. Il existe aussi une forme de cette règle pour les solutions involutives de l'équation de Yang-Baxter quantique (voir (1)). Mais dans notre cas, où l'opérateur de Yang-Baxter quantique provenant du GQ $U_q(sl(2))$ n'est pas involutif, ce n'est pas évident d'étendre de façon naturelle ces opérateurs sur les éléments de degré supérieur (à un) de l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$.

Le fait que l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ se décompose en $U_q(sl(2))$-modules irréductibles de spin k, $\mathsf{V}^q_k (\subset \mathsf{V}^{\otimes k})$ nous permet de définir cette extension sur les composantes V^q_k.

Théorème 4.1 *Il existe une application*

$$\beta \,:\, T(\mathrm{H}_q)\otimes \mathcal{A}_{0,q}^c \rightarrow \mathcal{A}_{0,q}^c$$

telle que :

1) Le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{0,q}^c \otimes T(\mathrm{H}_q)\otimes \mathcal{A}_{0,q}^c & \rightarrow & T(\mathrm{H}_q)\otimes \mathcal{A}_{0,q}^c \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_{0,q}^c \otimes \mathcal{A}_{0,q}^c & \rightarrow & \mathcal{A}_{0,q}^c \end{array}$$

(où dans les lignes horizontales de ce diagramme $\mathcal{A}_{0,q}^c$ agit sur $\mathcal{A}_{0,q}^c$ par son produit habituel et dans les lignes verticales on opère par l'application β).

2) L'application β restreinte à l'espace V'^q est une représentation de l'algèbre $U(sl(2)_q)$. En outre les générateurs de $\beta(\mathsf{V}'^q)$ vérifie l'identité (24).

Preuve :

2) Elle se fait en deux étapes :

Etape 1. Nous allons réaliser les opérateurs U^q, V^q, W^q comme une série de représentations de l'algèbre $\mathcal{A}_{0,q}^c$ sur les composantes V_k^q.

Soit

$$\begin{array}{rccc} P_k^q : & \mathsf{V}^{\otimes k} & \rightarrow & \mathsf{V}_k^q \\ & z & \mapsto & P_k^q z \end{array}$$

le projecteur tressé correspondant à son analogue classique noté P_k. P_k^q est un morphisme dans la catégorie $U_q(sl(2)) - Mod$. Considérons également l'application

$$\rho_k^q(z)v \;=\; \alpha_k P_k^q(\rho^q(z)\otimes id_{k-1})v,\;\; z\;\in\; sl(2)_q,\; v\in \mathsf{V}_k^q,\; \alpha_k\in \mathbf{K} \qquad (25)$$

où id_{k-1} est l'opérateur identité sur l'espace $\mathsf{V}^{\otimes(k-1)}$. Notons que dans la formule (25), α_k est une constante quelconque. En supposant que l'application ρ_k^q soit une représentation de l'algèbre $\mathcal{A}_{0,q}^c$, cela impose le choix de la constante α_k donnée par la propositon suivante

Proposition 4.2 *([G2])*

$$\alpha_k \;=\; (q^{-1}+q^3)(1+q^2+\ldots+q^{2(k-1)})(q^{-1}+q^{2k+1})^{-1}.$$

Ainsi à l'élément de base u de l'espace V, on associe la famille d'opérateurs U_k^q définie sur le $U_q(sl(2))$-module irréductible de spin k, $\mathsf{V}_k^q \subset \mathsf{V}^{\otimes k}$:

$$U_k^q : \mathsf{V}_k^q \to \mathsf{V}_k^q$$
$$U_k^q(v) = \alpha_k P_k^q(U^q \otimes id_{k-1})v, \quad v \in \mathsf{V}_k^q$$

où α_k est donnée par la proposition 4.2. La famille d'opérateurs U_k^q ($k \in \mathbf{N}$) définie l'extension (encore notée U^q) de l'opérateur U^q (initialement définit sur V) sur l'algèbre $\mathcal{A}_{0,q}^c$

$$U^q : \mathcal{A}_{0,q}^c \to \mathcal{A}_{0,q}^c.$$

On prolonge de la même manière, les opérateurs V^q, W^q. Nous montrons dans la deuxième étape que (pour toute valeur de la constante α_k) l'équation (24) est encore satisfaite par les opérateurs prolongés U^q, V^q, W^q.

Pour le faire montrons d'abord que l'élément $(U^q \otimes id_{k-1})v_k^q$ (où $v_k^q \in \mathsf{V}_k^q$), réduit en forme de base dans l'algèbre $\mathcal{A}_{0,q}^c$ est identique (à un facteur près) à l'élément $P_k^q(U^q \otimes id_{k-1})v_k^q$. Pour cela, il suffit en fait de montrer que dans la forme réduite de l'élément $(U^q \otimes id_{k-1})v_k^q$, il n'y a pas d'éléments appartenant aux composantes V_i^q, $i < k$. L'élément $(U^q \otimes id_{k-1})v_k^q$ résulte de l'application de l'opérateur $[\,,\,]_q$ à l'élément $u \otimes v_k^q \in sl(2)_q \otimes \mathsf{V}_k^q$. Cette opération commute avec l'action du GQ $U_q(sl(2))$.

Dans la décomposition en $U_q(sl(2))$-modules du produit $sl(2)_q \otimes \mathsf{V}_k^q$ il y a trois composantes irréductibles : V_{k+1}^q, V_k^q, V_{k-1}^q. En tenant compte du fait que l'élément $(U^q \otimes id_{k-1})v_k^q \in \mathsf{V}^{\otimes k}$ et que dans la réduction de base d'un élément de $\mathsf{V}^{\otimes k}$ seulement les composantes V_k^q, V_{k-2}^q, V_{k-4}^q peuvent apparaître, nous en concluons que l'élément $(U^q \otimes id_{k-1})v_k^q \in \mathsf{V}_k^q$. Dans le raisonnement précédent en remplaçant U^q par V^q ou par W^q on obtient la même conclusion.

Etape 2. Ayant finalement réalisé U^q, V^q, W^q comme des opérateurs sur l'algèbre $\mathcal{A}_{0,q}^c$, nous montrons à présent que l'équation (24) reste encore vraie sur toute l'algèbre $\mathcal{A}_{0,q}^c$. En effet, soit $u_i \in \{u, v, w\}$ et $g \in \mathcal{A}_{0,q}^c$. L'élément g s'écrit :

$$g = \sum_k P_k^q(g) = \sum_k g_k, \quad g_k = P_k^q(g) \quad \text{avec} \quad g_k \in \mathsf{V}_k^q \subset \mathsf{V}^{\otimes k}.$$

Ecrivons également g_k sous la forme $u_i g_{k-1}$. Pour k fixé, nous avons :

$$[(q^3+q)uW^q + vV^q + (q+q^{-1})wU^q]\,(g_k) \;=\; (*)$$

$$= \alpha_k[(q^3+q)\,u\,P_k^q\,(W^q \otimes id) + v\,P_k^q\,(V^q \otimes id) + (q+q^{-1})w\,P_k^q\,(U^q \otimes id)](g_k)$$

$(*)$ (écrit dans la base de $\mathcal{A}^c_{0,q}$) donne (à un facteur constant près) :

$$(*) = \alpha_k[(q^3+q)\,P_k^q\,(uW^q \otimes id) + P_k^q\,(vV^q \otimes id) + (q+q^{-1})P_k^q\,(wU^q \otimes id)](g_k)$$

$$= \alpha_k P_k^q([(q^3+q)uW^q u_i + vV^q u_i + (q+q^{-1})wU^q u_i] \otimes id_{k-1}(g_{k-1}) \;=\; 0.$$

La dernière égalité étant due à l'équation (24).

1) Elle est une conséquence immédiate de la façon dont les opérateurs U^q, V^q, W^q ont été construits dans le 2).

