CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

RENÉ LAVENDHOMME

Algèbres de Lie et groupes microlinéaires

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 35, nº 1 (1994), p. 29-47

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1994__35_1_29_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Volume XXXV-1 (1994)

ALGEBRES DE LIE ET GROUPES MICROLINEAIRES

par René LAVENDHOMME

Résumé. En géométrie différentielle synthétique (G.D.S.) l'algèbre de Lie des champs de vecteurs est l'algèbre de Lie du groupe microlinéaire des difféomorphismes. Il en est de même de l'algèbre de Lie des champs de Killing dans le cas riemannien ou des champs localement hamiltonien dans le cas symplectique. On explore de ce point de vue la représentation adjointe associée à une action d'un groupe microlinéaire. Le but réel de cet article n'est pas d'énumérer ces résultats mais de suggérer la simplicité de l'approche par la G.D.S.

1 Introduction.

La construction de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie s'étend en géométrie différentielle synthétique (G.D.S.) en la construction de l'algèbre de Lie de tout groupe microlinéaire ce qui inclut des correspondants en GDS de groupes de difféomorphismes qui ne sont pas classiquement des groupes de Lie.

Dans ce texte nous supposons connues les bases de la présentation axiomatique de la GDS telle qu'on les trouve par exemple dans [K] ou dans [M,R] ou, à un niveau plus élémentaire dans [L]. Mais en dehors de ces bases, le texte est autosuffisant. Nous supposons essentiellement admis l'axiome général de Kock-Lawvere, le concept d'objet microlinéaire et la construction de l'espace tangent.

Le premier paragraphe rappelle la notion d'algèbre de Lie d'un groupe microlinéaire et l'exemple de base de l'algèbre de Lie des champs de vecteur comme algèbre de Lie du groupe microlinéaire, $Iso(M)$, des bijections de M où M est microlinéaire. On y expose aussi les généralisations évidentes des exemples linéaires usuels qui incluent les exemples classiques mais aussi leurs analogues de dimension infinie.

Le troisième paragraphe aborde des exemples globaux (en précisant les ingrédients de GDS utiles). Après une rapide étude de la dérivée de Lie, on y démontre que si l'objet microlinéaire M est muni d'une structure riemannienne g, l'algèbre des champs de Killing est bien l'algèbre de Lie du groupe microlinéaire des automorphismes de M préservant g. Après quelques indications sur les formes différentielles globales, on démontre que si l'objet microlinéaire M est muni d'une structure symplectique ω (2-forme non-dégénérée et fermée), l'algèbre des champs localement hamiltoniens est bien l'algèbre de Lie du groupe microlinéaire des automorphismes de M préservant ω. Enfin le cas d'une connexion affine est également traité. Dans le cas des variétés $\mathcal{C}^{\infty}$ usuelles, ces algèbres de Lie sont évidemment bien connues mais les groupes microlinéaires ne sont pas des groupes de Lie.

Le dernier paragraphe concerne les actions d'un groupe microlinéaire et de son algèbre de Lie sur un objet microlinéaire. On y décrit, entre autres, la représentation adjointe et on termine par la représentation coadjointe.

Cet article a un aspect de synthèse de notions de GDS mais il est aussi préliminaire pour une étude ultérieure des bases géométriques de la mécanique hamiltonienne et Lagrangienne, sous l'éclairage de la GDS.

2 L'algèbre de Lie d'un groupe microlinéaire.

2.1 Définitions.

Soit G un groupe microlinéaire.

Rappelons d'abord une description de l'algèbre de Lie de G. Soit $\mathcal{G}$ l'espace tangent à G en l'élément e de G :

$$\mathcal{G} = \{D \xrightarrow{t} G \mid t(0) = e\}.$$

Comme l'espace tangent en n'importe quel point d'un objet microlinéaire, $\mathcal{G}$ est muni d'une structure de R-module. On y définit en outre une opération de crochet de Lie. Pour ce faire considérons l'application

$$\tau : D \times D \to G : (d_1, d_2) \mapsto X(d_1).Y(d_2).X(-d_1).Y(-d_2)$$

où $X, Y \in \mathcal{G}, d_1, d_2 \in D$. On a

$$\tau(d, 0) = \tau(0, d) = e$$

et donc, par la microlinéarité de G, il existe une unique factorisation de τ à travers la multiplication $m : D \times D \to D$. L'unique application de D dans G ainsi obtenue est notée $[X, Y]$ et est caractérisée par

$$[X, Y](d_1, d_2) = \tau(d_1 d_2).$$

On vérifie (cfr. $[K], [L]$ ou $[M - R]$) le théorème suivant.

Théorème 1. *Pour tout groupe microlinéaire G, $\mathcal{G}$ est une R-algèbre de Lie.*

□

Un exemple fondamental est le suivant. Si M est un objet microlinéaire, le groupe $Iso(M)$ des bijections de M sur lui-même est un groupe microlinéaire. Son algèbre de Lie est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M. On la note $\mathcal{X}(M)$. Il est à noter que classiquement si M est une variété $\mathcal{C}^\infty$ (même compacte) le groupe des difféomorphismes $\mathcal{C}^\infty$ de M sur lui-même n'est pas un groupe de Lie. Le point de vue synthétique possède ici un avantage.

