CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

PIERRE AGERON

La tour holomorphe d'une esquisse

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 37, nº 4 (1996), p. 295-314

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1996__37_4_295_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET
GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Volume XXXVII-4 (1996)

LA TOUR HOLOMORPHE D'UNE ESQUISSE

par Pierre AGERON

ABSTRACT. In 1974, C. Lair has associated to each sketch **S** a group which describes all possible "dualities" on the category of models of **S**. The holomorph of **S** can then be defined using a cross-product construction. In this paper, the author studies the "tower of iterated holomorphs" generated by **S**. The height and the "dialectical" group of **S** are described, and examples of computation of these invariants are given.

RESUME. En 1974, Christian Lair a montré comment associer à une esquisse **E** un groupe qui décrit toutes les "dualités" possibles sur la catégorie des modèles de **E**: on peut alors, par produit croisé, construire l'holomorphe de **E**. Nous étudions ici la "tour des holomorphes itérées" obtenue à partir d'une esquisse **E** donnée Nous définissons la hauteur et le groupe "dialectique" de **E**, invariants dont nous donnons des exemples de calcul

Ce travail a fait l'objet de conférences lors des Colloques ECCT (Tours, Juillet 1994) et CAEN (Caen, Septembre 1994).

1. Rappels sur les esquisses

La notion d'esquisse, introduite dans [Ehresmann66], offre une syntaxe diagrammatico-équationnelle pour décrire les types de structures mathématiques. Rappelons d'abord celle de compographe (ou graphe multiplicatif) qui généralise à la fois celle de graphe et celle de catégorie.

Définitions. Un graphe $\mathbb{G}$ est la donnée d'une classe d'objets $Ob(\mathbb{G})$, d'une classe de flèches $Fl(\mathbb{G})$ et de deux applications « source » et « but » de $Fl(\mathbb{G})$ dans $Ob(\mathbb{G})$. Un *compographe* (encore noté $\mathbb{G}$) est la donnée dans un graphe $\mathbb{G}$ d'une flèche distinguée $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$ pour chaque objet A et d'une loi de composition partielle sur les flèches notée $\circ$ (les couples de flèches (f, g) pour lesquels $g \circ f$ existe sont dits *composables*) vérifiant :

- **a)** si (f, g) est composable, alors $\mathrm{but}(f) = \mathrm{source}(g)$, $\mathrm{source}(g \circ f) = \mathrm{source}(f)$ et $\mathrm{but}(g \circ f) = \mathrm{but}(g)$;
- **b)** un couple de la forme $(f, \mathrm{id}_{\mathrm{source}(f)})$ est toujours composable et on a $\mathrm{id}_{\mathrm{source}(f)} \circ f = f$; de même $(\mathrm{id}_{\mathrm{but}(g)}, g)$ est toujours composable et $g \circ \mathrm{id}_{\mathrm{but}(g)} = g$.

Remarque. Si $\mathbb{G}$ n'a pas d'autre flèches que les identités, on le qualifie de *discret*. Que les objets d'un compographe ou d'une esquisse soient tous dotés d'une identité n'a rien d'une commodité technique : nous verrons ces identités se « démultiplier » en un groupoïde syntaxique non trivial.

Définitions. Il y a une notion évidente de *foncteur* entre deux compographes $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}'$. Si F et G sont deux foncteurs de $\mathbb{G}$ vers $\mathbb{G}'$, une *transformation naturelle* de F vers G est la donnée pour tout objet A de $\mathbb{G}$ d'une flèche $t_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ de sorte que si $a : A \longrightarrow A'$ est une flèche de $\mathbb{G}$, les composés $G(a) \circ t_A$ et $t_{A'} \circ F(a)$ existent et sont égaux. En particularisant cette notion au cas où F (resp. G) est un foncteur constant, on obtient la notion de cône *projectif* (resp. *inductif*) dans $\mathbb{G}'$ d'indexation $\mathbb{G}$.

Définitions. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux ensembles de petits compographes. $\mathbb{E} = (\underline{\mathbb{E}}, P, Q)$ est une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-esquisse si :

+ $\underline{\mathbb{E}}$ est un petit compographe (dit *support* de $\mathbb{E}$) ;
+ P est un ensemble de cônes projectifs (dits *distingués*) dans $\underline{\mathbb{E}}$ dont le compographe d'indexation est élément de $\mathcal{I}$;
+ Q est un ensemble de cônes inductifs (dits *distingués*) dans $\underline{\mathbb{E}}$ dont le compographe d'indexation est élément de $\mathcal{J}$.

Si Q (resp. P, resp. $P \cup Q$) est vide, on dit que $\mathbb{E}$ est une esquisse projective (resp. *inductive*, resp. *élémentaire*).
Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-esquisses, un *homomorphisme* de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}'$ est un foncteur de $\underline{\mathbb{E}}$ vers $\underline{\mathbb{E}}'$ qui envoie tout cône projectif distingué de $\mathbb{E}$ sur un cône projectif distingué de $\mathbb{E}'$ et tout cône inductif distingué de $\mathbb{E}$ sur un cône inductif distingué de $\mathbb{E}'$. On notera $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-Esq la catégorie des $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-esquisses et homomorphismes.

Définitions.- Si $\mathbb{E}$ est une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-esquisse, un *modèle* (*ensembliste*) de $\mathbb{E}$ est un foncteur de $\underline{\mathbb{E}}$ vers Ens qui envoie tout cône projectif distingué de $\mathbb{E}$ sur un cône limite projective de Ens et tout cône inductif distingué de $\mathbb{E}$ sur un cône limite inductive de Ens. On note Mod($\mathbb{E}$) la catégorie des modèles de $\mathbb{E}$ et transformations naturelles. Une catégorie (nécessairement localement petite) équivalente à une catégorie de la forme Mod($\mathbb{E}$) est dite *esquissable*. On peut de la même façon définir la catégorie Mod($\mathbb{E}, \mathbb{C}$) des modèles de $\mathbb{E}$ dans une quelconque catégorie $\mathbb{C}$. Il va de soi (c'est un atout de la théorie des esquisses !) qu'il n'y a aucune sorte d'unicité de l'esquisse esquissant une catégorie donnée ; toutefois, dans beaucoup de cas usuels s'impose une esquisse « la plus simple possible ». Ceci autorise à parler de l'esquisse des graphes, l'esquisse des groupes, etc. Les figures regroupées en fin d'article présentent quelques esquisses simples, accompagnées de leur esquisse holomorphe, une construction qui sera présentée plus loin.