Définition 4.2 *Les opérateurs U^q, V^q, W^q et toutes leurs combinaisons linéaires à coefficients dans l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ sont appelés les champs de vecteurs tressés gauches. Ils sont de la forme*

$$a\,U^q + b\,V^q + c\,W^q, \quad a,\, b,\, c \,\in\, \mathcal{A}^c_{0,q}.$$

Remarque 4.2.2 Pour $q = 1$, les opérateurs U^1, V^1, W^1 coïncident respectivement avec les champs de vecteurs (ou les rotations hyperboliques infinitésimales) U, V, W sur l'hyperboloïde.

De la même manière, on définit $\overline{U}^q, \overline{V}^q, \overline{W}^q$ les champs de vecteurs tressés droits associés respectivement aux éléments de base u, v, w de V. Il est facile de vérifier que dans l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$, ces opérateurs satisfont à une relation analogue au (24) :

$$(q^3+q)\overline{U}^q\,w + \overline{V}^q\,v + (q+q^{-1})\overline{W}^q u \;=\; 0.$$

Par le théorème 4.1, $T(\mathrm{H}_q)$ est le $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module tangent des champs de vecteurs tressés sur l'hyperboloïde quantique.

Remarque 4.2.3 Par la méthode développée dans [LS] qui consiste à décrire l'algèbre enveloppante tressée à partir de la REA, on aurait pû traiter facilement les opérateurs adjoints tressés correspondants aux générateurs u, v, w comme des opérateurs sur l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$. Mais la différence fondamentale avec notre méthode est que les opérateurs provenant de la méthode suggérée dans [LS] ne permettent pas de contrôler l'identité (24) sur l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$. À notre connaissance à part notre façon de définir les opérateurs U^q, V^q, W^q il n'en existe apparement pas d'autre qui puisse contrôler (24).

Définition 4.3 *Le plongement*

$$sl(2)_q \hookrightarrow T(\mathrm{H}_q)$$

est appelé une ancre quantique.

Notons que le plongement de la définition 4.3 est la q-analogue de celui définit par (6), qui est l'exemple le plus simple d'une ancre. Rappellons qu'une ancre est constituée d'une variété $\mathcal{M}$ d'une algèbre de Lie g et d'un plongement de g dans l'espace des champs de vecteurs sur $\mathcal{M}$. C'est la raison principale pour laquelle nous appellons le plongement de la définition (4.3) ancre quantique et cela en dépit du fait que le $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module $T(\mathrm{H}_q)$ n'est muni d'aucun crochet de Lie tressé. Nous considérons également le couple $(T(\mathrm{H}_q), \mathcal{A}^c_{0,q})$ comme une q-analogue d'une algèbre de Lie-Rinehart [R] partielle (partielle est associé au fait que $T(\mathrm{H}_q)$ n'est muni d'aucune structure de Lie tressé).

Remarque 4.2.4 Quant à la description c) qui décrivait l'espace tangent sur l'hyperboloïde comme une variété algébrique affine, pour la q-déformé il est nécéssaire de trouver la q-analogue de l'algèbre symétrique de l'espace tangent $T(\mathrm{H}_q)$ tel qu'il soit une déformation plate de son analogue classique. Le problème fondamentale qui se pose pour l'existence de cette algèbre symétrique déformée est de trouver une façon raisonnable de transposer les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ et de l'espace V'^q. Le seul bon candidat susceptible de pouvoir réaliser une telle transposition est l'opérateur de Yang-Baxter (YB) quantique provenant de la R-matrice universelle du GQ $U_q(sl(2))$. Malheureusement cette méthode conduit à une déformation non plate de l'algèbre symétrique (classique).

Remarque 4.2.5 Une façon d'introduire dans le cas classique les champs de vecteurs sur une variété algébrique affine, consiste à définir d'abord les champs de vecteurs dans l'espace ambiant comme toutes les combinaisons linéaires à coefficients-fonctions (ici les fonctions dans l'espace ambiant) de dérivées partielles. Ensuite, on définit les champs de vecteurs sur la variété donnée comme de tels champs de vecteurs qui respectent les équations définissant la variété en question. L'autre façon consiste au passage aux cartes, i.e. au considération locale.

Malheureusement nous ne connaissons pas de q-analogues des dérivées partielles. Par conséquent nous ne savons pas définir les champs de vecteurs tressés sur l'espace $sl(2)_q{}^*$ tout entier, puisque les dérivées partielles tressées ne sont pas définies. C'est la raison principale pour laquelle nous avons introduit les champs de vecteurs tressés sur l'hyperboloïde quantique à partir du crochet de Lie tressé.

Nous montrons maintenant que sur la sphère (ou l'hyperboloïde), la notion de champs de vecteurs définie à partir des dérivées partielles et celle définie à partir des champs de vecteurs adjoints sont équivalentes.

En effet, il est clair que les champs de vecteurs X, Y, Z sur la sphère définis par (4) tels que

$$X\,(x^2+y^2+z^2-R^2) \;=\; Y\,(x^2+y^2+z^2-R^2) \;=\; Z\,(x^2+y^2+z^2-R^2) \;=\; 0$$

s'expriment en fonction des dérivées partielles ∂_x, ∂_y, ∂_z. Montrons la réciproque. Cela revient à montrer que pour tout champ de vecteurs $\mathcal{X}$ sur la sphère de la forme

$$\mathcal{X} \;=\; \alpha\,\partial_x + \beta\,\partial_y + \gamma\,\partial_z,$$

où $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma \in \mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)$ sont tels que

$$\mathcal{X}(x^2+y^2+z^2-R^2)=0 \quad \text{i.e.} \quad \alpha\,x+\beta\,y+\gamma\,z \;=\; 0, \tag{26}$$

$\mathcal{X}$ est une combinaison linéaire à coefficients-fonctions (ici dans $\mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)$) des champs de vecteurs X, Y, Z. Notons que la condition (26) signifie que le champ de vecteurs $\mathcal{X}$ est tangent à la sphère.

Proposition 4.3 *Il existe* k, l, $m \in \mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)$ *tels que :*

$$\mathcal{X} \;=\; \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z = kX + lY + mZ\,. \tag{27}$$

Preuve : En appliquant (27) respectivement à x, y, z les fonctions α, β, γ se mettent sous la forme

$$\alpha = -zl + ym, \ \beta = zk - xm, \ \gamma = -yk + xl. \tag{28}$$

Considérons les fonctions k, l, m définies par

$$k = \frac{1}{R^2}(\beta z - \gamma y), \ l = \frac{1}{R^2}(-\alpha z + \gamma x), \ m = \frac{1}{R^2}(\alpha y - \beta x). \tag{29}$$

Par l'équation (26), il est facile de vérifier que (k, l, m) ainsi donné vérifie (27).

Par le changement de base :

$$u = i(x + iy), \quad v = \sqrt{2}z, \quad w = -i(x - iy),$$

on se ramène au cas de l'hyperboloïde. On peut remarquer qu'un champ de vecteurs

$$\mathcal{X} = \alpha\partial_u + \beta\partial_v + \gamma\partial_w$$

"respecte" l'équation

$$2uw + \frac{v^2}{2} - c = 0$$

(i.e. $2\alpha w + \beta v + 2\gamma u = 0$) si et seulement si $\mathcal{X}$ peut être présenté sous la forme :

$$\mathcal{X} = kU + lV + mW$$

où U, V, W sont les rotations hyperboliques infinitésimales.

5 Projectivité du $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module $T(\mathrm{H}_q)$

Il existe plusieurs définitions équivalentes d'un module projectif (voir par exemple [L]). En remplaçant homomorphisme par homomorphisme dans la catégorie $U_q(sl(2)) - Mod$ et module par module tressé, nous adoptons ces définitions et propriétés pour notre cas tressé.

Pour montrer que le module tangent sur l'hyperboloïde quantique est un module projectif, nous traitons juste le cas classique, i.e. le cas de la sphère puis nous en déduisons les résultats dans notre cas tressé.