On peut considérer aussi $\mathcal{G}$ comme l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche. Soit $\underline{X}$ un champ de vecteurs sur G. On peut voir $\underline{X}$ soit comme une application $\underline{X} : D \times G \to G$ telle que $\forall g \in G$ $\underline{X}(0,g) = g$, soit comme une application $\underline{X} : G \to G^D$ associant à g un vecteur tangent à G en g, soit encore comme $\underline{X} : D \to G^G$ (avec $\underline{X}(0) = id_G$) c'est-à-dire comme vecteur tangent à G^G en id_G. Nous passerons d'une notation à l'autre sans précaution particulière. On dit que $\underline{X}$ est invariant à gauche si pour tout d de D et tout h et g de G

$$\underline{X}(d, h.g) = h.\underline{X}(d, g).$$

Proposition 2. *L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur G forme une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}(G)$ isomorphe à $\mathcal{G}$.*

Ce résultat est bien connu (cfr par exemple [L] ou [$M - R$]). Rappelons simplement qu'on associe à un champ de vecteurs invariant à gauche $\underline{X}$ le vecteur $\underline{X}(e)$ du champ qui est tangent en e et inversement qu'à $X \in \mathcal{G}$ on associe $\underline{X}$ donné par

$$\underline{X}(d, g) = g.X(d).$$

On vérifie que l'on a bien ainsi un isomorphisme d'algèbres de Lie. □

2.2 Exemples linéaires.

Rappelons d'abord qu'un R-module E est dit euclidien si toute fonction de D dans E s'écrit de manière unique comme une fonction du premier degré. L'axiome de base de Kock-Lawvere dit que R est euclidien et donc R^n est euclidien. Mais plus généralement un produit quelconque de R-modules euclidiens est euclidien. Si X est un objet et E est un R-module euclidien,

E^X est euclidien. Si V est un R-module et E est euclidien le R-module $L(V, E)$ est euclidien. Si M est un objet microlinéaire alors $\forall x \in M, T_x M$ est euclidien et $\mathcal{X}(M)$ est euclidien.

L'exemple linéaire de base d'un groupe microlinéaire est celui d'un groupe linéaire. Plus précisément soit A une R-algèbre microlinéaire et euclidienne et E un A-module microlinéaire et euclidien. Désignons par $GL_A(E)$ le groupe des éléments inversibles du R-module $\mathcal{L}_A(E)$ des applications A-linéaires de E dans lui-même. On a évidemment sur $\mathcal{L}_A(E)$ la structure d'algèbre de Lie donnée par le commutateur.

Proposition 3. *$\mathcal{L}_A(E)$ est l'algèbre de Lie du groupe microlinéaire $GL_A(E)$.*

Démonstration. Soit $X : D \to GL_A(E)$ un vecteur tangent en id_E. Par composition avec l'injection dans $\mathcal{L}_A(E)$ qui est euclidien on peut écrire

$$X(d) = id_E + d.u$$

pour un unique u de $\mathcal{L}_A(E)$. Inversement connaissant u on pose $X(d) = id_E + d.u$, ce qui est bien inversible car son inverse est $id_E - d.u$. Que ces constructions soient inverses l'une de l'autre et R-linéaires est évident. Montrons la compatibilité avec le crochet. Si X et Y sont dans $T_{id_E}(GL_A(E))$ on a :

$$\begin{aligned}
[X, Y](d_1.d_2) &= X(d_1) \circ Y(d_2) X(-d_1) \circ Y(-d_2) \\
&= (id_E + d_1.u) \circ (id_E + d_2.v) \circ (id_E - d_1.u) \circ (id_E - d_2.v) \\
&= id_E + d_1.d_2(u \circ v - v \circ u) \\
&= id_E + d_1.d_2.[u, v].
\end{aligned}$$

□

Soit A une R-algèbre microlinéaire et euclidienne. Soit $Aut(A)$ le groupe microlinéaire des automorphismes de A. Considérons aussi l'ensemble $Der(A)$ des dérivations R-linéaires de A, ce qui est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}_R(A)$.

Proposition 4. *$Der(A)$ est l'algèbre de Lie de $Aut(A)$.*

Démonstration. Comme dans la proposition précédente on considère $U \in \mathcal{L}_R(A)$ et $id_A + d.U$. Comme

$$(id_A + d.U)(a).(id_A + d.U)(b) = a.b + d.(aU(b) + U(a).b)$$

et

$$(id_A + d.U)(ab) = a.b + d.U(a.b),$$

U est une dérivation si et seulement si, pour tout d de $D, id_A + d.U$ est un automorphisme de A. □

Soit maintenant A une R- algèbre microlinéaire et euclidienne qui soit unitaire, associative et commutative. Soit E un A-module microlinéaire et euclidien. Soit $h : E \times E \to A$ une application A-bilinéaire non-dégénérée en ce sens que les applications

$$\hat{h}_1 : E \to \mathcal{L}_A(E, A) : X \mapsto h(X, -)$$

$$\hat{h}_2 : E \to \mathcal{L}_A(E, A) : X \mapsto h(-, X)$$

sont inversibles.

Soit $u \in GL_A(E)$. On dit que u est h-orthogonale si $\forall X, Y \in E$

$$h(X, Y) = h(u(X), u(Y)).$$

Comme classiquement, il est évident que u est h-orthogonale si et seulement si $uu^* = u^*u = id_E$ où u^* est l'adjointe de u caractérisée par $h(u(X), Y) = h(X, u^*(Y))$. L'ensemble $O_h(E)$ des applications h-orthogonales est un sous-groupe microlinéaire de $GL_A(E)$.