Une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-*théorie* ou $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-*type* est une petite catégorie dans laquelle existent et ont été choisies toutes les limites projectives indexées par un élément de $\mathcal{I}$ et toutes les limites inductives indexées par un élément de $\mathcal{J}$. On peut la voir comme une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-esquisse particulière : en fait, *toute* $(\mathcal{I},\mathcal{J})$*-esquisse engendre librement une* $(\mathcal{I},\mathcal{J})$*-théorie* que l'on notera $\mathrm{Th}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\mathbb{E})$ ou simplement $\mathrm{Th}(\mathbb{E})$.

2. Semi-automorphismes d'une esquisse

La notion de semi-automorphisme, ou « automorphisme à conjugaison près », s'avère mieux adaptée à l'étude des symétries d'une esquisse que celle d'automorphisme.

Dans toute la suite, $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont deux ensembles de petits compographes. On note $\mathrm{Aut}(\mathcal{I},\mathcal{J})$ le groupe produit $\prod_{\mathbb{I}\in\mathcal{I}}\mathrm{Aut}(\mathbb{I})\times\prod_{\mathbb{J}\in\mathcal{J}}\mathrm{Aut}(\mathbb{J})$. Un élément $\sigma=((\sigma_{\mathbb{I}})_{\mathbb{I}\in\mathcal{I}},\ (\sigma_{\mathbb{J}})_{\mathbb{J}\in\mathcal{J}})$ de ce groupe est appelé une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$*-conjugaison*. Si $\mathbb{E}$ est une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse et si σ est une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-conjugaison, on dispose de la $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse $\mathbb{E}^{\sigma}$ de même support $\underline{\mathbb{E}}$ que $\mathbb{E}$, mais dans laquelle les cônes projectifs distingués sont ceux de la forme $p\circ\sigma_{\mathbb{I}}$ (où p est distingué dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{I}$ est l'indexation de p) et les cônes inductifs distingués sont ceux de la forme $q\circ\sigma_{\mathbb{J}}$ (où q est distingué dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{J}$ est l'indexation de q). Ainsi le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{I},\mathcal{J})$ opère à droite sur la catégorie $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-Esq. Il est clair que les modèles de $\mathbb{E}^{\sigma}$ sont exactement les modèles de $\mathbb{E}$.

Définition 2.1. Soit $\mathbb{E}$ une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse. Un automorphisme A du compographe $\underline{\mathbb{E}}$ est un *semi-automorphisme* de $\mathbb{E}$ si et seulement si il existe une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-conjugaison σ telle que A induise un isomorphisme d'esquisses de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}^{\sigma}$. L'ensemble des semi-automorphismes de $\mathbb{E}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\underline{\mathbb{E}})$ que l'on notera $\Gamma(\mathbb{E})$ et que l'on appellera parfois simplement *le groupe de* $\mathbb{E}$.

Remarque 2.2. On notera l'analogie entre cette définition et celle du groupe semi-linéaire $\Gamma L(E)$ d'un espace vectoriel E. Mais ici un même semi-automorphisme d'esquisse peut être associé à plusieurs conjugaisons différentes : $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ n'est donc pas un sous-groupe distingué de $\Gamma(\mathbb{E})$.

Remarque 2.3. Il est aussi possible, comme dans [Lair74], de construire le groupe $\Gamma(\mathbb{E})$ comme le groupe des automorphismes d'une certaine esquisse $Q(\mathbb{E})$, obtenue en « saturant » $\mathbb{E}$ par toutes les conjugaisons possibles.

Exemple 2.4. Si $\mathbb{E}$ est l'esquisse (projective) des magmas (figure 1), il est facile de voir que $\mathbb{E}$ admet exactement un semi-automorphisme distinct de l'identité (celui qui transpose les projections p_1 et p_2) : $\Gamma(\mathbb{E})$ est donc d'ordre 2. Plus généralement, le groupe de l'esquisse des magmas n-aires est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Exemple 2.5. Si $\mathbb{E}$ est l'esquisse (élémentaire) des graphes (figure 2), il est facile de voir que $\mathbb{E}$ admet exactement un semi-automorphisme distinct de l'identité (l'automorphisme qui transpose les flèches s et b) : $\Gamma(\mathbb{E})$ est donc d'ordre 2.

Remarque 2.6. Puisque $\mathbb{E}$ et les $\mathbb{E}^\sigma$ ont la même catégorie de modèles, *tout semi-automorphisme de* $\mathbb{E}$ *induit un automorphisme de* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$, qui, même s'il n'est pas d'ordre 2, sera appelé une *dualité* (*partenariat* serait peut être préférable). Dans l'exemple 2.4., il s'agit de l'automorphisme de la catégorie des magmas qui à un magma $(M, *)$ associe son magma dual $(M, \bar{*})$ défini par $x \bar{*} y = y * x$ (*dualité opératoire*). Dans l'exemple 2.5., il s'agit de l'automorphisme de la catégorie des graphes qui à un graphe $\mathbb{G}$ associe son graphe opposé $\mathbb{G}^{op}$ (*dualité graphique*).