Comme nous l'avons déja fait remarquer, bien que le module tangent $T(S^2)$ ne soit pas un $\mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)$-module libre, il est par contre un $\mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)$-module projectif. En effet posons ici $A = \mathrm{Fun}\,(\mathrm{S}^2)$. Soit (X, Y, Z) la base du A-module A^3 et N le A-module de type fini engendré par l'élément

$$xX + yY + zZ := (x, y, z)$$

N est un sous-module de A^3. Notons $\overline{N}$ le sous-module de A^3 engendré par les éléments

$$yX - xY := (y, -x, 0), \quad zY - yZ := (0, z, -y),$$

$$xZ - zX := (-z, 0, x).$$

Proposition 5.1 *En sens de A-module on a :*

$$A^3 = N \oplus \overline{N}$$

Preuve : Notons Q le projecteur de A^3 tel que $\mathrm{Im}\,\mathrm{Q} = \mathrm{N}$ et défini par : $\forall\ (f, g, h) \in A^3$

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(f, g, h) &= R^{-2}(fx + gy + hz)(x, y, z) \\ &= R^{-2}(fx + gy + hz)(xX + yY + zZ). \end{aligned}$$

Montrer que l'intersection des deux A-modules N et $\overline{N}$ est réduite à zéro, revient à montrer que $\mathrm{Ker}\ \mathrm{Q} = \overline{\mathrm{N}}$. Nous avons :

$$\mathrm{Q}(y, -x, 0) = \mathrm{Q}(0, z, -y) = \mathrm{Q}(-z, 0, x) = 0$$

par conséquent $\overline{N} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{Q}$. Il reste à prouver que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Q} \subset \overline{\mathrm{N}}$.

Soit $\mathcal{X} \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Q}$, alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in A^3$ tel que

$$\mathcal{X} = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}(\mathcal{X}) = 0.$$

La deuxième condition ($\mathrm{Q}(\mathcal{X}) = 0$) entraîne

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Ainsi si $\mathcal{X} \in \operatorname{Ker} \mathrm{Q}$, cela revient à dire que $\mathcal{X}$ est de la forme :

$$\mathcal{X} = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \quad \text{avec} \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Donc montrer qu'un tel champ $\mathcal{X}$ appartient à $\overline{N}$ revient à montrer la proposition 4.3 (il suffit de remplacer dans cette proposition, les dérivées partielles ∂_x, ∂_y, ∂_z respectivement par les champs X, Y, Z). Par conséquent on a bien $\operatorname{Ker} \mathrm{Q} \subset \overline{\mathrm{N}}$.

En outre comme $(f, g, h) = f\,(1, 0, 0) + g\,(0, 1, 0) + h\,(0, 0, 1)$, il est nécéssaire et suffisant de connaître cette décomposition pour les éléments $X := (1, 0, 0)$; $Y := (0, 1, 0)$; $Z := (0, 0, 1)$ en vue de pouvoir décomposer tout élément du A-module A^3 comme somme d'un élément du A-module N et du A-module $\overline{N}$. Par un calcul directe nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(X) &= R^{-2}x(xX + yY + zZ) \\
\mathrm{Q}(Y) &= R^{-2}y(xX + yY + zZ) \\
\mathrm{Q}(Z) &= R^{-2}z(xX + yY + zZ).
\end{aligned}$$

Considérons en outre le projecteur noté P, de A^3 sur le A-module $\overline{N}$:

$$\mathrm{P} = id - \mathrm{Q},$$

nous obtenons également par un calcul directe :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X) &= -R^{-2}(z(xZ - zX) - y(yX - xY)) \\
\mathrm{P}(Y) &= -R^{-2}(x(yX - xY) - z(zY - yZ)) \\
\mathrm{P}(Z) &= -R^{-2}(y(zY - yZ) - x(xZ - zX)).
\end{aligned}$$

D'où la preuve de la proposition.

Nous avons alors les identifications suivantes :

$$A^3 / \{N\} \approx \overline{N}, \quad A^3 / \{\overline{N}\} \approx N.$$

Donc le A-module $T(S^2) = A^3 / \{N\}$ est réalisé comme un sous-module ($\overline{N}$) de A^3 ayant un module supplémentaire (N).

Faisons enfin remarquer qu'en prenant $A = \operatorname{Fun}(\mathrm{H})$, N le A-module engendré par $2wU + vV + 2uW$ et $\overline{N}$ celui engendré par les générateurs de $(\mathsf{V}\otimes\mathsf{V}')_1$, la proposition 5.1 reste également valable sur l'hyperboloïde.

Passons à présent au cas tressé. L'analogue tressé des Fun (H)-modules N et $\overline{N}$ sont respectivement le $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module (disons gauche) N^q_l et $\overline{N}^q_l$. Rappelons que N^q_l est engendré par

$$(q^3+q)uW^q+vV^q+(q+q^{-1})wU^q$$

et précisons que $\overline{N}^q_l$ est engendré par les éléments :

$$q^2uV^q-vU^q,\ (q^3+q)(uW^q-wU^q)+(1-q^2)vV^q,\ -q^2vW^q+wV^q.$$

Proposition 5.2 *En sens de $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module on a :*

$$(\mathcal{A}^c_{0,q})^3 = N^q_l\oplus\overline{N}^q_l$$

Preuve : Pour montrer que l'intersection de N^q_l et $\overline{N}^q_l$ est réduite à zéro, notons Q_q l'analogue tressé du projecteur Q. Q_q est la projection de $(\mathcal{A}^c_{0,q})^3$ telle que $\mathrm{Im}\,\mathrm{Q_q}=\mathrm{N^q_l}$ et définie par $\forall\ g,\ h,\ k\ \in\ \mathcal{A}^c_{0,q}$

$$\mathrm{Q}_q(g,\ h,\ k)=c^{-1}[gu+hv+kw][(q^3+q)uW^q+vV^q+(q+q^{-1})wU^q]$$

Considérons "l'analogue tressé de la proposition 4.3" i.e. en remplaçant dans l'équation (27) les dérivées partielles par les générateurs de V'^q et les champs $X,\ Y,\ Z$ par les générateurs de $(\mathsf{V}\otimes\mathsf{V}'^q)_1$. En outre l'analogue tressé de la condition (26) s'écrit

$$(\alpha\,U^q+\beta\,V^q+\gamma\,W^q)\,(\mathcal{C}_q-c)\ =\ 0$$

avec $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathcal{A}^c_{0,q}$. Alors les coefficients $k,\ l,\ m\ \in\mathcal{A}^c_{0,q}$ de l'analogue tressé de la proposition 4.3 sont donnés (au facteur constant c^{-1} près) par les générateurs de l'espace $(\mathbf{V}\otimes\mathsf{V})_1$ où l'espace $\mathbf{V}$ est celui engendré par les éléments $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

Le fait que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Q_q})=\overline{\mathrm{N}}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{l}}$ découle (comme dans le cas classique) de "l'analogue tressé de la proposition 4.3".

Comme pour la sphère (ou l'hyperboloïde classique) tout élément du $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module $(\mathcal{A}^c_{0,q})^3$ est la somme d'un élément de N^q_l et de $\overline{N}^q_l$. En effet nous avons :

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_q(U^q) &= c^{-1}u((q^3+q)uW^q+vV^q+(q+q^{-1})wU^q) \\ \mathrm{Q}_q(V^q) &= c^{-1}v((q^3+q)uW^q+vV^q+(q+q^{-1})wU^q) \\ \mathrm{Q}_q(W^q) &= c^{-1}w((q^3+q)uW^q+vV^q+(q+q^{-1})wU^q). \end{aligned}$$

En considérant en outre l'analogue tressé noté P_q du projecteur P qui est tel que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{P_q}) = \overline{\mathrm{N}}_1^{\mathrm{q}}$ et évidemment définit par

$$\mathrm{P}_q = id - \mathrm{Q}_q$$

nous obtenons alors par un calcul directe :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_q(U^q) = &\quad -q^{-2}c^{-1}\{q^2u[(q^3+q)(uW^q-wU^q)+(1-q^2)vV^q]- \\ &\qquad -v(vU^q-q^2uV^q)\} \\ \mathrm{P}_q(V^q) = &\ -q^{-2}c^{-1}\{-(q^3+q)u(-q^2vW^q+wV^q)-(q^3+q)(q^2uV^q- \\ &\ -vU^q)-(1-q^2)v[(q^3+q)(uW^q-wU^q)+(1-q^2)vV^q]\} \\ \mathrm{P}_q(W^q) = &\ -q^{-2}c^{-1}\{-q^2v(q^2vW^q-wV^q)-w[(q^3+q)(uW^q-wU^q)+ \\ &\qquad +(1-q^2)vV^q]\} \end{aligned}$$

Ainsi nous venons de prouver (comme dans le cas classique) que le $\mathcal{A}_{0,q}^c$-module $T(\mathrm{H}_q)_l$ est un $\mathcal{A}_{0,q}^c$-module projectif. (De même le $\mathcal{A}_{0,q}^c$-module $T(\mathrm{H}_q)_r$ est projectif).