On dit qu'une application A-linéaire $U : E \to E$ est h-antisymétrique si $\forall X, Y \in E$

$$h(UX, Y) + h(X, UY) = 0.$$

Il revient au même de dire que $U + U^* = 0$. L'ensemble $\mathcal{O}_h(E)$ de ces endomorphismes h-antisymétriques est une sous algèbre de Lie de $\mathcal{L}_A(E)$.

Proposition 5. *$\mathcal{O}_h(E)$ est l'algèbre de Lie de $O_h(E)$.*

Démonstration. Comme précédemment on considère $U \in \mathcal{L}_A(E)$ et $id_E + d.U$.

On a :

$$h(X + d.UX, Y + d.UY) = h(X, Y) + d.(h(X, UY) + h(UX, Y)).$$

Donc U est h-antisymétrique si et seulement si, pour tout d de $D, id_E + d.U$ est h-orthogonal. □

3 Des exemples globaux.

3.1 Dérivées de Lie.

Avant de donner des exemples plus globaux, essentiellement d'algèbres de Lie de champs de vecteurs, quelques indications sur la dérivée de Lie dans la direction d'un champ de vecteurs seront utiles.

Fixons d'abord une notation. Soit M un objet microlinéaire et $u \in Iso(M)$ une bijection de M sur lui-même. On adopte les écritures suivantes :

a) On note $u^* : R^M \to R^M$ l'application définie par $u^*(f) = f \circ u$. C'est un automorphisme de R-algèbres.

b) On définit $u^* : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ en posant pour $X \in \mathcal{X}(M)$

$$u^*(X)(d) = u^{-1} \circ X(d) \circ u$$

c'est-à-dire

$$u^*(X)(d,x) = u^{-1}(X(d,u(x))).$$

L'homogénéité de u^* est immédiate et entraîne donc sa R-linéarité. Mais $\mathcal{X}(M)$ est aussi un module sur R^M, le produit $f.X$ étant défini par $(f.X)(d,x) = X(f(x).d,x)$. On a alors $u^*(f,X) = u^*(f).u^*(X)$ car

$$\begin{aligned} u^*(fx)(d,x) &= u^{-1}((fX)(d,u(x)) \\ &= u^{-1}(X(f(u(x)).d,u(x))) \\ &= u^*f.u^*(X))(d,x) \end{aligned}$$

Notons encore que u^* est un automorphisme d'algèbre de Lie. On a en effet le calcul banal :

$$\begin{aligned} [u^*X,u^*Y](d_1.d_2)(x) &= ((u^*Y)_{-d_2} \circ (u^*X)_{-d_1} \circ (u^*Y)_{d_2}) \circ (u^*X)_{d_1})(x) \\ &= u^{-1}(Y(-d_2,X(-d_1,Y(d_2,X(d_1,u(x)))))) \\ &= u^*([X,Y])(d_1.d_2)(x). \end{aligned}$$

Passons maintenant à l'étude annoncée de la dérivée de Lie.

(a) Soit $f \in R^M, X \in \mathcal{X}(M)$ on définit la dérivée de Lie de f dans la direction X, qu'on note $L_X(f)$, par

$$(X_d)^*(f) - f = d.L_X(f)$$

c'est-à-dire

$$f(X(d,x)) - f(x) = d.L_X(f)(x)$$

et on retrouve la notion usuelle de dérivée directionnelle d'une fonction.

b) Soient $X,Y \in \mathcal{X}(M)$. On définit la dérivée de Lie de Y dans la direction X, qu'on note $L_X(Y)$, par

$$(X_d)^*(Y) - Y = d.L_X(Y)$$

On a comme classiquement le résultat suivant

Proposition 6. *Quels que soient X et Y dans $\mathcal{X}(M)$,*

$$L_X(Y) = [X, Y].$$

Démonstration. Soit $d \in D$ et $(d_1, d_1') \in D(2)$. Posons

$$\ell_d(d_1, d_1') = Y_{-d_1} \circ X_{-d} \circ Y_{d_1'} \circ X_d$$

On a

$$\ell_d(d_1, 0) = Y_{-d_1}$$

$$\begin{aligned} \ell_d(0, d_1') &= X_{-d} \circ Y_{d_1'} \circ X_d \\ &= (X_d)^*(Y)(d_1') \end{aligned}$$

Donc $\ell_d : D(2) \to M$ est la fonction dont la restriction à la diagonale donne la somme de $(-Y)$ et de $(X_d)^*(Y)$:

$$\begin{aligned} \ell_d(d_1, d_1) &= ((X_d)^*(Y) - Y)_{d_1} \\ &= (d.L_X(Y))_{d_1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (d.L_X(Y))_{d_1} &= Y_{-d_1} \circ X_{-d} \circ Y_{d_1} \circ X_d \\ &= [X, Y]_{d.d_1} \\ &= (d.[X, Y])_{d_1}. \end{aligned}$$

et donc $L_X(Y) = [X, Y]$. □

On peut étendre l'opérateur L_X à d'autres constructions. Considérons par exemple l'ensemble $\mathcal{L}_R(\mathcal{X}(M)^p, R^M)$ des formes p-linéaires sur $\mathcal{X}(M)$ à valeurs dans R^M. Pour $u \in Iso(M)$, on définit

$$u^* : \mathcal{L}_R(\mathcal{X}(M)^p, R^M) \to \mathcal{L}_R(\mathcal{X}(M)^p, R^M)$$

en posant $u^*(\varphi)(X_1, \ldots, X_p) = \varphi((u^{-1})^* X_1, \ldots, (u^{-1})^* X_p) \circ u$ pour φ R-multilinéaire et $X_1, \ldots, X_p$ dans $\mathcal{X}(M)$.