Les exemples 2.4. et 2.5. sont importants, car la plupart des esquisses de structures usuelles sont des sur-esquisses de l'esquisse des magmas ou/et de celle des graphes. Mais l'opérateur Γ n'est bien sûr pas fonctoriel :

Définition 2.7. Soit $H : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ un homomorphisme entre $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-esquisses. On dit que H a la *propriété de relèvement* si il existe un morphisme de groupes de $\Gamma(\mathbb{E})$ vers $\Gamma(\mathbb{E}')$, noté (abusivement, car il n'est pas forcément unique) $H[-]$, tel que pour tout élément A de $\Gamma(\mathbb{E})$, on ait : $H[A] \circ H = H \circ A$. Si H est l'homomorphisme d'inclusion d'une esquisse $\mathbb{E}$ dans une autre esquisse $\mathbb{E}'$, on dit simplement que $\mathbb{E}'$ *relève* $\mathbb{E}$.

Proposition 2.8. *Si H est un monomorphisme entre $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-esquisses jouissant de la propriété de relèvement, le morphisme de groupes $H[-]$ est injectif.*

Démonstration – Soit $A \in \Gamma(\mathbb{E})$. Si $H[A] = \mathrm{id}_{\Gamma(\mathbb{E}')}$, alors $H = H \circ A$, d'où $A = \mathrm{id}_{\Gamma(\mathbb{E})}$, puisque H est un monomorphisme.

■

Exemples 2.9. L'esquisse des magmas commutatifs (figure 3) relève l'esquisse des magmas et son groupe est d'ordre 2. Les mêmes faits sont valables pour l'esquisse des magmas associatifs (qui comporte certes un cône distingué supplémentaire « à trois pieds », mais l'image de celui-ci par un semi-automorphisme est figée par les équations). En revanche, l'esquisse des magmas distributifs à gauche ne relève pas l'esquisse des magmas, et son groupe se réduit à l'identité : l'automorphisme de graphe qui échange p_1 et p_2 n'est pas compatible avec les équations. (Sémantiquement, c'est évident : le dual d'un magma distributif à gauche est distributif à droite, mais pas à gauche en général !)

Ajoutons encore que les groupes des esquisses (usuelles) des structures suivantes sont tous d'ordre 2 : monoïdes, groupes, groupes abéliens, magmas partiels, compographes, catégories, etc.

Exemples 2.10. L'esquisse (usuelle) des catégories cartésiennes est sur-esquisse à la fois de l'esquisse des graphes (car une catégorie, c'est d'abord un graphe) et de l'esquisse des magmas (on a la loi « produit de deux objets ») : on peut constater qu'elle relève la seconde, mais pas la première (ici encore, l'explication sémantique est évidente, mais nous voulons insister sur le fait que ces phénomènes de dualité/non-dualité sont lisibles au niveau des esquisses). Son groupe est donc d'ordre 2. Mais deux variantes classiques de cette esquisse relèvent à la fois l'esquisse des graphes et celle des magmas :

i) l'esquisse des catégories monoïdales - dont le groupe est un groupe de Klein (groupe non cyclique d'ordre 4) ;
ii) l'esquisse des catégories bicartésiennes : si on prend soin de la construire de sorte que les opérations de produit et de somme aient des sources différentes, son groupe est un groupe non abélien d'ordre 8 et contenant au moins trois éléments d'ordre 2 (lesquels induisent au niveau sémantique la dualisation graphique, la transposition des facteurs d'un produit, la transposition des termes d'une somme) : il s'agit donc du groupe diédral D_4.

Le résultat suivant - probablement améliorable - montre qu'on peut en fait obtenir n'importe quel groupe, et ceci même si on se limite à des esquisses très particulières.

Proposition 2.11. *Soient G un groupe et $\mathcal{I}$ un ensemble de petits compographes contenant des compographes discrets de tout cardinal $< \aleph_{\mathrm{card}(G)}$. Il existe une $(\mathcal{I}, \emptyset)$-esquisse $\mathbb{E}$ telle que les groupes G et $\Gamma(\mathbb{E})$ soient isomorphes.*

Démonstration – Donnons-nous une application injective λ de G dans la classe de tous les cardinaux différents du cardinal de G et strictement inférieurs à $\aleph_{\mathrm{card}(G)}$: cela existe. Construisons l'esquisse projective $\mathbb{E}$ suivante :

- un seul objet S ;
- outre l'identité en S, deux familles de flèches $(p_x)_{x \in G}$ et $(f_x)_{x \in G}$, toutes ces flèches étant deux à deux distinctes et ayant - nécessairement - l'objet S pour source et pour but ;
- pour chaque couple (x, y) d'éléments de G, on convient que le composé $p_x \circ f_y$ existe et est égal à p_{xy} ;

- les cônes projectifs distingués (tous d'indexation discrète) sont, d'une part, le cône $(p_x)_{x \in G}$, d'autre part, les cônes $(f_x)_{\kappa < \lambda(x)}$ pour chaque $x \in G$.

Soit alors $A \in \Gamma(\mathbb{E})$. On a évidemment $A(S) = S$. Comme tous les cônes distingués de $\mathbb{E}$ sont d'indexation différente, chacun d'eux est nécessairement sa propre image à un automorphisme de l'indexation près. Dans le cas des cônes $(f_x)_{\kappa < \lambda(x)}$, cela conduit à $A(f_x) = f_x$ pour chaque $x \in G$. Dans le cas du cône $(p_x)_{x \in G}$, cela conduit à l'existence d'une permutation a de G telle que pour tout élément x de G, on ait : $A(p_x) = p_{a(x)}$. Appliquant alors A à l'équation $p_x \circ f_y = p_{xy}$, nous obtenons : $p_{a(x)} \circ f_y = p_{a(xy)}$, ce qui implique que $a(xy) = a(x)y$, et ceci pour tous x, y dans G. Les permutations de G qui satisfont à cette condition sont les translations à gauche. Il en résulte que $\Gamma(\mathbb{E})$ est isomorphe au sous-groupe de $\mathfrak{S}(G)$ constitué des translations à gauche, et donc, d'après le théorème de Cayley, à G. ∎