6 Métrique et Connexion tressées

Nous définissons et montrons l'existence d'une (pseudo)métrique et d'une connexion (partiellement définie) tressées sur le module tangent $T(\mathrm{H}_q)$.

6.1 (Pseudo)métrique tressée

Rappelons que "pseudo" signifie que son analogue classique n'est pas définie positive. Par la suite nous omettrons cette précision.

Définition 6.1 *L'opérateur*

$$\begin{array}{rccl} <,>: & T(\mathrm{H}_q)_l \otimes_{\mathbf{K}} T(\mathrm{H}_q)_r & \rightarrow & \mathcal{A}_{0,q}^c \\ & a\otimes b & \mapsto & <a\otimes b> = <a,b> \end{array}$$

est une métrique tressée si : $\forall P \in T(\mathrm{H}_q)_l,\ Q \in T(\mathrm{H}_q)_r,\ f \in \mathcal{A}^c_{0,q}$

$$< fP\,, Q >= f < P\,, Q >, \quad < P\,, Qf > = < P\,, Q > f \tag{30}$$

et $<,>$ *est* $U_q(sl(2))$*-covariant, c'est-à-dire* $\forall z \in U_q(sl(2))$ *:*

$$\begin{aligned} z. < a, b > &= \ <,> \Delta(z).(a \otimes b) = <,> (z_{(1)} \otimes z_{(2)})(a \otimes b) \\ &= \ < z_{(1)}.a, z_{(2)}.b > \quad avec \quad (a\,, b) \in T(\mathrm{H}_q)_l \times T(\mathrm{H}_q)_r. \end{aligned}$$

Si en outre on a :

$$<,> (\mathsf{V}'^q \otimes \overline{\mathsf{V}}'^q)_1 = 0, \tag{31}$$

la métrique tressée est dite q-symétrique. ($\overline{\mathsf{V}}'^q$ *coïncide avec* V'^q *comme un espace vectoriel. Mais il engendre* $T(\mathrm{H}_q)$ *comme un* $\mathcal{A}^c_{0,q}$*-module droit.)*

Soulignons que pour le moment nous introduisons la métrique tressée sur $T(\mathrm{H}_q)_l \otimes_{\mathbf{K}} T(\mathrm{H}_q)_r$. Nous pourrons la prolongée sur $T(\mathrm{H}_q)_\epsilon \otimes_{\mathbf{K}} T(\mathrm{H}_q)_\epsilon$ seulement après l'identification des modules tangents $T(\mathrm{H}_q)_l$ et $T(\mathrm{H}_q)_r$ (voir section 7.1).

Théorème 6.1 *Il existe une unique (à un facteur près) métrique tressée et q-symétrique sur le module tangent* $T(\mathrm{H}_q)$*. Cette métrique tressée restreinte sur* $\mathsf{V}'^q \otimes \overline{\mathsf{V}}'^q$ *fournit la table suivante :*

$$< U^q\,, \overline{U}^q >= uu, \ < U^q\,, \overline{V}^q >= uv, \ < V^q\,, \overline{U}^q >= vu,$$

$$< W^q\,, \overline{V}^q >= wv, \ < V^q\,, \overline{V}^q >= (1 - q^2)vv - q^{-1}(1 + q^2)^2 uw\,,$$

$$< W^q\,, \overline{W}^q >= ww, \ < U^q\,, \overline{W}^q >= -q^{-1}(1 + q^2)^{-1} vv - q^2 uw\,,$$

$$< V^q\,, \overline{W} >= vw, \ < W^q\,, \overline{U}^q >= -q(1 + q^2)^{-1} vv - q^{-2} wu.$$

Preuve : Décrivons d'abord tous les couplages

$$<,>: \mathsf{V}'^q \otimes \overline{\mathsf{V}}'^q \to \mathcal{A}^c_{0,q}$$

$U_q(sl(2))$-covariants. Pour cela, nous décomposons $\mathsf{V}' \otimes \overline{\mathsf{V}}'$ en $U_q(sl(2))$-modules irréductibles de dimension finie. La $U_q(sl(2))$-covariance impose les conditions :

$$<,> (\mathsf{V}'^q \otimes \overline{\mathsf{V}}'^q)_2 = k\mathsf{V}^q_2, \quad <,> (\mathsf{V}'^q \otimes \overline{\mathsf{V}}'^q)_0 = \gamma \tag{32}$$

où k et γ sont des constantes. (La q-symétrie exigera en outre la relation (31).)

La seconde étape de la démonstration consiste à déterminer les relations de dépendance entre les paramètres k et γ. Nous la faisons par le biais des relations caractérisant le module tangent tressé gauche et le module tangent tressé droit. Cela revient à vérifier que la relation de dépendance définie par

$$<,>^{23} (\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}'^{q})_0 \otimes \overline{\mathsf{V}}'^{q} = 0 \tag{33}$$

est compatible avec celle définie par

$$<,>^{12} \mathsf{V}'^{q} \otimes (\overline{\mathsf{V}}'^{q} \otimes \mathsf{V})_0 = 0. \tag{34}$$

On étend enfin ce couplage à $T(\mathrm{H}_q)_l \otimes_{\mathbf{K}} T(\mathrm{H}_q)_r$ en utilisant la propriété (30). (Voir appendice **A** pour la forme explicite des équations symboliques).

Nous avons déterminés le couplage $<,>$ avec la condition (33). Mais on vérifie que la condition (34) est satisfaite pour ce couplage ainsi déterminé.

6.2 Connexion tressée

Rappelons d'abord que dans le cas classique ($q = 1$), une connexion linéaire sur l'espace des champs de vecteurs E d'une variété algébrique régulière (ou plus généralement d'une variété lisse) $\mathcal{M}$ est l'application notée ∇

$$\begin{array}{rccl} \nabla : & E \otimes E & \to & E \\ & a \otimes b & \mapsto & \nabla_a b \end{array}$$

$\mathbf{K}$-linéaire et satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. $\nabla_{fa} b = f \nabla_a b, \quad (a,b) \in E^2, \quad f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{M})$

2. $\nabla_a fb = f \nabla_a b + (af)\, b\,.$

Notons que la propriété 2. est la règle de dérivation de Leibniz pour la connexion ∇.

Lorsque la connexion ∇ est sans torsion (par exemple connexion de Levi-Civita), on a en plus

$$[a\,,\,b] = \nabla_a b \;-\; \nabla_b\, a$$

(où $[,]$ désigne le crochet de Lie des champs de vecteurs a et b), on en déduit alors :

$$\begin{aligned} \nabla_a fb &= \nabla_{fb}a - [fb, a] \\ &= \nabla_{fb}a - (f[b,a] - (af)b) \\ &= \nabla_{fb}a - (\nabla_{fb}a - \nabla_{fa}b - (af)b) \\ &= f\nabla_a b + (af)b. \end{aligned}$$

Ainsi si la connexion ∇ est sans torsion, la propriété 2. découle de la propriété 1. Ceci nous permet de nous passer de la règle de dérivation de Leibniz pour la connexion si cette dernière est sans torsion.

Nous généralisons la notion de connexion linéaire à notre cas tressé. Mais nous construisons dans ce cas plutôt une connexion partiellement définie sur le module tangent tressé. ("Partiellement définie" signifie qu'elle est définie sur un sous-ensemble de $T(\mathrm{H}_q) \otimes T(\mathrm{H}_q)$).