On définit alors la dérivée de Lie de φ dans la direction de X, $L_X\varphi$, par

$$(X_d)^*(\varphi) - \varphi = d.L_X(\varphi).$$

Nous aurons besoin du fait que L_X se comporte comme une dérivation tensorielle. Plus précisément on a le résultat suivant.

Proposition 7. *Soit* $\varphi \in \mathcal{L}_R(\mathcal{X}(M)^p, R^M), X, Y_1, \ldots, Y_p \in \mathcal{X}(M)$. *On a*

$$\begin{aligned} L_X(\varphi(Y_1,\ldots,Y_p)) &= L_X(\varphi)(Y_1,\ldots,Y_p) \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^p \varphi(Y_1,\ldots,L_XY_i,\ldots,Y_p) \end{aligned}$$

Démonstration Ecrivons seulement les choses dans le cas $p = 2$, l'extension étant évidente. Partons du premier terme du second membre

$$\begin{aligned} d.L_X(\varphi)(Y,Z) &= (X_d)^*(\varphi)(Y,Z) - \varphi(Y,Z) \\ &= \varphi((X_{-d})^*Y,(X_{-d})^*Z) \circ X_d - \varphi(Y,Z) \\ &= \varphi((X_{-d})^*Y - Y,(X_{-d})^*Z) \circ X_d - \varphi(Y,Z) \\ &\quad +\varphi(Y,(X_{-d})^*Z - Z) \circ X_d \quad + \varphi(Y,Z) \circ X_d \\ &= \varphi(-d.L_X(Y),(X_{-d})^*Z) \circ X_d \\ &\quad +\varphi(Y,-d.L_X(Z)) \circ X_d \\ &\quad +d.L_X(\varphi(Y,Z)) \end{aligned}$$

Comme $(X_{-d})^*Z = Z - d.L_XY$, on a : $d.(X_{-d})^*Z = d.Z$. Il vient donc

$$\begin{aligned} d.L_X(\varphi)(Y,Z) &= -\varphi(L_XY,d.Z) \circ X_d \\ &\quad +\varphi(Y,-d.L_XZ) \circ X_d + d.L_X(\varphi(Y,Z)). \end{aligned}$$

Comme pour toute fonction f on a

$$(X_d)^*(f) = f + d.L_X(f),$$

on a aussi

$$d.f \circ X_d = d.f$$

et il vient donc pour tout d de D

$$\begin{aligned} d.L_X(\varphi)(Y,Z) &= -d.\varphi(L_XY,Z) \\ &\quad -d.\varphi(Y,L_XZ) + d.L_X(\varphi(Y,Z)). \end{aligned}$$

Et la proposition est démontrée. □

3.2 Structure riemannienne et champs de Killing.

Nous allons indiquer maintenant un exemple global de groupe microlinéaire et d'algèbre de Lie provenant de la géométrie riemannienne.

Soit M un objet microlinéaire. Une structure riemannienne globale sur M est la donnée de

$$g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to R^M$$

qui soit R^M-bilinéaire, symétrique et non dégénérée.

On désigne par $Iso(M,g)$ le groupe microlinéaire des bijections $u \in Iso(M)$ telles que

$$u^*g = g.$$

A une structure riemannienne globale g sur M on associe, comme classiquement, la connexion de Levi-Civita, c'est-à-dire une connexion riemannienne sans torsion ∇. Rappelons qu'une connexion sur M peut se définir comme une application

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) : X, Y \mapsto \nabla_X Y$$

qui soit R^M linéaire en X et telle que $\nabla_X(f \cdot Y) = f \cdot \nabla_X Y + X(f) \cdot Y$. Une telle connexion ∇ est dite riemannienne si $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \tag{1}$$

On pourrait dire aussi que cela revient à $\nabla_X(g) = 0$. Dire que la connexion est sans torsion, c'est dire que

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \tag{2}$$

Cette unique connexion est univoquement caractérisée, et donc définie, par

$$\begin{aligned} 2g(Y, \nabla_X Z) &= X(g(Y,Z)) - Y(g(Z,X)) + Z(g(X,Y)), \\ &\quad + g(X,[Y,Z]) - g(Y,[Z,X]) + g(Z,[Y,X]) \end{aligned} \tag{3}$$

(Pour ceci cfr par exemple $[K-N]$ ou dans le cas synthétique $[L_2]$).

On pose alors $A_X = L_X - \nabla_X$ et on dit qu'un champ de vecteurs est de Killing si :

$$g(A_X Y, Z) + g(Y, A_X Z) = 0 \tag{4}$$

On désigne par $K(M,g)$ l'ensemble des champs de vecteurs de Killing sur (M,g).