3. Esquisses holomorphiquement complètes

Remarquant que le groupe des semi-automorphismes d'une esquisse $\mathbb{E}$ « opère » de façon naturelle sur $\mathbb{E}$, Lair a été amené (toujours dans [Lair74]) à considérer l'esquisse produit croisé (au sens d'Ehresmann) $\mathbb{E} \times_{\mathrm{id}} \Gamma(\mathbb{E})$. Par analogie avec une notion bien connue en théorie des groupes (on pourra même, vu l'exemple 3.11., considérer que c'en est une généralisation), nous proposons d'appeler cette esquisse l'holomorphe de $\mathbb{E}$. En voici la construction :

Définition 3.1. Soit $\mathbb{E}$ une esquisse. On appelle *holomorphe* de $\mathbb{E}$ et on note $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$ l'esquisse ainsi construite :

– les objets de $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$ sont ceux de $\mathbb{E}$;

- une flèche de $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$, de source E et de but E', est un couple (e, A) où A est un élément de $\Gamma(\mathbb{E})$ et e une flèche de $\mathbb{E}$, de source $A(E)$ et de but E' ;
- l'identité d'un objet E dans $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$ est $(\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_\mathbb{E})$, où id_E est son identité dans $\mathbb{E}$;
- deux flèches (e', A') et (e, A) sont composables dans $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$ si et seulement si e' et $A'(e)$ sont composables dans $\mathbb{E}$, on pose alors : $(e', A') \circ (e, A) = (e' \circ A'(e), A' \circ A)$;
- les cônes projectifs distingués dans $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$ sont les cônes de la forme $((p_I, \mathrm{id}_\mathbb{E})_{I\in\mathbb{I}})$ où $(p_I)_{I\in\mathbb{I}}$ est un cône projectif distingué dans $\mathbb{E}$;
- les cônes inductifs distingués dans $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$ sont les cônes de la forme $((q_J, \mathrm{id}_\mathbb{E})_{J\in\mathbb{J}})$ où $(q_J)_{J\in\mathbb{J}}$ est un cône inductif distingué dans $\mathbb{E}$.

Remarque 3.2. Par construction, on dispose d'un homomorphisme d'esquisses canonique $h_0 : \mathbb{E} \longrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{E})$, tel que $h_0(E) = E$ pour tout objet E et $h_0(e) = (e, \mathrm{id}_\mathbb{E})$ pour toute flèche e. On dispose donc aussi du foncteur d'oubli canonique $\mathrm{Mod}(h_0) : \mathrm{Mod}(\mathrm{Hol}(\mathbb{E})) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$. Les modèles de $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$ peuvent être vus comme les modèles de $\mathbb{E}$ « en dualité avec eux-mêmes de toutes les façons possibles ».

Proposition 3.3. *Soit $\mathbb{E}$ une esquisse projective. Alors tout modèle de $\mathbb{E}$ engendre librement un modèle de* $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$.

> **Démonstration** – Si $\mathbb{E}$ est projective, alors h_0 est un homomorphisme entre esquisses projectives. En vertu du « théorème du faisceau associé », ceci entraîne automatiquement que $\mathrm{Mod}(h_0)$ admet un adjoint à gauche. ■

Exemple 3.4. Supposons que $\mathbb{E}$ soit l'esquisse (projective) des magmas (figure 1). Il est facile de voir qu'un modèle de $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$ s'identifie à un magma $(M, *)$ muni d'un antiautomorphisme involutif. Pour décrire explicitement le modèle de Hol($\mathbb{E}$) librement engendré par $(M, *)$, il suffit de considérer un ensemble $\overline{M}$ disjoint de M et une bijection $x \longmapsto \overline{x}$ de M sur $\overline{M}$, puis de quotienter le magma librement engendré par $M \cup \overline{M}$ par les relations $ab = a * b$ et $\overline{a}\overline{b} = \overline{b * a}$.

Exemple 3.5. Soit $\mathbb{E}$ l'esquisse (élémentaire) des couples d'ensembles (figure 4). Il est facile de voir qu'un modèle de Hol($\mathbb{E}$) s'identifie à un couple d'ensembles (E_1, E_2) muni d'une bijection de E_1 sur E_2. Pour décrire explicitement le modèle de Hol($\mathbb{E}$) librement engendré par un couple d'ensembles (E_1, E_2), il suffit de considérer la réunion disjointe $E = E_1 \amalg E_2$ et de former le couple (E, E).

Définition 3.6. On dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est *holomorphiquement complète* si et seulement si il existe un homomorphisme d'esquisses f de Hol($\mathbb{E}$) dans Th($\mathbb{E}$) tel que $f \circ h_0$ soit l'homomorphisme d'inclusion de $\mathbb{E}$ dans Th($\mathbb{E}$).

Exemple 3.7. *Toute esquisse* $\mathbb{E}$ *telle que* $\Gamma(\mathbb{E})$ *soit réduit à* $\{\mathrm{id}_{\mathbb{E}}\}$ *est holomorphiquement complète.* En effet, Hol($\mathbb{E}$) est alors isomorphe à $\mathbb{E}$. C'est le cas par exemple de l'esquisse des magmas distributifs à gauche.

Exemple 3.8. *L'esquisse des magmas commutatifs est holomorphiquement complète.* En effet, il est facile de vérifier qu'en posant

$$\begin{array}{lll} f(i_1') = i_1 \ , & f(i_2') = t \ , & f(p_1') = p_2 \ , \\ f(p_2') = p_1 \ , & f(k') = k \ , & f(t') \ = i_2 \ , \end{array}$$

et en imposant de plus que $f \circ h_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$, on définit un homomorphisme f de Hol($\mathbb{E}$) dans $\mathbb{E}$ (pas besoin ici de Th($\mathbb{E}$)). L'existence de f est la traduction syntaxique du fait sémantique (évident !) que l'identité d'un magma commutatif M est un isomorphisme involutif de M sur son magma dual.