Définition 6.2 *L'opérateur*

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & T(\mathrm{H}_q)_l \otimes_{\mathbf{K}} \mathrm{V}'^q & \to & T(\mathrm{H}_q)_l \\ & a \otimes b & \mapsto & \nabla_a b \end{array}$$

est une "connexion" tressée (sans torsion), s'il vérifie les propriétés :

1. ∇ *est un morphisme dans la catégorie des* $U_q(sl(2))$*-modules, c'est-à-dire :*
$$z.\nabla_a b = \nabla_{z_{(1)}.a}\, z_{(2)}.b$$
$\forall a \in T(\mathrm{H}_q)_l, \quad b \in \mathrm{V}'^q, \quad z \in U_q(sl(2))$.

2. $\nabla_{fa} b = f\nabla_a b, \quad \forall a \in T(\mathrm{H}_q)_l, \quad b \in \mathrm{V}'^q, \quad f \in \mathcal{A}^c_{0,q}$.

3.
$$a^{ij}\nabla_{X_i}Y_j = [X_i, Y_j], \quad X_i\,,\,Y_j \in \mathrm{V}'^q \quad \textit{avec} \quad a^{ij}X_i \otimes Y_j \in \mathrm{V}^q_1. \tag{35}$$

Notons que (35) est la q-analogue de la notion de connexion sans torsion. Si nous arrivons en outre à étendre le q-crochet de Lie $[\,,\,]_q$ sur $T(\mathrm{H}_q)$ tout entier et à comprendre l'algèbre enveloppante de cette algèbre de Lie q-déformée (nous en avons besoin pour écrire la partie à gauche de la relation (35)), nous pourrons prolonger notre connexion (partiellement définie) sur $T(\mathrm{H}_q)_\epsilon \otimes_{\mathbf{K}} T(\mathrm{H}_q)_\epsilon$ en utilisant une analogue de (35). Malheureusement nous ne connaissons aucune façon de le faire.

Théorème 6.2 *Il existe une connexion tressée* ∇ *sur le module tangent de l'hyperboloïde quantique (au sens de la définition (6.2). Elle est donnée sur* V'^q *par*

$$\begin{aligned}
\nabla_{U^q} U^q = &\quad \alpha(uvU^q - q^2 uuV^q), \quad \nabla_{W^q} W^q = \alpha(wwV^q - q^4 vwW^q),\\
\nabla_{U^q} V^q = &\quad \beta\{\{-\alpha[(q^3+q)uw - q^2vv] - 2q^2\}U^q - \alpha(q^6+q^2-1)\\
&\qquad uvV^q\} + \beta\alpha(q^3+q)uuW^q,\\
\nabla_{V^q} U^q = &\quad \beta\{\{-\alpha q^2[(q^3+q)uw - q^2vv] + 2\}U^q - \alpha q^2(q^6+q^2-1)\\
&\qquad uvV^q\} + \beta\alpha q^2(q^3+q)uuW^q,\\
\nabla_{V^q} W^q = &\quad \beta\{-\alpha q^3(1+q^2)wwU^q + \alpha(1+q^4-q^6)vwV^q\} + \beta\{\alpha q^4\\
&\qquad [(q+q^{-1})uw - vv] - 2q^2\}W^q,\\
\nabla_{W^q} V^q = &\quad \beta\{-\alpha q^5(1+q^2)wwU + \alpha q^2(1+q^4-q^6)vw^q\} + \beta\{\alpha q^6\\
&\qquad [(q+q^{-1})uw - vv] + 2\}W^q,\\
\nabla_{W^q} U^q = &\quad \beta\{\alpha q^6 vwU^q + \{-q^4(1-q^2)\alpha[-uw + [2]^{-1}v^2] - \tfrac{2}{1+q^2}\}\\
&\qquad V^q\} - q^6\beta\alpha uvW^q,\\
\nabla_{U^q} W^q = &\quad \beta\{\alpha q^2 vwU^q + \{(q^2-1)\alpha[-uw + [2]^{-1}v^2] + \tfrac{2q}{1+q^2}\}V^q\\
&\qquad -q^2\alpha uvW^q\},\\
\nabla_{V^q} V^q = &\quad \beta\{-\alpha q^3(1+q^2)^2 vwU^q + \{q(1+q^2)(1-q^4)[-uw + [2]^{-1}\\
&\qquad v^2] + 2(1-q^2)\}V^q\} + q^3(1+q^2)^2\alpha uvW^q\},\\
&\qquad \alpha = -\tfrac{2}{(1-q^2+q^4)c}, \quad \beta = (1+q^4)^{-1}.
\end{aligned}$$

Preuve : Comme dans le cas de la métrique tressée, nous décrivons d'abord toutes les applications

$$\mathsf{V}'^q \otimes_{\mathbf{K}} \mathsf{V}'^q \longrightarrow T(\mathrm{H}_q)_l$$

$U_q(sl(2))$-covariantes. Cette $U_q(sl(2))$-covariance impose les conditions suivantes :

$$\nabla(\mathsf{V}'^q \otimes \mathsf{V}'^q)_2 = \alpha(\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}'^q)_2, \quad \nabla(\mathsf{V}'^q \otimes \mathsf{V}'^q)_0 = 0, \, \alpha \in \mathbf{K} \tag{36}$$

complétées par les relations qui découlent de (35).

(Précisons que $\nabla(\mathsf{V}'^q \otimes \mathsf{V}'^q)_2$ désigne l'ensemble $\nabla_a b$ où $a \otimes b$ parcourent $(\mathsf{V}'^q \otimes \mathsf{V}'^q)_2$.)

Concrètement, $U^q \otimes U^q$ étant de poids deux et $X.\nabla_{U^q} U^q = 0$, considérons

$$\nabla_{U^q} U^q = \alpha(uvU^q - q^2 uuV^q) \tag{37}$$

où $uvU^q - q^2uuV^q$ est de poids 2. Notons que le choix $\nabla_{U^q}U^q = uU^q$ n'est pas compatible avec la relation

$$\nabla_K = (q^3 + q)\, u\nabla_{W^q} + v\nabla_{V^q} + (q + q^{-1})\, w\nabla_{U^q} = 0 \text{ dans } T(\mathrm{H}_q)_l.$$

Notons

$$J_i = \frac{1}{[i]_q} Y^i J_{i-1}, \quad i \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}, \quad [i]_q = \frac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}}, \quad \text{où}$$

$$J_0 = \nabla_{U^q} U^q = \alpha(uvU^q - q^2 uuV^q).$$

Par application de l'opérateur Y^i à la relation (37) nous obtenons les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned}
-\nabla_{U^q}V^q - q^2\nabla_{V^q}U^q &= J_1\,,\\
-\nabla_{U^q}W^q + q\nabla_{V^q}V^q - q^4\nabla_{W^q}U^q &= J_2\,,\\
\nabla_{V^q}W^q + q^2\nabla_{W^q}V^q &= J_3\,,\\
\nabla_{W^q}W^q &= J_4.
\end{aligned}$$

(Voir appendice **B** pour les formes explicites). Le choix de α est précisé par la deuxième équation du (36). (voir appendice **B**)

Remarque 6.2 Bien que nous ne savons pas définir la q-analogue de la notion de courbure (dans le cas classique elle est introduite localement) dans le cadre de notre approche globale, on peut déviner (à un facteur près) la forme de courbure correspondante en supposant que cette forme soit une déformation plate de son analogue classique. Sur la sphère, cette forme est donnée (à un facteur près) par

$$x\,(dy\,dz - dz\,dy) + y\,(dz\,dx - dx\,dz) + z\,(dx\,dy - dy\,dx).$$

Ainsi dans le cas tressé, pour obtenir la forme de courbure, il suffit de remplacer dans l'expression $(q^3 + q)uw + vv + (q + q^{-1})wu$ les facteurs de droites respectivement par la q-analogue des formes $dv\,dw - dw\,dv$, $dw\,du - du\,dw$, $du\,dv - dv\,du$.

7 Identification de $T(\mathrm{H}_q)_l$ et $T(\mathrm{H}_q)_r$

Nous nous intéressons à présent au problème qui consiste à identifier les modules tangents gauche $T(\mathrm{H}_q)_l$ et droit $T(\mathrm{H}_q)_r$. Cette identification est nécessaire, car elle permet d'étendre la métrique tressée sur $T(\mathrm{H}_q)_l$ (ou $T(\mathrm{H}_q)_r$).

