

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

J. PENON

Logique de la géométrie algébrique

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 33, n° 3 (1992), p. 277-278

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_3_277_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Logique de la Géométrie Algébrique

J. Penon¹

ABSTRACT : Topoi of algebraic geometry do satisfy a stronger property than Kock's field's axiom.

Désignons par \mathcal{A} l'une des deux catégories suivantes :

- La catégorie des anneaux commutatifs unitaires,
- La catégorie des anneaux commutatifs unitaires de présentation finie,

et munissons \mathcal{A}^{op} d'une topologie sous-canonique (c.à.d. telle que tout foncteur représentable soit un faisceau).

Dans le topos \mathbf{E} des faisceaux sur le site \mathcal{A}^{op} il y a un objet anneau commutatif unitaire R canonique qui est tout simplement le foncteur d'oubli $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}ns$. De par la nature même de l'objet R on constate qu'étudier le topos \mathbf{E} revient, en grande partie, à étudier les propriétés de l'anneau R .

Lorsque la topologie sur \mathcal{A}^{op} est plus fine que la topologie de Zariski, on sait que R est (internement parlant) un anneau local c'est-à-dire qu'il satisfait les formules :

$$0 \neq 1$$

$$\forall x(x \text{ inversible} \vee 1 - x \text{ inversible})$$

où " x inversible" est une abréviation de la formule $\exists y(y.x = 1)$.

Kock a aussi montré (il y a quelques années) que lorsque dans le site \mathcal{A}^{op} la famille vide couvre l'objet initial, l'anneau R a une structure de corps, c'est-à-dire satisfait les formules :

¹Université de Paris 7

$$0 \neq 1$$

$$(K_1) \quad \forall x(x \neq 0 \Rightarrow x \text{ inversible}).$$

Lorsque la topologie sur \mathcal{A}^{op} est plus fine que celle de Zariski il a même montré un peu plus (intuitionnistement). L'anneau R satisfait, pour chaque entier $n \geq 1$:

$$(K_n) \quad \forall x_1 \dots \forall x_n [\neg(x_1 = 0 \wedge \dots \wedge x_n = 0) \Rightarrow (x_1 \text{ inversible} \vee \dots \vee x_n \text{ inversible})].$$

Dans cet exposé j'ai montré qu'en fait, pour $n = 1$, et sans condition supplémentaire sur la topologie de \mathcal{A}^{op} , R a une propriété un peu plus forte intuitionnistement. Il vérifie :

$$(Div) \quad \forall x \forall y [(x = 0 \Rightarrow y = 0) \Leftrightarrow \exists z (y = z.x)].$$

Moyennant la condition $0 \neq 1$, on retrouve le fait que R satisfait la formule (K) (en faisant $y = 1$).

Remarquons qu'en logique classique un anneau satisfaisant $0 \neq 1$ est un corps ssi il satisfait (Div) .

Plus généralement, pour tous entiers $n, m \geq 1$, l'anneau R satisfait :

$$(Div_{n,m}) \quad \forall x \in R^n \forall y \in R^m [(x = 0 \Rightarrow y = 0) \Leftrightarrow \exists M \in R^{mn} (y = Mx)].$$

Lorsque R est local l'axiome $(Div_{n,1})$ entraîne l'axiome (K_n) de Kock.

Remarque :

L'axiome $(Div_{n,m})$ établit une équivalence entre une formule typiquement non-cohérente ; " $x = 0 \Rightarrow y = 0$ " et une formule cohérente : " $\exists M \in R^{mn} (y = M.x)$ ". Il permet donc, comme beaucoup d'autre axiomes du même type, une traduction en langage cohérent de formules non-cohérentes.

Université de Paris 7
Département de mathématiques
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05