Exemple 3.9. *L'esquisse des groupes est holomorphiquement complète.* Partons cette fois du point de vue sémantique. Si G est un groupe, on dispose d'un isomorphisme involutif de G sur son dual : l'application qui transforme tout élément en son inverse. Il est alors facile de construire un homomorphisme f de Hol($\mathbb{E}$) dans Th($\mathbb{E}$) qui « esquisse » cette remarque : si s est la flèche de $\mathbb{E}$ ou Th($\mathbb{E}$) qui représente le passage à l'inverse, on pose $f(i'_1) = s$, etc.

Remarque 3.10. Les <u>deux</u> méthodes précédentes seraient applicables à l'esquisse des groupes abéliens : on voit ainsi que l'homomorphisme f de 3.6. n'a rien d'unique.

Exemple 3.11. *Soit* $\mathbb{E}$ *une esquisse élémentaire à un seul objet dont les flèches forment un groupe* G. Alors $\mathbb{E}$ *est holomorphiquement complète si et seulement si le morphisme* $\partial : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ *qui envoie tout élément de* G *sur l'automorphisme intérieur qu'il définit est sectionnable.* En effet, l'holomorphe de $\mathbb{E}$ s'identifie alors à l'holomorphe de G (au sens classique), et il est immédiat que le monomorphisme canonique de G dans Hol(G) est rétractable si et seulement si ∂ est sectionnable.

Lorsque $\mathbb{E}$ n'est pas holomorphiquement complète, il est naturel de se demander si Hol($\mathbb{E}$) l'est. Il faut pour cela décrire le groupe $\Gamma(\mathrm{Hol}(\mathbb{E}))$. Voici un résultat général :

Théorème 3.12.
(i) *Pour toute esquisse* $\mathbb{E}$, *l'homomorphisme canonique* h_0 *de* $\mathbb{E}$ *dans* Hol($\mathbb{E}$) *a la propriété de relèvement.*
(ii) *Le groupe* $\Gamma(\mathbb{E})$ *s'identifie canoniquement à un sous-groupe de* $\Gamma(\mathrm{Hol}(\mathbb{E}))$ *; si il y a égalité,* Hol($\mathbb{E}$) *est holomorphiquement complète.*

Démonstration – Fixons un élément A de $\Gamma(\mathbb{E})$ et posons :
+ si E est un objet de Hol($\mathbb{E}$), $h_0[A](E) = A(E)$;

+ si (e, B) est une flèche de Hol($\mathbb{E}$),
$h_0[A](e, B) = (A(e), A \circ B \circ A^{-1})$

Il est alors facile de vérifier que $h_0[A]$ ainsi défini est un semi-automorphisme de Hol($\mathbb{E}$). A titre d'exemple, si (e, B) a pour source E, ce qui implique que e a pour source $B(E)$, alors la source de $h_0[A](e, B)$ est $(A \circ B \circ A^{-1})^{-1}(A(B(E)))$, c'est-à-dire $A(E)$ qui est bien $h_0[A](E)$. De plus, on constate que $h_0[A \circ A'] = h_0[A] \circ h_0[A']$ pour tous A, A' appartenant à $\Gamma(\mathbb{E})$. On a donc l'homomorphisme de groupes $h_0[-]$ cherché ; notons qu'il est injectif puisque h_0 est un monomorphisme (proposition 2.8.). Plaçons-nous maintenant dans le cas où $h_0[-]$ est un isomorphisme : on peut alors identifier les flèches de Hol(Hol($\mathbb{E}$)) à des triplets de la forme (e, A, B), où A et B sont deux éléments de $\Gamma(\mathbb{E})$. Un calcul simple montre que la composition dans Hol(Hol($\mathbb{E}$)) s'écrit alors sous la forme $(e', A', B') \circ (e, A, B) = (e' \circ A'(B'(e)), A' \circ B' \circ A \circ B'^{-1}, B' \circ B)$. Autrement dit, on a : Hol(Hol($\mathbb{E}$)) $= \mathbb{E} \times_{\text{id}} (\Gamma(\mathbb{E}) \times_\gamma \Gamma(\mathbb{E}))$, où γ désigne l'opération de $\Gamma(\mathbb{E})$ sur lui-même par automorphismes intérieurs. Il en résulte que l'application qui au triplet (e, A, B) associe le couple $(e, A \circ B)$ établit un homomorphisme d'esquisses de Hol(Hol($\mathbb{E}$)) dans Hol($\mathbb{E}$), qui est bien un inverse à gauche de l'homomorphisme canonique. En particulier, Hol($\mathbb{E}$) est holomorphiquement complète. ∎

Mais la réciproque du point **(ii)** n'est pas exacte, comme le montre le contre-exemple suivant :

Proposition 3.13. *Soit $\mathbb{E}$ l'esquisse des graphes. Alors* Hol($\mathbb{E}$) *est holomorphiquement complète, mais $\Gamma(\mathbb{E})$ est un sous-groupe strict de* Γ(Hol($\mathbb{E}$)).

Démonstration – On a vu que $\Gamma(\mathbb{E})$ est d'ordre 2 : Hol($\mathbb{E}$) contient donc 8 flèches qui se correspondent deux par deux ; on notera cette correspondance $e \longleftrightarrow e'$ (étant entendu que

$(d')' = d$, etc.). Outre les deux semi-automorphismes $\mathrm{id}_{\mathrm{Hol}(\mathbb{E})}$ et A qui proviennent de $\Gamma(\mathbb{E})$, $\Gamma(\mathrm{Hol}(\mathbb{E}))$ contient deux autres semi-automorphismes B et C définis par :

$$B(d) = d',\ B(c) = c', B(d') = d, B(c') = c, B(i'_1) = i'_1, B(i'_2) = i'_2\ ;$$
$$C(d) = c', C(c) = d', C(d') = c, C(c') = d, C(i'_1) = i'_1, C(i'_2) = i'_2.$$

C'est un groupe de Klein. L'esquisse $\mathrm{Hol}(\mathrm{Hol}(\mathbb{E}))$ comporte alors 32 flèches. Considérons l'homomorphisme de graphes $F : \mathrm{Hol}(\mathrm{Hol}(\mathbb{E})) \longrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{E})$ induisant l'identité sur les objets et tel que pour toute flèche e de $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$, on ait : $F(e, \mathrm{id}_{\mathrm{Hol}(\mathbb{E})}) = F(e, C) = e$ et $F(e, A) = F(e, B) = e'$. Il est facile de vérifier que F est un homomorphisme d'esquisses et que $F \circ h_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{Hol}(\mathbb{E})}$. ∎

Dans le cas des graphes, le processus d'« autodualisation » induit par la notion d'holomorphe s'arrête donc en une étape. Nous verrons dans la section suivante que les choses sont différentes dans le cas des magmas.