Le fait que l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$ ne soit munie d'aucune structure d'involution et que l'opérateur de tresse provenant de la R-matrice universelle du GQ $U_q(sl(2))$ ne soit pas involutif d'autre part, nous ont amenées à suggérer d'identifier les $\mathcal{A}^c_{0,q}$-modules $T(\mathrm{H}_q)_l$ et $T(\mathrm{H}_q)_r$ de la façon suivante – nous construisons une base de chacun des modules tangents, – puis nous construisons une application (dans la catégorie $U_q(sl(2)) - Mod$) entre $T(\mathrm{H}_q)_l$ et $T(\mathrm{H}_q)_r$ qui coïncide (pour $q = 1$) avec l'application définie par la volte.

7.1 Base du $\mathcal{A}^c_{0,q}$-module $T(\mathrm{H}_q)$

Notons d'abord que la méthode de construction de cette base étant aussi bien valable dans le cas classique que dans notre cas tressé, nous considérons dans ce qui suit indifférement ces deux cas.

En considérant les modules

$$\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}', \quad \mathsf{V}_k \otimes \mathsf{V}', \quad k = 2, 3, \ldots$$

où les V_k (composantes de base de l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,1}$) sont des $U(sl(2))$-modules, nous déterminons les composantes qui “survivent” dans le module tangent. Il est évident que dans le produit $\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}'$ seulement deux composantes survivent. À savoir :

$$(\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}')_1, \quad (\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}')_2$$

puisque par construction la composante $(\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}')_0$ est nulle dans le module tangent.

De façon analogue, dans le produit $\mathsf{V}_2 \otimes \mathsf{V}'$, les composantes $(\mathsf{V}_2 \otimes \mathsf{V}')_3$, $(\mathsf{V}_2 \otimes \mathsf{V}')_2$ "survivent" et il n'est pas difficile de montrer que la composante $(\mathsf{V}_2 \otimes \mathsf{V}')_1$ est nulle modulo les termes de $\mathbf{K} \otimes \mathsf{V}' = \mathsf{V}'$. En effet, par construction, les éléments de $\mu^{12}(\mathsf{V} \otimes (\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}')_0)$ sont nuls dans le module tangent. En réduisant en outre tout élément du produit $\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}$ à sa forme canonique, il est la somme d'un élément de $\mathsf{V}_2 \subset \mathsf{V}^{\otimes 2}$ et d'un élément de $\mathbf{K}$. D'où la preuve de ce dernier fait.

Ainsi de façon générale, dans le produit $\mathsf{V}_k \otimes \mathsf{V}'$ qui se décompose de la manière suivante

$$\mathsf{V}_k \otimes \mathsf{V}' = (\mathsf{V}_k \otimes \mathsf{V}')_{k+1} \oplus (\mathsf{V}_k \otimes \mathsf{V}')_k \oplus (\mathsf{V}_k \otimes \mathsf{V}')_{k-1},$$

la composante $(\mathsf{V}_k \otimes \mathsf{V}')_{k-1}$ est nulle modulo les termes appartenant à $\mathsf{V}_j \otimes \mathsf{V}', \quad j < k-1$.

Nous avons donc montré le fait suivant :

Proposition 7.1 *Une base dans le module tangent gauche $T(\mathrm{H}_q)_l$ est formée par les $U_q(sl(2))$-modules*

$$1. \mathsf{V}'^q, \quad 2. (\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}'^q)_{1,2}, \quad 3. (\mathsf{V}_2^q \otimes \mathsf{V}'^q)_{2,3}, \quad 4. (\mathsf{V}_3^q \otimes \mathsf{V}'^q)_{3,4} \quad etc.$$

On construit de façon similaire une base du module tangent droit $T(\mathrm{H}_q)_r$.

Identifions à présent les modules tangents $T(\mathrm{H}_q)_l$ et $T(\mathrm{H}_q)_r$ en définissant :

$$\alpha : T(\mathrm{H}_q)_l \to T(\mathrm{H}_q)_r$$

telle que l'application :

$$\alpha : (\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}'^q)_1 \to (\mathsf{V}'^q \otimes \mathsf{V})_1, \quad (\mathsf{V} \otimes \mathsf{V}'^q)_2 \to (\mathsf{V}'^q \otimes \mathsf{V})_2,$$

$$(\mathsf{V}_2^q \otimes \mathsf{V}'^q)_2 \to (\mathsf{V}'^q \otimes \mathsf{V}_2^q)_2, \ldots$$

soit un $U_q(sl(2))$-morphisme unique (à un facteur constant près sur chaque composante). Nous suggérons maintenant une façon "canonique" d'éliminer ce degré de liberté sur les composantes, de la manière suivante. On identifie les éléments de l'espace :

$$(\mathsf{V}\otimes\mathsf{V}'^q)_2 \quad \text{et} \quad (\mathsf{V}'^q\otimes\mathsf{V})_2, \quad (\mathsf{V}_k^q\otimes\mathsf{V}'^q)_{k+1} \quad \text{et} \quad (\mathsf{V}'^q\otimes\mathsf{V}_k^q)_{k+1}, \ k=2\,,3,\ldots$$

qui coïncident quand on remplace V'^q par V. Quant aux composantes

$$(\mathsf{V}\otimes\mathsf{V}'^q)_1 \quad \text{et} \quad (\mathsf{V}'^q\otimes\mathsf{V})_1, \quad (\mathsf{V}_k^q\otimes\mathsf{V}'^q)_k \quad \text{et} \quad (\mathsf{V}'^q\otimes\mathsf{V}_k^q)_k\,,$$

leurs éléments sont identifiés si la même opération amène aux images opposées. On peut facilement voir que dans le cas classique, cette identification et celle définie par la volte coïncident : c'est la motivation de notre méthode d'identification canonique.

Remarque 7.1 Lorsque l'algèbre $\mathcal{A}_{0,q}^c$ est munie d'un opérateur de tresse involutif ($S^2 = id$), une telle identification est faite de façon similaire au cas classique en remplaçant la volte par S. Mais pour l'opérateur de tresse non involutif provenant du GQ $U_q(sl(2))$ ce n'est plus raisonnable. Considérons M_1 et M_2 deux $\mathcal{A}_{0,q}^c$-modules (gauche par exemple). Le problème réside dans le fait que dans le produit

$$m_1\otimes f\,m_2, \quad m_1\in M_1,\, m_2\in M_2,\, f\in\mathcal{A}_{0,q}^c$$

il n'existe aucune façon raisonnable de transposer le facteur f pour le mettre à gauche de telle manière que le produit tensoriel $\otimes_{\mathcal{A}_{0,q}^c}$ soit associatif et le module $, M_1\otimes_{\mathcal{A}_{0,q}^c} M_2$ soit une déformation plate de son analogue classique en supposant bien sûr que M_1 et M_2 soient des déformations plates de leurs analogues classiques respectifs.

En résumé, précisons une fois de plus que notre méthode qui consiste à introduire la métrique en deux étapes :

- en définissant d'abord un couplage sur $T(\mathrm{H}_q)_l\otimes_{\mathbf{K}}T(\mathrm{H}_q)_r$,
- et ensuite à identifier $T(\mathrm{H}_q)_l$ et $T(\mathrm{H}_q)_r$,

nous permet de contrôler le fait que notre construction ne soit pas contradictoire (i.e. la platitude a lieu).

Il existe dans la littérature plusieurs constructions de fibré quantique sur la sphère ([BM], [S2]) et de métrique quantique. Mais pour la plupart d'entre elles, la notion de platitude de ces constructions est carrément ignorée. C'est en cela que nos constructions sont différentes.