Théorème 8. *$K(M.g)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}(M)$ et est l'algèbre de Lie du groupe microlinéaire $Iso(M,g)$.*

Démonstration. a) Soient X_1 et X_2 des champs de vecteurs de Killing. En vertu de (1), (4) équivaut à

$$X(g(Y,Z)) = g([X,Y],Z) + g(Y,[X,Y]). \tag{5}$$

On a

$$[X_1,X_2](g(Y,Z)) = X_1(X_2(g(Y,Z))) - X_2(X_1(g(Y,Z))).$$

En appliquant (5) à X_1 et X_2 et en tenant compte de l'identité de Jacobi, on obtient :

$$\begin{aligned}[X_1,X_2](g(Y,Z)) &= g([[X_1,X_2],Y],Z) \\ &\quad + g(Y,[[X_1,X_2],Z])\end{aligned}$$

et $[X_1,X_2]$ est bien un champ de Killing.

b) Soit $X \in \mathcal{X}(M)$. Pour tout d de $DX_d \in Iso(M,g)$ si et seulement si $\forall d \in D$

$$(X_d)^*g = g$$

et donc si et seulement si $L_X(g) = 0$. Comme L_X dérive tensoriellement (voir la proposition 7) on a

$$L_X(g(Y,Z)) = L_X(g)(Y,Z) + g(L_XY,Z) + g(Y,L_XZ).$$

Mais alors la nullité de $L_X(g)$ équivaut à (5), c'est-à-dire au fait que X soit de Killing. □

3.3 Formes différentielles globales.

Avant d'aborder l'exemple symplectique, il nous faut rappeler les concepts essentiels concernant les formes différentielles globales.

a) Une p-forme globale est une application $\omega : \mathcal{X}(M)^p \to R^M$, R^M-multilinéaire et alternée. L'ensemble des p-forme est noté $\Omega^p(M)$.

b) L'ensemble $\Omega(M)$ des formes globales est un algèbre différentielle graduée pour le produit extérieur évident et la différentielle extérieure donnée classiquement par

$$(d\omega)(X_0,\ldots,X_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i X_i(\omega(X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p))$$

$$+ \sum_{0\leq i<j\leq n}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_p)$$

c) Pour $X \in \mathcal{X}(M)$ et $\omega \in \Omega^{p+1}(M)$ on défini le produit intérieur $i_X\omega \in \Omega^p(M)$ par

$$(i_X\omega)(X_1,\ldots,X_p) = \omega(X,X_1,\ldots,X_p)$$

d) On étend par dérivation tensorielle la dérivée de Lie. La formule de la proposition 7 donne la formule classique

$$(L_X\omega)(X_1,\ldots,X_p) = X(\omega(X_1,\ldots,L_r)) \\ -\sum_{i=1}^{p}\omega(X_1,\ldots,[X,X_i],\ldots,X_p).$$

e) On a l'algèbre différentielle usuelle : d, i_X et L_X sont des dérivations-graduées de degrés $+1, -1$ et 0 respectivement (dérivation-graduée donne la classique "antidérivation" pour d et i_X et la classique "dérivation" pour L_X).

f) On a les formules

$$L_x \circ d = d \circ L_X$$
$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$$
$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$$
$$[L_X, i_Y] = i_{[X,Y]}.$$

3.4 Le cas symplectique.

Définition. *Une structure symplectique sur M consiste en la donnée d'une 2-forme globale $\omega : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to R^M$ non-dégénérée et fermée.*

Si M est muni d'une structure symplectique ω, on désigne par $Iso(M,\omega)$ le groupe microlinéaire des bijections $u \in Iso(M)$ telles que $u^*(\omega) = \omega$. Soit $X \in \mathcal{X}(M)$. On dit que X est localement hamiltonien si la 1-forme $i_X\omega$ est fermée. On désigne par $LH(M,\omega)$ l'ensemble des champs de vecteurs localement hamiltoniens.

Théorème 9. *$LH(M,\omega)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}(M)$ et c'est l'algèbre de Lie du groupe microlinéaire $Iso(M,\omega)$.*

Démonstration a) Soient X et$Y$ des champs de vecteurs localement hamiltoniens. On a

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\omega &= L_X i_Y\omega - i_Y L_X\omega \\ &= i_X(d(i_Y(\omega))) + d(i_X(i_Y(\omega))) \\ &\quad -i_Y(i_X(d(\omega))) - i_Y(d(i_X(\omega))). \end{aligned}$$

Comme $i_X\omega, i_Y\omega$ et ω sont fermées il reste

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\omega &= d(i_X(i_Y(\omega))) \\ &= d(\omega(Y,X)). \end{aligned}$$

Et ceci montre que $i_{[X,Y]}\omega$ est non seulement fermée mais même exacte.

b) Soit $X \in \mathcal{X}(M)$. Pour tout $d \in D X_d \in Iso(M,\omega)$ si et seulement si $(X_d)^*\omega = \omega$. Donc $X : D \to Iso(M)$ est à valeurs dans $Iso(M,\omega)$ si et seulement si $L_X\omega = 0$. Mais ceci équivaut à

$$i_X(d(\omega)) + d(i_X(\omega)) = 0.$$

Puisque ω est fermée ceci revient à $d(i_X(\omega)) = 0$ comme il fallait le montrer.

□

3.5 Le cas d'une connexion affine.

Soit M un objet microlinéaire. Rappelons (cfr par exemple [L], [M-R]) qu'une connexion affine globale peut se définir comme un concept de dérivée covariante, c'est-à-dire une application

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) : (X,Y) \mapsto \nabla_X Y$$

telle que

a) $\nabla_{f.X}Y = f.\nabla_X Y$

b) $\nabla_X(f.Y) = f.\nabla_X Y + X(f).Y$

pour tout $f \in R^M$. En fait, en prenant f constante, on voit que ces conditions impliquent la bihomogénéité de ∇ sur R et donc sa R-bilinéarité.

Soit (M,∇) un objet microlinéaire muni d'une connexion affine globale. Soit $u \in Iso(M)$. On dit que u est un automorphisme affine si $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$

$$u^*(\nabla_X Y) = \nabla_{u^*X}(u^*Y).$$

Il est clair que l'ensemble des automorphismes affines que nous notons $Iso(M,\nabla)$ est un sous-groupe microlinéaire de $Iso(M)$.