4. La hauteur d'une esquisse

Soit $\mathbb{E}$ une esquisse. Par récurrence transfinie, on obtient pour tout ordinal α une esquisse $\mathrm{Hol}^\alpha(\mathbb{E})$ ainsi qu'un homomorphisme d'esquisses $h_\alpha : \mathrm{Hol}^\alpha(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathrm{Hol}^{\alpha+1}(\mathbb{E})$ en posant :

$$\mathrm{Hol}^0(\mathbb{E}) = \mathbb{E}\ ;$$
$$\mathrm{Hol}^{\alpha+1}(\mathbb{E}) = \mathrm{Hol}(\mathrm{Hol}^\alpha(\mathbb{E}))\ ;$$
$$\mathrm{Hol}^\alpha(\mathbb{E}) = \varinjlim_{\beta<\alpha} \mathrm{Hol}^\beta(\mathbb{E}) \quad \text{si } \alpha \text{ est limite.}$$

Définitions 4.1. On appelle *hauteur* d'une esquisse $\mathbb{E}$ et on note $h(\mathbb{E})$ le plus petit ordinal α, s'il existe, tel que l'esquisse $\mathrm{Hol}^\alpha(\mathbb{E})$ soit holomorphiquement complète. Si $\mathbb{E}$ admet une hauteur (ordinale), on appelle *groupe dialectique* de $\mathbb{E}$ le groupe $\Delta(\mathbb{E}) = \varinjlim_{\alpha<h(\mathbb{E})} \Gamma(\mathrm{Hol}^\alpha(\mathbb{E}))$.

Ainsi les esquisses de hauteur 0, qui sont aussi celles dont le groupe dialectique est trivial, sont exactement les esquisses holomorphiquement complètes. Il résulte de la proposition 3.13. que l'esquisse des graphes est de hauteur 1 et que son groupe dialectique est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le cas de l'esquisse des magmas est différent :

Proposition 4.2. *Pour tout entier naturel n, notons $\mathbb{E}_n$ l'esquisse des magmas n-aires. La hauteur de $\mathbb{E}_n$ est :*

0 *si* $n \leq 1$
ω *si* $n = 2$
1 *si* $n \geq 3$.

Démonstration – Il est clair que le groupe $\Gamma(\mathbb{E}_n)$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. L'esquisse $\mathrm{Hol}(\mathbb{E}_n)$ contient donc $(n+3)n!$ flèches, que nous noterons comme des couples (e, σ) où e est une flèche de $\mathbb{E}$ et σ un élément de $\mathfrak{S}_n$. Les $2(n+1)$ couples de flèches composables de $\mathbb{E}$ (tous triviaux !) donnent naissance à $2(n+1)(n!)^2$ couples de flèches composables dans $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$, où les équations suivantes sont vérifiées (pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ et $m \in \{1, \ldots, n\}$) :

$$(i_1, \sigma) \circ (i_1, \tau) = (i_1, \sigma \circ \tau) \tag{I}$$
$$(i_1, \sigma) \circ (k, \tau) = (k, \sigma \circ \tau) \tag{II}$$
$$(i_1, \sigma) \circ (p_m, \tau) = (p_{\sigma(m)}, \sigma \circ \tau) \tag{III}$$
$$(i_2, \sigma) \circ (i_2, \tau) = (i_2, \sigma \circ \tau) \tag{IV}$$
$$(k, \sigma) \circ (i_2, \tau) = (k, \sigma \circ \tau) \tag{V}$$
$$(p_m, \sigma) \circ (i_2, \tau) = (p_m, \sigma \circ \tau) \tag{VI}$$

Enfin, le seul cône distingué dans $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$ est le cône projectif dont les projections sont $(p_1, \mathrm{id}), \ldots, (p_n, \mathrm{id})$.
Cherchons maintenant les semi-automorphismes de $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$. Si $A \in \Gamma(\mathrm{Hol}(\mathbb{E}))$, on peut lui associer une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ telle que pour tout $m \in \{1, \ldots, n\}$, on ait : $A(p_m, \mathrm{id}) = (p_{\pi(m)}, \mathrm{id})$. Il

existe aussi une permutation $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{S}_n)$ telle que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on ait : $A(i_1, \sigma) = (i_1, f(\sigma))$. L'équation (I) est équivalente au fait que f soit un automorphisme du groupe $\mathfrak{S}_n$. Notons maintenant que $(i_1, \sigma) \circ (p_m, \mathrm{id}) = (p_{\sigma(m)}, \sigma)$. En appliquant A, il vient $(i_1, f(\sigma)) \circ (p_{\pi(m)}, \mathrm{id}) = A(p_{\sigma(m)}, \sigma)$. L'équation (III), particularisée au cas $\tau = \mathrm{id}$, donne alors $A(p_{\sigma(m)}, \sigma) = (p_{f(\sigma)(\pi(m))}, f(\sigma))$. Puisque σ est une permutation, on peut conclure qu'on a pour tout m : $A(p_m, \sigma) = (p_{f(\sigma)(\pi(\sigma^{-1}(m)))}, f(\sigma))$. De la même façon, il existe une permutation $g \in \mathfrak{S}(\mathfrak{S}_n)$ telle que, pour tout $m \in \{1, \ldots, n\}$, on ait : $A(i_2, \sigma) = (i_2, g(\sigma))$. L'équation (IV) est équivalente au fait que g soit un automorphisme du groupe $\mathfrak{S}_n$. L'équation (VI) est équivalente à l'équation $A(p_m, \sigma) \circ A(i_2, \tau) = A(p_m, \sigma \circ \tau)$, qui s'écrit :

$$p_{f(\sigma)\circ\pi\circ\sigma^{-1}(m)}, f(\sigma)) \circ (i_2, g(\tau)) = (p_{f(\sigma)\circ f(\tau)\circ\pi\circ\tau^{-1}\circ\sigma^{-1}(m)}, f(\sigma\circ\tau))$$

ou encore

$$(p_{f(\sigma)\circ\pi\circ\sigma^{-1}(m)}, f(\sigma)\circ g(\tau)) = (p_{f(\sigma)\circ f(\tau)\circ\pi\circ\tau^{-1}\circ\sigma^{-1}(m)}, f(\sigma\circ\tau)).$$