Appendice

A Hyperboloïde quantique et métrique tressée

Nous avons explicitement :

$$\begin{gathered}
\mathsf{V}_0^q = Span\,((q^3+q)uw + vv + (q+q^{-1})wu),\\
\mathsf{V}_1^q = Span\,(q^2uv - vu,\ (q^3+q)(uw-wu) + (1-q^2)vv,\ -q^2vw + wv),\\
\mathsf{V}_2^q = Span\,(uu,\ uv + q^2vu,\ uw - qvv + q^4wu,\ vw + q^2wv,\ ww).
\end{gathered}$$

(Dans ces expressions nous avons omis le symbole du produit tensoriel, ce que nous ferons lorsque cela n'apporte aucune confusion.)

$\mathcal{C}_q$ est le générateur de l'espace de dimension un (V_0^q) :

$$\mathcal{C}_q \;=\; (q^3+q)uw + vv + (q+q^{-1})wu.$$

En posant :

$$x_0 \;=\; u, \quad x_1 \;=\; q^2uv - vu, \quad x_2 \;=\; uu$$

nous avons :

$$\begin{gathered}
q^2uv - vu = -2u\hbar,\ \ (q^3+q)(uw-wu) + (1-q^2)vv = 2v\hbar,\\
-q^2vw + wv = 2w\hbar,\ \ \mathcal{C}_q = (q^3+q)uw + vv + (q+q^{-1})wu = c,
\end{gathered}$$

Explicitons à présent les équations symboliques de la Section 6 :

- $<,> (\mathsf{V}'^q \otimes \overline{\mathsf{V}}'^q)_2 = k\mathsf{V}_2^q$.

Sur la composante de spin 2 de $\mathsf{V}'^q \otimes \overline{\mathsf{V}}'^q$, l'élément $U^q \otimes \overline{U}^q$ est de poids 2 et nous avons nécessairement par la $U_q(sl(2))$-covariance :

$$< U^q\,, \overline{U}^q >= \; kuu$$

Par application de l'opérateur Y^n (avec $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$) à $< U^q\,, \overline{U}^q >$ nous obtenons les quatre relations suivantes :

$$< U^q\,, \overline{V}^q > +q^2 < V^q\,, \overline{U}^q >= k(q^2vu + uv)\,,$$

$$- < U^q\,, \overline{W}^q > +q < V^q\,, \overline{V}^q > -q^4 < W^q\,, \overline{U}^q >= k(qvv - q^4wu - uw)\,,$$

$$< V^q\,,\overline{W}^q > +q^2 < W^q\,,\overline{V}^q >= k(vw + q^2wv)\,,$$
$$< W^q\,,\overline{W}^q >= kww.$$

- $<,>(\mathrm{V}'^q \otimes \overline{\mathrm{V}}'^q)_0 = \gamma.$
  Sur la composante de spin zéro de $\mathrm{V}'^q \otimes \overline{\mathrm{V}}'^q$ nous avons

$$(q^3 + q) < U^q\,,\overline{W}^q > + < V^q\,,\overline{V}^q > +(q + q^{-1}) < W^q\,,\overline{U}^q > = \gamma.$$

- Enfin la q-symétrie (31) se traduit par :

$$q^2 < U^q\,,\overline{V}^q >=< V^q\,,\overline{U}^q >, \quad < W^q\,,\overline{V}^q >= q^2 < V^q\,,\overline{W}^q >,$$

$$(q^3 + q)[< U^q\,,\overline{W}^q > - < W^q\,,\overline{U}^q >] = (q^2 - 1) < V^q\,,\overline{V}^q > .$$

Les relations de dépendance entre les paramètres k et γ découlent de (33) et (34) qui, en forme explicite se traduisent par :

$$< K\,,\, z >= 0, \quad \forall\, z \in \overline{\mathrm{V}}'^q, \quad < z\,,\overline{K} >= 0 \quad \forall\, z \in \mathrm{V}'^q \quad \text{où} \qquad (38)$$

$$\begin{aligned} K &= (q^3 + q)uW^q + vV^q + (q + q^{-1})wU^q\,, \\ \overline{K} &= (q^3 + q)\overline{U}^q w + \overline{V}^q v + (q + q^{-1})\overline{W}^q u. \end{aligned}$$

Déterminons cette relation de dépendance en utilisant la première équation de (38). Il suffit de considérer $z = \overline{U}^q$ dans $< K\,,\, z >= 0$. On a alors

$$(q^3 + q)u < W^q\,,\overline{U}^q > +q^2v < U^q\,,\overline{V}^q > +(q + q^{-1})w < U^q\,,\overline{U}^q > = 0. \qquad (39)$$

Or on obtient :

$$< U^q\,,\overline{U}^q >= kuu, < U^q\,,\overline{V}^q >= kuv, < V^q\,,\overline{W}^q >= kvw, \qquad (40)$$
$$< V^q\,,\overline{V}^q > -(q^3 + q) < W^q\,,\overline{U}^q >= k(vv - (q^3 + q)wu), \qquad (41)$$

$$< W^q\,,\overline{W}^q >= kww,\ q^2 < V^q\,,\overline{V}^q > +(q^3 + 2q + q - 1) < W^q\,,\overline{U}^q >= \gamma. \qquad (42)$$

Les relations (41) et (42) donnent :

$$< W^q\,,\overline{U}^q >= \alpha[\gamma - kq^2(vv - (q^3 + q)wu)]\,,$$

$< V^q, \overline{V}^q >= \alpha[(q^3+q)\gamma+k(q^3+2q+q^{-1})vv-k(q^3+q)(q^3+2q+q^{-1})wu]$
où $\alpha = (2q^3 + 2q + q^{-1} + q^5)^{-1}$.
Exprimons en outre la constante orbitale c de l'hyperboloïde quantique en fonction de $v \otimes v$ et de $w \otimes u$. Dans l'algèbre $\mathcal{A}_{0,q}^{c}$ nous avons :

$(q^3+q)(uw-wu)+(1-q^2)vv = 0, \quad (q^3+q)uw+vv+(q+q^{-1})wu = c \quad$ donc

$$q^2vv + (q^3 + 2q + q^{-1})wu \; = \; c.$$

L'équation (39) s'écrit alors :

$$(q^3+q)\alpha u[\gamma - kq^2(vv - (q^3+q)wu] + kq^2vuv + k(q+q^{-1})wuu = 0. \quad (43)$$

Faisons les changements nécessaires dans les deux derniers termes de l'équation (43) de façon à mettre u à gauche dans ces termes. Nous pouvons alors réécrire l'équation (43) sous la forme :

$$\gamma\,\Gamma_1 + \Gamma_2\,vv + \Gamma_3\,wu \; = 0$$

où

$$\Gamma_1 = (q^3 + q)\alpha\,,$$
$$\Gamma_2 = k[-(q^3 + q)\alpha q^2 + q^4 - q^4(q + q^{-1})\frac{q^2 - 1}{q^3 + q}]\,,$$
$$\Gamma_3 = k[(q^3 + q)^2\alpha q^2 + (q + q^{-1})].$$

Nous en déduisons (pour q générique) :

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}vv - \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1}wu \\ &= -\frac{1}{q^2}(1 + q^4)k[q^2vv + (q^3 + 2q + q{-}1)wu] \\ &= -\frac{1}{q^2}(1 + q^4)kc, \quad c \;\; \text{est la contante orbitale non nulle.} \end{aligned}$$

On vérifie qu'avec cette relation de dépendance trouvée, la deuxième équation de (38) est satisafaite.