Soit $X \in \mathcal{X}(M)$. On dit que X est un champ de vecteurs affine si $\forall Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\nabla_{[X,Y]} = [L_X, \nabla_Y].$$

On désigne par $\mathcal{A}(M,\nabla)$ l'ensemble des champs de vecteurs affine.

Proposition 10. *$\mathcal{A}(M,\nabla)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}(M)$ et est l'algèbre de Lie du groupe microlinéaire $Iso(M,\nabla)$.*

Démonstration a) Soient X et Y dans $\mathcal{A}(M,\nabla)$. On a

$$\begin{aligned}
[L_{[X,Y]}, \nabla_Z] &= [[L_X, L_Y], \nabla_Z] \\
&= [L_X, [L_Y, \nabla_Z]] + [L_Y, [\nabla_Z, L_X]] \\
&= \nabla_{[X,[Y,Z]]} - \nabla_{[Y,[X,Z]]} \\
&= \nabla_{[[X,Y],Z]}
\end{aligned}$$

et $[X, Y]$ est affine. Donc $\mathcal{A}(M, \nabla)$ est bien une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}(M)$.

b) Soit $X : D \rightarrow Iso(M, \nabla)$. Pour chaque d de D, X_d est un automomrphisme affine. Nous allons montrer que X est affine.

Rappelons que

$$d.L_X Y = (X_d)^* Y - Y. \tag{1}$$

On a

$$\begin{aligned} d.L_X(\nabla_Y Z) &= (X_d)^*(\nabla_Y Z) - \nabla_Y Z \\ &= \nabla_{(X_d)^* Y}((X_d)^* Z) - \nabla_Y Z \\ &= \nabla_{(X_d)^* Y}((X_d)^* Z - Z) \\ &\quad + \nabla_{(X_d)^* Y} Z - \nabla_Y Z \\ &= \nabla_{(X_d)^* Y}(d.L_X Z) + \nabla_{d.L_X Y}(Z) \end{aligned}$$

par (1) et la R-linéarité de ∇.

Par (1) on a $d.(X_d)^* Y = d.Y$ et donc

$$d.L_X(\nabla_Y Z) = \nabla_{d.Y}(L_X Z) + \nabla_{d.L_X Y}(Z).$$

Ceci ayant lieu pour tout d de D on a bien

$$L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) = \nabla_{[X,Y]}(Z)$$

et X est bien un champ de vecteur affine.

c) Inversement, soit $X : D \rightarrow IsoM$ un champ de vecteurs affine. Montrons que pour tout d de D, X_d est un automorphisme affine, c'est-à-dire que

$$(X_D)^*(\nabla_Y Z) = \nabla_{(X_d)^* Y}((X_d)^* Z).$$

Par (1) le premier membre est

$$\nabla_Y Z + d.L_X(\nabla_Y Z)$$

De même le second membre est

$$\nabla_{Y + d.L_X Y}(Z + d.L_X Z)$$

$$= \nabla_Y Z + d.\nabla_Y(L_X Z) + d.\nabla_{[X,Y]} Z.$$

L'égalité à démontrer se réduit à la condition exprimant que X est affine. □

4 Actions d'un groupe microlinéaire.

4.1 Définition d'une action.

Soit G un groupe microlinéaire et M un objet microlinéaire. Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G.

Définition. *Une action à gauche (resp. à droite) de G sur M est un homomorphisme (resp. un antihomomorphisme) de G dans $Iso(M)$. Une action à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{G}$ sur M est un antihomomorphisme (resp. homomorphisme) de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{X}(M)$.*

Si α est une action à gauche de G sur M $\alpha(g)(x)$ s'écrira souvent $g * x$. Pour une action à droite β on écrira aussi $x * g$. Il y a évidemment une bijection entre actions à gauche et à droite de G sur M. A l'action à gauche (resp. à droite) α on associe l'action à droite (resp. à gauche) β donnée par $\beta(g) = \alpha(g^{-1})$. Dans la suite nous privilégions les actions à gauche en ne citant en principe pas les énoncés duaux.

Proposition 11. *Si $\alpha : G \to Iso(M)$ est une action à gauche de G sur M*

$$\mathcal{G} = T_e G \overset{T_e\alpha}{\to} T_{id_M}(IsoM) = \mathcal{X}(M)$$

est une action à gauche de $\mathcal{G}$ sur M.

Démonstration. Il suffit de calculer $T_e\alpha([A,B])$ pour $A, B \in \mathcal{G}$. Soient $d_1, d_2 \in D$.

$$\begin{aligned}(T_e\alpha([A,B]))(d_1.d_2) &= \alpha([A,B](d_1.d_2)) \\ &= \alpha(A(d_1).B(d_2).A(-d_1).A(-d_2)) \\ &= (T_e\alpha(A))(d_1) \circ (T_e\alpha(B))(d_2) \circ \\ &\quad (T_e\alpha(A))(-d_1) \circ (T_e\alpha(B))(-d_2) \\ &= -[T_e\alpha(A), T_e\alpha(B)](d_1.d_2).\end{aligned}$$