Or ces égalités, vraies pour tout m, sont équivalentes à : $\pi = f(\tau) \circ \pi \circ \tau^{-1}$ et $f(\sigma) \circ g(\tau) = f(\sigma \circ \tau)$, c'est-à-dire finalement à : $f = g$ et $f(\tau) = \pi \circ \tau \circ \pi^{-1}$. Ainsi f et g sont un seul et même automorphisme de $\mathfrak{S}_n$: l'automorphisme intérieur associé à π. $A(p_m, \sigma)$ s'écrit donc simplement $(p_{\pi(m)}, \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1})$ et on vérifie que le cas général de l'équation (III) est alors automatiquement vrai. Il nous reste maintenant à traiter les équations (II) et (V). Comme précédemment, il existe une permutation $\phi \in \mathfrak{S}(\mathfrak{S}_n)$ telle que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on ait : $A(k, \sigma) = (k, \phi(\sigma))$. L'équation (V) équivaut à $(i_1, \pi\circ\sigma\circ\pi^{-1}) \circ (k, \phi(\tau)) = (k, \phi(\sigma\circ\tau))$, ou encore à $(k, \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} \circ \phi(\tau)) = (k, \phi(\sigma \circ \tau))$. On a donc, pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, l'égalité $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} \circ \phi(\tau) = \phi(\sigma \circ \tau)$. En faisant $\tau = \mathrm{id}$, on voit que $\phi(\sigma)$ est de la forme $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} \circ \sigma_0$; réciproquement, toute application ϕ qui a cette forme convient. De la même façon, on montre que l'équation (VI) signifie exactement que $\phi(\sigma)$ est de la forme $\sigma_1 \circ \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$. Mais en faisant $\sigma = \mathrm{id}$, on établit que σ_1 est égal à σ_0. On doit donc avoir, pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$: $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} \circ \sigma_0 = \sigma_0 \circ \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$. Comme $\sigma \longmapsto \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$, cela veut dire que σ_0 est dans le centre de $\mathfrak{S}_n$. Si $n \neq 2$, on a donc $\sigma_0 = \mathrm{id}$, et il reste $A(k, \sigma) = (k, \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1})$: dans ce cas, A est entièrement déterminé par π, et le groupe $\Gamma(\mathrm{Hol}(\mathbb{E}_n))$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$; d'après le point (ii) du théorème 3.12., cela implique que $\mathrm{Hol}(\mathbb{E}_n)$ est holomorphiquement complète. Or, pour $n \geq 3$, $\mathbb{E}_n$ elle-même n'est pas holomorphiquement complète (vérification laissée au lecteur, qui constatera que l'obstruction est dans l'équation (III)) : on en conclut que dans ce cas, la hauteur de $\mathbb{E}_n$ est 1. Mais dans le cas $n = 2$, il y a deux possibilités : soit $A(k, \sigma) = (k, \sigma)$, soit $A(k, \sigma) = (k, \sigma_0 \circ \sigma)$ où $\sigma_0 \in \mathfrak{S}_n \backslash \{\mathrm{id}\}$. Le groupe $\Gamma(\mathrm{Hol}(\mathbb{E}_2))$ est alors un groupe de Klein. On peut établir que $\mathrm{Hol}^s(\mathbb{E}_2)$ n'est pas holomorphiquement complète, quel que soit l'entier naturel s; nous nous limiterons ici à une explication sémantique un peu vague. Un modèle de $\mathrm{Hol}(\mathbb{E}_2)$ s'identifie à un magma $(M, *)$ muni d'un isomorphisme involutif f sur son dual $(M, \overline{*})$ (défini par $x \overline{*} y = y * x$). Il est alors loisible de considérer deux nouvelles lois de composition internes $\top$ et $\overline{\top}$ sur M définies par $x \top y = f(x) * f(y) = f(x \overline{*} y)$ et $x \overline{\top} y = f(x * y) = f(x) \overline{*} f(y)$, lois qui sont esquissées par les deux éléments de $\Gamma(\mathrm{Hol}(\mathbb{E}_2))$ ne provenant pas de $\Gamma(\mathbb{E}_2)$. Mais on ne peut pas construire « de façon générale » d'isomorphismes entre $(M, *)$ et $(M, \top)$ ou $(M, \overline{\top})$: autrement dit, l'esquisse $\mathrm{Hol}(\mathrm{Hol}(\mathbb{E}_2))$, qui crée formellement de tels isomorphismes, ne peut pas se réaliser dans la théorie engendrée par l'esquisse $\mathrm{Hol}(\mathbb{E}_2)$. Ce phénomène se répète jusqu'à l'ordinal limite ω, pour lequel on arrive à l'esquisse holomorphiquement complète $\mathrm{Hol}^{\omega}(\mathbb{E}_2)$. ∎

Le groupe dialectique $\Delta(\mathbb{E}_2)$ est donc un groupe infini, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\omega}$, alors que pour $n \geq 3$, $\Delta(\mathbb{E}_n)$ est fini et isomorphe à $\mathfrak{S}_n$. On voit sur tous ces exemples que $\Delta(\mathbb{E})$ donne une information fine sur les symétries et dissymétries « cachées » de $\mathbb{E}$. En voici un dernier, laissé au lecteur (qui utilisera 3.11. et des résultats classiques sur les permutations). Qualifions de *discrète* une esquisse élémentaire qui n'a pas d'autres flèches que les identités. Alors :