B Connexion tressée

Notons

$$J_i = \frac{1}{[i]_q} Y^i J_{i-1}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad [i]_q = \frac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}}, \quad \text{où}$$

$$J_0 = \nabla_{U^q} U^q = \alpha(uvU^q - q^2 uuV^q).$$

Par application de l'opérateur Y^i à la relation (37) nous obtenons les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned} -\nabla_{U^q} V^q - q^2 \nabla_{V^q} U^q &= J_1 , \\ -\nabla_{U^q} W^q + q\nabla_{V^q} V^q - q^4 \nabla_{W^q} U^q &= J_2 , \\ \nabla_{V^q} W^q + q^2 \nabla_{W^q} V^q &= J_3 , \\ \nabla_{W^q} W^q &= J_4 \quad \text{avec :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \alpha\{[(q^3+q)uw - q^2 vv)]U^q + (q^6 + q^2 - 1)uvV^q - (q^3+q)uuW^q\} , \\ J_2 &= (1+q^2+q^4)\alpha\{-q^2 vwU^q + (1-q^2)[-uw + [2]^{-1}v^2]V^q + q^2 uvW^q] \\ J_3 &= \alpha\{-q^3(q^2+1)wwU^q + (1+q^4-q^6)vwV^q + q^4[(q+q^{-1}uw - vv]W^q\} , \\ J_4 &= \alpha(wwV^q - q^4 vwW^q). \end{aligned}$$

Des relations du (35), nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \nabla_{U^q} W^q &= \nabla_{W^q} U^q + \frac{q^2-1}{q^3+q} \nabla_{V^q} V^q + \frac{2}{q^3+q} V^q , \\ (q^3+q) J_2 &= -(q^3+q)(1+q^4)\nabla_{W^q} U^q + (1+q^4)\nabla_{V^q} V^q - 2V^q , \\ (q+q^{-1})(q^2-1)\nabla_{W^q} U^q &+ q^2 \nabla_{V^q} V^q + 2V^q = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous savons exprimer les éléments suivants :

$$\nabla_{U^q} V^q, \ \nabla_{V^q} U^q, \ \nabla_{V^q} W^q, \ \nabla_{W^q} V^q, \ \nabla_{W^q} U^q, \ \nabla_{U^q} W^q, \ \nabla_{V^q} V^q$$

en fonction de α. Plus précisément en fonction de (J_1) on a :

$$\begin{aligned} \nabla_{U^q} V^q = \ & \tfrac{1}{1+q^4}\{\{-\alpha[(q^3+q)uw - q^2 vv] - 2q^2\}U^q - \alpha(q^6+q^2-1)uvV^q \\ & +\alpha(q^3+q)uuW^q\}, \\ \nabla_{V^q} U^q = \ & \tfrac{1}{1+q^4}\{\{-\alpha q^2[(q^3+q)uw - q^2 vv] + 2\}U^q - \alpha q^2(q^6+q^2-1)uvV^q \\ & +\alpha q^2(q^3+q)uuW^q\}\}. \end{aligned}$$

En fonction de (J_3) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\nabla_{V^q} W^q = & \tfrac{1}{1+q^4}\{-\alpha q^3(1+q^2)wwU^q + \alpha(1+q^4-q^6)vwV^q + \{\alpha q^4 \\
& [(q+q^{-1})uw - vv] - 2q^2\}W^q\}, \\
\nabla_{W^q} V^q = & \tfrac{1}{1+q^4}\{-\alpha q^5(1+q^2)wwU^q + \alpha q^2(1+q^4-q^6)vwV^q + \{\alpha q^6 \\
& [(q+q^{-1})uw - vv] + 2\}W^q\}.
\end{aligned}$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned}
\nabla_{W^q} U^q = & \tfrac{1}{1+q^4}\{q^6\alpha vwU^q + \{-q^4(1-q^2)\alpha[-uw + [2]^{-1}v^2] - \tfrac{2q}{1+q^2}\}V^q \\
& -q^6\alpha uvW^q\}, \\
\nabla_{V^q} V^q = & \tfrac{1}{1+q^4}\{-q^3(1+q^2)^2\alpha vwU^q + \{q(1+q^2)(1-q^4)\alpha\{q(1+q^2) \\
& (1-q^4)\alpha[-uw+[2]^{-1}v^2] + 2(1-q^2)\}V^q + q^3(1+q^2)^2\alpha uvW^q\}, \\
\nabla_{U^q} W^q = & \tfrac{1}{1+q^4}\{q^2\alpha vwU^q + \{(q^2-1)\alpha[-uw+[2]^{-1}v^2] + \tfrac{2q}{1+q^2}\}V^q \\
& -q^2\alpha uvW^q\}.
\end{aligned}$$

Il reste maintenant à préciser la constante α. Pour cela, considérons la deuxième équation du (36) :

$$[(q^3+q)u\nabla_{W^q} + v\nabla_{V^q} + (q+q^{-1})w\nabla_{U^q}](z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathrm{V}'^q. \qquad (44)$$

Par exemple pour $z = U^q$ dans (44) nous obtenons :

$$\beta[(q^4-q^2+1)\alpha c+2][vU^q - q^2uV^q] = 0 \quad \text{et} \quad vU^q - q^2uV^q \neq 0 \quad \text{dans} \quad T(\mathrm{H}_q)_l.$$

D'où la valeur de α.

References

[A] P. Akueson : *Éléments de Géométrie tressée*, Thèse de l'Université de Valenciennes (1998).

[AG] P. Akueson, D. Gurevich : *Some aspects of braided geometry : differential calculus, tangent space, gauge theory*, to appear in J.Phys.A., (1999).

[BM] T. Brzezinski, S. Majid :*Line bundles on quantum sphere*, q-alg/9807052.

[DGK] J.Donin, D.Gurevich, S.Khoroshkin : *Double quantization of* $\mathbf{CP}^n$ *type orbits by generalized Verma modules*, JGP,28 (1998) pp.384-406.

[DGS] J.Donin, D.Gurevich, S.Shnider : *Invariant quantization in one and two parameters on semisimple coadjoint orbits of simple Lie groups*, J. Pure and App. Algebra 100 (1995), pp.103-115.

[DGR] J.Donin, D.Gurevich, V.Rubtsov : *Quantum hyperboloid and braided modules*, Algèbre Non Commutative, Groupes quantiques et invariants, Société Mathématique de France, Collection séminaires et congrès, No 2 (1997), pp.103-118.

[D] J.Donin : *Double quantization on the coadjoint representation of* $sl(n)$, Czech J.of Physics, 47, (1997), pp. 1115-1122.

[FRT] L.Faddeev, N.Reshetikhin, L.Takhtadhyan: *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math.J.1 (1990), pp.193-226.

[GRR] D.Gurevich, A. Radul, V.Rubtsov : *Noncommutative differential geometry and Yang-Baxter equation*, Preprint. Publ. Math. IHES (1991).

[GP] D.Gurevich, D.Panyushev : *On Poisson pairs associated to modified R-matrices*, Duke Math.J.73 (1994), no.1.

[DG] D.Gurevich, J.Donin : *Braiding of the Lie algebra* $sl(2)$, Amer.Math.Soc.Transl.(2) 167 (1995), pp.23-36.

[GV] D.Gurevich, L.Vainerman : *Noncommutative analogues of q-special polynomials and a q-integral on a sphere*, J.Phys.A. Math.Gen.31 (1998), pp.1771-1780.

[G1] D.Gurevich : *Algebraic aspects of the quantum Yang-Baxter equation*, Leningrad. Math.J. 2 (1991), pp. 801-828.

[G2] D.Gurevich : *Braided modules and reflection equations*, Quantum groups and quantum spaces. Banach Center Publ, (40), Institut of Math, Polish Academy of Sciences, Warszawa 1997, pp.99-109.

[K] C. Kassel : *Quantum groups*, Graduate texts in mathematics, 155, (1995).

[L] J. Lambek : *Lectures on rings and modules*, Blaisddell publishing company (1966).

[LS] V. Lyubashenko, A. Sudbery : *Quantum Lie algebras of type A_n*, q-alg /9510004.

[M] Sh. Majid : *Foundations of quantum groups theory*, Cambrige University Press, (1995).

[P] P. Podlès : *Quantum spheres*, Lett.Math.Phys. 14 (1987), pp.193-202.

[R] G. Rinehart : *Differential forms for general commutative algebras*, Trans.Amer.Math.Soc.108 (1963), pp.195-222.

[S1] J. P. Serre : *Modules projectifs et espaces fibrés a fibre vectorielle*, exp. 23, Séminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et théorie des nombres, Secrétariat mathématique, Paris, 1958.

[S2] A. Sudbery : *$SU_q(n)$ gauge theory*, Phys.Letters B 375 (1996), pp. 75-80.

P. Akueson
I.S.T.V., Université de Valenciennes
B.P. 311 Valenciennes France
E-mail: akueson@univ-valenciennes.fr