□

4.2 Adjoints d'une action

Proposition 12. *Une action à gauche de G sur $M, \alpha : G \to Iso(M)$, induit un homomorphisme.*

$$\bar{\alpha} : G \to Aut(\mathcal{X}(M))$$

de G dans le groupe des automorphismes d'algèbres de Lie donné par

$$\bar{\alpha}(g)(X)_d = \alpha(g) \circ X_d \circ \alpha(g^{-1})$$

Démonstration. Que $\bar{\alpha}$ décrive une action de G sur $\mathcal{X}(M)$, c'est-à-dire un homomorphisme de G dans $Iso(\mathcal{X}(M))$, est trivial. Il faut alors montrer que $\bar{\alpha}(g) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Pour montrer la linéarité de $\bar{\alpha}(g)$ il suffit de montrer son homogénéité et on a, pour $\lambda \in R$,

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha}(g)(\lambda X))_d &= \alpha(g) \circ (\lambda X)_d \circ \alpha(g^{-1}) \\ &= \alpha(g) \circ X_{\lambda d} \circ \alpha(g^{-1}) \\ &= (\bar{\alpha}(g)(X))_{\lambda d} \\ &= (\lambda.\bar{\alpha}(g)(X))_d. \end{aligned}$$

Montrons ensuite que $\bar{\alpha}(g)$ respecte le crochet de Lie. Soient $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ et $d_1, d_2 \in D$.

$$\begin{aligned} &(\bar{\alpha}(g)([X,Y]))_{d_1.d_2} \\ &\quad = \alpha(g) \circ Y_{-d_2} \circ X_{-d_1} \circ Y_{d_2} \circ X_{d_1} \circ \alpha(g^{-1}) \\ &\quad = (\alpha(g) \circ Y_{-d_2} \circ \alpha(g^{-1}) \circ (\alpha(g) \circ X_{-d_1} \circ \alpha(g^{-1})) \\ &\qquad \circ(\alpha(g) \circ Y_{d_2} \circ \alpha(g^{-1}) \circ (\alpha(g) \circ X_{d_1} \circ \alpha(g^{-1})) \\ &\quad = [\bar{\alpha}(g)(X), \bar{\alpha}(g)(Y)]_{d_1,d_2}. \end{aligned}$$

□

Proposition 13. *L'application*

$$\mathcal{G} = T_e G \overset{T_e\bar{\alpha}}{\to} T_{id_{\mathcal{X}(M)}}(Aut\mathcal{X}(M))$$

est un anti-homomorphisme d'algèbres de Lie.

Démonstration. Le calcul fait pour établir la proposition 11 se répète ici. □

Par la proposition 4, on a un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$T_{id_{\mathcal{X}(M)}}(Aut\mathcal{X}(M)) \overset{\lambda}{\to} Der(\mathcal{X}(M)).$$

Définition. *Soit α une action à gauche de G sur M. L'adjointe de α est l'anti-homomorphisme d'algèbres de Lie*

$$ad_\alpha = \lambda \circ T_e\bar{\alpha} : \mathcal{G} \to Der(\mathcal{X}(M)).$$

Proposition 14. *Pour tout A de $\mathcal{G}$ et pour tout X de $\mathcal{X}(M)$,*

$$ad_\alpha(A)(X) = [X, T_e\alpha(A)].$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} ad_\alpha(A)(X)_d &= \lambda(T_e\bar{\alpha}(A))(X)_d \\ &= \lambda(\bar{\alpha}\circ A)(X)_d. \end{aligned}$$

Par définition de λ :

$$(\bar{\alpha}\circ A)(d) = id_{\mathcal{X}(M)} + d.\lambda(\bar{\alpha}\circ A).$$

Donc (en utilisant le fait simple que pour deux champs de vecteurs X et Y quelconques $(X+Y)_d = X_d \circ Y_d$):

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(A(d))(X)_{d_1} &= X_{d_1}\circ d.\lambda(\bar{\alpha}\circ A)(X)_{d_1} \\ &= X_{d_1}\circ \lambda(\bar{\alpha}\circ A)(X)_{d.d_1}. \end{aligned} \tag{1}$$

D'autre part, par définition de $\bar{\alpha}$.

$$\bar{\alpha}(A(d))(X)_{d_1} = \alpha(A(d))\circ X_{d_1}\circ \alpha(A(-d)) \tag{2}$$

Il vient

$$\begin{aligned} ad_\alpha(A)(X)_{d.d_1} &= \lambda(\bar{\alpha}\circ A)(X)_{d.d_1} \\ &= X_{d_1}\circ \bar{\alpha}(A(d))(X)_{d_1} \quad (par(1)) \\ &= X_{d_1}\circ \alpha(A(d))\circ X_{d_1}\circ \alpha(A(-d))\ (par(2)) \\ &= [X, T_e\alpha(A)]_{d.d_1}, \end{aligned}$$

et la proposition est démontrée. □

Considérons par exemple l'action identique du groupe $Iso(M)$ sur M. L'homomorphisme $\bar{id} : IsoM \to Aut(\mathcal{X}(M))$ associe à φ l'automorphisme $\bar{id}(\varphi)$ décrit par :

$$\bar{id}(\varphi)(X)_d = \varphi\circ X_d\circ\varphi^{-1}.$$

On a donc

$$\bar{id}(\varphi)(X) = int(\varphi)\circ X$$

où $int(\varphi)$ désigne l'automorphisme intérieur de $Iso(M)$ associé à φ. Par définition de ad_{id} on a

$$\bar{id}(Y_d)(X) = X + d.ad_{id}(Y)(X)$$

et donc, par la proposition précédente, on a la relation infinitésimale entre automorphismes intérieurs et crochet de Lie :