Proposition 4.3. *Soit n un entier naturel (ou un cardinal). L'esquisse discrète à n objets a pour hauteur :*

$$\begin{array}{lll} 0 & si & n \leq 1 \\ 1 & si & n \geq 2 \quad et \quad n \neq 7 \\ \omega & si & n = 7. \end{array}$$

BIBLIOGRAPHIE

[E 66] **Charles EHRESMANN** - Introduction to the theory of structured categories, *Technical Report1966-10, Department of Mathematics, University of Kansas.*

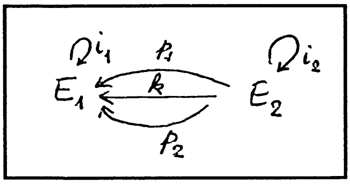
[L 74] **Christian LAIR** - Dualités pour les structures algébriques esquissées, *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle 15 (1974) 353-376.*

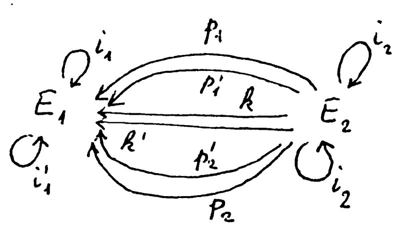
Pierre AGERON
Groupe de Recherche en Algorithmique et Logique
Département de Mathématiques
Université de Caen, 14032 Caen Cedex, France

QUELQUES ESQUISSES, AVEC LEUR ESQUISSE HOLOMORPHE

Dans les esquisses représentées ci-dessous, la flèche i_k représente toujours l'identité de l'objet E_k et (p_1, p_2) est toujours un cône projectif distingué. Si e est une flèche de $\mathbb{E}$, on note encore e la flèche $(e, \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ de $\mathrm{Hol}(\mathbb{E})$; de plus, lorsque $\Gamma(\mathbb{E})$ est d'ordre 2 (ce qui est le cas dans tous les exemples ci-dessous), on note e' la flèche (e, A) où $A \in \Gamma(\mathbb{E}) \setminus \{\mathrm{id}_{\mathbb{E}}\}$.

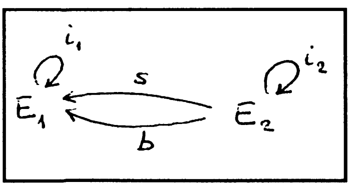
figure 1 : l'esquisse des magmas et son esquisse holomorphe

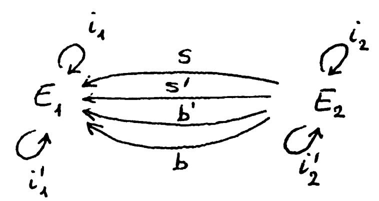




$$i_1' \circ i_1' = i_1 \quad i_2' \circ i_2' = i_2$$
$$p_1 \circ i_2' = i_1' \circ p_2 = p_1'$$
$$p_2 \circ i_2' = i_1' \circ p_1 = p_2'$$
$$p_1' \circ i_2' = i_1' \circ p_2' = p_1$$
$$p_2' \circ i_2' = i_1' \circ p_1' = p_2$$
$$k \circ i_2' = i_1' \circ k = k'$$
$$k' \circ i_2' = i_1' \circ k' = k$$

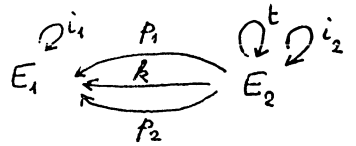
figure 2 : l'esquisse des graphes et son esquisse holomorphe



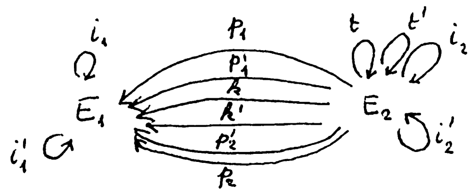


$$i_1' \circ i_1' = i_1 \quad i_2' \circ i_2' = i_2$$
$$s \circ i_2' = i_1' \circ b = s'$$
$$b \circ i_2' = i_1' \circ s = b'$$
$$s' \circ i_2' = i_1' \circ b' = s$$
$$b' \circ i_2' = i_1' \circ s' = b$$

figure 3 : l'esquisse des magmas commutatifs et son esquisse holomorphe



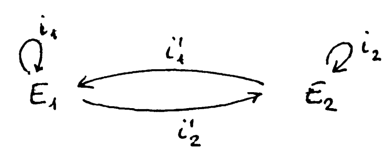
$$p_1 \circ t = p_2$$
$$p_2 \circ t = p_1$$
$$k \circ t = k$$



$$i'_1 \circ i'_1 = i_1 \quad i'_2 \circ i'_2 = i_2$$
$$p_1 \circ i'_2 = i'_1 \circ p_2 = p'_1$$
$$p_2 \circ i'_2 = i'_1 \circ p_1 = p'_2$$
$$p_1 \circ i'_2 = i'_1 \circ p'_2 = p_1$$
$$p'_2 \circ i'_2 = i'_1 \circ p'_1 = p_2$$
$$k \circ i'_2 = i'_1 \circ k = k'$$
$$k' \circ i'_2 = i'_1 \circ k' = k$$

$$p_1 \circ t = p'_1 \circ t = p'_1 \circ t' = p_2$$
$$p_2 \circ t = p'_2 \circ t = p'_2 \circ t' = p_1$$
$$p_1 \circ t' = p'_2$$
$$p_2 \circ t' = p'_1$$
$$k \circ t = k' \circ t = k$$
$$k \circ t' = k' \circ t' = k'$$

figure 4 : l'esquisse des couples d'ensembles et son esquisse holomorphe



$$i'_1 \circ i'_2 = i_1$$
$$i'_2 \circ i'_1 = i_2$$