Proposition 15. *Pour tout X et Y de $\mathcal{X}(M)$ et tout d de D,*

$$int(Y_d) \circ X = X + d.[X, Y].$$

□

Passons maintenant à la description de la représentation adjointe. Considérons l'action de G sur lui-même par automorphismes intérieurs

$$int : G \rightarrow AutG.$$

On désigne par $Ad(g) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ l'application $T_e(int(g))$. On a donc

$$Ad(g)(A)_d = g.A_d.g^{-1}.$$

Proposition 16. *L'application Ad est un homomorphisme de G dans le groupe $Aut\mathcal{G}$ des automorphismes de Lie de $\mathcal{G}$.*

Démonstration. Il s'agit de vérifications faciles. Montrons par exemple que $Ad(g)$ respecte le crochet de Lie :

$$\begin{aligned} Ad(g)([A, B])_{d_1.d_2} &= g.[A, B]_{d_1.d_2}.g^{-1} \\ &= g.A_{d_1}.g^{-1}g.B_{d_2}g^{-1}.g.A_{d_1}.g.B_{-d_2}g^{-1} \\ &= [Ad(g)(A), (Ad(g)(B)]_{d_1.d_2}. \end{aligned}$$

□

On a une autre description de Ad en terme de translation à droite. Soit $\alpha : G \rightarrow IsoG, \alpha(g)(h) = hg^{-1}$. Par la proposition 12 on a l'homomorphisme $\bar{\alpha} : G \rightarrow Aut(\mathcal{X}(G))$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(g)(X)_d(h) &= (\alpha(g) \circ X_d \circ \alpha(g^{-1}))(h) \\ &= X_d(hg).g^{-1}. \end{aligned}$$

Il est clair que si X est invariant à gauche $\bar{\alpha}(g)(X)$ l'est aussi. On a donc un homomorphisme que nous noterons encore $\bar{\alpha}$ de G dans $Aut\mathcal{G}$. Si $\bar{A}$ désigne le champ de $\mathcal{X}(G)$ associé à $A \in \mathcal{G}$, on a :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(g)(A)_d &= \bar{\alpha}(g)(\bar{A})_d(e) \\ &= \bar{A}_d(g).g^{-1} \\ &= g.A_d.g^{-1} \end{aligned}$$

et donc $\bar{\alpha}$ coïncide avec Ad.

Définition. *La représentation adjointe de $\mathcal{G}$ dans $Der\mathcal{G}$ est la composée*

$$ad = \lambda \circ T_e Ad.$$

Théorème 17. *La représentation adjointe est la représentation intérieure en ce sens que*

$$ad(A)(B) = [A, B].$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} ad(A)(B) &= \lambda(T_e Ad(A))(B) \\ &= \lambda(T_e\bar{\alpha}(A))(B) \\ &= [B, T_e\alpha(A)] \end{aligned}$$

par la proposition 9. Or

$$(T_e\alpha)(A)_d(g) = \alpha(A_d)(g) = g.A_{-d}$$

et donc

$$(T_e\alpha)(A) = -A.$$

Il vient donc

$$ad(A)(B) = [B, -A] = [A, B].$$

□

4.3 Représentation coadjointe.

Soit E un R-module et $\rho : G \to GL(E)$ un homomorphisme. On dit que ρ est une représentation linéaire de G dans E. On lui associe classiquement une représentation linéaire de G dans $E^* = \mathcal{L}(E, R)$, appelée la contragédiente de ρ, notée ρ^* et décrite, par

$$\rho^*(g)(\alpha)(v) = \alpha(\rho(g^{-1})(v))$$

pour tout α de E^* et v de E.

La contragédiente Ad^* de Ad est appelée la représentation coadjointe de G. On définit la représentation coadjointe de $\mathcal{G}$ par

$$ad^* = \lambda \circ T_e(Ad^*).$$

où λ est l'isomorphisme de $T_{id}(GL(\mathcal{G}^*))$ sur l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{G}^*, \mathcal{G}^*)$. Pour la facilité nous notons $< \alpha, v >$ pour $\alpha(v)$.

Proposition 18. *La représentation coadjointe ad^* de $\mathcal{G}$ est caractérisée par*

$$< ad^*(A)(\alpha), B >= - < \alpha, [A, B] >$$

pour A et B dans $\mathcal{G}$ et α dans $\mathcal{G}^*$.

Démonstration.

Comme

$$Ad^*(A_d) = id_{\mathcal{G}^*} + d.ad^*(A),$$

on a, pour tout d de D :

$$\begin{aligned} < \alpha + d \circ ad^*(A)(\alpha), B > &= Ad^*(A_d)(\alpha), B > \\ &=< \alpha, Ad(A_{-d})(B) > \\ &=< \alpha, B - d.ad(A)(B) > \\ &=< \alpha, B > -d. < \alpha, [A, B] > . \end{aligned}$$

Donc les coefficients de d sont égaux c'est-à-dire

$$< ad^*(A)(\alpha), B >= - < \alpha, [A, B] > .$$

□

5 Bibliographie

[K] A. KOCK. *Synthetic Differential Geometry.* LMS Lecture Notes Series 51, Cambridge University Press, 1981.
[K-N] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU. *Foundations of Differential Geometry.* Vol. II, Interscience, 1969.
[L] R. LAVENDHOMME. *Leçons de géométrie différentielle synthétique naïve.* Ciaco, Louvain-la-Neuve, 1987.
[L_2] R. LAVENDHOMME. *Objets de Lie.* Bull. Soc. Math. Belgique (*43* serie B) 83-112, (1991).
[M-R] I. MOERDIJK and G.E. REYES, *Models for Smooth Infinitesimal Analysis.* Springer, 1991.